2. izpit iz Uvoda iz geometrijske topologije

19. 8. 2020

Veliko uspeha!

1. naloga (20 točk)

Za vsako od spodnjih trditev v pripadajoči kvadratek čitljivo označi, če je trditev pravilna P oziroma napačna N.

Če ne veš, pusti kvadratek prazen, ker se nepravilni odgovor šteje negativno!

- [ ] Projektivni prostor $\mathbb{R}P^1$ lahko vložimo v evklidsko ravnino $\mathbb{R}^2$.
- [ ] 1-števnost je deljiva topološka lastnost.
- [ ] Zlepek dveh kompaktnih prostorov je kompakten prostor.
- [ ] Kvocientna projekcija $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}P^n$ je odprta preslikava.
- [ ] Prostor $(\mathbb{R} \times \{(0,0)\}) \cup (\{0\} \times \mathbb{R} \times \{0\}) \cup (\{(0,0)\} \times \mathbb{R})$ je absolutni ekstenzor za razred normalnih prostorov.
- [ ] Naj bo $n \leq m$, $U \subset \mathbb{R}^n$ odprta podmnožica in $f\colon U \to \mathbb{R}^m$ zvezna injektivna preslikava. tedaj je f odprta vložitev.
- [ ] Če sta M in N kompaktni ploskvi je $\chi(M \# N) = \chi(M) + \chi(N)$.
- [ ] Če je $f\colon \mathbb{B}^3 \to \mathbb{R}^3$ zvezna preslikava, ima $\mathbb{R}^3 \setminus f(\mathbb{B}^3)$ natanko eno neomejeno komponento.
- [ ] Naj bo M mnogoterost in $K \subset M$ končna množica. Tedaj je tudi $M \setminus K$ mnogoterost.
- [ ] Vsak povezan podprostor kontraktibilnega prostora je kontraktibilen.

2. naloga (20 točk)

Naj bo $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{Z} \text{ ali } y \in \mathbb{Z}\}$ in $G = \mathbb{Z}^2$. Naj grupa G deluje na X s predpisom $(n, m)\cdot(x, y) = (x+2n, y+m)$. Poišči podprostor kakega evklidskega prostora, ki je homeomorfen prostoru orbit X/G. Odgovor dobro utemelji!

3. naloga (5+15 točk)

Naj bo $X = (\mathbb{R} \times \{0\}) \cup \{(x, x^2) \mid x \in \mathbb{R}\}$ in naj bo $\underline{a} = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ strogo naraščajoče zaporedje za katerega je $a_1 > 0$.

1. Pokaži, da je X retrakt evklidske ravnine $\mathbb{R}^2$.
2. Poišči potreben in zadosten pogoj na zaporedje $\underline{a}$, da je prostor $X_{\underline{a}} = X \cup (\cup_{n=1}^{\infty} \{a_n\} \times [0, 1])$ retrakt evklidske ravnine $\mathbb{R}^2$.

Vse odgovore dobro utemelji!

4. naloga (20 točk)

Naj bo $f\colon [-1, 1] \to \mathbb{R}$ zvezna funkcija. Naj bo $\Gamma_f \subset \mathbb{R}^2$ graf funkcije f, $X = \{(x, y) \in [-1, 1] \times \mathbb{R} \mid f(x) - 1 \leq y \leq f(x) + 1\}$ in $Y = (X \times \{0\}) \cup (\Gamma_f \times [0, 1])$.

1. Pokaži, da je X mnogoterost.
2. Pokaži, da Y ni mnogoterost.
3. Pokaži, da ima Y lastnost negibne točke.

Vse odgovore dobro utemelji!

5. naloga (20 točk)

1. Naj bo $\mathbb{T}$ torus in $\mathbb{P}$ projektivna ravnina. Poišči vse pare kompaktnih ploskev X, Y za katere velja
$$X\#3\mathbb{T} \approx Y\#\mathbb{P}, \quad X\#Y\#\mathbb{T} \approx 2\mathbb{T}\#3\mathbb{P}.$$
2. Poišči vse $x \in \{a, a^{-1}, b, b^{-1}, c, c^{-1}, d, d^{-1}\}$, da beseda $abxa^{-1}cd^{-1}$ predstavlja orientabilno ploskev. Katere so te orientabilne ploskve?