UVOD V GEOMETRIJSKO TOPOLOGIJO, 1. TEST
1.4.2011

TEORETIČNA NALOGA

Pravilne so 1., 2., 6., 7., in 10. trditev.

1. PROBLEMSKA NALOGA

a. (4 točke) Kvocientni prostor X/A je homeomorfen odprtemu disku $Y = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$. Definirajmo preslikavo $f\colon X \to Y$ s predpisom

$$f(x,y) = \begin{cases} (0,0), & \|(x,y)\| \geq 2, \\ \frac{2-\|(x,y)\|}{\|(x,y)\|}(x,y), & \|(x,y)\| \leq 2. \end{cases}$$

Preslikava f je podana z dvema zveznima predpisoma na zaprtih množicah, ki se na preseku ujemata, zato je f zvezna. Ker je $f^{-1}(0,0) = A$ in $f^{-1}(u,v) = \{\frac{2-\|(u,v)\|}{\|(u,v)\|}(u,v)\}$ za $(u,y) \neq (0,0)$, preslikava f naredi enake identifikacije kot kvocientna preslikava $q\colon X \to X/A$. Torej obstaja zvezna bijekcija $\bar{f}\colon X/A \to Y$. Pokažimo še, da je f zaprta. (Preslikava f nikakor ne slika iz kompaktnega prostora.) Naj bo $X_1 = \{(x,y) \in X \mid \|(x,y)\| \geq \frac{5}{2}\}$, $X_2 = \{(x,y) \in X \mid \frac{3}{2} \leq \|(x,y)\| \leq \frac{5}{2}\}$ in $X_3 = \{(x,y) \in X \mid \|(x,y)\| \leq \frac{3}{2}\}$. Tedaj je $f_1 = f|_{X_1}\colon X_1 \to \{(0,0)\}$ zaprta, $f_2 = f|_{X_2}\colon X_2 \to Y$ je zaprta (saj slika iz kompaktnega v Hausdorffov prostor) in $f_3 = f|_{X_3}\colon X_3 \to \{(x,y) \mid \|(x,y)\| \geq \frac{1}{2}\}$ je tudi zaprta (saj je homeomorfizem). Ker preslikavi f_1 in f_3 slikata v zaprt podprostor prostora Y, sta zaprti tudi kot preslikavi v Y. Naj bo $A \subset X$ zaprta in naj bo $A_i = A \cap X_i$. Tedaj je $f(A) = f_1(A_1) \cup f_2(A_2) \cup f_3(A_3)$ zaprta v Y.

b. (1 točka) Če bi lahko kvocient X/B vložili v evklidski prostor, bi podedoval separacijsko lastnost T_1. Za točko $q(b) \in X/B$, kjer je $b \in B$, pa množica $q^{-1}(q(b)) = B$ ni zaprta. Torej po definiciji kvocientne topologije, množica $\{q(b)\}$ ni zaprta v X/B. Se pravi, da X/B ne zadošča aksiomu T_1.

2. PROBLEMSKA NALOGA

a. Pokažimo, da je X podalgebra v $C([0,1],\mathbb{R})$, ki vsebuje konstante in loči točke. Potem je po Stone-Weierstrassovem izreku, X gosta v $C([0,1],\mathbb{R})$. Naj bodo $f,g \in X$ in $\lambda \in \mathbb{R}$. Tedaj so tudi $f+g$, $f \cdot g$ in λf odvedljive na $(0,1)$ in velja $\lim_{x\downarrow 0}(f+g)'(x) = \lim_{x\downarrow 0} f'(x) + \lim_{x\downarrow 0} f'(x) = 0$, $\lim_{x\downarrow 0}(f \cdot g)'(x) = (\lim_{x\downarrow 0} f'(x))g(0) + f(0)(\lim_{x\downarrow 0} f'(x)) = 0$ in $\lim_{x\downarrow 0}(\lambda f)'(x) = \lambda \lim_{x\downarrow 0} f'(x) = 0$. Enak izračun pri $x = 1$ pokaže, da so $f+g$, $f \cdot g$ in λf v X. Torej je X podalgebra. Odvodi konstant so povsod nič, zato X vsebuje vse konstante. Ker je $x \mapsto \sin \frac{\pi x}{2}$ v X in je injektivna, X loči točke.

b. Naj bo $f(x) = 1 - 2x$, $K = \{0,1\}$ in $\varepsilon = 1$. Za $g \in \langle f, K, \varepsilon \rangle$ je $g(0) > 0$ in $g(1) < 0$. Če je g odvedljiva na $(0,1)$, po Lagrangeovem izreku obstaja $\xi \in (0,1)$, da je $g(1) - g(0) = g'(\xi)(1-0)$. Torej $g'(\xi) < 0$, zato je $\langle f, K, \varepsilon \rangle \cap Y = \emptyset$. Se pravi, da Y ni gosta v $C([0,1],\mathbb{R})$.