

Taller 1 Comunicaciones Digitales

Elías Courdin
Comunicaciones Digitales 2025
Facultad de Ingeniería
Montevideo, Uruguay
eliascourdin@15gmail.com

Uriel Yaffé
Comunicaciones Digitales 2025
Facultad de Ingeniería
Montevideo, Uruguay
urielyaffe@gmail.com

I. PARTE I: MODULACIÓN DIGITAL PASABANDA

En esta sección se trabaja con un sistema modulador/demodulador para distintas modulaciones digitales pasabanda. El canal se caracteriza por una relación señal a ruido (SNR) de aproximadamente 15, dB en recepción y un ancho de banda útil comprendido entre 600, Hz y 4, kHz. Se emplea un receptor apareado, y en la conformación de la señal se utiliza un pulso de Nyquist con coeficiente de roll-off $\rho = 2\frac{\beta}{r}$.

Para cada una de las constelaciones se presentan: el diagrama de transmisión-recepción, su representación en el plano complejo junto a la región de decisión, la energía por símbolo, la tasa máxima de transmisión y la probabilidad de error.

A. BPSK

El diagrama completo de transmisor-receptor es el que se observa en la figura 1.

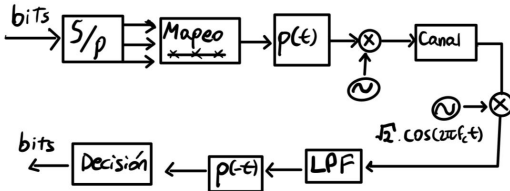


Fig. 1. Esquema del sistema de transmisión

La constelación BPSK junto con su región de decisión están ilustradas en la figura 2 donde la región pintada de verde se toma como símbolo '1' y la amarilla como '0'.

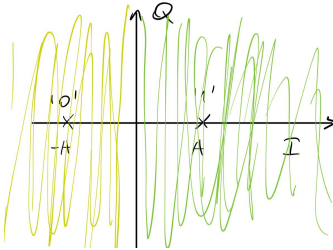


Fig. 2. Constelación de BPSK

La energía de símbolo es $\sum_{i \in \{1,2\}} p(i) E_i$.

La energía de cada símbolo es $E_i = \int |p_i|^2 dt$

Entonces, $E_1 = E_0 = A^2 \cdot \|p\|^2$.

Como el pulso está normalizado, $\|p\|^2 = 1$, $E_{BPSK} = A^2$. Por lo tanto $A = \sqrt{E_{BPSK}}$. La constelación e función de la energía de símbolo se encuentra en la figura 3

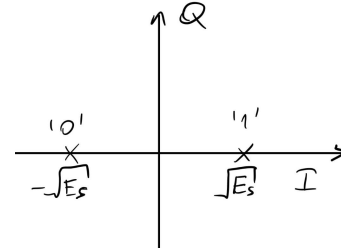


Fig. 3. Constelación BPSK en función de la energía de símbolo

El ancho de banda útil es entre los 600Hz y 4kHz, por lo tanto hay un total de 3,6kHz de espectro para utilizar. La tasa de transferencia máxima alcanzable para BPSK está dada por el ancho de banda, ya que $r \leq 2BT$, siendo BT el ancho de banda de la señal, la cual está dada por, $BT = \frac{1+\rho}{2 \cdot T_s}$. Al tener un ancho de banda fijo, la máxima tasa de transferencia se da cuando ρ vale lo mínimo posible, cero.

$$r_{b_{max}} = (1 + \rho)r_s \leq (4000 - 600)Hz, \quad r_{s_{max}} = 3600 \frac{symbol}{sec}$$

y como en cada símbolo hay un solo bit,

$$r_{s_{max}} = r_{b_{max}} = 3600 \frac{symbol}{sec}$$

Para hallar la probabilidad de error de bit para esta constelación, planteamos la probabilidad de error de símbolo.

$$P_{e_s} = P(0) \cdot P_{e_0} + P(1) \cdot P_{e_1} = \frac{1}{2} P_{e_0} + \frac{1}{2} P_{e_1}$$

Donde la probabilidad de cada símbolo está dada por:

$$P_{e_0} = P(Y_D > V_T \mid Y_D \sim \mathcal{N}(-A, \sigma)) = P(-A + N_D(kT_s) > 0)$$

$$P_{e_1} = P(Y_D < V_T \mid Y_D \sim \mathcal{N}(A, \sigma)) = P(A + N_D(kT_s) < 0)$$

Donde Y_D representa el valor detectado, que es la suma del valor de símbolo enviado más ruido Gaussiano aditivo de media nula y varianza $\sigma^2 = \frac{N_0}{2}$, ya que el pulso está

normalizado y, por lo tanto, el ruido en detección tiene la misma varianza que el ruido añadido por el canal. Entonces lo que tenemos es:

$$P_{e_0} = P_{e_1} = Q\left(\frac{A}{\sigma}\right)$$

$$\Rightarrow P_{e_s} = Q\left(\frac{A}{\sigma}\right)$$

Debido a la constelación BPSK, estamos enviando un bit por símbolo, por lo tanto, la probabilidad de error de bit es la misma:

$$\Rightarrow P_{e_b} = Q\left(\frac{A}{\sigma}\right)$$

Luego, sabiendo que:

$$P_R = P_T = \frac{E_s}{T_s} = E_s r_s = E_s r_b$$

Siendo P_r y P_T las potencias recibida y transmitida, respectivamente. Además: sabemos que $A^2 = E_s$, de modo que podemos expresar la probabilidad de error de bit en función de los parámetros del sistema de la siguiente manera:

$$P_{e_b} = Q\left(\sqrt{\frac{2E_s}{N_0}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{2P_R}{N_0 r_b}}\right)$$

¿Qué tasa máxima de bits podría usar este sistema si se requiere un BER menor a 10^{-5} ?

Sabiendo que el sistema alcanza un SNR aproximado de 15db:

$$SNR = \frac{P_R}{P_N} = \frac{2P_R}{N_0} = \frac{2E_s r_s}{N_0}$$

Entonces:

$$10 \log_{10}(SNR) = 15$$

$$\Rightarrow \frac{E_s}{N_0} = \frac{10^{\frac{3}{2}}}{2r_s}$$

Como sabemos la probabilidad de error de bit del sistema en función del cociente $\frac{E_s}{N_0}$, podemos averiguar la máxima tasa de bits para obtener el BER deseado:

$$Q\left(\sqrt{2 \frac{10^{\frac{3}{2}}}{2r_s}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{10^{\frac{3}{2}}}{r_b}}\right) \leq 10^{-5}$$

Por lo tanto:

$$r_b \leq \frac{10^{\frac{3}{2}}}{(Q^{-1}(10^{-5}))^2} \simeq 1.74 \text{bps}$$

B. QPSK

Seguiremos un procedimiento análogo a la constelación anterior, pero en este caso para QPSK, por lo que no entraremos en detalle sobre deducciones repetitivas.

El diagrama completo para el transmisor-receptor es el ilustrado en la figura 4

La constelación de QPSK junto a su región de decisión está ilustrada en la figura 5

La energía de cada símbolo al asumir equi-probabilidad y que el pulso está normalizado es $E_{SQPSK} = 2A^2$. La

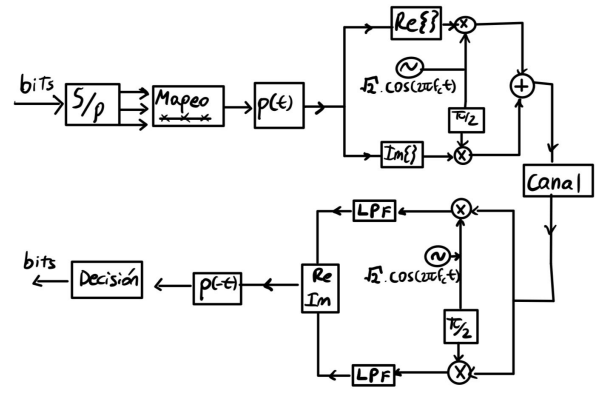


Fig. 4. Diagrama de Transmisión - Recepción

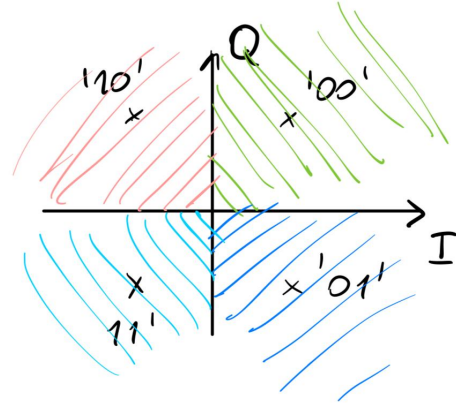


Fig. 5. Constelación QPSK junto con su región de decisión

constelación en función de la energía de símbolo se encuentra en la figura 6.

Con las mismas deducciones que se hizo en la sección I-A, podemos hallar la máxima tasa de bits como sigue:

$$(1 + \rho)r_s \leq (4000 - 600)Hz$$

$$r_{s_{max}} = 3600 \frac{\text{symbol}}{\text{sec}}$$

Como en cada símbolo, hay 2 bits:

$$2 \cdot r_{s_{max}} = r_{b_{max}}$$

entonces:

$$r_{b_{max}} = 7200 \frac{\text{bits}}{\text{sec}}$$

Para hallar la probabilidad de error de bit, primero averiguamos la probabilidad de error de símbolo. El error de símbolo lo planteamos como:

$$P(\text{error}) = 1 - P(\text{correcto})$$

$$= 1 - (P(\text{correcto}/A_k = A + jA) \cdot P(A_k = A + jA) + P(\text{correcto}/A_k = A - jA) \cdot P(A_k = A - jA))$$

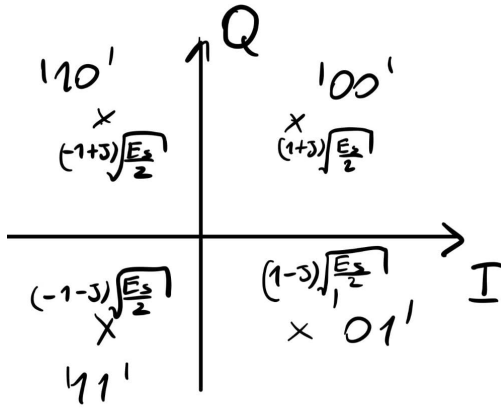


Fig. 6. Constelación QPSK en función de la energía de símbolo

$$+P(\text{correcto}/A_k = -A + jA) \cdot P(A_k = -A + jA) \\ +P(\text{correcto}/A_k = -A - jA) \cdot P(A_k = -A - jA)$$

Por simetría, calculamos la probabilidad de error de un símbolo y la multiplicamos por la cantidad de símbolos. Siendo "B" la región de decisión que hace que la decisión no sea un error.

$$P(\text{correcto}) = P(Y_D \in B) = P((A_k + N(K \cdot T_s)) \in B) \\ = P((A + jA + N_D^i(KT_s) + N_D^Q(KT_s)) \in B)$$

Al ser N_D^i y N_D^Q independientes, tenemos que:

$$P(\text{correcto}) = P(N_D^i(KT_s) > -A) \cdot P(N_D^Q(KT_s) > -A) \\ = (1 - Q(\frac{A}{\sigma})) \cdot (1 - Q(\frac{A}{\sigma}))$$

Entonces, la probabilidad de error de símbolo es:

$$P(\text{error}) = 2Q(\frac{A}{\sigma}) - Q(\frac{A}{\sigma})^2 \simeq 2Q(\frac{A}{\sigma})$$

Despreciando términos de grado mayor a uno.

$$P(\text{error}) = 2Q(\frac{A}{\sigma})$$

Como se transmiten dos bits por símbolo, la probabilidad de error de bit es:

$$P_{e_b} = \frac{1}{2}P_{e_s} = Q(\frac{A}{\sigma})$$

También podemos expresar la probabilidad de error de bit en función de otros parámetros del sistema como: $E_s = 2A^2$,

$$P_R = P_T = \frac{E_s}{T_s}, \text{ entonces } A = \sqrt{\frac{E_s}{2}} = \sqrt{\frac{P_R}{2r_s}} = \sqrt{\frac{P_R}{r_b}}$$

$$P_{e_b} = Q(\sqrt{\frac{E_{sQPSK}}{N_0}}) = Q(\sqrt{\frac{2P_R}{r_b N_0}})$$

¿Qué tasa máxima de bits podría usar este sistema si se requiere un BER menor a 10^{-5} ?

Para este caso, la máxima tasa de transmisión para cumplir con el requisito es igual que en el caso de la constelación BPSK.

C. 8PSK

Continuamos con el procedimiento para la codificación 8PSK.

La constelación para este caso se puede observar en la figura 7, junto con su región de decisión.

El sistema de transmisión es el ilustrado en la figura 4.

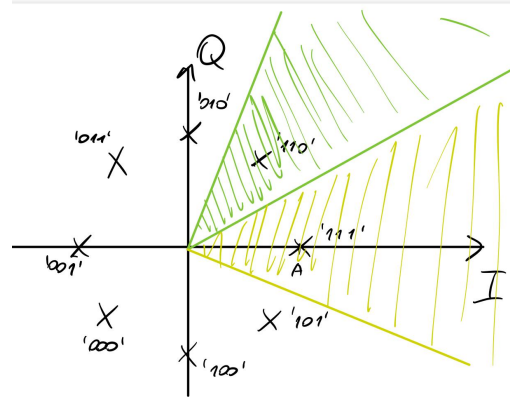


Fig. 7. Parte de la región de decisión para la constelación de 8PSK

Donde cada símbolo está contenido en la misma circunferencia de radio A. A partir de la simetría de la constelación y asumiendo que el pulso está normalizado, se puede deducir que la energía de símbolo en este caso es $E_{s8PSK} = A^2$. Como la constelación es 8PSK, se transmiten 3 bits ($\log_2(8) = 3$), por lo tanto $E_b = \frac{E_s}{3} = \frac{A^2}{3}$. La constelación en función de la energía de símbolo se encuentra en la figura 8.

Para obtener la máxima tasa de bits, se procede igual a como

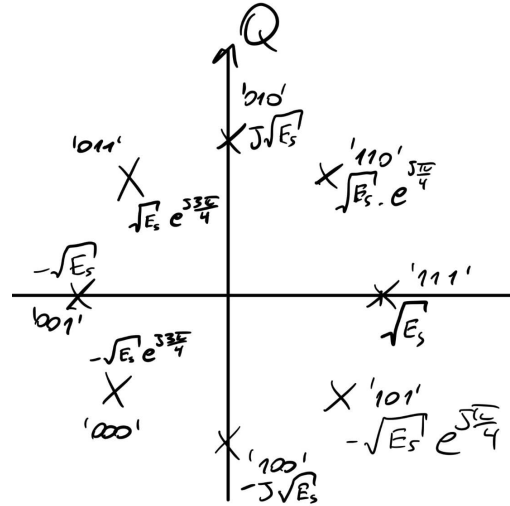


Fig. 8. Constelación 8PSK en función de la energía de símbolo

se hizo en las secciones anteriores:

$$2B_T = (1 + \rho)r_s \leq (4000 - 600)Hz$$

$$r_{s_{max}} = 3600 \frac{\text{symbol}}{\text{sec}}$$

Como en cada símbolo, hay 3 bits:

$$3 \cdot r_{s_{max}} = r_{b_{max}}$$

entonces:

$$r_{b_{max}} = 10800 \frac{\text{bits}}{\text{sec}}$$

Podemos expresar la probabilidad de error de símbolo como sigue:

$$P_{es} = \frac{1}{8} P(\text{error} | A_k = A) + \frac{1}{8} P(\text{error} | A_k = Ae^{j\frac{\pi}{4}}) + \dots$$

Donde cada una de las probabilidades de error individuales son iguales entre sí, dada la simetría del problema.

Sabemos que:

$$P(\text{error} | A_k = A) = 1 - P(\text{correcto} | A_k = A)$$

Calcular la probabilidad de acertar significa hallar las probabilidades de permanecer en la zona amarilla de la figura 7. Si pensamos este problema en coordenadas polares (r, φ) , lo que estamos buscando es la zona descrita por:

$$-\frac{\pi}{8} < \varphi < \frac{\pi}{8}$$

Es decir:

$$-\frac{\pi}{8} < \tan^{-1}\left(\frac{N_Q}{A + N_I}\right) < \frac{\pi}{8}$$

Para simplificar el problema, vamos a suponer $A \gg N_Q$, dado que es razonable suponer que el valor enviado es mucho mayor al ruido introducido en el canal. Entonces tenemos:

$$-A \cdot \tan\left(\frac{\pi}{8}\right) < N_Q < A \cdot \tan\left(\frac{\pi}{8}\right)$$

$$P(\text{correcto}) = P(-A \cdot \tan\left(\frac{\pi}{8}\right) < N_Q) \cdot P(N_Q < A \cdot \tan\left(\frac{\pi}{8}\right))$$

$$\Rightarrow P(\text{correcto}) = \left(1 - Q\left(\frac{A \cdot \tan\left(\frac{\pi}{8}\right)}{\sigma}\right)\right)^2$$

Despreciando términos de orden mayor a uno, obtenemos una probabilidad de error de símbolo de:

$$\Rightarrow P_{es} \simeq 2Q\left(\frac{A \cdot \tan\left(\frac{\pi}{8}\right)}{\sigma}\right)$$

Por lo tanto, la probabilidad de error de bit es:

$$P_{eb} = \frac{2}{3} Q\left(\frac{A \cdot \tan\left(\frac{\pi}{8}\right)}{\sigma}\right)$$

Que podemos escribir en función de los parámetros del sistema como:

$$P_{eb} = \frac{2}{3} Q\left(\frac{\tan\left(\frac{\pi}{8}\right) \sqrt{2E_s}}{\sqrt{N_0}}\right) = \frac{2}{3} Q\left(\frac{\tan\left(\frac{\pi}{8}\right) \sqrt{6P_R}}{\sqrt{N_0} r_b}\right)$$

¿Qué tasa máxima de bits podría usar este sistema si se requiere un BER menor a 10^{-5} ?

Procediendo de manera análoga a como se hizo con la constelación BPSK, tenemos que:

$$\frac{3}{2} Q\left(\tan\left(\frac{\pi}{8}\right) \sqrt{2 \frac{10^{\frac{3}{2}}}{2r_s}}\right) = \frac{3}{2} Q\left(\tan\left(\frac{\pi}{8}\right) \sqrt{2 \frac{10^{\frac{3}{2}} \cdot 3}{2r_b}}\right) \leq 10^{-5}$$

Entonces:

$$r_b \leq \frac{3 \cdot \tan^2\left(\frac{\pi}{8}\right) \cdot 10^{\frac{3}{2}}}{\left(Q^{-1}\left(\frac{3}{2} \cdot 10^{-5}\right)\right)^2} \simeq 0.93 \text{bps}$$

D. 16QAM

La constelación para 16QAM junto con su región de decisión se ilustran en la figura 9.

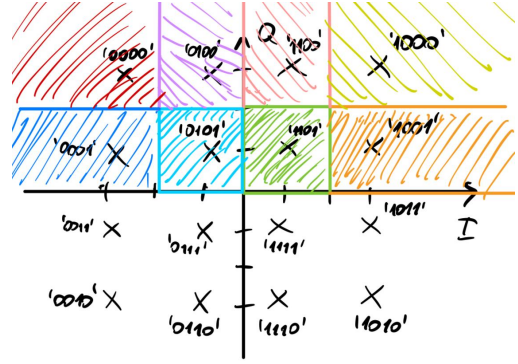


Fig. 9. Constelación para 16QAM con parte de su región de decisión representada.

Se aclara que todos los puntos de la constelación están a una distancia igual a $2A$.

El sistema de transmisión para esta constelación es el que se ilustra en la figura 4.

La energía de símbolo para esta constelación es:

$$E_s = \frac{1}{16} (4 \cdot 2A^2 + 8 \cdot 10A^2 + 4 \cdot 18A^2) = 10A^2$$

La constelación en función de la energía de símbolo se encuentra en la figura 10.

Para obtener la máxima tasa de bits, se procede análogamente a las secciones anteriores:

$$2B_T = (1 + \rho) r_s \leq (4000 - 600) \text{Hz}$$

$$r_{s_{max}} = 3600 \frac{\text{symbol}}{\text{sec}}$$

Como en cada símbolo, hay 4 bits:

$$4 \cdot r_{s_{max}} = r_{b_{max}}$$

entonces:

$$r_{b_{max}} = 14400 \frac{\text{bits}}{\text{sec}}$$

Luego, podemos plantear la probabilidad de error de símbolo como:

$$P_{es} = \frac{1}{16} P(\text{error} | A_k = A + jA) + \frac{1}{16} P(\text{error} | A_k = 3A + jA)$$

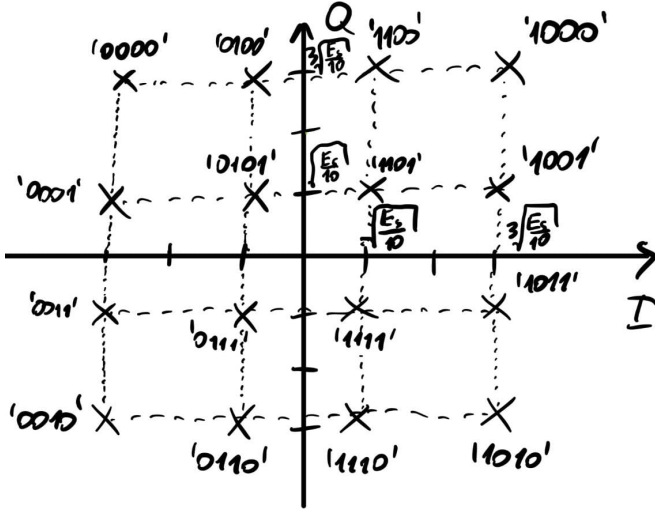


Fig. 10. Constelación 16QAM en función de la energía de símbolo

$$+ \frac{1}{16} P(\text{error} | A_k = 3A + 3jA) + \dots$$

De la figura 9 se pueden observar tres tipos de regiones distinguibles, por lo que abordaremos el cálculo para cada uno de éstos, ya que las demás regiones son simétricas. Las regiones distinguibles son las representadas por los colores verde, anaranjado y amarillo (figura 9).

Comenzando con las pequeñas regiones cuadradas, como lo es la región verde:

$$P(\text{error} | A_k = A + jA) = 1 - P(\text{correcto} | A_k = A + jA)$$

$$P(\text{correcto}) = P(|N_I| < A).P(|N_Q| < A)$$

$$\Rightarrow P(\text{correcto}) = \left(1 - Q\left(\frac{A}{\sigma}\right)\right)^4$$

Entonces la probabilidad de error para esta región quedaría:

$$P(\text{error}) = -Q\left(\frac{A}{\sigma}\right)^4 + 4Q\left(\frac{A}{\sigma}\right)^3 - 6Q\left(\frac{A}{\sigma}\right)^2 + 4Q\left(\frac{A}{\sigma}\right)$$

Despreciando términos de grado mayor a uno:

$$P(\text{error}_{\text{region}_1}) \simeq 4Q\left(\frac{A}{\sigma}\right)$$

Para el caso de las regiones rectangulares, como puede ser la región anaranjada de la figura 9, podemos expresar lo siguiente con respecto a la probabilidad de error de símbolo:

$$P(\text{error} | A_k = 3A + jA) = 1 - P(\text{correcto} | A_k = 3A + jA)$$

Y la probabilidad de acierto es:

$$P(\text{correcto}) = P(|N_Q| < A).P(N_I > -A)$$

Entonces:

$$P(\text{correcto}) = \left(1 - Q\left(\frac{A}{\sigma}\right)\right)^3$$

Por lo tanto la probabilidad de error de símbolo para esta región es:

$$P(\text{error}) = Q\left(\frac{A}{\sigma}\right)^3 - 3Q\left(\frac{A}{\sigma}\right)^2 + 3Q\left(\frac{A}{\sigma}\right)$$

Despreciando términos de grado mayor a uno:

$$P_{\text{error}_{\text{region}_2}} \simeq 3Q\left(\frac{A}{\sigma}\right)$$

Por último distinguimos una tercer región pintada de amarillo en la figura 9.

Planteando la probabilidad de error de símbolo tenemos:

$$P(\text{error} | A_k = 3A + 3jA) = 1 - P(\text{correcto} | A_k = 3A + 3jA)$$

La probabilidad de caer en la región es:

$$P(\text{correcto}) = P(N_I > -A).P(N_Q > -A)$$

Por lo tanto:

$$P(\text{correcto}) = \left(1 - Q\left(\frac{A}{\sigma}\right)\right)^2$$

Entonces la probabilidad de error para la tercer región es:

$$P(\text{error}) = -Q\left(\frac{A}{\sigma}\right)^2 + 2Q\left(\frac{A}{\sigma}\right)$$

Despreciando términos de grado mayor a uno:

$$P_{\text{error}_{\text{region}_3}} \simeq 2Q\left(\frac{A}{\sigma}\right)$$

Agrupando estos resultados, podemos expresar la probabilidad de error de símbolo para la constelación 16QAM como:

$$P_{e_s} = 4 \cdot \frac{1}{16} \cdot P_{e_{\text{reg}_1}} + 8 \cdot \frac{1}{16} \cdot P_{e_{\text{reg}_2}} + 4 \cdot \frac{1}{16} \cdot P_{e_{\text{reg}_3}}$$

Es decir:

$$P_{e_s} = Q\left(\frac{A}{\sigma}\right) + \frac{3}{2}Q\left(\frac{A}{\sigma}\right) + \frac{1}{2}Q\left(\frac{A}{\sigma}\right)$$

Por lo tanto:

$$P_{e_s} = 3Q\left(\frac{A}{\sigma}\right)$$

Entonces, la probabilidad de error de bit queda:

$$P_{e_b} = \frac{3}{4}Q\left(\frac{A}{\sigma}\right)$$

Que podemos escribir en función de los parámetros del sistema como:

$$P_{e_b} = \frac{3}{4}Q\left(\frac{\sqrt{E_s}}{\sqrt{5N_0}}\right) = \frac{3}{4}Q\left(\frac{\sqrt{4P_R}}{\sqrt{5N_0r_b}}\right)$$

¿Qué tasa máxima de bits podría usar este sistema si se requiere un BER menor a 10^{-5} ?

Procediendo de manera análoga a como se hizo con la constelación BPSK, tenemos que:

$$\frac{3}{4}Q\left(\sqrt{\frac{1}{5}\frac{10^{\frac{3}{2}}}{2r_s}}\right) = \frac{3}{4}Q\left(\frac{1}{5}\frac{10^{\frac{3}{2}}}{2r_b}\right) \leq 10^{-5}$$

Despejando:

$$r_b \leq \frac{2 \cdot 10^{\frac{3}{2}}}{5 \cdot (Q^{-1}(\frac{4}{3} \cdot 10^{-5}))^2} \simeq 3.01 \text{bps}$$

En la figura 11 se graficaron las probabilidades de error de bit para las constelaciones trabajadas en función del cociente $\frac{E_b}{N_0}$, ambos en escala logarítmica.

Para especificar el punto de operación, se supuso que:

$$10 \log \left(\frac{E_s}{N_0} \right) = 15$$

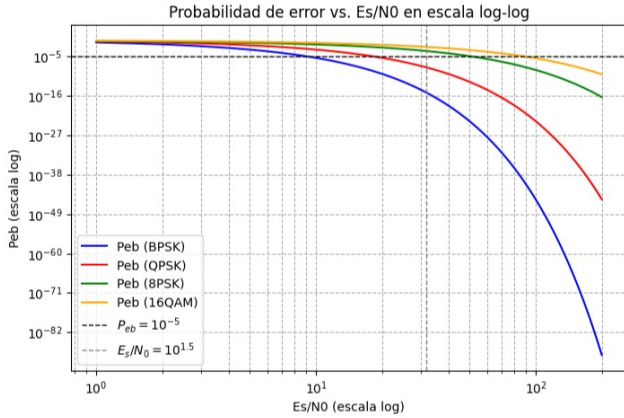


Fig. 11. Gráfica de las P_{eb} para cada constelación en función del cociente $\frac{E_s}{N_0}$, ambos en escala logarítmica, señalando el punto de operación del sistema.

En la Figura 11 se puede observar cómo varía la probabilidad de error de bit en función de la relación entre la energía por símbolo y la densidad espectral de ruido ($\frac{E_s}{N_0}$).

Para un valor fijo de $\frac{E_s}{N_0}$ (indicado por la línea punteada vertical), si se requiere una probabilidad de error $P_{eb} \leq 10^{-5}$ (indicado por la línea punteada horizontal), las modulaciones que logran cumplir estar por debajo de este umbral son BPSK y QPSK.

Esto se debe a que, para una misma potencia, al transmitirse menos símbolos distintos, estos se encuentran más separados entre sí en la constelación, lo que reduce la probabilidad de confusión en presencia de ruido.

E. Estándar ADSL2+

El estándar ADSL2+ permite alcanzar una tasa de transferencia de bits al usuario de hasta 24 Mbps utilizando 512 portadoras, cada una con un canal de ancho de banda de 4 kHz. Éste máximo solo es alcanzable usando una constelación M-QAM de alta eficiencia espectral.

Para lograr una mayor tasa de transferencia de bits al usuario, se utilizan múltiples portadoras. En particular, si se emplean 512 portadoras, cada una con un ancho de banda de 4kHz, y se utiliza modulación ASK binaria, la tasa máxima de transferencia posible es de 2,048Mbps.

Cada portadora puede alcanzar una tasa máxima de bits dada por: $r_{max} = BT$, con $BT = (1 + \rho)r_s$.

Para maximizar la tasa de transferencia, se considera ($\rho=0$). Entonces, con una modulación binaria (donde la tasa de bits $r_b = r_s$) y un ancho de banda de 4kHz por portadora, se tiene:

$$r_b = 4000 \frac{\text{symb}}{\text{sec}}$$

Multiplicando por las 512 portadoras, se obtiene una tasa total de transferencia de

$$r_b^{total} = 512 \cdot 4000 = 2,048 \text{Mbps}$$

Lo cual es una transferencia mucho menor a la que se quiere llegar. ($2,048 \text{Mbps} \ll 24 \text{Mbps}$)

Para conseguir una transferencia de $r_b^{total} = 3584 \text{Kbps}$ se utiliza una modulación 4-QAM. Al ser 512 portadoras, cada portadora debe tener $r_b = 7 \text{Kbps}$. Al mandar 2 bits por símbolo, $r_b = 2r_s$, $r_s^{portadora} = 3500 \text{bps}$. El pulso de transmisión tiene que ser de Nyquist. Por lo tanto su coeficiente de Roll-off va a ser:

$$BT = 4 \text{KHz} = r_s(1 + \rho)$$

Con $r_s = 3500 \text{bps}$, obtenemos $\rho = 0,143$

El pulso diseñado tiene que tener una $BER \leq 10^{-5}$, La constelación de la 4-QAM es la misma que la de QPSK, por lo tanto,

$$P_{e4-QAM} = P_{eQPSK} = Q\left(\sqrt{\frac{2P_T}{N_0 r_b}}\right) \leq 10^{-5}$$

Despejando la potencia de transmisión necesaria para que se obtenga una $BER \leq 10^{-5}$

$$P_T \geq Q^{-1}(10^{-5})^2 \cdot \frac{N_0 r_b}{2} \simeq 6,36 \cdot 10^{-8} \text{W}$$

Con $\frac{N_0}{2} = 10^{-12}$

Para poder tener una transferencia de 24Mbps con la estructura previamente dada y con el pulso previamente diseñado, necesitamos enviar más bits por símbolo.

La eficiencia espectral (η) es una medida que marca qué tan bien se aprovecha una banda de frecuencia para transmitir información. $\eta = \log_2(M)$

Como cada una de las 512 portadoras tienen 4kHz de Ancho de Banda, entonces se dispone de una $BW_{Total} = 2,048 \text{MHz}$

Al querer que $24 \text{Mbps} = r_b$ y $r_b = r_s \cdot \log_2(M)$

Entonces, ¿cuál es el r_s que disponemos?

Como el pulso es de Nyquist con $\rho = 0.143$, y tenemos una BW de 2,048MHz,

$$BW = r_s(1 + \rho) \longrightarrow r_s = \frac{BW}{1 + \rho}$$

Sustituyendo, $r_s = \frac{r_b}{\log_2(M)}$

$$r_b = \frac{BW}{1 + \rho} \cdot \log_2(M)$$

Despejando M,

$$\log(M) = 13,35 \implies M = 2^{13,35} = 10509$$

Como M toma valores potencias de 2, entonces el menor M, mayor a 10509 es $2^{14} = 16384$

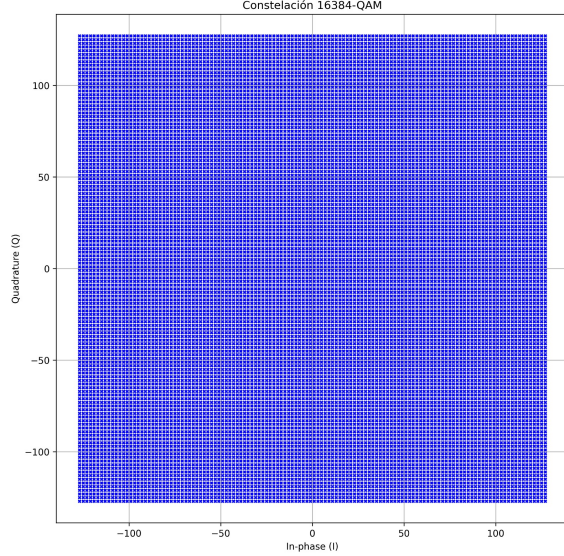


Fig. 12. 16384-QAM

II. PARTE II: MODULACIÓN DE PULSOS BANDABASE

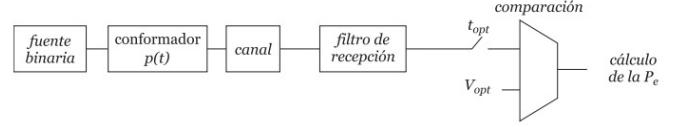


Fig. 13. Esquema del sistema de transmisión

1-El objetivo de esta sección es simular en GNU Radio el comportamiento de un sistema de transmisión de pulsos en banda base, como el que se observa en la figura 13.

En una primera instancia se consideró una forma de onda rectangular para el pulso conformador, mientras que en recepción se utilizó un filtro pasabajos.

Al correr del módulo de GNU, se observa el espectro de salida de la figura 14. La salida mostrada presenta una forma de sinc^2 expresada en decibeles, de calidad degradada o ruidosa. Esta salida resulta coherente dado que teóricamente vemos el espectro de la PAM asociada al sistema de transmisión, que en este caso tiene la forma expresada en la ecuación 1. Debido a la presencia del ruido, la forma de onda se ve levemente deformada.

$$G(f)_{PAM} = \frac{m_x^2}{T^2} \cdot |P(f)|^2 \cdot \sum_{-\infty}^{\infty} \delta(f - \frac{k}{T}) + \frac{\sigma_x^2}{T} \cdot |P(f)|^2 \quad (1)$$

Donde la media de la señal es cero, ya que está codificada en polar y los símbolos son equiprobables. '0' $\rightarrow -A$ y '1' $\rightarrow A$

$$m_x = P(a_k = -A) \cdot (-A) + P(a_k = A) \cdot A$$

$$m_x = \frac{1}{2}(-A) + \frac{1}{2}A$$

$$\Rightarrow m_x = 0$$

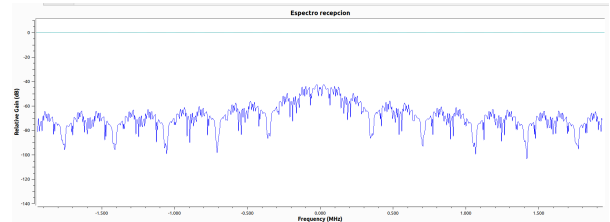


Fig. 14. Espectro PAM

En el flowgraph se observa un histograma de los valores de muestreo. La interfaz permite elegir una de entre las N muestras por símbolo. Lo ideal es elegir la muestra de manera que, en el histograma posterior al muestreo, se distingan claramente dos picos bien separados y centrados en valores opuestos (o lo más cercanos posible a esta configuración) con una varianza mínima, como se muestra en la Figura 19. Esto indica que, al momento de muestrear, se están diferenciando de

manera clara los dos niveles en recepción, que es precisamente el objetivo deseado. Al ir variando las elecciones de la muestra, se pueden observar tres o más picos en el histograma (Figura 15), lo que sugiere que en recepción se están identificando más de dos niveles, lo cual no es adecuado para una modulación binaria. Otro caso particular ocurre cuando los picos del histograma son anchos y presentan una forma similar a campanas gaussianas con alta varianza (Figura 16).

Aunque estos picos puedan estar correctamente centrados, su gran varianza indica una gran presencia de ruido y que los valores de recepción pueden variar mucho, lo que no es lo más conveniente para una correcta detección de los símbolos.

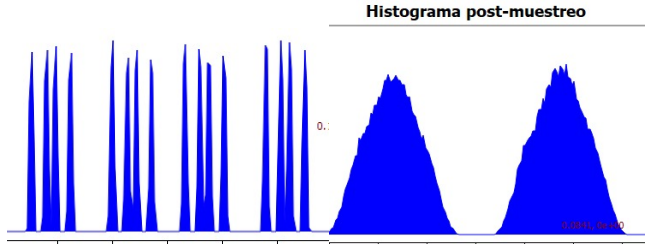


Fig. 15.

Fig. 16.

Además, el otro parámetro a tener en cuenta es el Bit Error Rate. Esta tasa nos indica cuántos bits fueron erróneamente transmitidos, se busca que la BER sea lo menor posible. Teniendo estos dos parámetros en consideración, para un sistema con un pulso rectangular como pulso de transmisión y un LPF como pulso de recepción, elegimos la muestra número uno. La muestra número uno fue la que produjo histogramas más consistentes (menor varianza) y obtuvo la menor tasa de error de bits ($BER_{log10} \approx -7.5$).

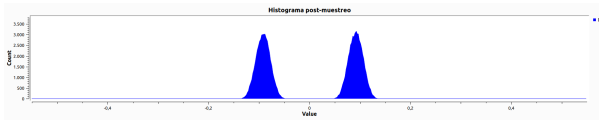


Fig. 17. Histograma de la muestra uno con Tx:Rectangular, Rx:LPF y $\alpha = 0.25$

Otro parámetro configurable en este sistema es el ancho de banda. El ancho de banda del filtro receptor está dado por

$$B_{Rx} = \frac{1 + \alpha}{2T_s}$$

Al ir haciendo pruebas, nos percatamos que valores altos del factor de Roll-off generan mejores resultados, creando histogramas con menor varianza. Aumentar el factor de Roll-off no evita que se genere ISI, solo mejora la presencia de ruido.

Repetimos el experimento, eligiendo la muestra óptima en las mismas condiciones que se hizo la 17, solo que en vez de tener un $\alpha = 0.25$, se aumentó a $\alpha = 1$. Las mejorías al subir el factor de Roll-off son notorias.

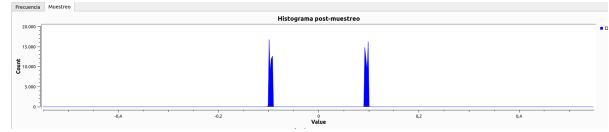


Fig. 18. Histograma de la muestra óptima con Tx:Rectangular, Rx:LPF y $\alpha = 1$

A. ¿Cuál es el mejor pulso?

Al explorar diversas combinaciones de pulsos en transmisión y recepción, se observa que el pulso SRRC proporciona una mejor distribución en el histograma para la muestra óptima y permite que el espectro del pulso recibido se defina con mayor claridad.

El SRRC está diseñado para cumplir con la condición de Nyquist, lo que significa que en los instantes de muestreo óptimos no hay interferencia entre símbolos (ISI).

La condición de Nyquist está dada por:

$$g(l \cdot T_s) = \begin{cases} 1 & \text{si } l = 0 \\ 0 & \text{si } l \neq 0 \end{cases} \quad (2)$$

Definiéndonos, $g(t) = p(t) * p(-t)$ y T_s periodo del muestreo optimo.

B. Parámetros del pulso

El parámetro 'Roll-off', controla el ancho de banda. Los valores de 'Roll-off' van entre cero y uno, para valores más cercanos al cero, el pulso se asemeja más al ideal. Los valores mayores ensanchan el espectro, pero hacen que el pulso decaiga más rápido en el tiempo. El "largo en símbolos del pulso" define cuántos períodos de símbolo T_s dura el pulso en el tiempo. Un pulso más largo implica una mejor aproximación a la respuesta ideal, con menor interferencia intersímbolo. Por eso, al reducir la cantidad de símbolos a tres, se nota que en el histograma se generan muestras en valores que no son -A ni A.

En las siguientes imágenes se puede ver el ISI, ya que se graficó el histograma con el mismo coeficiente de 'Roll-Off' y seleccionamos la misma muestra pero con diferente largo de símbolo. Se nota que el histograma, con cincuenta y un símbolos, las muestras caen en el mismo valor, mientras que con tres símbolos, se aprecia una determinada varianza.

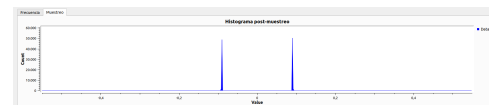


Fig. 19. Histograma con largo de símbolo igual a cincuenta y uno.

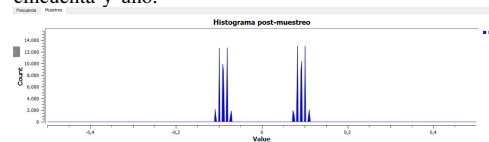


Fig. 20. Histograma con largo de símbolo igual a tres.

Al reducir los símbolos del pulso, los pulsos son más cortos y se necesita menos tiempo para procesar los pulsos. La manera de disminuir el ISI para pulsos más cortos es aumentar el coeficiente de 'Roll-off'. Al aumentar este coeficiente, el espectro se ensancha, lo que genera la necesidad de mandar más ancho de banda.

$$\text{Ancho de Banda} = \frac{1}{2 \cdot T_s} + \beta = \frac{1}{2 \cdot T_s} + \frac{\rho}{2 \cdot T_s} = \frac{1+\rho}{2 \cdot T_s}$$

donde β es el ancho de banda por exceso, o "excess bandwidth", y ρ es el coeficiente de "Roll-off"

C. Potencia del ruido y umbral óptimo para diferentes probabilidades de bit

Al aumentar la potencia del ruido, el espectro del pulso se vuelve menos perceptible, ya que la potencia del ruido se hace comparable con la del pulso.

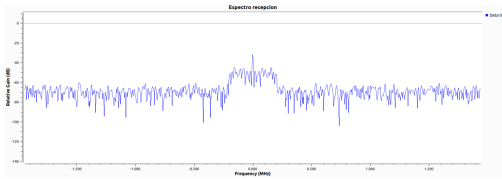


Fig. 21. Espectro al subir la potencia del ruido a -16dB y $q=0,94$

Cuando se desequilibra mucho la probabilidad de '1' que '0' o viceversa, se genera un pico en el centro del espectro. Al desequilibrar la probabilidad, la media de la señal deja de valer cero, lo que genera una componente en continua en la señal, la cual se manifiesta como un pico en 0Hz.

Para calcular la probabilidad de error, debemos considerar la probabilidad de que, habiendo enviado un valor, se haya decodificado el otro.

Para analizar las posibles causas del error, examinamos el esquema Transmisor-Receptor de la figura 22.

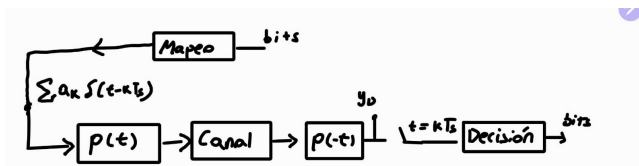


Fig. 22. Esquema Transmisor-Receptor

Cuando se envía un bit, este se modula con el pulso transmisor $p(t)$, atraviesa el canal, donde se le suma un ruido AWGN (Additive White Gaussian Noise) con densidad espectral de potencia $\frac{N_o}{2}$, y luego se demodula con el mismo pulso apareado, $p(-t)$.

Antes de muestrear la señal, obtenemos y_D , la cual está compuesto por $y_D(t) = a_k + N_D(t)$, a_k como el valor del bit transmitido y $N_D(t)$ el ruido AWGN.

El ruido AWGN, al ser gaussiano, se modela como una distribución normal de media cero y varianza σ^2 .

Dado que el pulso de transmisión y recepción es un pulso

SRRC (Square-Root Raised Cosine), el cual está normalizado y cumple la propiedad de Nyquist, los valores de los símbolos transmitidos no se ven alterados en el muestreo, por lo que después del filtro de recepción los valores posibles son A o $-A$.

Para determinar la potencia del ruido, σ^2 , debemos calcular la energía del AWGN filtrado por el pulso, lo que se obtiene mediante la integral: $\sigma^2 = \int \frac{N_o}{2} \cdot |P(f)|^2 df$.

Como $\frac{N_o}{2}$ es constante respecto a la frecuencia y el pulso SRRC está normalizado ($\int |P(f)|^2 df = 1$) entonces, $\sigma^2 = \frac{N_o}{2}$.

Finalmente, dado que a_k es un valor fijo que toma valores A o $-A$ y $N_D(t)$ sigue una distribución gaussiana, la variable $y_D(t)$ también sigue una distribución gaussiana, centrada en a_k con varianza igual a la de $N_D(t)$.

Los cálculos para hallar el valor del umbral óptimo se encuentran en la sección del anexo III-A.

III. ANEXOS

A. Cálculo del Valor Óptimo del Umbral de Decisión para Distintos Valores de q

Definimos la probabilidad de error como: $P(\text{Error})$

Al separarla por casos posibles:

$$P(\text{error}) = P(\text{error} \cap (A_k = A)) + P(\text{error} \cap (A_k = -A))$$

Aplicando la regla de la probabilidad total,

$$P(\text{error}) = P(\text{error}/A_k = -A) \cdot P(A_k = -A) + P(\text{error}/A_k = A) \cdot P(A_k = A)$$

Sustituyendo cada término,

$$P_e = P(0)P_{e_0} + P(1)P_{e_1} \quad (3)$$

Donde:

$$P(1) = q \quad (4)$$

$$P(0) = 1 - q \quad (5)$$

Las probabilidades de error se expresan como:

$$P_{e_0} = P(Y_D > V_T \mid Y_D \sim \mathcal{N}(-A, \sigma)) = P(-A + N_D(kT_b) > V_T) \quad (6)$$

$$P_{e_1} = P(Y_D < V_T \mid Y_D \sim \mathcal{N}(A, \sigma)) = P(A + N_D(kT_b) < V_T) \quad (7)$$

Utilizando la función Q:

$$P_{e_0} = \int_{V_T}^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y+A}{\sigma}\right)^2} dy = Q\left(\frac{V_T + A}{\sigma}\right) \quad (8)$$

$$P_{e_1} = \int_{-\infty}^{V_T} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y-A}{\sigma}\right)^2} dy = Q\left(\frac{A - V_T}{\sigma}\right) \quad (9)$$

Para minimizar P_e , buscamos el punto crítico resolviendo:

$$\frac{\partial P_e}{\partial V_T} = 0 \quad (10)$$

Aplicando la regla de Leibniz:

$$\frac{\partial P_e}{\partial V_T} = -P(0) \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{V_T+A}{\sigma}\right)^2} + P(1) \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{V_T-A}{\sigma}\right)^2} \quad (11)$$

Igualando a cero:

$$\ln\left(\frac{P(0)}{P(1)}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{V_T + A}{\sigma}\right)^2 = -\left(\frac{V_T - A}{2 \cdot \sigma}\right)^2 \quad (12)$$

Despejando V_T óptimo:

$$2\sigma^2 \ln\left(\frac{P(0)}{P(1)}\right) = 4AV_{T_{\text{opt}}} \quad (13)$$

$$\Rightarrow V_{T_{\text{opt}}} = \frac{\sigma^2}{2A} \ln\left(\frac{1-q}{q}\right) \quad (14)$$

B. Referencias sobre el trabajo integrador

Ghanem, A. (2022). Security Analysis of Rolling Code-based Remote Keyless Entry Systems (Doctoral dissertation).

Verdult, R., Garcia, F. D., & Balasch, J. (2012). Gone in 360 seconds: Hijacking with Hitag2. In 21st USENIX Security Symposium (USENIX Security 12) (pp. 237-252).

Guo, J., Tang, B., Xu, J., Li, Q., Qin, Y., & Li, X. (2025). A Secure Communication Protocol for Remote Keyless Entry System with Adaptive Adjustment of Transmission Parameters. arXiv preprint arXiv:2504.09527