Upogib palice

Urh Trinko

26. november 2020

1 UVOD

Če palico iz elastične snovi obremenimo na obeh koncih velja Hookov zakon:

$$\frac{F}{S} = E\frac{\Delta l}{l} \tag{1}$$

($\frac{F}{S} = \sigma$ - natezna/tlačna napetost, $\frac{\Delta l}{l}$ - relativni raztezek, E - prožnostni modul)

Območje, kjer velja Hookov zakon imenujemo območje elastičnosti, če pa napetost še povečamo se palica trajno deformira ali celo pretrga/poči.
Ko obravnavamo upogib palice v prvem približku(prečni presek ostane nespremenjen), si jo lahko predstavljamo razdeljeno na plasti vzporedne z osjo. Ko palico upognemo se nekatere plasti raztegnejo, druge skrčjo, blizu sredine pa leži NEVTRALNA PLOSKEV, ki se pri deformaciji ne spremeni. Geometrijsko lahko ukrivljenost ploskve opišemo s krivinskim radijem. Velja razmerje:

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{y'}{R} \tag{2}$$

(R - krivinjski radij nevtralne ploskve, y - navpična razdalja do naslednje obravnavane ploskev, Δl - raztezek ploskve, ki je od nevtralne oddaljena za y', l - prvotna dolžina palice, $\frac{1}{R}$ - ukrivljenost)

Če si palico predstavljamo v sistemu xy, kjer je absciza vzporedna nevtralni ploskvi, lahko definiramo funkcijo $u(x)$, ki predstvlja odmik nevtralne ploskve obremenjene palice od osnovne lege. Če palico šibko upogibamo($u'(x) \ll 1$) velja:

$$\frac{1}{R} = u''(x) \tag{3}$$

$$M = EJu''(x), \quad x \in [0, l] \tag{4}$$

(M - navor vzdolžnih sil, J - vztrajnostni moment preseka palice, l - dolžina palice)

$$M' = F(x) = EJu'''(x) \tag{5}$$

($F(x)$ - strižna sila)

Osnovna enačba palice znaša:

$$M'' = f(x) = EJu^{(4)}(x) \tag{6}$$

($f(x)$ - dolžinska gostota sile)

Enačbo želimo razširit na sistem centralno obremenjene palice. Oblika palice je opisljiva z nastavkom:

$$u(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$$

Na sredini (x = 0) se palica zniža kot:

$$u(0) = -\frac{F_0 l^3}{48EJ} \tag{7}$$

Iz tega podatka, nastavka in robnih pogojev lahko funkcijo $u(x)$ izrazimo kot:

$$u(x) = -\frac{F_0 l^3}{48EJ}[1 - 6(\frac{x}{l})^2 + 4(\frac{x}{l})^3] \tag{8}$$

2 POTREBŠČINE

- stojalo, mikrometrka ura
- uteži, tehtnica, kljuka za obešanje uteži

- dve ravni palici okroglega in kvadratičnega profila
- kljunasto merilo, meter

3 NALOGA

1. Opazuj upogibanje palic z različnima presekoma v odvisnosti od obremenitve ter določi njun prožnostni modul.
2. Nariši diagram za spreminjanje strižne sile in navora vzdolž palice za eno izbrano utež.

4 MERITVE

Dimenzije palic

1. Palica s pravokotnim presekom:
   - a = (7.20 ± 0.02) mm
   - b = (7.08 ± 0.02) mm
   - dolžina: (641 ± 1) mm
   - masa: (261 ± 1) g
2. Palica s krožnim presekom:
   - 2R = (7.22 ± 0.02) mm
   - dolžina (641 ± 1) mm
   - masa: (208 ± 1) g

Lege mikrometrske tehtnice v odvisnosti od obremenitvene mase(p - palica s pravokotnim presekom, k - palica s krožnim presekom)

Masa [g]	p obrem. [mm]	p razbrem. [mm]	k obrem. [mm]	k razbrem. [mm]
0	5.7	5.695	8.42	8.42
10	5.68	5.68	8.39	8.37
30	5.65	5.65	8.33	8.31
51	5.61	5.62	8.26	8.27
101	5.54	5.54	8.09	8.14
201	5.38	5.39	7.79	7.86
403	5.05	5.05	7.24	7.33
603	4.7	4.7	6.66	6.76
1106	3.86	3.84	5.17	5.37
2110	2.15	2.19	2.28	2.37

Lastna obremenitev v odvisnosti od lege mikrometrske tehtnice

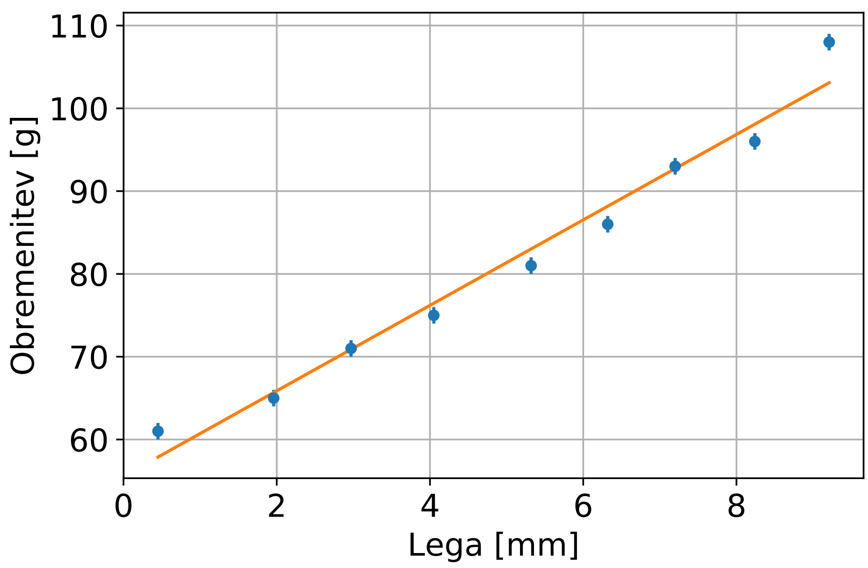
Lega [mm]	obremenitev [g]
9.21	108
8.24	96
7.2	93
6.32	86
5.32	81
4.05	75
2.97	71
1.96	65
0.45	61

5 IZRAČUNI

5.1 Ukrivljenost v odvisnosti od obremenitve

5.1.1 Vpliv mikrometrkse tehtnice

Meritev ukrivljenosti se izvaja z mikrometrsko tehtnico, ki pa med meritvijo tudi sama pritiska na palico in tako prispeva k obremenitvi. Zaradi tega sem moral najprej določiti faktor, ki pove kakšno dodatno obremenitev povzroči tehtnica pri določeni legi.



Slika 1: Odvisnost dodatne obremenitve od lege mikrometerske ure.

Na grafu na sliki 1 vidimo, da sta dodatna obremenitev, ki jo povzroča tehtnica ter njena takratna lega premo sorazmerni. Zato lahko za omenjeni faktor razglasimo naklon premice. Ta znaša $(5.2 \pm 0.1)\ \frac{g}{mm}$ (napaka določena s pomočjo kode).

5.1.2 Izračun prožnostnega modula palic

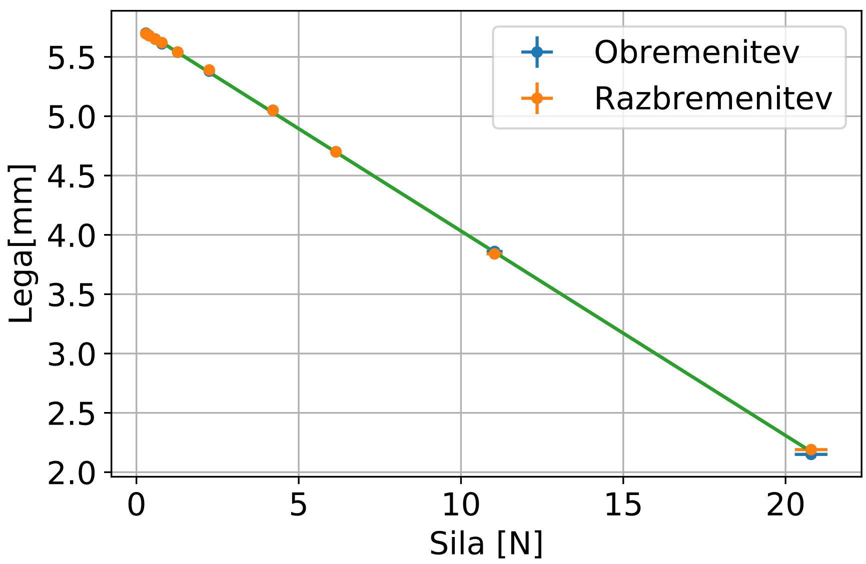
Za izračun prožnostnega modula sem uporabil enačbo (7):

$$u(0) = -\frac{F_0 l^3}{48EJ}$$
$$\Downarrow$$
$$E = -\frac{l^3}{48kJ} \tag{9}$$

(kjer je $k = \frac{u(0)}{F_0}$)

Naklon k pa sem pridobil iz znanih podatkov tako, da sem jih nanesel na graf lege v odvisnosti od obremenitvene sile. Pri tem sem moral podatke, še nekoliko prilagoditi, upošteval sem še vpliv tehtnice, ki sem ga določil v poglavju 5.1.1 ter podano maso pretvoril v silo teže z znanim gravitacijskim pošpeškom.

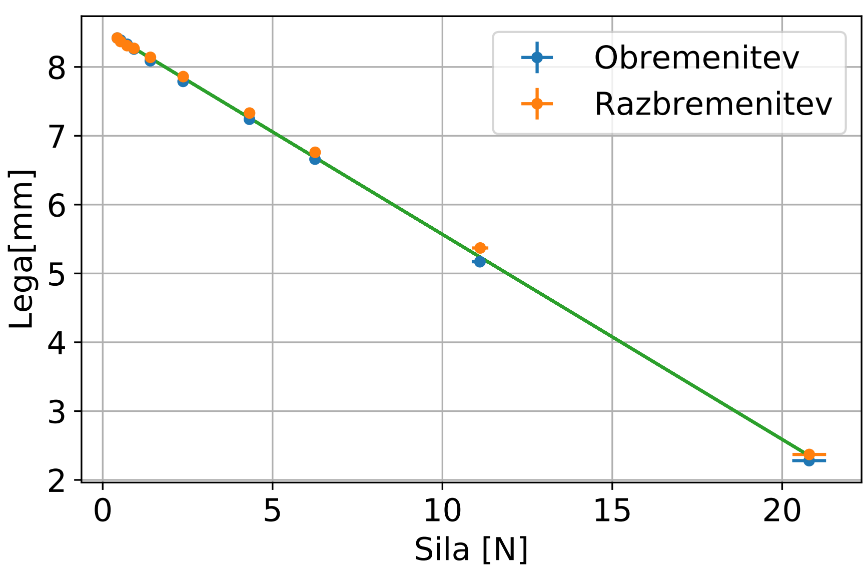
Palica s pravokotnim presekom



Slika 2: Odvisnost lege od obremenitvene sile (palica s pravokotnim presekom).

Premica na sliki 2 ima naklon enak (-1.7 ± 0.4)·10^{-4} $\frac{m}{N}$. Za palico s pravokotnim presekom velja, da je vztrajnostni moment ploskve $J = ab^3/12$, v našem primeru (2.13 ± 0.02)·10^{-10} m^4. S pomočjo teh podatkov ter enačbe (9) sem lahko izračunal prožnostni modul palice s pravokotnim presekom, znašal pa je (1.5 ± 0.4)·10^{11} Pa = (150 ± 40) GPa.

Palica s krožnim presekom



Slika 3: Odvisnost lege od obremenitvene sile (palica s krožnim presekom).

Naklon premice na sliki 3 je (-3.0 ± 0.4)·10^{-4} $\frac{m}{N}$. Za palico s krožnim presekom je vztrajnostni moment ploskve enak J = $\pi r^4/4$, in v tem primeru znaša (1.33 ± 0.02)·10^{-10} m^4. Presotali postopek je enak kot pri prejšnji palici, prožnostni modul pa znaša (2.1 ± 0.4)·$10^1$1 Pa = (210 ± 40) GPa.

5.2 Spreminjanje strižne sile in navora vzdolž palice

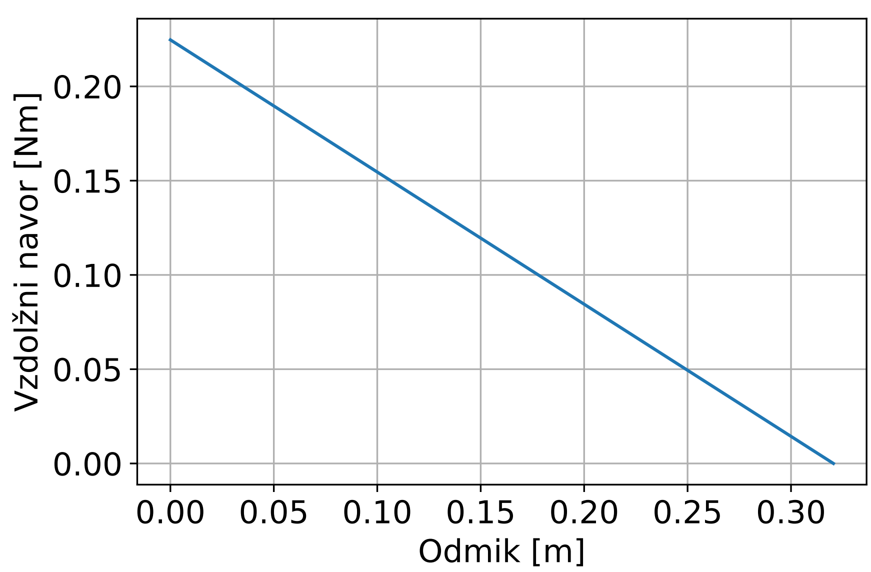
Kot je razvidno iz enačbe (4) je navor vzdolžnih sil sorazmeren z dvojnim odvodom funkcije (8) po x-u. Strižne sile pa dobimo iz odvoda navora po x-u (enačba (5)). Velja:

$$u''(x) = -\frac{F_0 l^3}{4EJ}[-\frac{1}{l^2} + 2\frac{x}{l^3}]$$
$$u'''(x) = -\frac{F_0}{2EJ}$$

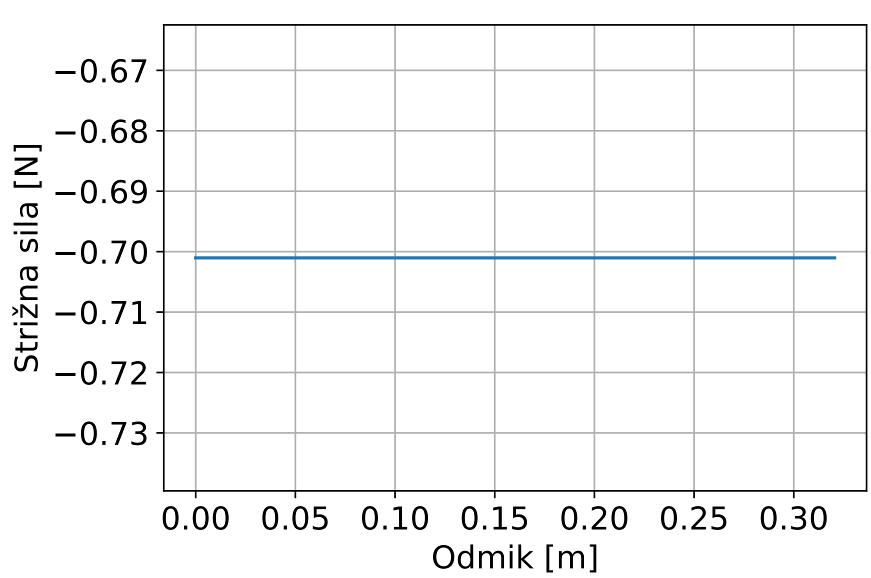
$$\Downarrow$$

$$M(x) = -\frac{F_0 l^3}{4}[-\frac{1}{l^2} + 2\frac{x}{l^3}]$$
$$F = -\frac{F_0}{2}$$

V enačbi za M in F ne nastopa ne vztrajnstni moment ne prožnostni modul, zato sta odvisnosti iste za obe obliki palic.



Slika 4: Navor v odvisnost od odaljenosti od središčne lege(0 na x osi predstavlja sredina palice, kamor obešamo uteži).



Slika 5: Strižna sila v odvisnosti od lege(x os isto kot na sliki 4).

5.3 Meja elatičnosti, upognjenost zaradi latne teže, gostota palic

- Meja elastičnosti:
  Določiti hočemo maksimalno obremenitev, pri kateri še velja elaštičnost palice, torej, da se po obremenitvi vrne v prvotno lego. Maksimalno obremenitev lahko izpeljemo, ce definiramo relativni raztezek ϵ(ki ga omejimo na 0.001) in uporabimo enačbi (2) in (3). Velja:
  $$F_{max} \approx \epsilon \frac{8EJ}{Dl}$$
  (kjer je D b pri palici s pravokotnim presekom, 2r pa pri krožnem)
  Za palico s pravokotnim presekom znaša maksimalna obremenitev (60 ± 20) N, za palico s krožnim pa (100 ± 20) N.

- Upognjenost zaradi latne teže Če si predstvljamo, da teža prijemle na središču palice, lahko ukrivljenost izračunamo s pomočjo enačbe (7), za F_0 pa ustavimo kar lastno težo:
  $$U(0)_{lastna} = -\frac{mgl^3}{48EJ}$$
  Vrednost znaša za pravokotno palico (0.5 ± 0.1) mm za okroglo pa (0.40 ± 0.09) mm.

- Gostota Gostoto izračunamo po znani enčbi:
  $$\rho = \frac{m}{V}$$
  ($V_p = abl$, $V_o = \pi r^2 l$)
  Gostoti se ujemata znotraj napake, saj znašata (7980 ± 80) $\frac{kg}{m^3}$ za pravokotno in (7900 ± 200) $\frac{kg}{m^3}$ za okroglo palico.

6 ZAKLJUČEK IN KOMENTAR

V prvem delu naloge sem moral izračunati dodatno obremenitev, ki jo merilo povzroča na palici. Ugotovil, sem da pri tem ko kaže lego 1 mm obremenjuje palico s slio, ki je ekvivalentna masi 5.2 g. Ta podatek sem nato upošteval, ko sem v drugem delu naloge na graf nanašal obremenitve na palici ob določeni legi mikrometrske ure. Iz naklona premic sem lahko nato izračunal prožnostna modula za obe palici. Ugotovil sem, da ima okrogla palica večji prožnostni modul, oba pa se približno ujemata z razponom, ki je v navodilih podan za jeklene pločevine.

V drugem delu naloge pa sem določil maksimalno silo pri kateri bi palici še ostali elastični. Ugotovil sem, da te pri meritvi nismo presegli, kar je razvidno tudi iz podatkov, saj se vrednosti pri obremenitiv skoraj popolnoma ujemajo s tistimi pri razbremenitvi. V tem delu naloge sem določil tudi kakšna je ukrivljenost palic zaradi lastne teže če predpostavimo, da ta prijemle na središču palice. Nazadnje pa sem določil še gostoti palic, ki sta se ujemali, kar pomeni, da sta iz istega materiala. Iz podatkov o gostotah materialov na internetu pa sklepam, da sta palici iz neke vrste jekla (vir: https://sl.wikipedia.org/wiki/Gostota).