1. izpit iz Uvoda v geometrijsko topologijo

17. 6. 2016

Veliko uspeha!

1. naloga (10 točk)

Za vsako od spodnjih trditev v pripadajoči kvadratek čitljivo označi, če je trditev pravilna $\boxed{\text{P}}$ oz. napačna $\boxed{\text{N}}$. Če ne veš, pusti kvadratek prazen, ker se nepravilni odgovor šteje negativno!

- ☐ Za vsako zvezno funkcijo $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ in vsak $\varepsilon > 0$, obstaja polinom p, da je $|f(x) - p(x)| < \varepsilon$ za vse $x \in \mathbb{R}$.
- ☐ Kvocientni prostor nepovezanega prostora, je nepovezan prostor.
- ☐ Prostor zveznih preslikav $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ opremljen s kompaktno odprto topologijo je metrizabilen.
- ☐ Kvocientni prostor 1-števnega prostora je 1-števen.
- ☐ Obstaja retrakcija $\mathbb{B}^3 \to \mathbb{S}^1 \times \{0\}$.
- ☐ Preslikava $(0,1) \times (0,1) \to \mathbb{R}^2$, $(x,y) \mapsto (e^x, \ln y)$, je odprta.
- ☐ Obstaja natanko ena kompaktna povezana 1-mnogoterost s praznim robom.
- ☐ Prostor $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq z^2 \leq 1\}$ ima lastnost negibne točke.
- ☐ Ploskev, ki jo predstavlja beseda *abcdabcd* je povezana vsota dveh torusov.
- ☐ Povezana kompaktna ploskev z nepraznim povezanim robom in sodo Eulerjevo karakteristiko je neorientabilna.

2. naloga (20 točk)

Prostor zveznih funkcij $\mathcal{C}(\mathbb{B}^2,\mathbb{B}^2)$ je opremljen s kompaktno odprto topologijo.

1. Za množico $A = \{f \in \mathcal{C}(\mathbb{B}^2,\mathbb{B}^2) \mid f \text{ nima negibnih točk na } \mathbb{S}^1\}$ ugotovi, ali je odprta ali zaprta v $\mathcal{C}(\mathbb{B}^2,\mathbb{B}^2)$.
2. Ali je prostor $C = \{f \in \mathcal{C}(\mathbb{B}^2,\mathbb{B}^2) \mid f(\mathbb{B}^2) \subset \mathbb{R} \times \{0\}\}$ retrakt prostora $\mathcal{C}(\mathbb{B}^2,\mathbb{B}^2)$?

Vse odgovore utemelji!

3. naloga (20 točk)

1. Naj bo $x_0 \in X$ in $y_0 \in Y$. Šop $X \vee Y$ je kvocientni prostor $(X \coprod Y)/x_0 \sim y_0$. Pokaži, da ima $X \vee Y$ lastnost negibne točke natanko tedaj, ko imata X in Y lastnost negibne točke.
2. Naj bo $X_a = (\{a\} \times [-1,1]) \cup \{(x, \sin\frac{1}{x}) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in (0,1]\}$. Za katere $a \in \mathbb{R}$ ima X_a lastnost negibne točke? Odgovor utemelji!

4. naloga (20 točk)

Klasificiraj ploskvi, podani z besedama:

1. $abcdeb^{-1}e^{-1}fc^{-1}gha^{-1}g^{-1}$,
2. $a_1b_1a_1a_2b_2a_2\ldots a_nb_na_nb_1b_2\ldots b_n$.