1. test iz Uvoda v geometrijsko topologijo

9. 4. 2019

Veliko uspeha!

1. naloga (5 točk)

Za vsako od spodnjih trditev v pripadajoči kvadratek čitljivo označi, če je trditev pravilna $\boxed{\text{P}}$ oziroma napačna $\boxed{\text{N}}$.
Če ne veš, pusti kvadratek prazen, ker se nepravilni odgovor šteje negativno!

- ☐ Podalgebra algebre $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$, ki vsebuje funkcijo $x \mapsto \sin(\frac{\pi}{2}x)$, loči točke.
- ☐ Kompaktno odprta topologija na $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ je strogo močnejša od topologije konvergence po točkah.
- ☐ Kvocientni prostor 1-števnega prostora je 1-števen.
- ☐ Prostor $\hat{\mathcal{C}}(\mathbb{R} \setminus \{0\},\mathbb{R})$ je nepovezan.
- ☐ Naj bo $q\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}/\{0,1\}$ kvocientna preslikava. Tedaj je množica $q((-1,1))$ odprta.
- ☐ Če grupa G deluje na X, je kvocientna preslikava $q\colon X \to X/G$ odprta.
- ☐ Za podbazični množici v kompaktno odprti topologiji velja $\langle K_1, U_1\rangle \cap \langle K_2, U_2\rangle = \langle K_1 \cup K_2, U_1 \cap U_2\rangle$.
- ☐ Kvocientni prostor s potmi povezanega prostora je s potmi povezan.
- ☐ Kvocientni prostor $\mathbb{R}/((-\infty,0] \cup [1,\infty))$ je homeomorfen intervalu $[0,1]$.
- ☐ Za vsak $\varepsilon > 0$ in vsako zvezno funkcijo $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ obstaja polinom p, da je $|f(x) - p(x)| < \varepsilon$ za vse $x \in \mathbb{R}$.

2. naloga (2 točk + 3 točke + 2 bonus točki)

Množico $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ opremimo s topologijo konvergence po točkah.

1. Ali je $F\colon \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, podana s predpisom $F(f) = f(0) + f(1)$, zvezna?
2. Pokaži, da je $G\colon \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, podana s predpisom $G(f) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} f(\frac{1}{n})$, dobro definirana. Ali je zvezna?
3. Ali je množica $A = \{f \mid f(x) = kx + n, n, k \in \mathbb{R}\}$ zaprta v $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$?

3. naloga (5 točk)

1. Naj grupa $G = \{1, -1, i, -i\}$ deluje na $\mathbb{C}$ z množenjem. Poišči kak podprostor evklidskega prostora, ki je homeomorfen prostoru orbit $\mathbb{C}/G$.
2. Na $\mathbb{C}$ je podana ekvivalenčna relacija: $z \sim w$ natanko tedaj, ko je $z = w$ ali pa je $\operatorname{Re} z = \operatorname{Re} w$ in $\operatorname{Im} z, \operatorname{Im} w \in \mathbb{Q}$. Ali je $\mathbb{C}/\sim$ Hausdorffov?