Uvod v geometrijsko topologijo

Teoretična vprašanja

Če je množica gosta v prostoru $(C(X,Y), KOT)$, je gosta tudi v $(C(X,Y), TKT)$.

Projektivni prostor $\mathbb{R}P^1$ je homeomorfen krožnici S^1.

Če je kvocient X/A kompakten, je $A \subset X$ zaprta množica.

Za kvocientno preslikavo $q\colon X \to Y$ velja, da je $A \subset X$ zaprta natanko tedaj, ko je $q(A)$ zaprta.

Množica vseh pozitivnih funkcij je odprta v $(C([0,1],\mathbb{R}), TKT)$.

Naj grupa G deluje na topološki prostor X. Tedaj je kvocientna preslikava $q\colon X \to X/G$ odprta preslikava.

Prostor $(C(X,Y), KOT)$ je Hausdorffov natanko tedaj, ko je Y Hausdorffov.

Če je $f\colon A \to Y$ poljubna zvezna in Y povezan, je zlepek $X \cup_f Y$ povezan.

Kvocientna preslikava $q : X \to X/A$ je odprta natanko tedaj, ko je $A \subset X$ odprta.

Vsaka podalgebra $\mathcal{A} \subset C([0,1],\mathbb{R})$, ki vsebuje funkcijo $x \mapsto \sin(x)$, loči točke.

Problemski nalogi

1. problem

Naj bo $X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 < x^2 + y^2 < 9\}$, $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 4 \leq x^2 + y^2 < 9\}$ in $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 4 < x^2 + y^2 < 9\}$.

a. Poišči podprostor evklidskega prostora, ki je homeomorfen kvocientu X/A.

b. Pokaži, da kvocienta X/B ni možno vložiti v noben evklidski prostor.

Rešitve oziroma odgovore utemelji.

2. problem

Prostor zveznih funkcij $C([0,1],\mathbb{R})$ opremimo s kompaktno odprto topologijo. Naj bo $X \subset C([0,1],\mathbb{R})$ množica vseh funkcij f, ki so odvedljive na $(0,1)$ in velja $\lim_{x\downarrow 0} f'(x) = \lim_{x\uparrow 1} f'(x) = 0$. Naj bo $Y = \{f \in X \mid f'(x) \geq 0 \text{ za vse } x \in (0,1)\}$.

a. Pokaži, da je X gosta množica v $C([0,1],\mathbb{R})$.

b. Pokaži, da Y ni gosta množica v $C([0,1],\mathbb{R})$.