1. izpit iz Uvoda iz geometrijske topologije

13. 6. 2019

Veliko uspeha!

1. naloga (10 točk)

Za vsako od spodnjih trditev v pripadajoči kvadratek čitljivo označi, če je trditev pravilna $\boxed{\text{P}}$ oziroma napačna $\boxed{\text{N}}$.

Če ne veš, pusti kvadratek prazen, ker se nepravilni odgovor šteje negativno!

- ☐ Za vsako zvezno funkcijo $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ obstaja polinom p, da je $|f(x) - p(x)| < \varepsilon$ za vse $x \in [0,1]$ in vse $\varepsilon > 0$.
- ☐ Če za ploskev X velja $X \# \mathbb{S}^2 \approx \mathbb{S}^2$, je $X \approx \mathbb{S}^2$.
- ☐ Naj bo $\emptyset \neq X \subsetneq \mathbb{S}^1$. Potem je X absolutni ekstenzor za normalne prostore natanko tedaj, ko je X povezan.
- ☐ Če za povezano ploskev X velja $\chi(X) \geq 2$, potem je rob $\partial X = \emptyset$.
- ☐ Če je X n-mnogoterost in $\partial X \neq \emptyset$, je ∂X $(n-1)$-mnogoterost.
- ☐ Vsaka zvezna preslikava $f\colon [0,1) \to [0,1)$ ima negibno točko.
- ☐ Vsako zvezno preslikavo $\mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ je moč razširiti do zvezne preslikave $\mathbb{B}^2 \to \mathbb{S}^1$.
- ☐ Naj bo $q\colon (0,\infty) \to (0,\infty)/(0,2]$ kvocientna preslikava. Tedaj je $q((1,3])$ zaprta množica.
- ☐ Za vsak prostor X je prostor zveznih funkcij $\mathcal{C}(X,\mathbb{R})$ opremljen s kompaktno-odprto topologijo topološka algebra.
- ☐ Kvocient povezanega prostora je povezan prostor.

2. naloga

Prostor zveznih funkcij $X = \mathcal{C}([0,1),\mathbb{R})$ opremimo s kompaktno-odprto topologijo. Naj bo $A = \{f \in X \mid \exists x_0 \in [0,1),\ \text{da je } f(x) = 0 \text{ za vse } x > x_0\}$.

1. Ali je množica A gosta v X?
2. Določi notranjost in zaprtje množice A.
3. Ali je množica A povezana?
4. (5 bonus točk) Ali je množica $A^C = X \setminus A$ povezana?

3. naloga

Naj bo $X = (\mathbb{R} \times (0,\infty)) \cup ([-1,1] \times \{0\})$ Za $a \in \mathbb{R}$ definirajmo $X_a = X \cup ((a,\infty) \times \{0\})$

1. Za katere $a \in \mathbb{R}$ je X_a mnogoterost?
2. Za katere $a \in \mathbb{R}$ ima X_a lastnost negibne točke?
3. Za katere $a \in \mathbb{R}$ ima vsak homeomorfizem $f\colon X_a \to X_a$ negibno točko?

Vse odgovore dobro utemelji!

4. naloga

1. Klasificiraj ploskev podano z besedo $a_1b_1a_1a_2b_2a_2\ldots a_nb_na_n$.
2. Naj bo $\mathbb{M}$ Möbiusov trak in $\mathbb{T}$ torus. Poišči vse pare kompaktnih ploskev (X,Y) za katere velja $X\#Y \approx 4\mathbb{T}\#\mathbb{M}$ in $X\#\mathbb{T}\#\mathbb{M} \approx 5\mathbb{T}\#Y$.