Uvod v geometrijsko topologijo

Teoretična vprašanja

☐ Kvocientni prostor $X/\sim$ je diskreten natanko tedaj, ko je praslika vsake točke s kvocientno preslikavo odprta množica v X.

☐ Prostor $\mathbb{R}P^1$ lahko vložimo v $\mathbb{R}^2$.

☐ Če je $(C(X,Y), KOT)$ povezan prostor, je tudi Y povezan.

☐ Vsaka kvocientna preslikava je zaprta ali odprta preslikava.

☐ Množica $\{\sum_{k=0}^{n} a_k \cos^k x \mid n \in \mathbb{N}, a_k \in \mathbb{R}\} \subset (C([0, \frac{\pi}{4}]), KOT)$ je gosta.

☐ Zlepek separabilnih prostorov je separabilen prostor.

☐ Za podbazične množice v KOT velja $G(K,U) \cup G(L,U) = G(K \cup L, U)$.

☐ Če je X Hausdorffov prostor, je tudi kvocientni prostor $X/\sim$ Hausdorffov.

☐ Kvocientna preslikava $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\} \to \mathbb{R}P^n$ je odprta.

☐ Vsaka podalgebra $\mathcal{A} \subset C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, ki vsebuje kako potenco $x \mapsto x^n$, loči točke.

Problemski nalogi

1. problem

Naj bo $X = \mathbb{R} \times [-1, 1]$.

a. Na prostoru X podamo ekvivalenčno relacijo $(x, y) \sim (u, v)$ natanko tedaj, ko je $x - u \in \mathbb{Z}$ in $y = v$. Poišči podprostor evklidskega prostora, ki je homeomorfen kvocientu $X/\sim$.

b. Poišči podprostor evklidskega prostora, ki je homeomorfen kvocientu $X/\{0\} \times [-1, 1]$.

Rešitve oziroma odgovore utemelji.

2. problem

Naj bo X poljuben topološki prostor. Za $a > 0$ naj bo $Y_a = \{f \in C(X, \mathbb{R}) \mid |f(x)| \leqslant a \text{ za vse } x \in X\}$. Za $f \in C(X, \mathbb{R})$ naj bo

$$f_a(x) = \begin{cases} \min\{a, f(x)\}, & f(x) \geqslant 0, \\ \max\{-a, f(x)\}, & f(x) \leqslant 0. \end{cases}$$

a. Pokaži, da je $f_a \colon X \to \mathbb{R}$ zvezna.

b. Pokaži, da je $p_a \colon C(X, \mathbb{R}) \to Y_a$, definirana s predpisom $p_a(f) = f_a$, zvezna.

c. Pokaži, da je množica $\cup_{a>0} Y_a$ gosta v $C(X, \mathbb{R})$.

d. Pokaži, da preslikava p_a ni odprta.

(Vsi funkcijski prostori so opremljeni s kompaktno odprto topologijo.)