2. test iz Uvoda v geometrijsko topologijo

27. 5. 2016

Veliko uspeha!

1. naloga (5 točk)

Za vsako od spodnjih trditev v pripadajoči kvadratek čitljivo označi, če je trditev pravilna $\boxed{\text{P}}$ oziroma napačna $\boxed{\text{N}}$.

Če ne veš, pusti kvadratek prazen, ker se nepravilni odgovor šteje negativno!

- ☐ Prostor $(0, \infty)$ je retrakt evklidske premice $\mathbb{R}$.
- ☐ Prostor $(\mathbb{B}^2 \times \{0\}) \cup (\{(0,0)\} \times [-1,1])$ ima lastnost negibne točke.
- ☐ S potmi povezan podprostor absolutnega ekstenzorja, je absolutni ekstenzor.
- ☐ Za poljubni različni točki T_4 prostora X obstaja zvezna funkcija $X \to \mathbb{S}^1$, ki ju loči.
- ☐ Če je stožec $CX = X \times I / X \times \{1\}$ povezan s potmi, je X povezan s potmi.
- ☐ Zvezno preslikavo $(-\infty, 0] \to \mathbb{R}^2$ je mogoče razširiti do zvezne preslikave $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$.
- ☐ Naj bo $A \subset \mathbb{R}^2$, $B \subset \mathbb{R}^3$. Če sta A in B homeomorfna, ima B prazno notranjost v $\mathbb{R}^3$.
- ☐ Prostor $\big([0,\infty) \times (0,\infty)\big) \cup \big([t,\infty) \times \{0\}\big)$ je mnogoterost natanko tedaj, ko je $t = 0$.
- ☐ Projektivni prostor $\mathbb{R}P^n$, ki je kvocient prostora $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$, je nekompakten.
- ☐ Če je $X \subset \mathbb{R}^2$ zaprta množica in je X mnogoterost, je X retrakt ravnine $\mathbb{R}^2$.

2. naloga (5 točk)

Preslikava $f\colon X \to Y$ je *univerzalna* za topološka prostora X in Y, če za vsako zvezno preslikavo $g\colon X \to Y$, obstaja $x \in X$, da je $f(x) = g(x)$.

1. Pokaži, da če obstaja univerzalna $f\colon X \to Y$, je f surjektivna in prostor Y ima lastnost negibne točke.
2. Za spodnje primere ugotovi, ali obstaja univerzalna preslikava f (preslikavo f zapiši in argumentiraj, da je univerzalna, ali pa argumentiraj, zakaj ne obstaja):
   - $X = \mathbb{B}^2$, $Y = \mathbb{B}^2$,
   - $X = \mathbb{B}^2$, $Y = [-1,1]$,
   - $X = \mathbb{R}$, $Y = \mathbb{S}^1$,
   - $X = [0,1]$, $Y = ([0,1] \times \{0\}) \cup (\{0\} \times [0,1]) \cup (\cup_{n=1}^{\infty} \{\frac{1}{n}\} \times [0,1])$.

3. naloga (5 točk)

Naj bo $X = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 - z^2 = 1, z \geq 0\} \cup (\mathbb{R}^2 \times \{0\})$ in $Y = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 - z^2 = 1, z \geq 0\} \cup \{(x,y,0) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \geq 1\}$.

1. Ali je kateri od X in Y retrakt prostora $\mathbb{R}^3$?
2. Ali je kateri od X in Y mnogoterost?

Vse odgovore utemelji!