UVOD V GEOMETRIJSKO TOPOLOGIJO, 2. TEST
13.5.2011

TEORETIČNA NALOGA

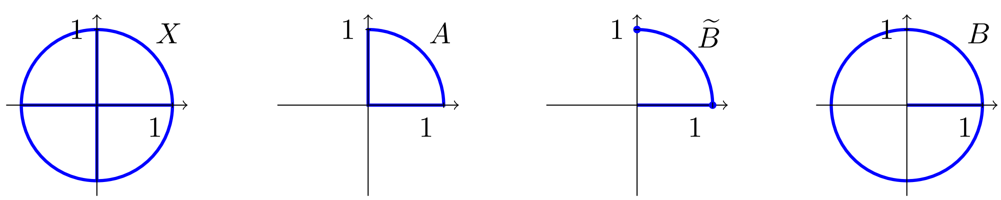
Pravilne so 1., 3., 4., 7., 9. in 10. trditev.

1. PROBLEMSKA NALOGA

Z indukcijo pokažimo, da je za $n \in \mathbb{N}$ prostor X_n absolutni ekstenzor za razred normalnih prostorov (AE($\mathcal{N}$)). Prostor X_1 je unija dveh premic $\mathbb{R} \times \{1\}$ in $\{0\} \times \mathbb{R}$, ki sta zaprta prostora v $\mathbb{R}^2$ in sta AE($\mathcal{N}$). Ker je presek $(\mathbb{R} \times \{1\}) \cap (\{0\} \times \mathbb{R}) = \{(0, 1)\}$ le točka, je zato tudi X_1 AE($\mathcal{N}$).
Denimo, da je X_n AE($\mathcal{N}$). Ker je $X_{n+1} = X_n \cup \mathbb{R} \times \{n+1\}$, X_n ter $\mathbb{R} \times \{n+1\}$ sta zaprta podprotora v $\mathbb{R}^2$ (saj sta produkta dveh zaprtih množic iz $\mathbb{R}$), X_n ter $\mathbb{R} \times \{n+1\}$ sta AE($\mathcal{N}$) in presek $X_n \cap \mathbb{R} \times \{n+1\} = \{(0, n+1)\}$ je le točka, je X_{n+1} tudi AE($\mathcal{N}$).
Za $n \in \mathbb{N}$ je tako X_n AE($\mathcal{N}$) in zaprt podprostor $\mathbb{R}^2$, zato je X_n retrakt ravnine $\mathbb{R}^2$.
Pokažimo še, da je X_∞ retrakt ravnine $\mathbb{R}^2$. Naj bo $A_0^+ = [0, \infty) \times (-\infty, 0]$ in za $n \in \mathbb{N}$ naj bo $A_n^+ = [0, \infty) \times [n-1, n]$. Rob $B_0^+ = ([0, \infty) \times \{0\}) \cup (\{0\} \times (-\infty, 0])$ množice A_0^+ je homeomorfen $\mathbb{R}$, zato je AE($\mathcal{N}$). Ker je B_0^+ zaprta podmnožica normalnega prostora A_0^+, obstaja retrakcija $r_0^+ \colon A_0^+ \to B_0^+$. Za $n \in \mathbb{N}$ je $B_n^+ = ([0, \infty) \times \{n - 1n\}) \cup (\{0\} \times [n-1, n])$ rob množice A_n^+ tudi homeomorfen $\mathbb{R}$, zato je AE($\mathcal{N}$). Ker je B_n^+ zaprta podmnožica normalnega prostora A_n^+, obstaja retrakcija $r_n^+ \colon A_n^+ \to B_n^+$. Naj bo $i \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ zrcaljenje preko y-osi. Za $A_n^- = i(A_n^+)$ in $B_n^- = i(B_n^+)$ je $r_n^-(x) = i(r_n^+(i(x)))$ retrakcija množice A_n^- na njen rob B_n^-.
Definirajmo retrakcijo $r \colon \mathbb{R}^2 \to X_\infty$ s predpsiom $r(x) = r_n^z(x)$, če je $x \in A_n^z$. Ker je $\{A_n^z \mid n \in \mathbb{N} \cup \{0\}, z \in \{+, -\}\}$ lokalno končno zaprto pokritje za $\mathbb{R}^2$ in se predpisi na presekih ujemajo ($A_n^z \cap A_m^w \subset X_\infty = \cup_{l=0}^{\infty} \cup_{t=\pm} B_l^t$), je r zvezna in je retrakcija.

2. PROBLEMSKA NALOGA

Prostor X je narisan spodaj levo. Vsaka orbita delovanja grupe G ima vsaj enega predstavnika v množici



$A = X \cap [0, \infty)^2$. Ker sta poljubni različni točki iz A v različnih orbitah, bo X/G homeomorfen prostoru A. Za preslikavo $f \colon X \to A$ definirano s predpisom $f(x, y) = (|x|, |y|)$ velja $f(x, y) = f(u, v)$ natanko tedaj, ko sta točki (x, y) in (u, v) v isti orbiti. Torej f porodi zvezno bijekcijo $\widetilde{f} \colon X/G \to A$. Ker $\widetilde{f}$ slika iz kompaktnega v Hausdorffov prostor, je homeomorfizem.
Vsaka orbita delovanja grupe H ima vsaj enega predstavnika v množici $\widetilde{B} = ([0, 1] \times \{0\}) \cup (S^1 \cap [0, \infty)^2)$. Edini različni točki v $\widetilde{B}$, ki sta v isti orbiti sta $(0, 1)$ in $(1, 0)$. Torej je prostor orbit X/H homeomorfen prostoru B, ki ga dobimo iz $\widetilde{B}$ tako, da "staknemo" točki $(0, 1)$ in $(1, 0)$. Definirajmo preslikavo $g \colon X \to B$ s predpisom

$$g(x, y) = \begin{cases} (|x|, 0), & (x, y) \in [0, 1] \times \{0\}, \\ (|y|, 0), & (x, y) \in \{0\} \times [0, 1], \\ (\cos(2\pi|x|), \sin(2\pi|x|)), & (x, y) \in S^1, xy \geq 0, \\ (\cos(2\pi|y|), \sin(2\pi|y|)), & (x, y) \in S^1, xy \leq 0. \end{cases}$$

Preslikava g je zvezna in naredi prave identifikacije, zato inducira zvezno bijekcijo $\widetilde{g} \colon X \to B$. Ker je $\widetilde{g}$ zaprta (slika iz kompaktnega v Hausdorffov prostor), je homeomorfizem.