UVOD V GEOMETRIJSKO TOPOLOGIJO: 1. TEST
3. 4. 2015

1. NALOGA (5 točk)

Na množici X zvezno odvedljivih preslikav $[0,1] \to \mathbb{R}$ sta podani metriki d_0 in d_1:

$$d_0(f,g) = \sup\left\{|f(x)-g(x)| \;\middle|\; x \in [0,1]\right\},$$
$$d_1(f,g) = d_0(f,g) + d_0(f',g').$$

a. Obravnavaj konvergenco zaporedja $f_n(x) = \frac{1}{n}\sin(n^2 x)$ glede na d_0 in d_1.

b. Dokaži, da je preslikava $\Phi\colon (X,d_0) \to (X,d_1)$, podana s predpisom

$$\Phi(f)(x) = \int_0^x f(\xi)\mathrm{d}\xi,$$

zvezna.

c. Dokaži, da je množica vseh polinomov gosta v (X,d_1).

2. NALOGA (5 točk)

Na ravnini $\mathbb{R}^2$ je podana naslednja ekvivalenčna relacija:

$$(\star) \qquad (x,y) \sim (u,v) \iff (x,y) = (u,v) \text{ ali } \big(x = u = 0 \text{ in } \{y,v\} \in [-1,1]\big).$$

a. Naj bo $K = [-1,1] \times [-1,1]$. Poišči primeren podprostor kakega evklidskega prostora $\mathbb{R}^n$, ki je homeomorfen kvocientnemu prostoru prostora K po zožitvi relacije $(\star)$.

b. Poišči primeren podprostor kakega evklidskega prostora $\mathbb{R}^n$, ki je homeomorfen kvocientnemu prostoru ravnine $\mathbb{R}^2$ po relaciji $(\star)$.

c. (*) Naj bo $X = (\mathbb{R} \setminus \{0\} \times \mathbb{R}) \cup (\{0\} \times [-1,1])$. Poišči primeren podprostor kakega evklidskega prostora $\mathbb{R}^n$, ki je homeomorfen kvocientnemu prostoru prostora X po zožitvi relacije $(\star)$.

Rešitve oziroma odgovore utemelji.

TEORETIČNA NALOGA (5 točk)

Za vsako od spodnjih trditev v pripadajoči kvadratek čitljivo označi, če je trditev pravilna (**P**) oziroma napačna (**N**). Če ne veš, pusti kvadratek prazen, ker se nepravilni odgovor šteje negativno!

- ☐ Naj bo $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zvezna funkcija. Tedaj obstaja tak polinom p, da velja $|f(x) - p(x)| < 12$ za vsa realna števila $x \in [-12,12]$.
- ☐ Množice $G(K,V) = \{f \in C(X,Y) \mid f(K) \subset V\}$, kjer je K kompaktna podmnožica v X in V odprta podmnožica v Y, tvorijo podbazo kompaktno odprte topologije na $C(X,Y)$.
- ☐ Če je X kompakten topološki prostor, Y pa metrični prostor, je topologija, ki jo porodi metrika enakomerne konvergence na $C(X,Y)$, strogo finejša od kompaktno odprte topologije.
- ☐ Kvocientni prostor $\mathbb{R}/\big((-\infty,-1] \cup [1,\infty)\big)$ je homeomorfen intervalu $[-1,1]$.
- ☐ Naj bo $\sim$ ekvivalenčna relacija na prostoru X. Kvocientni prostor $X/{\sim}$ je diskreten natanko tedaj, ko so ekvivalenčni razredi odprti v X.
- ☐ Vsaka zvezna surjekcija iz Hausdorffovega v metrični prostor je kvocientna.
- ☐ Kvocientni prostor kompaktnega prostora je kompakten.
- ☐ Naj topološka grupa G deluje na prostoru X. Kvocientna projekcija $X \to X/G$ je vedno odprta.
- ☐ Kvocientni prostor nepovezanega prostora je nepovezan.
- ☐ Naj bo $q\colon X \to Y$ kvocientna preslikava. Množica $A \subset X$ je nasičena glede na q, če velja $A = q^{-1}(q(A))$.