Costo en multiplicaciones de la función `polyval`

Uri Groisman

3 de diciembre de 2025

Ejercicio 1. Supongamos que calcular x^i cuesta $i-1$ multiplicaciones. Deducir el número total de multiplicaciones necesarias para evaluar, mediante el algoritmo `polyval` definido arriba, un polinomio de grado d.

La función `polyval(c,x)` evalúa el polinomio en el punto x.

```
polyval(c, x) = sum([c[i]*x^(i-1) for i in 1:length(c)])
```

Supongamos que calcular x^i cuesta $i-1$ multiplicaciones. Deducir el número total de multiplicaciones necesarias para evaluar, mediante este algoritmo, un polinomio de grado d.

$$\texttt{length}(c) = d + 1$$

y que estamos evaluando

$$p(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_d x^d = \sum_{k=0}^{d} c_k x^k,$$

donde $c_k = c[k+1]$.

El enunciado indica que calcular x^i cuesta $i-1$ multiplicaciones. Queremos determinar cuántas multiplicaciones realiza el algoritmo `polyval` para evaluar un polinomio de grado d.

1. Costo de calcular las potencias de x.

Para cada término $c_k x^k$ (con $k = 0, 1, \ldots, d$) es necesario disponer de la potencia x^k. Consideramos el costo de calcular explícitamente cada potencia:

- $x^0 = 1$: no requiere multiplicaciones (0).
- Para $k \geq 1$, por hipótesis, calcular x^k cuesta $k-1$ multiplicaciones.

Por lo tanto, el número total de multiplicaciones para obtener todas las potencias $x^0, x^1, \ldots, x^d$ es

$$\sum_{k=1}^{d} (k-1).$$

Renombrando el índice $m = k-1$, cuando k recorre $\{1, \ldots, d\}$, m recorre $\{0, \ldots, d-1\}$. Entonces

$$\sum_{k=1}^{d}(k-1) = \sum_{m=0}^{d-1} m.$$

Como se trata de la suma de una progresión aritmética,

$$\sum_{m=0}^{d-1} m = \frac{(d-1)d}{2}.$$

Así, el costo total en multiplicaciones asociado al cálculo de todas las potencias x^k es

$$M_{\text{potencias}}(d) = \frac{(d-1)d}{2}.$$

2. Costo de multiplicar por los coeficientes.

Cada término del polinomio es de la forma

$$c_k x^k.$$

Una vez calculada la potencia x^k, obtener el producto $c_k x^k$ requiere una multiplicación.

Hay $d+1$ coeficientes $c_0, c_1, \ldots, c_d$, por lo que se realizan

$$M_{\text{coef}}(d) = d + 1$$

multiplicaciones para formar todos los productos $c_k x^k$.

3. Número total de multiplicaciones.

Sumando ambas contribuciones, el número total de multiplicaciones que realiza el algoritmo `polyval` para evaluar un polinomio de grado d es

$$N_{\text{mult}}(d) = M_{\text{potencias}}(d) + M_{\text{coef}}(d) = \frac{(d-1)d}{2} + (d+1).$$

Desarrollamos y simplificamos:

$$\frac{(d-1)d}{2} + (d+1) = \frac{d^2-d}{2} + \frac{2d+2}{2} = \frac{d^2-d+2d+2}{2} = \frac{d^2+d+2}{2}.$$

En conclusión, el número de multiplicaciones requerido por el algoritmo `polyval` para evaluar un polinomio de grado d es

$$\boxed{N_{\text{mult}}(d) = \frac{d^2+d+2}{2}.}$$

Obsérvese que este costo crece como $\mathcal{O}(d^2)$, en contraste con el método de Horner, que evalúa el mismo polinomio usando únicamente d multiplicaciones y d sumas.