



# AI総合演習

第3回：機械学習の背景・数理

瓜生真也（デザイン型AI教育研究センター・助教）

今日の目標

機械学習で用いる

数学の基礎をPythonで学ぶ

# 【課題】 講義中に扱う.ipynbを提出

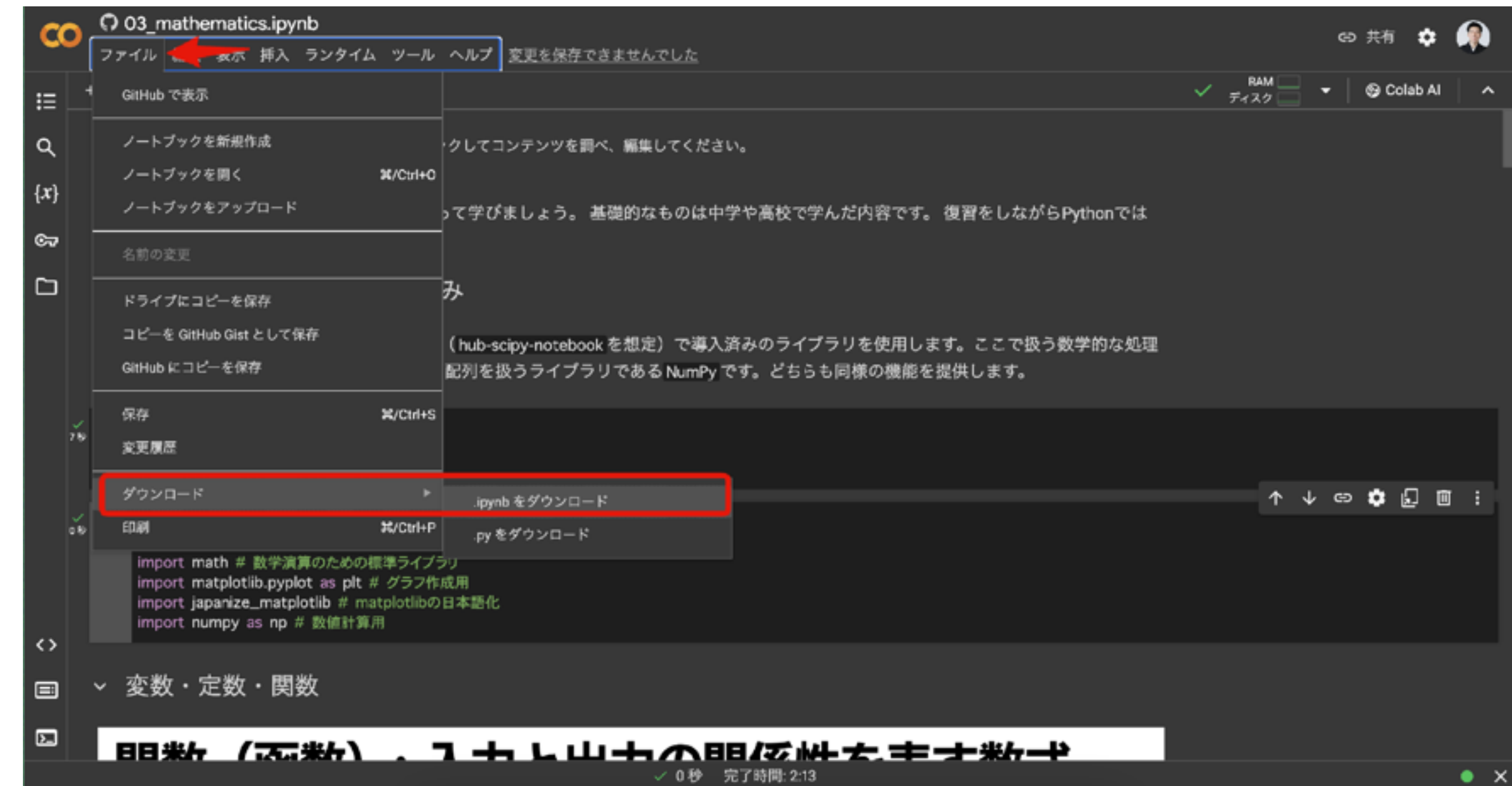
提出期限: 来週の講義開始前まで

manabaのレポートとして提出してください

## 手順

メニュー上の「ファイル」から「ダウンロード」

1. 添付ファイルをダウンロード
2. Colabへアップロード
3. コードやコメントを記述、実行
4. 保存
5. ダウンロードしたファイルをmanabaへアップロード



## 注意: ファイル名は英数字のみにすること

日本語（漢字、片仮名、平仮名）、全角英数字、スペース、記号等は使わない

## ファイルをダウンロードしても開けなくても問題ない（気にしない）

内容の確認、編集はJupyterHub上で行う

# 機械学習における数学の必要性

# 人工知能プログラミングに数学は必要か

→この講義や「数理・データサイエンス・AI教育」においては、数学は必要

ライブラリ、フレームワークの利用を利用することで、  
数学の知識がなくても人工知能プログラミングは可能→数学は必要ない

📱 スマートフォン… 動作する仕組みを理解しなくても利用できる

多く的人是ブラックボックス（中身がわからない）状態

情報科学、プログラミングの知識があることでスマートフォンへの理解が深まる

## 機械学習・深層学習

背景・仕組みの理解を深める

応用、開発、研究を行う

→数学の知識が必要

# 機械学習で使われる主な数学

## 線形代数

ベクトルや行列、テンソルによってデータの構造を表現、演算を可能にする  
多次元のデータを処理するために多次元の変数により定義された関数を用いる

## 微分・積分

勾配降下法（損失関数の最小とするような最適なモデルのパラメータを見つけるアルゴリズム）において微分を用いる。具体的には損失関数の勾配（傾き）を計算し、勾配が最小（または最大）となる点に進むことで、最適なパラメータを求める

機械学習のさまざまなアルゴリズム（正則化、カーネル法、動的計画法など）で微分・積分が利用される

## 確率・統計

関数のパラメータ（重み）を最適化する際に確率論的な手法を用いる

データの分布、特性を理解するために基本的な統計量（平均、分散、相関など）を用いる

データの特徴に応じた前処理を適用することが可能となる

大学で学ぶ内容もたくさん。まずは中学・高校で学んだ内容を復習しよう




# 機械学習における教師あり学習

例) 野菜の価格を予測するモデル

(参照) 第一回の講義


知りたい情報

野菜の価格 

利用可能な情報

野菜の産地

気温

降水量など 

利用可能な情報（入力 $x$ ）をもとに野菜の価格（出力 $y$ ）を予測する

$$y = f(x)$$

のようなモデル式を考える→学習

## 学習データ

日付	品目	産地	気温(℃)	日降水量(mm)	価格 1kgあたり
4/30	トマト	熊本県	22.4	0	365
4/30	キュウリ	群馬県	19.5	20	320
⋮					
10/8	カボチャ	北海道	8.6		192

→予測の対象となる価格と  
その他のデータの関係から  
価格を予測するモデルを構築する

## モデルの予測

日付	品目	産地	気温	日降水量 (mm)	価格予測値 (モデルA)	価格予測値 (モデルB)	価格予測値 (実際の値)
4/20	トマト	鹿児島県	21.8	14	326	362	357
4/30	キュウリ	福島県	19.5	3	283	256	250

→モデルAとモデルBどちらが優れたモデル？

モデルA  $price = temperature_{x1} + b$

モデルB  $price = temperature_{x1} + precipitation_{x2} + \epsilon$

# 回帰直線と回帰係数

2つの変数  $(x, y)$  の関係を説明する回帰直線  $y = ax + b$  (一次関数) を考える

## 回帰係数

$a$  傾き

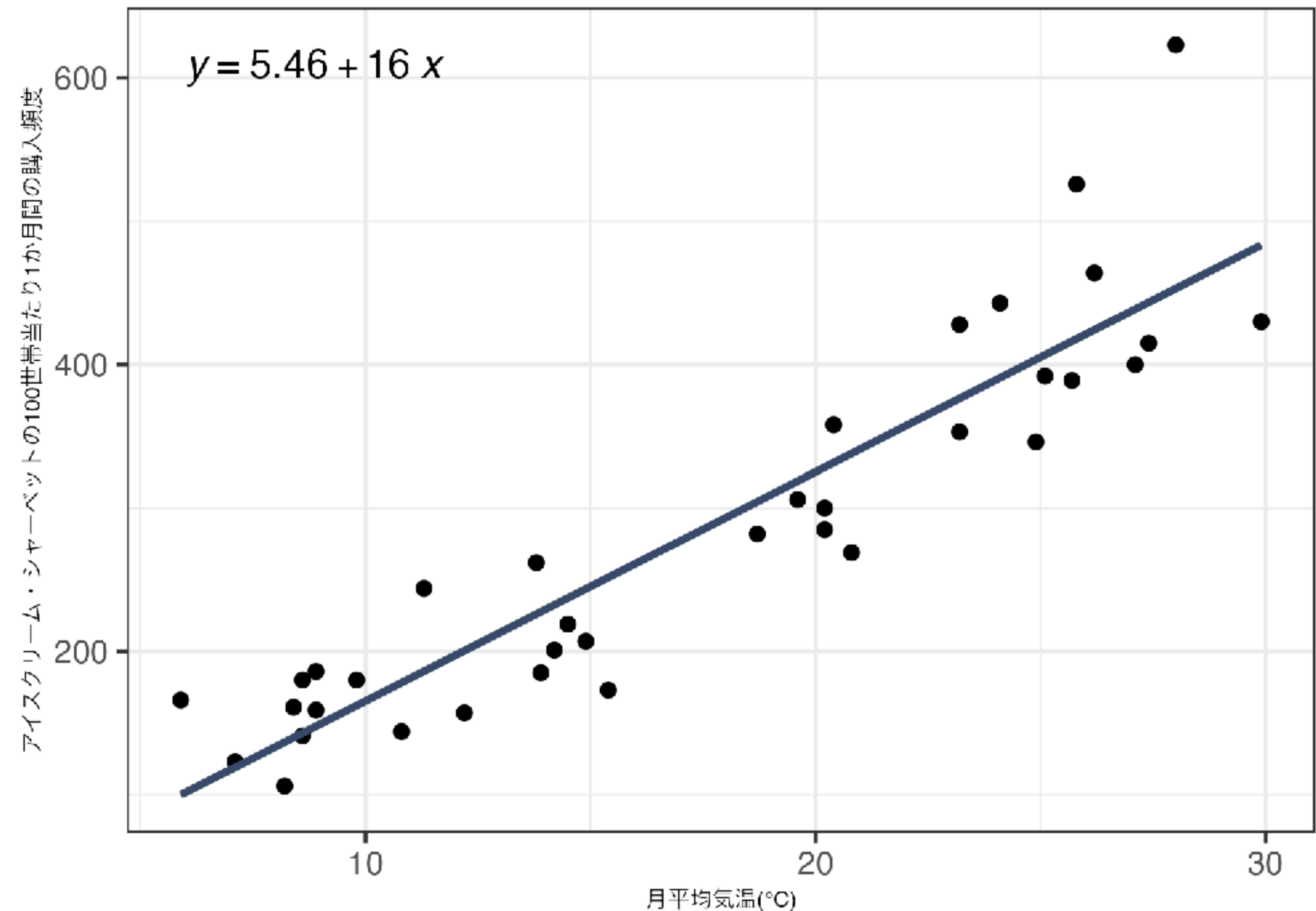
$b$  切片 ( $x$  が0のときの $y$  の値)

$a$   $b$  モデルの係数、重みまたはパラメータと呼ぶ

$$a = \beta_0$$

$$b = \beta_1$$

気温とアイスクリーム・シャーベットの売上の関係





# 回帰直線

「切片aと傾きbからなる回帰直線上のxの値によってyの値が決まる」と考える

平均気温が高くなればアイスの売り上げが上がる？

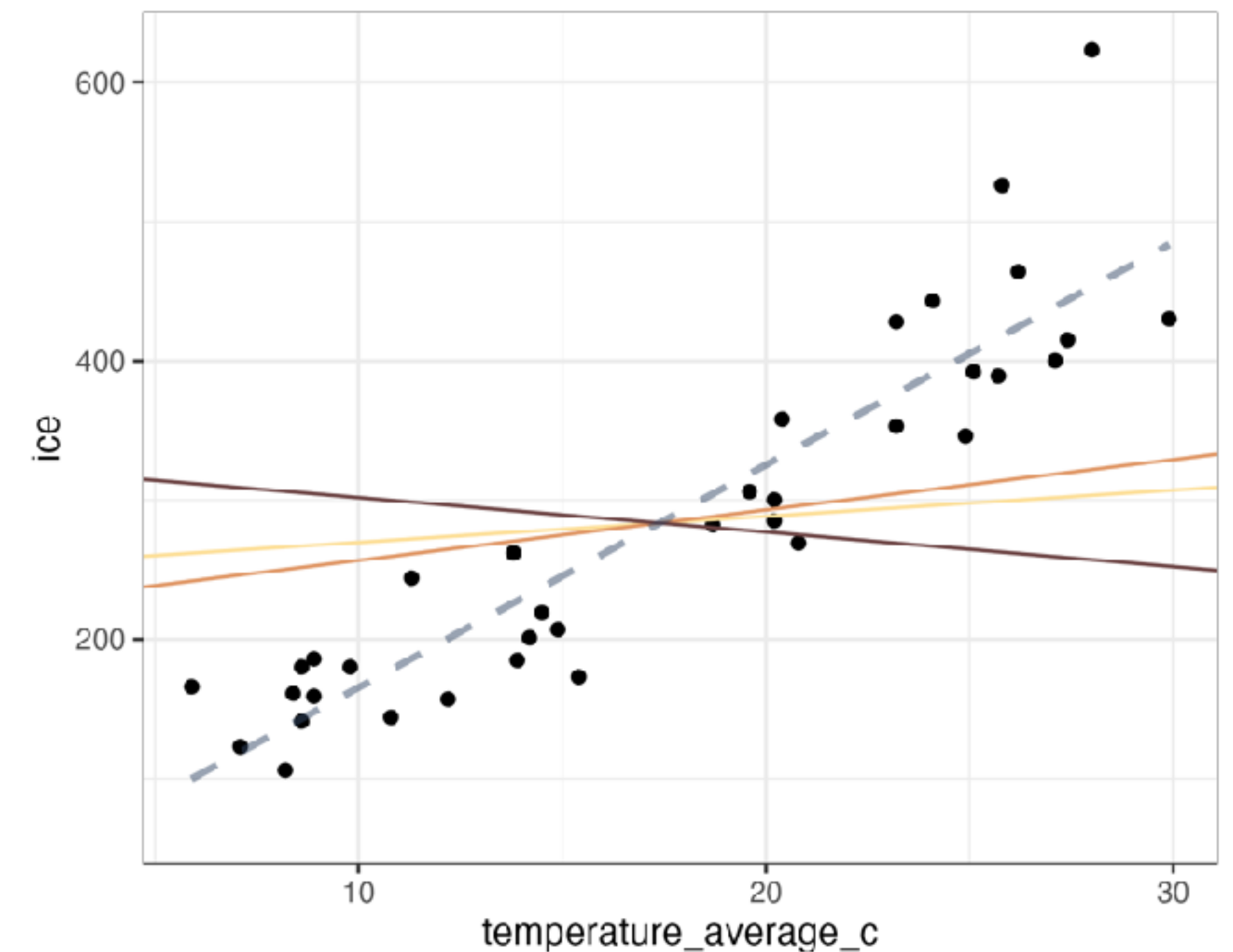
気温が1℃上がればアイスの購入頻度が16増える

回帰直線の係数と気温からアイスの売り上げを予測する

アイスの売り上げ =  $5.46 + 16.0 \times 30$  (気温)

切片と傾きが異なれば回帰直線の形も異なる

2つの変数の関係を最も説明できる回帰直線とは？



さまざまな回帰係数からなる回帰直線

# 最小二乗法

第四回で扱います

回帰直線から残差 (residual, 観測値 $y$  から予測値 $\hat{y}$  のズレ… 誤差) を求める

予測値  $\hat{y}$  は回帰直線の係数から推定する

$$\hat{y}_i = 5.46 + 16x_i$$

$$x_1 = 7.1$$

$$\hat{y}_1 = 5.46 + 16 \times 7.1$$

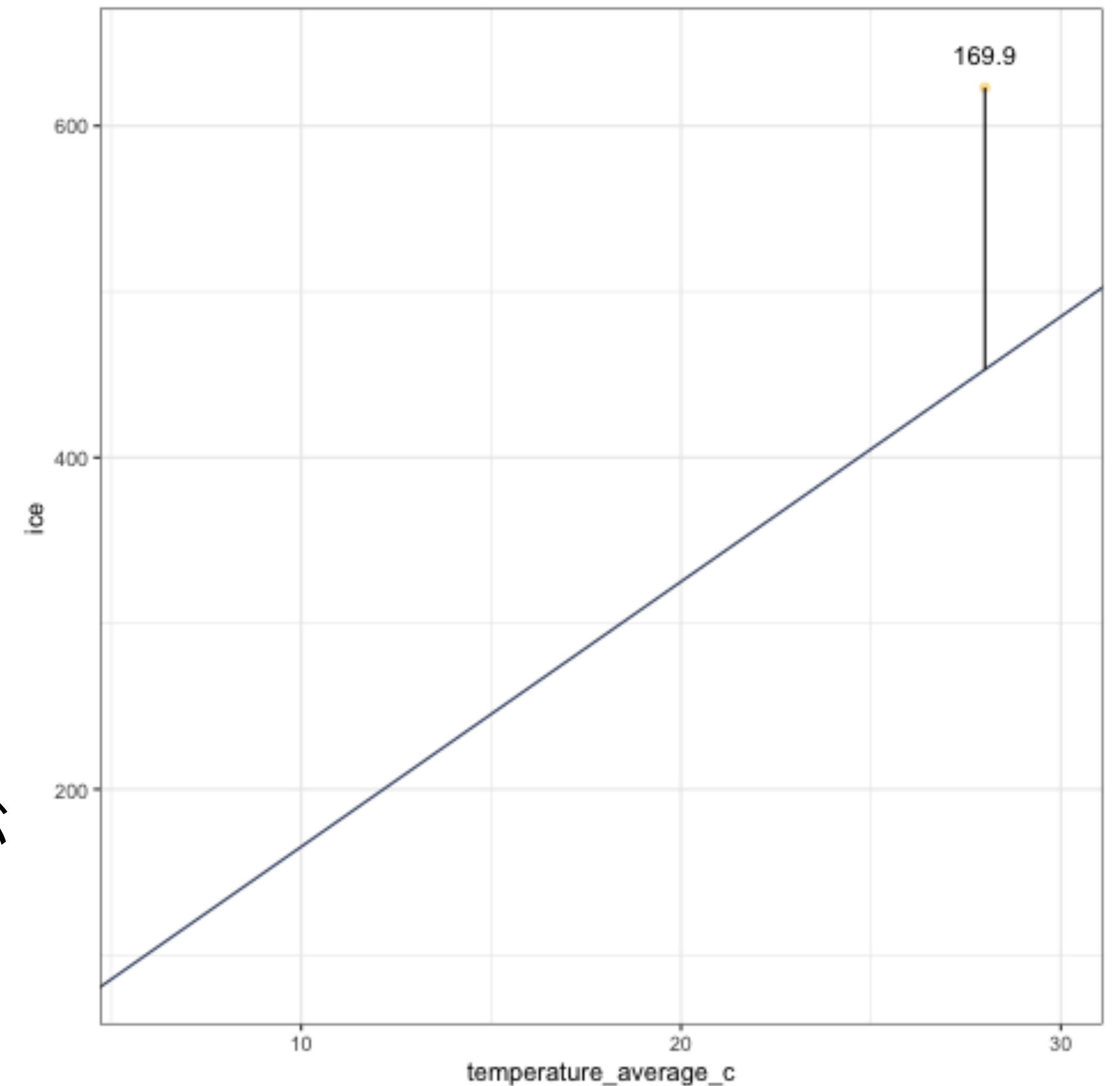
$$\hat{y}_1 = 118.9$$

$$residual_1 = y_1 - \hat{y}_i$$

$$y_1 = 123$$

$$123 - 118.9$$

残差平方和 (各残差を二乗した結果を合計する) が  
**最小となる定数項** (傾きと切片) を求める



残差平方和を最小にすることにより当てはめた回帰直線と気温。縦の棒が残差を示す。

# 中学・高校で学んだ数学の復習

# Pythonで数学を扱うライブラリ

## math

標準ライブラリ

基本的な数学関数や定数、演算機能を提供

## NumPy

数値計算、多次元配列を扱うライブラリ

C言語での実装→高速な演算

Pythonでの機械学習や深層学習のためのライブラリで広く使われる

互換性やデータのやり取りが容易

線形代数や統計処理のための機能も備える（mathより広範囲）

 <https://numpy.org/>

pipコマンドでのインストール

```
pip install numpy
```

Python内での呼び出し

```
 import numpy as np
```

それぞれ異なる方法（同じものもあり）で利用する

# 関数（函数）：入力と出力の関係性を表す数式

$$\underset{\text{入力}}{x} = \underset{\text{変換}}{f(x)} = \underset{\text{出力}}{y}$$

入力  $x$  が決まると、  
通常は出力  $y$  も一つの値に決まる

🍅 トマト（大）1玉… 100円（税抜き）消費税率10%

3個買うと …

5個買うと …

$$y \text{ (支払う金額)} = (100 + (100/10)) \times 3 \qquad y = (100 + (100/10)) * 5$$

$$f(3)=330$$

$$f(5)=550$$

この関数では、トマト（大）が一玉100円

消費税率10% であることは変わらない→定数

トマトを何個買うかは客によってさまざまな値を取る→変数

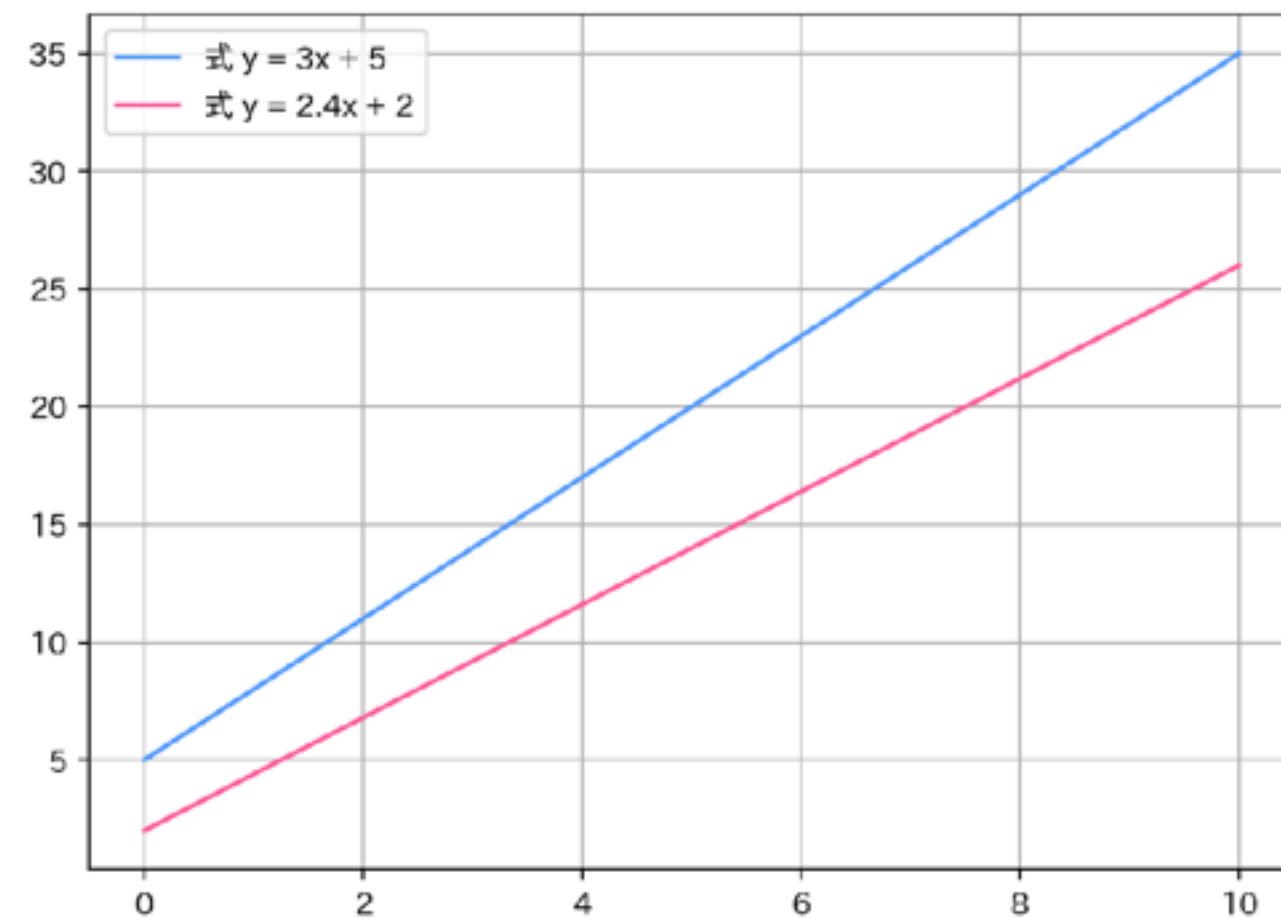
購入するトマトの数が増えると支払う金額も増加する



# 一次関数

$$y = ax + b$$

$a$ （傾き）と  $b$ （切片、 $x=0$ のときの $y$ の値）は定数  
 $x$  変数



一次関数のグラフは直線

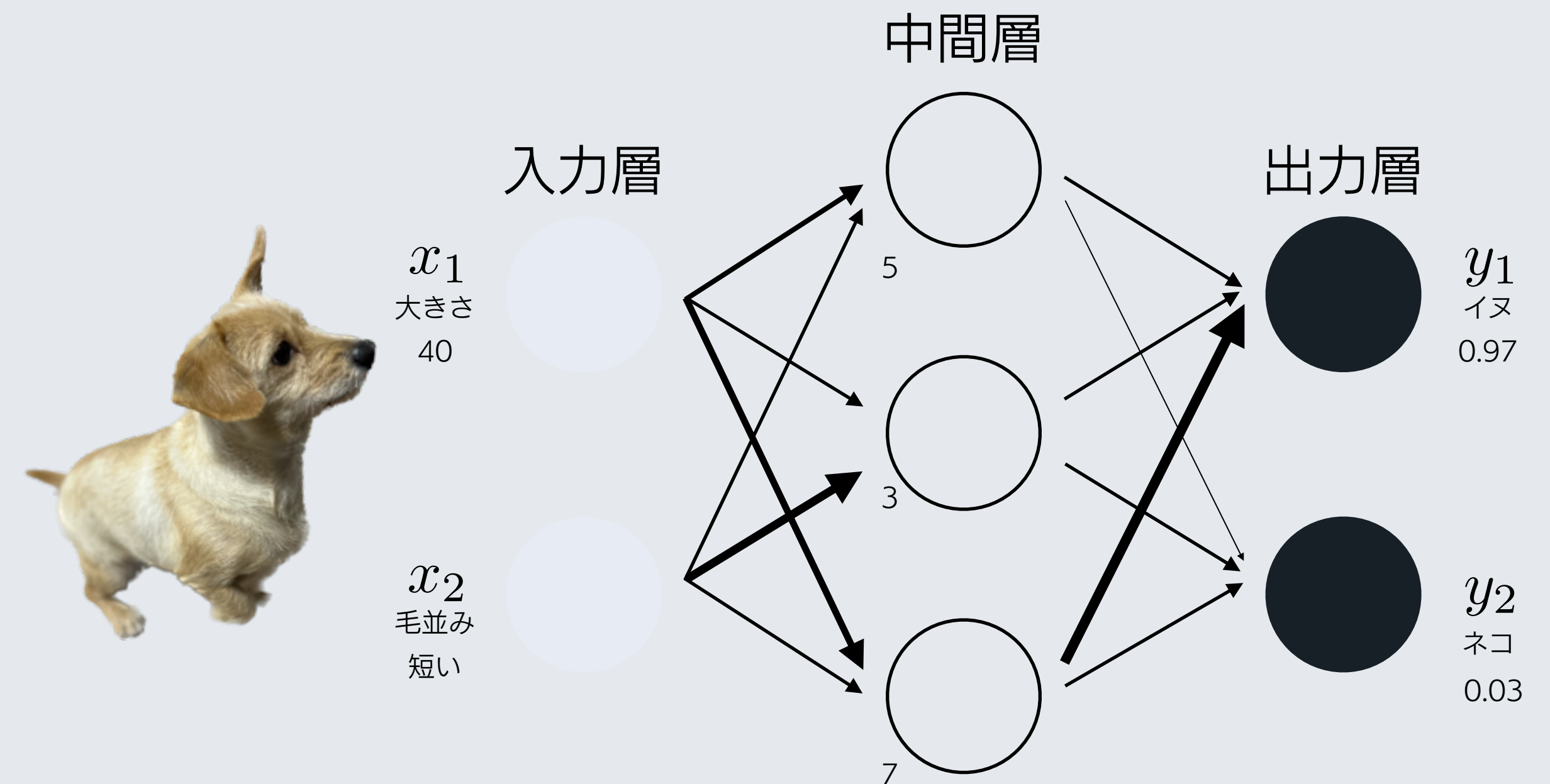
定数が異なると変数が  
同じ値であっても出力は変わる

$$f(x) = ax + b$$

機械学習・深層学習では

コンピュータが変数としての「重み」を学習する過程

学習モデルを利用するときは、定数として「重み」が用いられる



階層型ニューラルネットワーク。各丸はユニット、線の太さは結合強度を示す。  
入力層のユニットから中間層のユニットへ、中間層から出力層へ数値を変換して受け渡す。



# もっと自由な「関数」を

二次関数（多項式関数）

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

有理関数

$$f(x) = x + \frac{1}{x^2 - 3}$$

割り算で表現  
分子と分母は多項式

ReLU  
(区分線形関数の例)

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{if } x > 0 \\ 0 & \text{if } x \leq 0 \end{cases}$$

$x$ の正負によって  
場合分け

合成関数

$$h(x) = f(g(x))$$

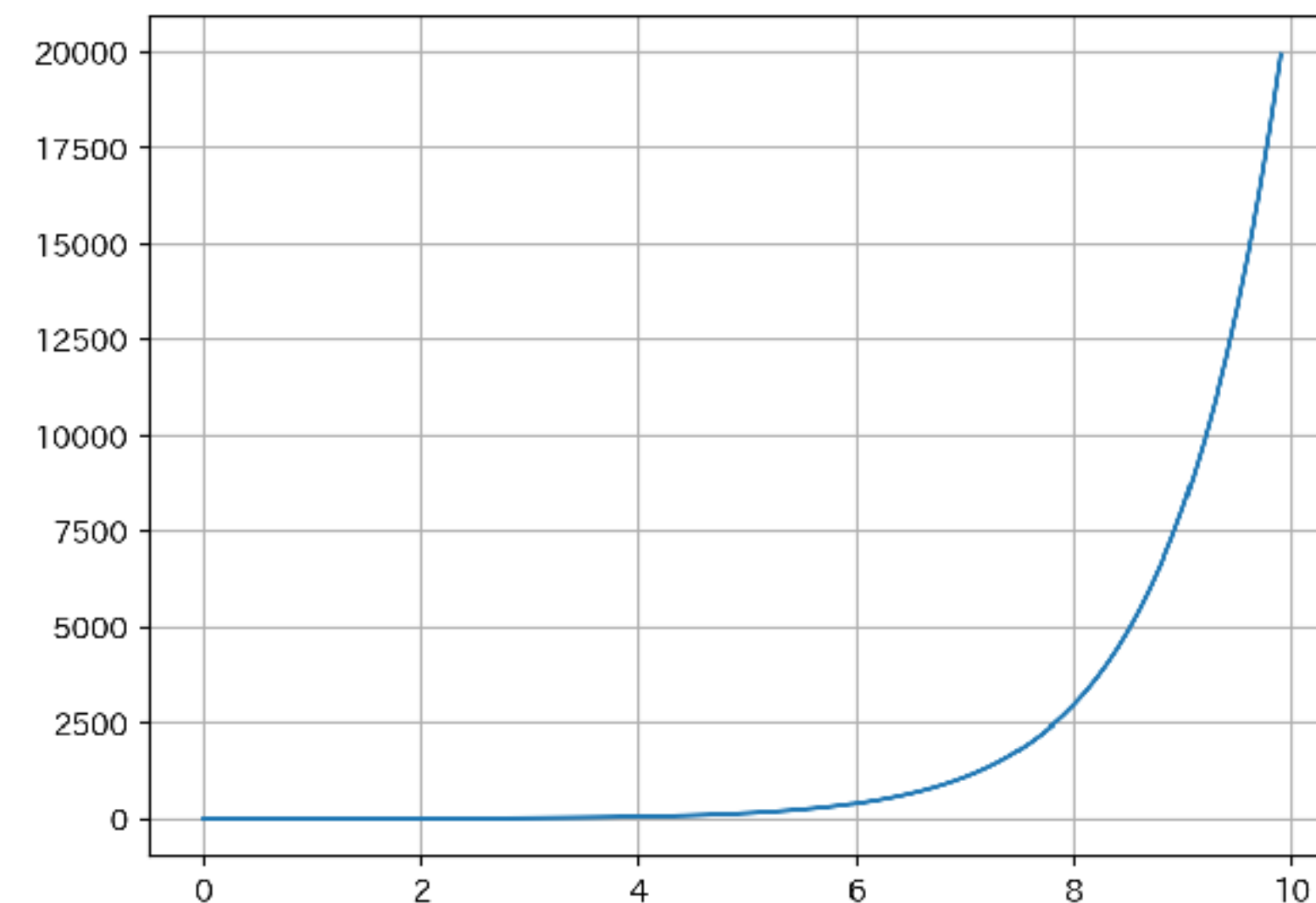
2つの関数  
 $g(x)$   $f(x)$

# 指数関数

指数を変数とした関数  $f(x) = a^x$   $a > 0, a \neq 1$

**特徴**  $x$ の値が大きいほど、出力の値も大きくなる（単調増加）

出力は常に正の値



指数関数のグラフ

指数… ある数を何乗したかを表す数

## ネイピア数、自然対数の底( $e$ )

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n \quad \lim_{n \rightarrow \infty} n \text{ を無限大に近づける}$$

# 対数関数

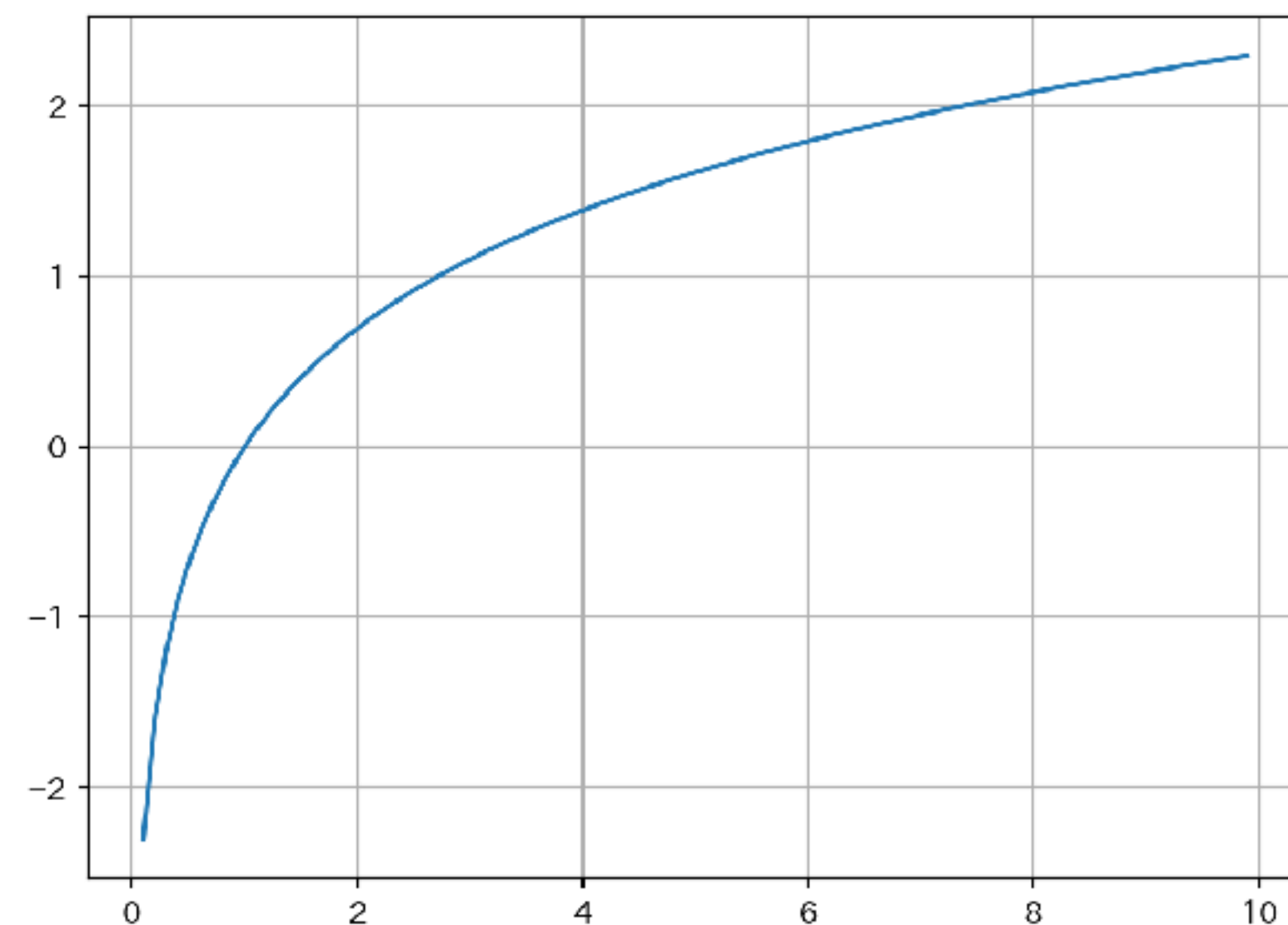
指数関数の逆関数（指数関数の入力に対数関数の出力）  $f(x) = \log_a x$

**特徴**  $x$ の値が大きいほど、出力の値は大きくなる（単調増加）。  
 $x$ の値が大きくなるほど増加速度は減少する

指数関数の出力が正の値になるため、入力は正の値のみ

底（定数）には自然対数の底  $e = 2.718281828\dots$   
が使われる（ $e \doteq 2.7$ ）

底が 10 の対数関数は常用対数



対数関数のグラフ

# 線形代数の理解に向けて

# ベクトル

2つ以上の数値からなる一次元の数値の組（大きさ、方向を持つ）

1つのベクトルを構成する個々の数をベクトルの**要素**あるいは**成分**と呼ぶ

1つの成分しかもたないものは「スカラー」として区別する（大きさのみで方向を持たない）

要素の表記法による分類

**列（または縦）ベクトル**

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

**行（または横）ベクトル**

$$\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n)$$

# 行列

複雑な計算もシンプルに表現可能

ベクトルの概念を拡張

$m \times n$  行列

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

転置 縦と横を入れ替える

$$\mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

対角成分（1,5,9）は変わらず、  
非対角成分（2と4、3と7、6と8）が入れ替わる

行列にTの添え字を付ける



# ノルム

ベクトルの「大きさ」や「距離」を測定する指標

距離が近いデータ… 類似している

## L<sub>1</sub>ノルム（絶対値ノルム）

ベクトルの各成分の絶対値の総和

$$\|a\| = |a_1| + |a_2| + \dots + |a_n|$$

縦棒で囲まれる値は絶対値を示す

```
np.linalg.norm(vector, ord=1)
```

## L<sub>2</sub>ノルム（ユークリッドノルム）

各成分の二乗して総和を取り、平方根を求める

$$\|a\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}$$

```
np.linalg.norm(vector, ord=2)
```

ノルムは縦棒 2 本で囲んで表現する

# 参考資料・URL

目 石川聡彦 『人工知能プログラミングのための数学がわかる本』  
(2018) KADOKAWA. ISBN: 978-4-04-602196-0

瓜生居室: あり（電子版）、徳大図書館: あり、市立図書館: なし、県立図書館: なし

目 椎名洋, 姫野哲人, 保科架風(著), 清水昌平(編) 『データサイエンスのための数学』  
(2019) 講談社. ISBN: 978-4-06-516998-8

瓜生居室: あり（電子版）、徳大図書館: なし、市立図書館: なし、県立図書館: なし

目 八谷大岳 『ゼロからつくるPython機械学習プログラミング入門』  
(2020) 講談社. ISBN: 978-4-06-520612-6

瓜生居室: あり（電子版）、徳大図書館: なし、市立図書館: なし、県立図書館: なし

目 吉田拓真, 尾原颯 『現場で使える!NumPyデータ処理入門：機械学習・データサイエンスで役立つ高速処理手法』  
(2018) 翔泳社. ISBN: 978-4-7981-5591-3

瓜生居室: あり（電子版）、徳大図書館: なし、市立図書館: なし、県立図書館: なし

赤穂昭太郎ほか（著）『応用基礎としてのデータサイエンス: AI×データ活用の実践』  
(2023) 講談社. ISBN: 978-4-06-530789-2

瓜生居室: あり（電子版）、徳大図書館: なし、市立図書館: なし、県立図書館: なし

