Ejercicio 2

Enunciado. Mostrar (por inducción) que la evaluación de un polinomio de grado d puede hacerse con d multiplicaciones y d sumas.

Sea el polinomio

$$p(x) \;=\; a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_dx^d, \qquad a_d \neq 0.$$

Queremos probar que existe un algoritmo que, dados x y los coeficientes $a_0, \ldots, a_d$, calcula $p(x)$ usando exactamente d multiplicaciones y d sumas.

Reescritura (forma de Horner). Todo polinomio de grado d puede escribirse en forma anidada como

$$\begin{aligned} p(x) &= a_0 + x(a_1 + x(a_2 + \cdots + x(a_{d-1} + xa_d)\ldots)) \\ &= (((a_dx + a_{d-1})x + a_{d-2})x + \ldots)x + a_0. \end{aligned}$$

Esta forma sugiere el siguiente esquema iterativo:

$$\begin{cases} b_d = a_d, \\ b_k = a_k + x\,b_{k+1}, \quad k = d-1, d-2, \ldots, 0, \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad p(x) = b_0.$$

En cada paso $b_k = a_k + xb_{k+1}$ se realiza exactamente *una* multiplicación (xb_{k+1}) y *una* suma (sumar a_k).

Demostración por inducción.

Proposición. Para todo entero $d \geq 0$, la evaluación de un polinomio de grado d puede realizarse con d multiplicaciones y d sumas.

Caso base $d = 0$. Si $d = 0$, el polinomio es constante:

$$p(x) = a_0.$$

Evaluar $p(x)$ consiste simplemente en devolver a_0, sin realizar multiplicaciones ni sumas. Esto coincide con la afirmación para $d = 0$: se requieren 0 multiplicaciones y 0 sumas. El caso base es válido.

Hipótesis inductiva. Supongamos que la afirmación es verdadera para grado $d-1$:

> Todo polinomio $q(x)$ de grado $d-1$ puede evaluarse usando exactamente $d-1$ multiplicaciones y $d-1$ sumas.

Paso inductivo. Sea ahora $p(x)$ un polinomio de grado d. Podemos escribirlo como

$$p(x) = a_0 + x\,q(x),$$

donde

$$q(x) = a_1 + a_2 x + \cdots + a_d x^{d-1}$$

es un polinomio de grado $d-1$.

- Por la hipótesis inductiva, podemos evaluar $q(x)$ usando $d-1$ multiplicaciones y $d-1$ sumas.
- Una vez conocido $q(x)$, para obtener $p(x)$ realizamos:
  - una multiplicación adicional: $x \cdot q(x)$,
  - una suma adicional: $a_0 + xq(x)$.

En total, para el polinomio $p(x)$ de grado d usamos

$$(d-1)+1 = d \quad \text{multiplicaciones}, \qquad (d-1)+1 = d \quad \text{sumas}.$$

Por lo tanto, la afirmación también es válida para grado d.

Como el caso base $d=0$ es cierto y el paso inductivo $d-1 \Rightarrow d$ es válido, por inducción matemática se concluye que:

> Para todo $d \geq 0$, la evaluación de un polinomio de grado d puede realizarse con d multiplicaciones y d sumas.

Este algoritmo corresponde precisamente a la evaluación en forma de Horner.