UVOD V GEOMETRIJSKO TOPOLOGIJO: 2. TEST
22. 5. 2015

1. NALOGA (5 točk)

a. Konstruiraj eksplicitno retrakcijo prebodene ravnine $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ na podprostor

$$\big\{(x,y) \,|\, x^2+y^2=1\big\} \cup \{(x,0) \,|\, |x| \geqslant 1\} \cup \{(0,y) \,|\, |y| \geqslant 1\}\,.$$

b. Podan je prostor $B = [0,\infty)\times\{0\} \,\cup\, \{0\}\times[0,\infty) \subset \mathbb{R}^2$.
Ugotovi, za katera realna števila $t \in \mathbb{R}$ je množica

$$B \cup \big\{(x,y) \,|(x-t)^2+(y-1)^2 \leqslant 1\big\}$$

retrakt ravnine $\mathbb{R}^2$ in za katera ni: obravnavaj vsa realna števila t in s kratkimi utemeljitvami določi, za katera retrakcija obstaja in za katera ne obstaja.

2. NALOGA (5 točk)

Dokaži ali ovrzi:

a. Vsaka preslikava $\big\{(x,y) \,|\, (x-1)^2+y^2=1 \text{ ali } (x+1)^2+y^2=1\big\}\circlearrowleft$ ima vsaj eno negibno točko.
b. Vsak homeomorfizem $\big\{(x,y) \,|\, (x-1)^2+y^2=1 \text{ ali } (x+1)^2+y^2=1\big\}\circlearrowleft$ ima vsaj eno negibno točko.
c. Vsaka preslikava $[-1,1]\times\{-1,1\} \,\cup\, \big(\{-1,1\}\cup[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]\big)\times[-1,1]\circlearrowleft$ ima vsaj eno negibno točko.
d. Vsak homeomorfizem $[-1,1]\times\{-1,1\} \,\cup\, \big(\{-1,1\}\cup[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]\big)\times[-1,1]\circlearrowleft$ ima vsaj eno negibno točko.
e. Vsaka preslikava $[-1,1]\times\{-1,1\} \,\cup\, \big(\{-1,1\}\cup[-\frac{1}{3},-\frac{1}{6}]\cup[\frac{1}{6},\frac{1}{3}]\big)\times[-1,1]\circlearrowleft$ ima vsaj eno negibno točko.
f. Vsak homeomorfizem $[-1,1]\times\{-1,1\} \,\cup\, \big(\{-1,1\}\cup[-\frac{1}{3},-\frac{1}{6}]\cup[\frac{1}{6},\frac{1}{3}]\big)\times[-1,1]\circlearrowleft$ ima vsaj eno negibno točko.

TEORETIČNA NALOGA (5 točk)

Za vsako od spodnjih trditev v pripadajoči kvadratek čitljivo označi, če je trditev pravilna (**P**) oziroma napačna (**N**). Če ne veš, pusti kvadratek prazen, ker se nepravilni odgovor šteje negativno!

- ☐ Suspenzija povezanega prostora je povezan prostor.
- ☐ Vsako zvezno preslikavo $\mathbb{S}^1 \to \mathbb{B}^2$ je mogoče razširiti do zvezne preslikave $\mathbb{B}^2 \to \mathbb{B}^2$.
- ☐ Točka $(0,0,\ldots,0) \in \mathbb{R}^n$ je negibna točka vsake zvezne preslikave $\mathbb{B}^n \to \mathbb{B}^n$.
- ☐ Za vsako zvezno preslikavo $f\colon \mathbb{B}^2 \to \mathbb{S}^1$ obstaja taka točka $\zeta \in \mathbb{S}^1$, za katero je $f(\zeta) = \zeta$.
- ☐ Obstaja zvezna bijekcija $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$.
- ☐ Vsak retrakt ravnine je absolutni ekstenzor za normalne prostore.
- ☐ Če je A omejena podmnožica prostora $\mathbb{R}^3$ in obstaja retrakcija $\mathbb{R}^3 \to A$, je A kompaktna.
- ☐ Retrakt nepovezanega prostora je nepovezan prostor.
- ☐ Če za vsak par nepraznih disjunktnih zaprtih podmnožic A, B v prostoru X obstaja zvezna funkcija $\varphi\colon X \to [0,1]$, za katero velja $\varphi^{-1}(0) = A$ in $\varphi^{-1}(1) = B$, je $X \in T_4$.
- ☐ Ne obstaja retrakcija $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{B}^2$.