2. izpit iz Uvoda v geometrijsko topologijo

22. 8. 2018

1. naloga (10 točk)

Za vsako od spodnjih trditev v pripadajoči kvadratek čitljivo označi, če je trditev pravilna $\boxed{\text{P}}$ oz. napačna $\boxed{\text{N}}$. Če ne veš, pusti kvadratek prazen, ker se nepravilni odgovor šteje negativno!

- Prostor $\mathcal{C}(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \mathbb{R})$, opremljen s topologijo konvergence po točkah, je nepovezan.
- Topologija enakomerne konvergence na $\mathcal{C}((-1,1), \mathbb{R})$ je strogo močnejša od kompaktno odprte topologije.
- Preslikava $q\colon X \to Y$ je kvocientna natanko tedaj, ko velja: $U \subseteq X$ je odprta natanko tedaj, ko je $q(U)$ odprta.
- Preslikava $(0,1) \times (0,1) \to \mathbb{R}^2$, podana s predpisom $(x,y) \mapsto (1 - e^x, \ln y)$, je odprta.
- Če je $A \subset X$ zaprta, je kvocientna preslikava $q\colon X \to X/A$ zaprta.
- Kvocientni prostor 2-števnega prostora je 2-števen prostor.
- Prostor $([-1,1] \times \{0\}) \cup (\{-1,1\} \times [-1,1])$ ima lastnost negibne točke.
- Vsaka mnogoterost je lokalno povezana s potmi.
- Ploskev, ki jo predstavlja beseda $abca^{-1}b^{-1}dcd$, je povezana vsota dveh torusov.
- Če je $A \subset \mathbb{S}^2$ odprta, je A mnogoterost.

2. naloga (20 točk)

Naj bo X poljuben topološki prostor. Prostora $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ in $\mathcal{C}(X, (-2,2))$ opremimo s kompaktno odprto topologijo. Za $f \in \mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ naj bo

$$\widetilde{f}(x) = \begin{cases} \min\{1, f(x)\}, & f(x) \geq 0, \\ \max\{-1, f(x)\}, & f(x) < 0. \end{cases}$$

1. Pokaži, da je za vsak $f \in \mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ preslikava $\widetilde{f}\colon X \to (-2,2)$ zvezna.
2. Pokaži, da je $F\colon \mathcal{C}(X, \mathbb{R}) \to \mathcal{C}(X, (-2,2))$, definirana s predpisom $F(f) = \widetilde{f}$, zvezna.
3. Pokaži, da $\{f \in \mathcal{C}(X, \mathbb{R}) \mid f(X) \subset (-2,2)\}$ ni retrakt prostora $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$.

3. naloga (20 točk)

Naj bo $X = \{(x,y,z) \in [-1,1]^3 \mid xy = 0\}$ in $G = \mathbb{Z}$.

1. Poišči podprostor evklidskega prostora, ki je homeomorfen kvocientu X/G, kjer grupa G deluje na X s predpisom $n \cdot (x,y,z) = ((-1)^n x, (-1)^n y, z)$.
2. Ali je X mnogoterost?

4. naloga (20 točk)

Naj bo $\mathbf{T}$ torus in $\mathbf{M}$ Möbiusov trak. Poišči vse trojice kompaktnih ploskev X, Y in Z, za katere velja $X \# Y \# Z \approx \mathbf{M} \# 2\mathbf{T}$, $X \# Y \approx Z \# 2\mathbf{T}$ in $X \# Z \approx Y \# \mathbf{T}$. Odgovor utemelji!