UVOD V GEOMETRIJSKO TOPOLOGIJO: PISNI IZPIT
17. 6. 2013

1. NALOGA (15 točk)

Če je $f\colon \mathbb{S}^{n-1} \to \mathbb{S}^{n-1}$ zvezna preslikava, je

$$F\colon \mathbb{B}^n \to \mathbb{B}^n, \quad F(x) = \begin{cases} \|x\| \cdot f\big(\frac{x}{\|x\|}\big), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

zvezna razširitev za f. Tu je $\mathbb{S}^{n-1}$ standardna $(n-1)$-razsežna sfera, $\mathbb{B}^n$ pa standardni n-razsežni disk. S tem je podan predpis $\Phi\colon C(\mathbb{S}^{n-1}, \mathbb{S}^{n-1}) \to C(\mathbb{B}^n, \mathbb{B}^n)$.

a. Dokaži, da je Φ zvezna preslikava.

b. Ali je Φ vložitev?

Rešitve oziroma odgovore ustrezno utemelji.

2. NALOGA (25 točk)

Podprostor X prostora $\mathbb{R}^3$ je podan z naslednjim predpisom:

$$X = \big\{(x,y,z) \,|\, x^2 + y^2 = 1 \text{ in } -1 \leqslant z \leqslant 1\big\} \cup \big\{(x,0,z) \,|\, (x-1)^2 + z^2 \leqslant 1\big\}.$$

a. Ali je prostor X mnogoterost?

b. Ali je prostor X absolutni ekstenzor za normalne prostore?

c. Ali ima prostor X lastnost negibne točke?

d. Ali ima vsak homeomorfizem $X \to X$ vsaj eno negibno točko?

Rešitve oziroma odgovore ustrezno utemelji.

3. NALOGA (20 točk)

a. Naj bo M mnogoterost razsežnosti n in naj bo $D \subset \operatorname{int} M$ disk razsežnosti n z lokalno ploščatim robom v M. Dokaži, da je kvocientni prostor M/D mnogoterost. Katera?

b. Naj bo M kompaktna ploskev brez roba in naj bo $N \subset M$ kompaktna ploskev z nepraznim robom. Poišči potreben in zadosten pogoj, da je kvocientni prostor M/N mnogoterost.

Rešitve oziroma odgovore ustrezno utemelji.

Teoretična naloga (10 točk)

Za vsako od spodnjih trditev v pripadajoči kvadratek čitljivo označi, če je trditev pravilna (**P**) oziroma napačna (**N**).
Če ne veš, pusti kvadratek prazen, ker se nepravilni odgovor šteje negativno!

- ☐ Kvocientni prostor $\mathbb{R}/[0,1]$ je homeomorfen premici $\mathbb{R}$ (z običajno topologijo).
- ☐ Naj bo $\sim$ ekvivalenčna relacija na prostoru X. Kvocientni prostor $X/{\sim}$ je T_2 natanko tedaj, ko so ekvivalenčni razredi zaprti v X.
- ☐ Kvocientni prostor nepovezanega prostora je nepovezan prostor.
- ☐ Naj bo $f\colon \mathbb{B}^k \to \mathbb{R}^n$ vložitev. Tedaj je $\mathbb{R}^n \setminus f(\mathbb{B}^k)$ s potmi povezan prostor.
- ☐ Naj bo $f\colon \mathbb{S}^2 \to \mathbb{R}^3$ vložitev. Tedaj ima $\mathbb{R}^3 \setminus f(\mathbb{S}^2)$ natanko dve komponenti za povezanost.
- ☐ Naj bo $A \subset \mathbb{S}^1$ pravi (tj. $A \neq \mathbb{S}^1$) povezan podprostor. Tedaj je A absolutni ekstenzor za normalne prostore.
- ☐ Naj bosta M in N mnogoterosti razsežnosti n in $N \subset \operatorname{int} M$. Če je N homeomorfna disku, ima N lokalno ploščat rob v M.
- ☐ Dvorazsežni torus $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ je ploskev, katere rob je homeomorfen krožnici $\mathbb{S}^1$.
- ☐ Naj bo M povezana n-razsežna mnogoterost in $x, y \in \operatorname{int} M$ različni točki. Tedaj obstaja tak homeomorfizem $f\colon M \to M$, za katerega je $f|_{\partial M} = \mathrm{Id}$ in $f(x) = y$.
- ☐ Projektivna ravnina je orientabilna ploskev.