1. test iz Uvoda v geometrijsko topologijo

10. 4. 2018

Veliko uspeha!

1. naloga (5 točk)

Za vsako od spodnjih trditev v pripadajoči kvadratek čitljivo označi, če je trditev pravilna $\boxed{\text{P}}$ oziroma napačna $\boxed{\text{N}}$.

Če ne veš, pusti kvadratek prazen, ker se nepravilni odgovor šteje negativno!

- ☐ Podalgebra algebre $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$, ki vsebuje funkcijo $x \mapsto x^2$, loči točke.
- ☐ Množica polinomov je gosta v prostoru $\mathcal{C}([-1,1],\mathbb{R})$, ki je opremljem s topologijo konvergence po točkah.
- ☐ Kvocientni prostor s potmi povezanega prostora je s potmi povezan.
- ☐ Kvocientna preslikava $q \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}/(0,1)$ je odprta.
- ☐ Kvocientni prostor 2-števnega prostora je 2-števen prostor.
- ☐ Preslikava $f \colon X \to Y$ je kvocientna natanko tedaj, ko za vsako $Z \subset X$ velja, da je Z zaprta natanko tedaj, ko je $f(Z)$ zaprta.
- ☐ Naj bo $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zvezna in $\varepsilon > 0$. Tedaj obstaja polinom p, da je $|f(x) - p(x)| < \varepsilon$ za vse $x \in \mathbb{R}$.
- ☐ Topologija enakomerne konvergence na $\mathcal{C}([0,1),\mathbb{R})$ je strogo šibkejša od kompaktno odprte topologije.
- ☐ Vsaka grupa, ki je opremljena z diskretno topologijo, je topološka grupa.
- ☐ Topološka grupa G je T_2 natanko tedaj, ko obstaja $g \in G$, da je $\{g\}$ zaprta množica.

2. naloga (5 točk)

Prostor $\mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ opremimo s kompaktno odprto topologijo. Naj bo $A = \{f \in \mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \mid \text{obstaja } a \in \mathbb{R}, \text{ da je } \lim_{x\to\infty} f(x) = a\}$.

1. Ali je $A \subset \mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ odprta?
2. Kaj je zaprtje množice $A \subset \mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$?
3. Ali je $A \subset \mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ povezana s potmi?
4. Ali je preslikava $F \colon A \to \mathbb{R}$, podana s predpisom $F(f) = \lim_{x\to\infty} f(x)$, zvezna?
5. Ali je preslikava $F \colon A \to \mathbb{R}$, podana s predpisom $F(f) = \lim_{x\to\infty} f(x)$, odprta?

3. naloga (5 točk)

Naj bo $X = \big(\mathbb{R} \times \{0\}\big) \cup \big((-\infty,-1] \times [0,1]\big) \cup \big([1,\infty) \times [0,1]\big)$.

1. Naj bo $(x,y) \sim (x',y')$ natanko tedaj, ko je $(x,y) = (x',y')$ ali $(|x| = |x'| \geq 1$ in $y = y')$. Poišči podprostor evklidskega prostora, ki je homeomorfen $X/\sim$.
2. Naj bo $A = \big((-\infty,-2] \times [0,1]\big) \cup \big([2,\infty) \times [0,1]\big)$ Poišči podprostor evklidskega prostora, ki je homeomorfen X/A.