3. izpit iz Uvoda iz geometrijske topologije

10. 9. 2019

Veliko uspeha!

1. naloga (10 točk)

Za vsako od spodnjih trditev v pripadajoči kvadratek čitljivo označi, če je trditev pravilna $\boxed{\text{P}}$ oziroma napačna $\boxed{\text{N}}$.

Če ne veš, pusti kvadratek prazen, ker se nepravilni odgovor šteje negativno!

- ☐ Če je množica gosta v prostoru $(\mathcal{C}(X,Y), KOT)$, je gosta tudi v $(\mathcal{C}(X,Y), TKT)$.
- ☐ Vsaka mnogoterost je lokalno povezana.
- ☐ Za vsako vložitev $f\colon \mathbb{B}^2 \to \mathbb{R}^3$ je komplement $\mathbb{R}^3 \setminus f(\mathbb{B}^2)$ povezan.
- ☐ Ploskev, ki jo predstavlja beseda $abcda^{-1}b^{-1}c^{-1}d^{-1}$, je povezana vsota dveh torusov.
- ☐ Kvocientni prostor 1-števnega prostora je 1-števen.
- ☐ Zvezna injektivna preslikava $f\colon (-1,1) \to \mathbb{R}^2$ je odprta preslikava.
- ☐ Naj grupa G deluje na topološki prostor X. Tedaj je kvocientna preslikava $q\colon X \to X/G$ zaprta preslikava.
- ☐ Če je X retrakt krogle $\mathbb{B}^3$, ima X lastnost negibne točke.
- ☐ Vsak neprazen povezan podprostor evklidske premice $\mathbb{R}$ je absolutni ekstenzor za razred normalnih prostorov.
- ☐ Naj bo $A \subset \mathbb{R}^2$, $B \subset \mathbb{R}^3$. Če sta A in B homeomorfna, ima B prazno notranjost v $\mathbb{R}^3$.

2. naloga (20 točk)

Naj bo X prostor zveznih funkcij $\mathcal{C}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ opremljen s kompaktno odprto topologijo. Naj bo $A = \{f \in X \mid f(\mathbb{R}^2) \subset \mathbb{R} \times \{0\}\}$.

1. Ali je množica A odprta ali zaprta v X?
2. Ali je A retrakt prostora X?

Vse odgovore utemelji!

3. naloga (20 točk)

Naj bo $X = \mathbb{S}^1 \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 0\}$, $G = \mathbb{S}^0 \times \mathbb{S}^0$ in $H = \mathbb{Z}$. Naj bo $r\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ podana s predpisom $r(x,y) = (y,-x)$. Grupa G deluje na X s predpisom $(s,t)(x,y) = (sx, ty)$, grupa H pa deluje s predpisom $t(x,y) = r^t(x,y)$. Poišči podprostora ravnine, ki sta homeomorfna prostoroma orbit X/G in X/H. Odgovora utemelji!

4. naloga (20 točk)

Naj bo $a \in \mathbb{R}$ in naj bo $X_a = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = x^2 + y^2\} \cup (\mathbb{B}^2 \times \{a\})$

1. Poišči potreben in zadosten pogoj na a, da bo X_a absolutni ekstenzor za razred normalnih prostorov.
2. Poišči potreben in zadosten pogoj na a, da bo X_a mnogoterost.

Vse odgovore utemelji!