

# Programa 2023

Tema 1: Introducción

Tema 2: Diseño de cañerías

Tema 3: Escurrimiento en ductos de fluidos incompresibles

Tema 4: Escurrimiento en ductos de fluidos compresibles



## Objetivos de aprendizaje del tema 4 :

*El estudiante deberá ser capaz de:*

*Explicar los modelos ideales para el cálculo de flujo compresible*

*Determinar el mejor modelo para resolver problemas reales de flujo compresible.*

*Estimar o acotar cualquier variable de un sistema con flujo compresible entre reservorios y predecir cualitativamente el efecto de su variación en el mismo.*

*Explicar la existencia del flujo sónico, predecir en qué condiciones se podría dar y los posibles efectos del mismo.*

*Predecir la relación entre variables para un flujo real y su relación con el resultado que se obtendría utilizando los modelos incompresible y compresible isotérmico y/o adiabático.*

*Resolver un sistema de ecuaciones determinado para flujo de gases en tubería y desde reservorio, en casos de descarga sónica y subsónica.*

**Imprescindibles**

**Necesarios**

**Avanzados**

# Bibliografía

- Fox, R.W. y McDonald, A.T. (1997)  
“Introducción a la mecánica de fluidos”. McGraw-Hill, México.
- Coulson, J.M. y Richardson, J.F. (1990)  
“Chemical Engineering. Fluid Flow, Heat Transfer and Mass Transfer”  
. Vol. 1. 4ª Ed. Pergamon Press.
- Perry, R. H. y Green, D.W. (1999)  
Perry's Chemical Engineers' Handbook. 7ª Ed. McGraw Hill.

## **Punteo del Tema 4:**

### **Escurreimiento en ductos de fluidos compresibles**

- Introducción
- Flujo estacionario a través de conducción horizontal de sección constante
- Flujo estacionario entre dos reservorios a través de conducción horizontal de sección constante

- ¿Por qué nos interesa estudiar el flujo de fluidos gases?
- ¿Qué aplicación tiene?

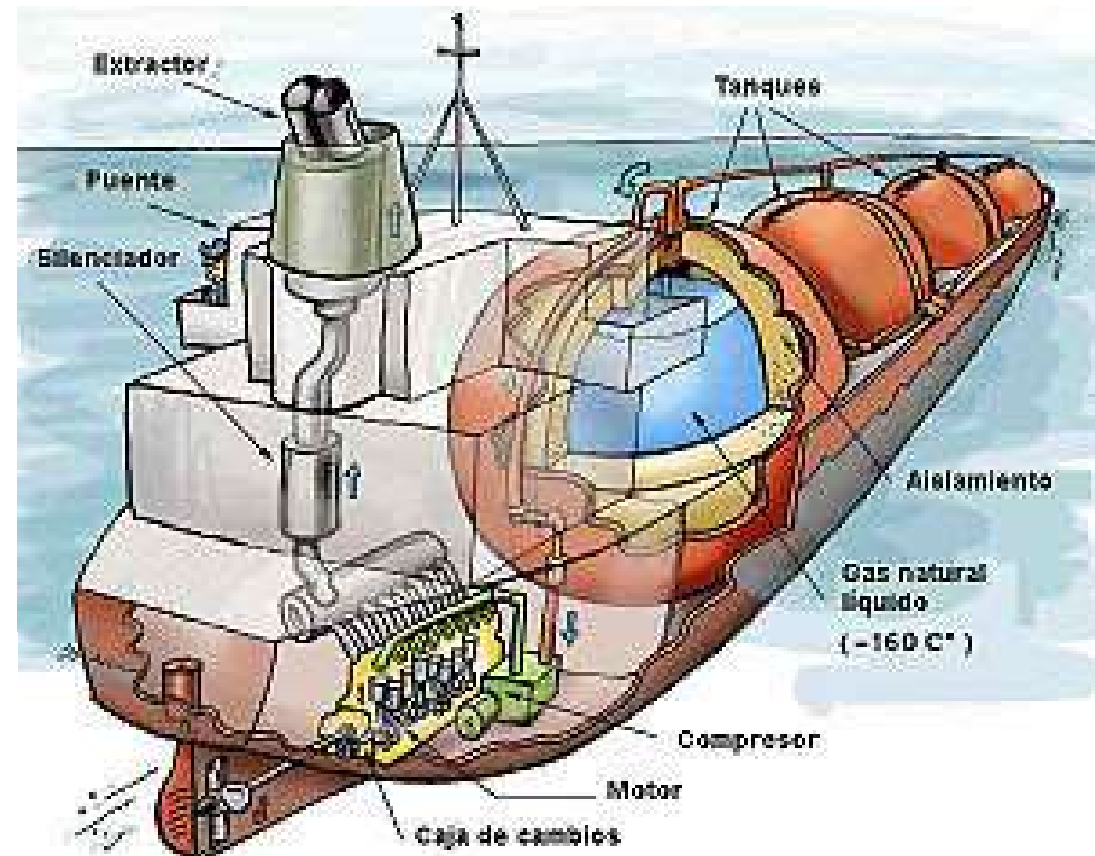


- jefe, cuánto le ponemos?

- 28 por favor.

.....28 qué?

# Transporte marítimo de Gas Natural Licuado







El gasoducto tiene 215 kilómetros de longitud, con una capacidad anual de 1,8 mil millones de metros cúbicos de gas. El costo de desarrollo del proyecto se estima en US\$150 millones. El tramo submarino entre Punta Lara (Argentina) y Santa Ana (Uruguay) tiene una extensión de 57 kilómetros y un diámetro de 24 pulgadas (610 mm), con una presión máxima de 95 bar (9,500 kPa). El tramo uruguayo tiene una longitud de 145 kilómetros con una presión máxima de 80 bar (8,000 kPa).

# Algunas peculiaridades del almacenamiento de fluidos compresibles

¿Por qué el almacenamiento de gases implica peligros?

¿Qué se puede hacer para minimizar el riesgo?

¿Por qué diferenciamos fluidos  
compresibles de incompresibles?

¿De qué depende el volumen específico?

$$v = v(T, P) \quad (\text{para una sola fase})$$

$$dv = \left[ \frac{\partial v}{\partial T} \right]_P dT + \left[ \frac{\partial v}{\partial P} \right]_T dP$$

$$\frac{dv}{v} = \underbrace{\frac{1}{v} \left[ \frac{\partial v}{\partial T} \right]_P}_{\beta} dT + \underbrace{\frac{1}{v} \left[ \frac{\partial v}{\partial P} \right]_T}_{-\kappa} dP$$

$\beta$

Dilatabilidad (isobárica)

$-\kappa$

Compresibilidad (isotérmica)

¿ $\beta$  y  $\kappa$  son constantes para cada sustancia dada?

# Algunos datos

## Cuadro comparativo

Material (20°C, 1 atm)	$\kappa$ (atm <sup>-1</sup> )
Agua	$46 \times 10^{-6}$
Plomo	$6 \times 10^{-6}$
Cobre	$0,8 \times 10^{-6}$
Acero	$0,7 \times 10^{-6}$
Aire	1

No son estrictamente incompresibles, pero se diferencian sensiblemente de gases y vapores, y para la mayoría de los propósitos se puede despreciar  $\kappa$

En efecto,  $\frac{\Delta v}{v} \approx \beta \Delta T - \kappa \Delta P$

si  $\beta$  y  $\kappa$  son pequeñas, o si  $\Delta T$  y  $\Delta P$  son pequeñas, asumir que  $\Delta v = 0$  no introduce errores significativos.

Si las condiciones anteriores no se cumplen, no podemos asumir  $v = \text{cte}$ .

Para estos casos debemos hacer un análisis diferente al hecho en clases anteriores donde se suponía “incompresibilidad”...

# Peculiaridades del flujo de fluidos compresibles

¿Cómo el cambio de presión debido al flujo afecta la densidad del fluido?

Efecto P:

Si en la cañería existe un gradiente de presión que provoca un flujo  $\rightarrow$  el  $\Delta P$  provoca también una disminución de la densidad corriente abajo.

- ❑ La densidad del fluido varía a lo largo de la conducción por efecto de P

# Peculiaridades del flujo de fluidos compresibles

¿Cómo el cambio de temperatura debido al flujo y a la transferencia de calor afecta la densidad del fluido?

Efecto T:

Los gases tienen un coeficiente de dilatabilidad ( $\beta$ ) relativamente alto, por lo que los efectos del cambio de temperatura a lo largo de la conducción tienen impactos significativos sobre la densidad del fluido.

- ❑ La densidad del fluido varía a lo largo de la conducción por efecto de T



# Peculiaridades del flujo de fluidos compresibles

Para el flujo dentro de una conducción de sección  $A$  en condiciones estacionarias se cumple:

$$\rho A u = w = \text{constante}$$

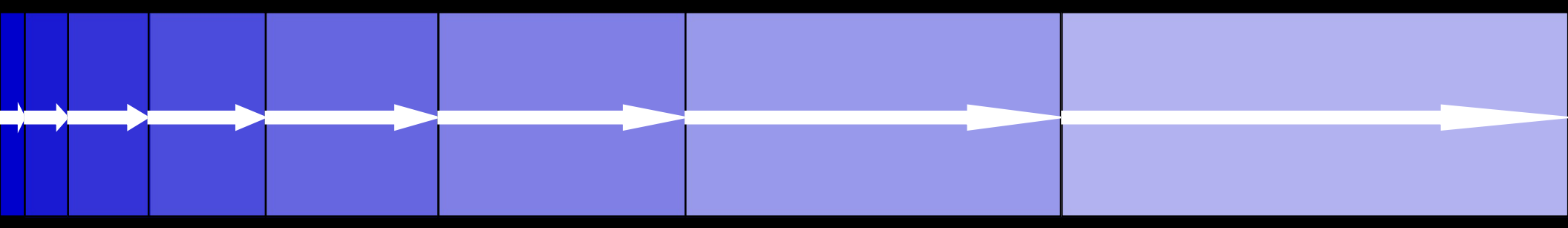
Para fluidos incompresibles vimos que si  $A$  es uniforme entonces  $u$  es uniforme.

Para fluidos compresibles esto no se cumple. (Para  $A$  constante,  $u$  aumenta conforme  $\rho$  disminuye).

- ❑ La velocidad aumenta aunque el flujo sea estacionario y la sección constante

# Peculiaridades del flujo de fluidos compresibles

- ❑ La velocidad aumenta aunque el flujo sea estacionario y la sección constante



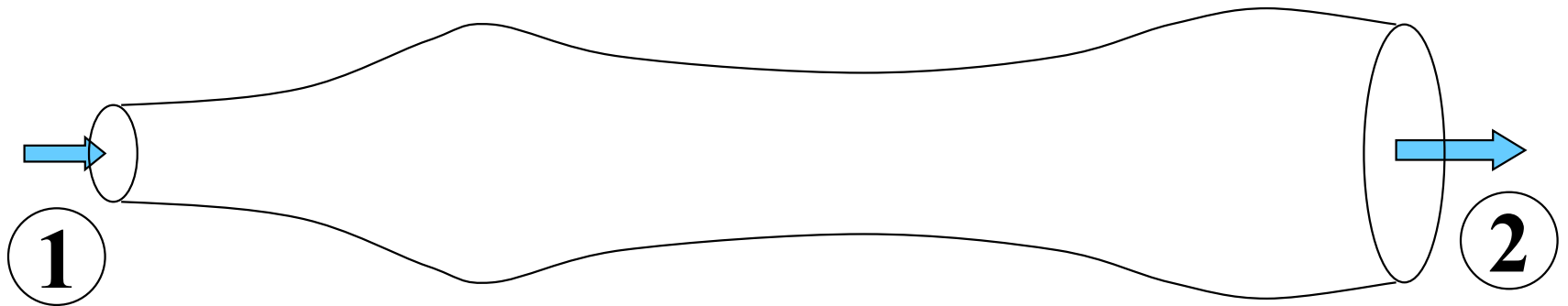
Para  $A$  constante,  $u$  aumenta conforme  $\rho$  disminuye

# Peculiaridades del flujo de fluidos compresibles

- ❑ La densidad del fluido varía a lo largo de la conducción (efecto P y efecto T)
- ❑ La velocidad aumenta aunque el flujo sea estacionario y la sección constante

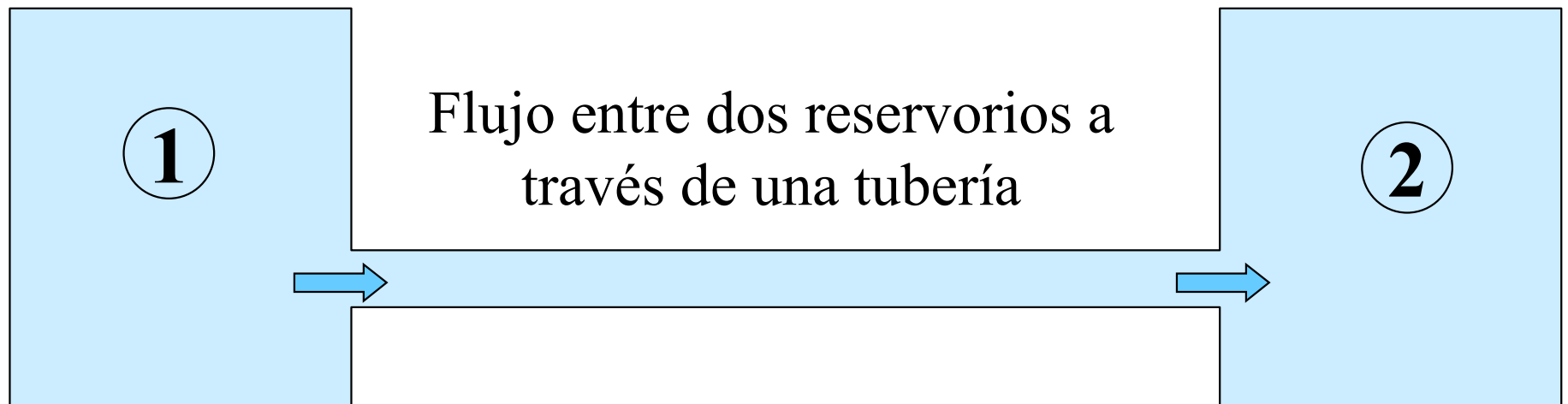
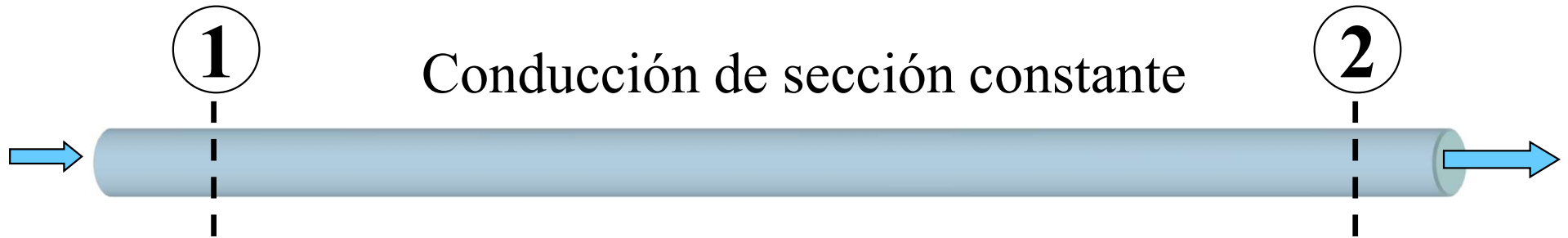
¿Cómo varía el  $Re$  a lo largo de una conducción de sección constante?

# ¿Qué tipo de problemas nos interesará resolver?

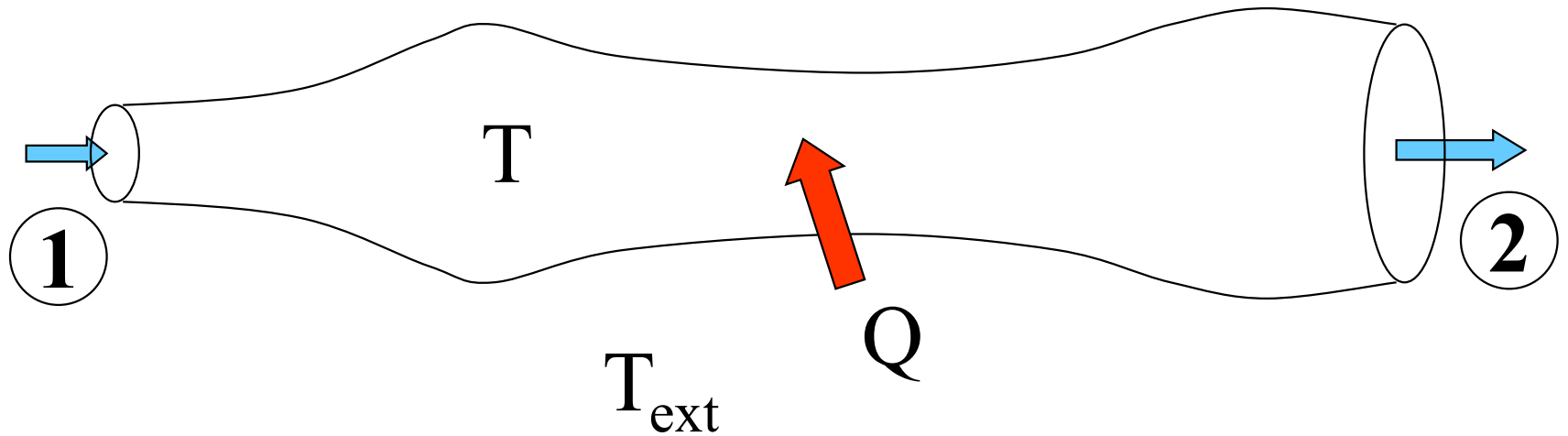


- Dado un  $\Delta P$  entre 1 y 2, conocer el flujo másico o la velocidad en una sección de la conducción...
- Dado el flujo másico, conocer la caída de presión entre 1 y 2, o el trabajo necesario para el flujo, ...
- Los intercambios energéticos asociados a una condición de flujo determinada

# Geometrías que estudiaremos



# ¿Qué modelos de flujo que utilizaremos?



Como vimos antes, la variación de temperatura a lo largo de la conducción tiene un impacto relevante sobre las condiciones de flujo de un fluido compresible.

# Flujo de fluidos compresibles

---

- Generalidades
- Flujo estacionario a través de conducción horizontal de sección constante
- Flujo estacionario entre dos reservorios a través de conducción horizontal de sección constante

# Flujo estacionario a través de conducción horizontal de sección constante

Herramientas para la resolución:

- Ecuaciones de Balance ?
- Comportamiento P-v-T ?
- Tipo de Proceso ?



# Ecuaciones de balance



Consideraremos:

- Estado estacionario?
- Cañería horizontal?
- Sección constante?
- Régimen turbulento?
- El fluido no hace ni recibe trabajo?

# Balance de Masa



Del balance de masa (ecuación de continuidad)...

$$w = u A \rho = \textcircled{u} A / \textcircled{v}$$

volumen  
específico

# Balance de Masa



$$w = u A \rho = u A / v$$

de donde  $u = (w/A) v$

A es constante (ducto de sección uniforme)

w es constante

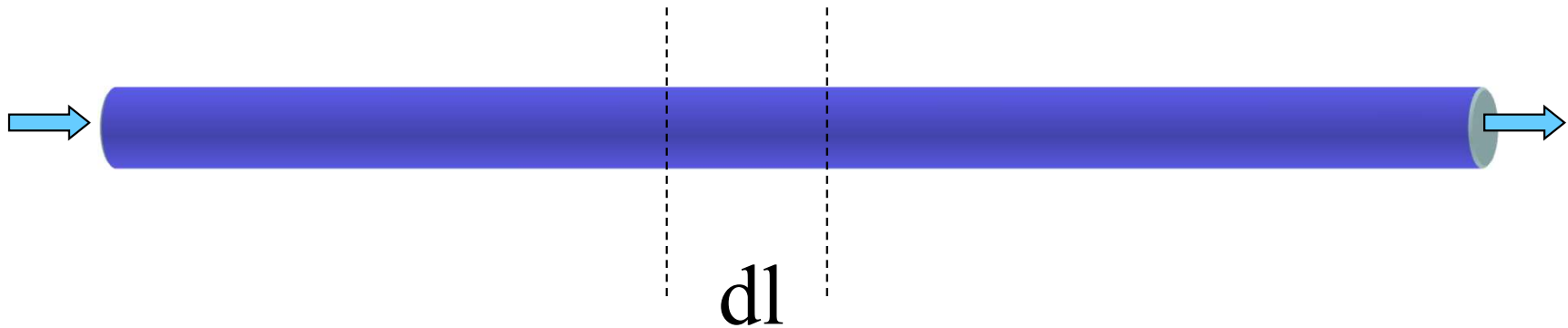
(en estado estacionario por ecuación de continuidad)

# Balance de Energía Total

Balance diferencial de energía total...

$$d\hat{H} + u \, du/\alpha + g \, dz = \delta\hat{Q} - \delta\hat{W}$$

Los términos tienen dimensiones de energía por unidad de masa.



(válida para cualquier tipo de fluido)

Ingeniería Química: Coulson & Richardson

# Balance de Energía Total

$$d\hat{H} + u \, du/\alpha + g \, dz = \delta\hat{Q} - \delta\hat{W}$$

Integrando entre dos secciones de la tubería...

$$\Delta\hat{H} + \Delta u^2/2\alpha + g\Delta z = \hat{Q} - \hat{W}$$

Para el caso en el que el régimen es altamente turbulento, el cambio de energía potencial gravitatoria es despreciable y no hay trabajo

Entonces...

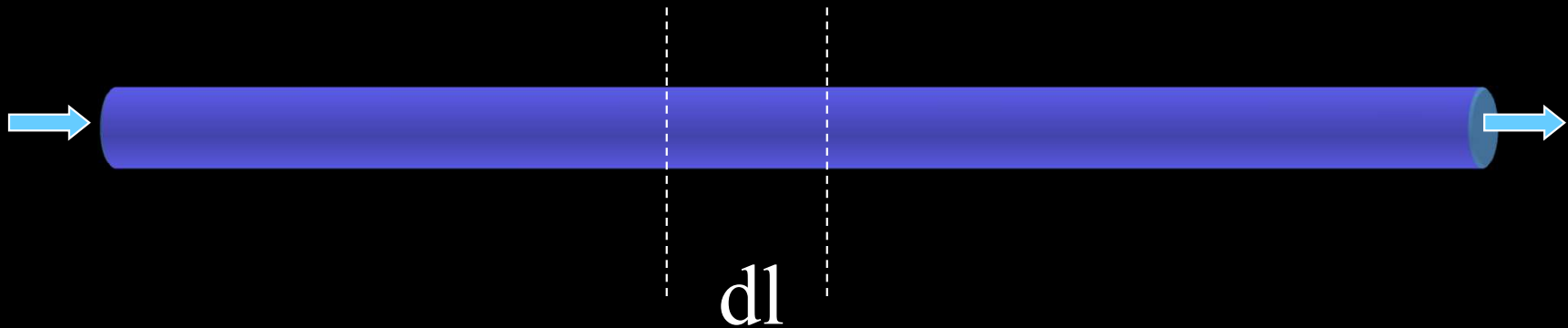
$$\Delta\hat{H} + \Delta u^2/2 = \hat{Q}$$

# Balance de E. Mecánica

Balance diferencial de energía mecánica...

$$u \, du/\alpha + g \, dz + v \, dP + \delta \hat{F} = - \delta \hat{W}$$

Los términos tienen dimensiones de energía por unidad de masa.



(válida para cualquier tipo de fluido)

Ingeniería Química: Coulson & Richardson

# Balance de E. Mecánica

La ecuación de balance de energía mecánica es

$$u \, du/\alpha + g \, dz + v \, dP + \delta \hat{F} = - \delta \hat{W}$$

Se trata de cañería horizontal

Sin intercambiar trabajo con los alrededores

$\alpha = 1$  pues es altamente turbulento

$$\Rightarrow u \, du + v \, dP + \delta \hat{F} = 0$$

# Balance de E. Mecánica

$$u \, du + v \, dP + \delta \hat{F} = 0$$

Incorporando el coeficiente de fricción...

$$\delta \hat{F} = 4 f (dl/D) (u^2/2)$$

Factor de fricción de  
Fanning


$$u \, du + v \, dP + 4 f (dl/D) (u^2/2) = 0$$



# Balance de E. Mecánica

$$u \, du + v \, dP + 4 f (dl/D) (u^2/2) = 0$$

Por ecuación de continuidad:  $u = (w/A) v$

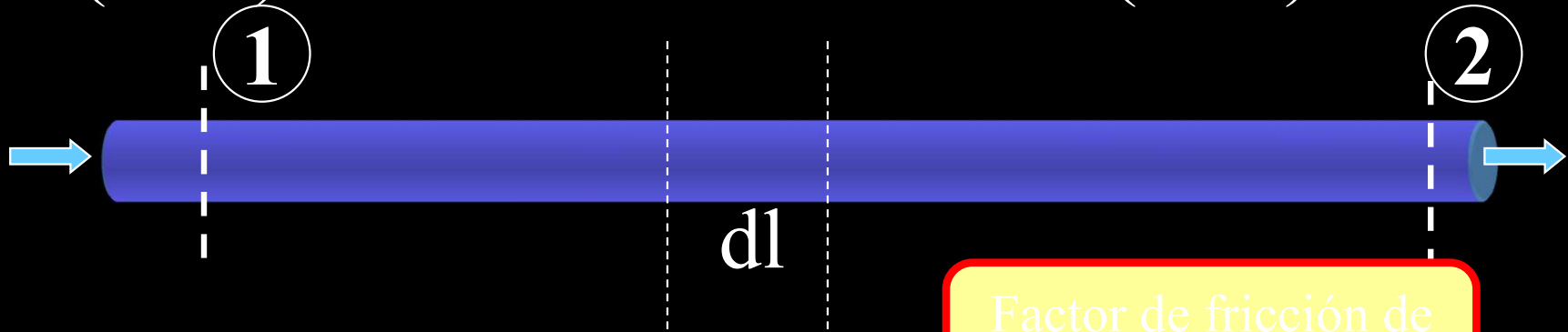
Sustituyendo ....

$$(w/A)^2 v \, dv + v \, dP + 2 f dl/D (w/A)^2 v^2 = 0$$

Dividiendo entre  $v^2$  ....

$$(w/A)^2 \, dv/v + dP/v + 2 f dl/D (w/A)^2 = 0$$

$$\left(\frac{w}{A}\right)^2 \frac{dv}{v} + \frac{dP}{v} + 2 f \frac{dl}{D} \left(\frac{w}{A}\right)^2 = 0$$



Integrando entre 1 y 2 ...

Factor de fricción de  
Fanning

$$\left(\frac{w}{A}\right)^2 \ln \left(\frac{v_2}{v_1}\right) + \int_1^2 \frac{dP}{v} + 2 f \frac{L}{D} \left(\frac{w}{A}\right)^2 = 0$$

Hemos supuesto que  $f$  no varía con la posición. Aceptable pues en general **Re es alto y prácticamente constante**, por lo cual  **$f$  depende sólo de la rugosidad relativa.**

**$L$  puede tomarse como la longitud equivalente.**

$$\cancel{\left(\frac{w}{A}\right)^2 \ln\left(\frac{v_2}{v_1}\right)} + \int_1^2 \frac{dP}{v} + 2 f L/D \left(\frac{w}{A}\right)^2 = 0$$

Para un fluido incompresible  $v$  es constante.

$$\Delta P/v$$

$$2 f L/D (u^2/v^2)$$

¿Dónde pusimos  
la condición de  
que el fluido  
fuera  
compresible?

$$\Delta P v + 2 f L/D u^2 = 0$$

$$\Delta P/\rho + 2 f (L/D) u^2 = 0$$

$$\Delta P/\rho g + 4 f (L/D) (u^2/2g) = 0$$

# Balance de E. Mecánica

$$(w/A)^2 \ln (v_2/v_1) + \int_1^2 dP/v + 2 f L/D (w/A)^2 = 0$$

Para un fluido compresible ...

...  $v$  varía a lo largo de la conducción pues  $P$  varía.

La principal dificultad ahora es...

¿cómo evaluar  $\int_1^2 dP/v$  ?

# ¿cómo evaluar $\int_1^2 dP/v$ ?

Para un fluido dado, el volumen específico ( $v$ ) dependerá de la presión ( $P$ ) y de la temperatura ( $T$ )

$$v = v(P, T)$$

(Comportamiento P-V-T, característico de cada fluido)

$\int_1^2 dP/v$  depende de cuál es el “camino” seguido para ir desde 1 hasta 2, el cual está condicionado por el intercambio de calor entre el fluido y sus alrededores.

(Tipo de Proceso)

# Comportamiento P-v-T

## ➤ Gas ideal

$$P v = R T / \mathbf{PM}$$

## ➤ Gas o vapor real

- Van der Waals, compresibilidad, etc...
- Propiedades termodinámicas tabuladas (ej. Perry)

# Tipo de proceso

El “camino” seguido para ir desde 1 hasta 2, está condicionado por el intercambio de calor entre el fluido y sus alrededores..

Consideraremos dos procesos ideales:

- Isotérmico  $T = T_1 = T_2$
- Adiabático  $Q = 0$

# Proceso Isotérmico

Si el fluido está inicialmente a la temperatura del ambiente, para mantener “prácticamente” la misma temperatura son necesarias condiciones que permitan un intercambio de calor suficiente entre el fluido y el ambiente (por ejemplo: tuberías con buena conductividad térmica y velocidades bajas)

Si el fluido ingresa mucho más caliente o más frío que el ambiente, la transferencia de calor con el ambiente provocará variaciones de  $T$ .

¿Es posible el flujo estrictamente isotérmico?



# Proceso Adiabático

En general se considera escurrimiento adiabático cuando las tuberías están bien aisladas o cuando son muy cortas, de forma que la ganancia o pérdida de calor por parte del fluido se pueda despreciar.

El flujo adiabático no es isentrópico porque al haber rozamiento el proceso no es reversible.

¿Es posible que el flujo sea estrictamente adiabático?

# Procesos Reales

Los procesos reales no son ni isotérmicos ni adiabáticos ni a volumen específico constante.

La solución analítica de problemas de flujo en condiciones reales es muy compleja.

**Los modelos isotérmico y adiabático nos permiten calcular en forma aproximada las situaciones reales o al menos acotar los parámetros de interés “por arriba y/o por abajo”**

# Proceso Adiabático

$$\Delta \hat{H} + \Delta u^2/2 = \hat{Q}$$

$$\hat{Q} = 0$$

Si el proceso es adiabático...

$$\hat{H} = \hat{H}_1 - u^2/2 + u_1^2/2 = \hat{H}_1 - (w/A)^2 \left[ v^2/2 - v_1^2/2 \right]$$

(si  $v > v_1$  esto implica  $\Delta \hat{H} < 0$ )

Para Gas Ideal  $H = f(T)$  y se reduce con ella

**Entonces en procesos adiabáticos T se reduce**

# Proceso Isotérmico

$$\Delta \hat{H} + \Delta u^2/2 = \hat{Q}$$

T es constante

Para Gas Ideal  $H = f(T)$

Entonces para procesos isotérmicos  $\Delta H = 0$

Del balance de energía resulta:  $\hat{Q} = \Delta u^2/2$

En el sentido del flujo P disminuye, mientras T se mantiene

En consecuencia v aumenta y por continuidad u también

**Para mantener flujo isotérmico es necesario aportar calor**

# Resolución de las ecuaciones de balance

Análisis de casos  
Isotérmico - Adiabático

# Caso: Flujo isotérmico, Gas Ideal

Ecuación general

$$(\dot{w}/A)^2 \ln (v_2/v_1) + \int_1^2 dP/v + 2 f L/D (\dot{w}/A)^2 = 0$$

Ecuación de estado

$$P v = R T / \text{PM}$$

Ecuación de proceso

$$T = T_1$$

# Caso: Flujo isotérmico, Gas Ideal

Ecuación general

$$(\dot{w}/A)^2 \ln (v_2/v_1) + \int_1^2 dP/v + 2 f L/D (\dot{w}/A)^2 = 0$$

$$P v = R T_1 / \rho M \quad \Longrightarrow \quad 1/v = (\rho M / (R T_1)) P$$

$$\Longrightarrow dP/v = (\rho M / (R T_1)) P dP$$

$$\int dP/v = (\rho M / (R T_1)) \Delta P^2 / 2$$

# Caso: Flujo isotérmico, Gas Ideal

Ecuación general

$$(w/A)^2 \ln (v_2/v_1) + \int_1^2 dP/v + 2 f L/D (w/A)^2 = 0$$

$$\int dP/v = (PM/(R T_1)) \Delta P^2/2$$

$$(w/A)^2 \ln(P_1/P_2) + PM(P_2^2 - P_1^2)/(2RT_1) + (w/A)^2 2fL/D = 0$$



## Caso: Flujo isotérmico, Gas Ideal

$$(\dot{w}/A)^2 \ln(P_1/P_2) + \dot{w}^2 (P_2^2 - P_1^2) / (2RT_1) + (\dot{w}/A)^2 2fL/D = 0$$

A su vez...  $P_1 v_1 = RT_1 / \dot{w}$

y entonces...

$$(\dot{w}/A)^2 \ln(P_1/P_2) + (P_2^2 - P_1^2) / (2P_1 v_1) + (\dot{w}/A)^2 2fL/D = 0$$

# Caso: Flujo isotérmico, Gas Real

Ecuación general

$$(\dot{w}/A)^2 \ln (v_2/v_1) + \int_1^2 dP/v + 2 f L/D (\dot{w}/A)^2 = 0$$

Ecuación de estado

Según el caso (diagramas PvT, tablas propiedades termodinámicas, ecs. Van der Waals, compresibilidad, etc...)

Ecuación de proceso

$$T = T_1$$

## Caso: Flujo isotérmico, Gas Real

Evaluación de la integral...

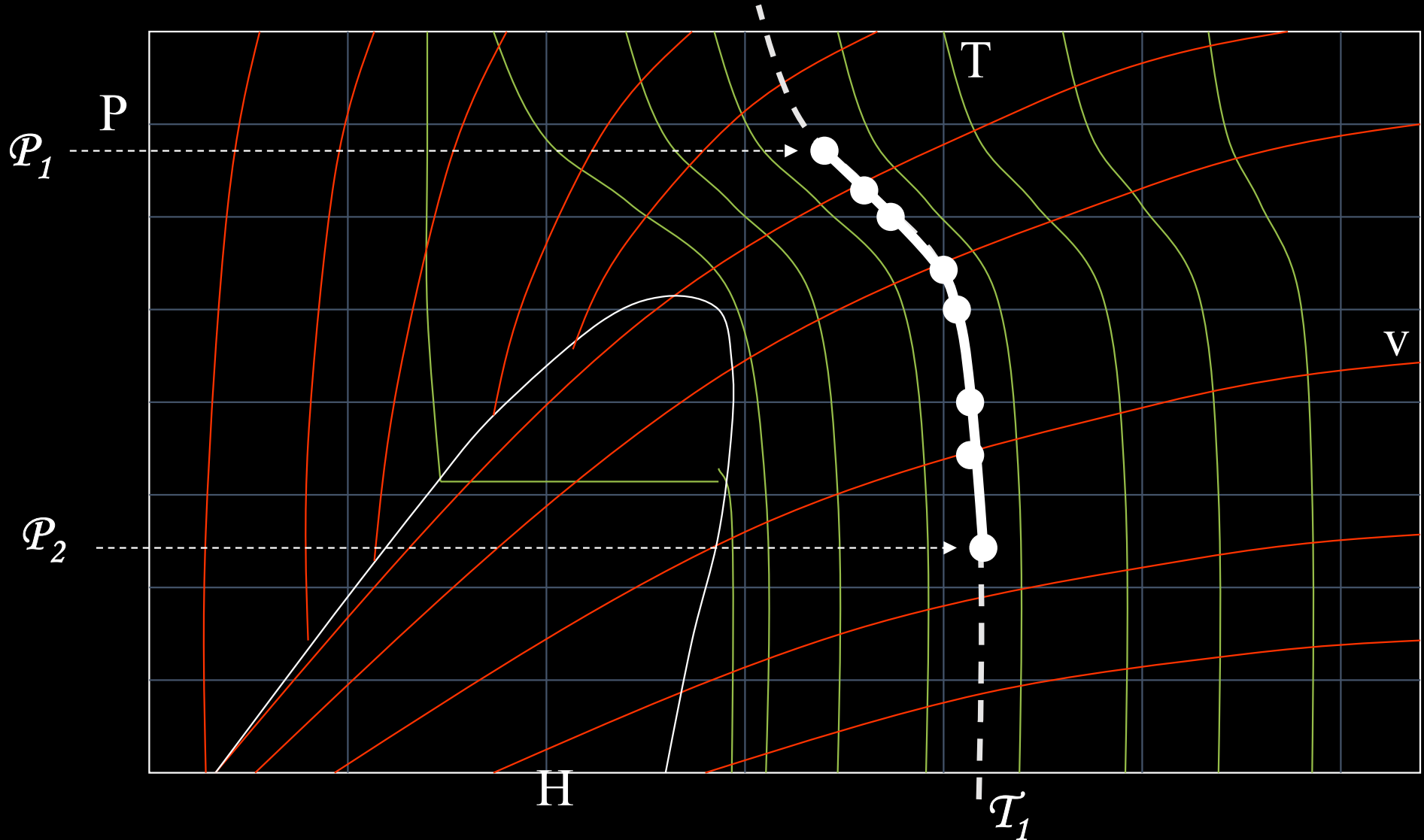
- (a) Si se conoce una relación analítica que exprese a  $v$  como función de  $P$ , para  $T=T_1$ , se puede sustituir e integrar.

$$\int_1^2 dP/v = \int_1^2 (1/v_{(T_1,P)})dP$$

- (b) Si se dispone de una tabla de valores de propiedades termodinámicas o un diagrama  $P, H$  o similar se deberá intentar obtener una tabla de valores  $P, v$  (siguiendo la curva del proceso) para poder integrar numéricamente.

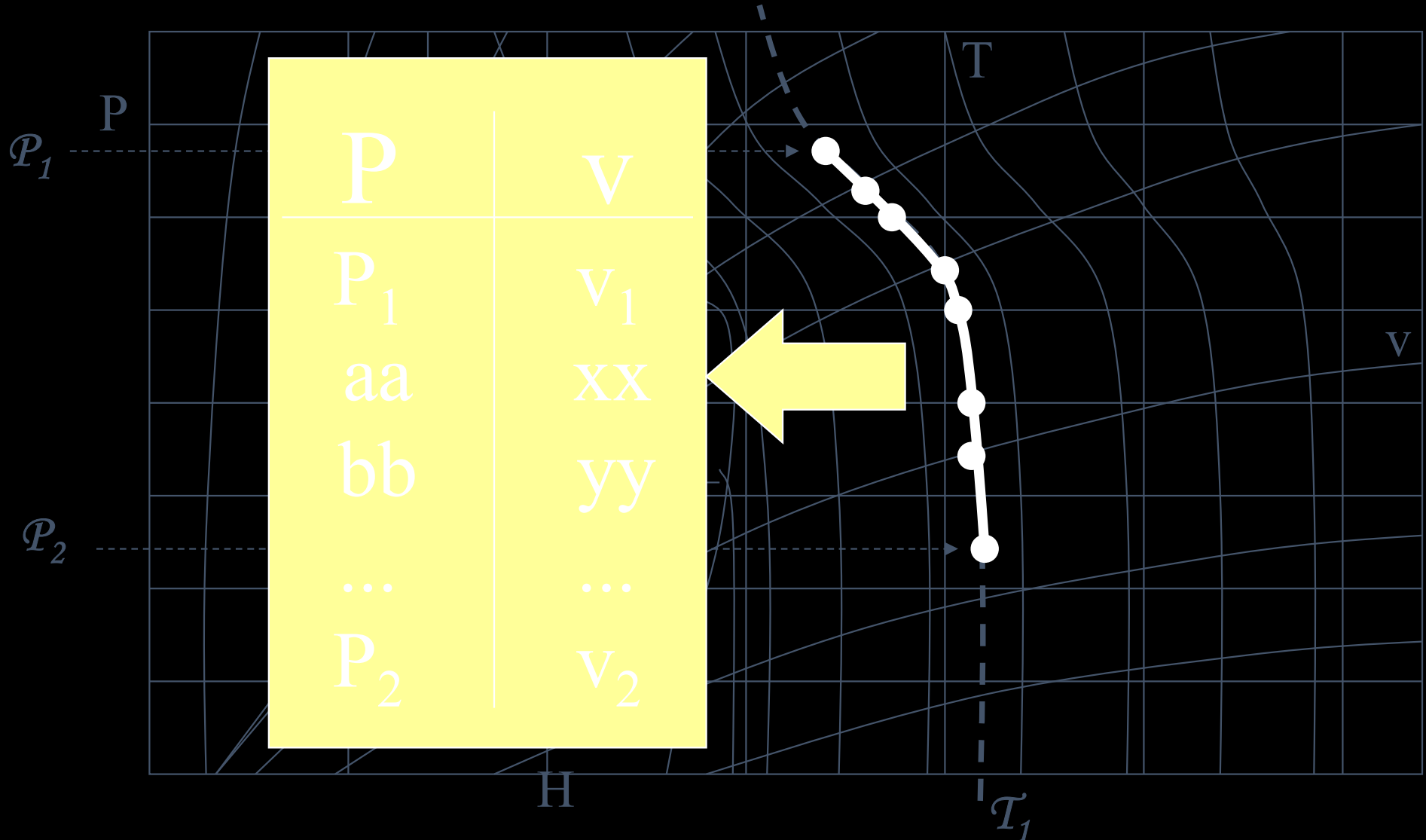
# Caso: Flujo isotérmico, Gas Real

Curva del proceso:  $T = \mathcal{T}_1$



# Caso: Flujo isotérmico, Gas Real

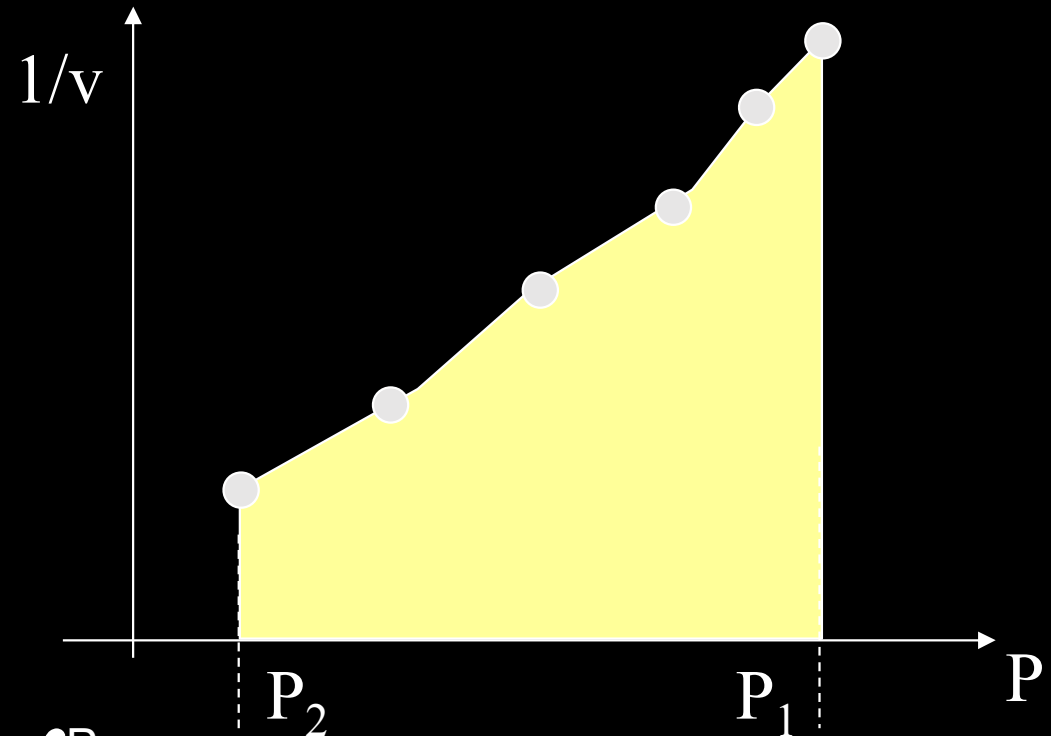
Curva del proceso:  $T = \mathcal{T}_1$



## Caso: Flujo isotérmico, Gas Real

A partir de los valores P, v...

P	v	1/v



$$\int_1^2 dP/v = - \int_2^1 dP/v = - \int_{P_2}^{P_1} (1/v) dP$$

La integral es “el área con signo negativo”...

# Caso: Flujo adiabático, Gas Ideal

Ecuación general

$$(\dot{w}/A)^2 \ln (v_2/v_1) + \int_1^2 dP/v + 2 f L/D (\dot{w}/A)^2 = 0$$

Ecuación de estado

$$P v = R T / M$$

Ecuación de proceso

$$\hat{H} = \hat{H}_1 - u^2/2 + u_1^2/2 = \hat{H}_1 - (\dot{w}/A)^2 \left[ v^2/2 - v_1^2/2 \right]$$

## Caso: Flujo adiabático, Gas Ideal

Para un gas ideal:  $d\hat{H} = C_p.dT$

Asumiendo  $C_p$  cte.  $\hat{H} - \hat{H}_1 = C_p.(T - T_1)$  (a)

Para un gas ideal:  $C_p - C_v = R/PM$

Siendo  $\gamma = C_p/C_v$  se cumple  $C_p (1 - 1/\gamma) = R/PM$

Entonces  $C_p = \gamma/(\gamma - 1) \cdot R/PM$  (b)

De (a)y(b) 
$$\hat{H} - \hat{H}_1 = \frac{\gamma}{\gamma - 1} [P v - P_1 v_1]$$



## Caso: Flujo adiabático, Gas Ideal

$$\hat{H} = \hat{H}_1 + \frac{\gamma}{\gamma - 1} [P v - P_1 v_1]$$

Sustituyendo en la ecuación de proceso...

$$\hat{H} = \hat{H}_1 - u^2/2 + u_1^2/2 = \hat{H}_1 - (w/A)^2 [v^2/2 - v_1^2/2]$$

y reordenando:

$$\frac{1}{2} \left[ \frac{w}{A} \right]^2 v^2 + \frac{\gamma}{\gamma - 1} P v = \frac{1}{2} \left[ \frac{w}{A} \right]^2 v_1^2 + \frac{\gamma}{\gamma - 1} P_1 v_1$$

Esta es una relación analítica entre  $v$  y  $P$  que permite evaluar la integral. (Despejo  $P$ , calculo  $dP/dv$ , despejo  $dP$  y lo sustituyo en la integral).

## Caso: Flujo adiabático, Gas Ideal

$$dP/dv = (w/A)^2 (1-\gamma)/\gamma - P/v$$

$$\int_1^2 dP/v =$$

$$\frac{\gamma - 1}{4\gamma} \left[ \frac{w}{A} \right]^2 \left[ \frac{v_1^2}{v_2^2} - 1 - 2 \ln \frac{v_2}{v_1} \right] + \frac{P_1 v_1}{2} \left[ \frac{1}{v_2^2} - \frac{1}{v_1^2} \right]$$

Sustituyendo en la ecuación general...

$$(w/A)^2 \ln (v_2/v_1) + \int_1^2 dP/v + 2 f L/D (w/A)^2 = 0$$

... se llega a...

## Caso: Flujo adiabático, Gas Ideal

$$\left( \frac{\gamma - 1}{2\gamma} + \frac{P_1}{v_1} \left( \frac{A}{w} \right)^2 \right) \left( 1 - \left( \frac{v_1}{v_2} \right)^2 \right) - \frac{\gamma + 1}{\gamma} \ln \frac{v_2}{v_1} = \frac{4 f L}{D}$$

Para poder determinar las variables se necesita resolver la ecuación de arriba junto con la ecuación de proceso (ya vista):

$$\frac{1}{2} \left( \frac{w}{A} \right)^2 v_2^2 + \frac{\gamma}{\gamma - 1} P_2 v_2 = \frac{1}{2} \left( \frac{w}{A} \right)^2 v_1^2 + \frac{\gamma}{\gamma - 1} P_1 v_1$$

# Caso: Flujo adiabático, Gas Real

## Ecuación general

$$(\dot{w}/A)^2 \ln (v_2/v_1) + \int_1^2 dP/v + 2 f L/D (\dot{w}/A)^2 = 0$$

## Ecuación de estado

Según el caso (diagramas PvT, tablas propiedades termodinámicas, ecs. Van der Waals, compresibilidad, etc...)

## Ecuación de proceso

$$\hat{H} = \hat{H}_1 + u_1^2/2 - u^2/2 = \hat{H}_1 + (\dot{w}/A) \left[ v_1^2/2 - v^2/2 \right]$$

## Caso: Flujo adiabático, Gas Real

Evaluación de la integral...

- (a) Si se conoce una relación analítica que exprese a  $v$  como función de  $P$ , se puede sustituir e integrar.

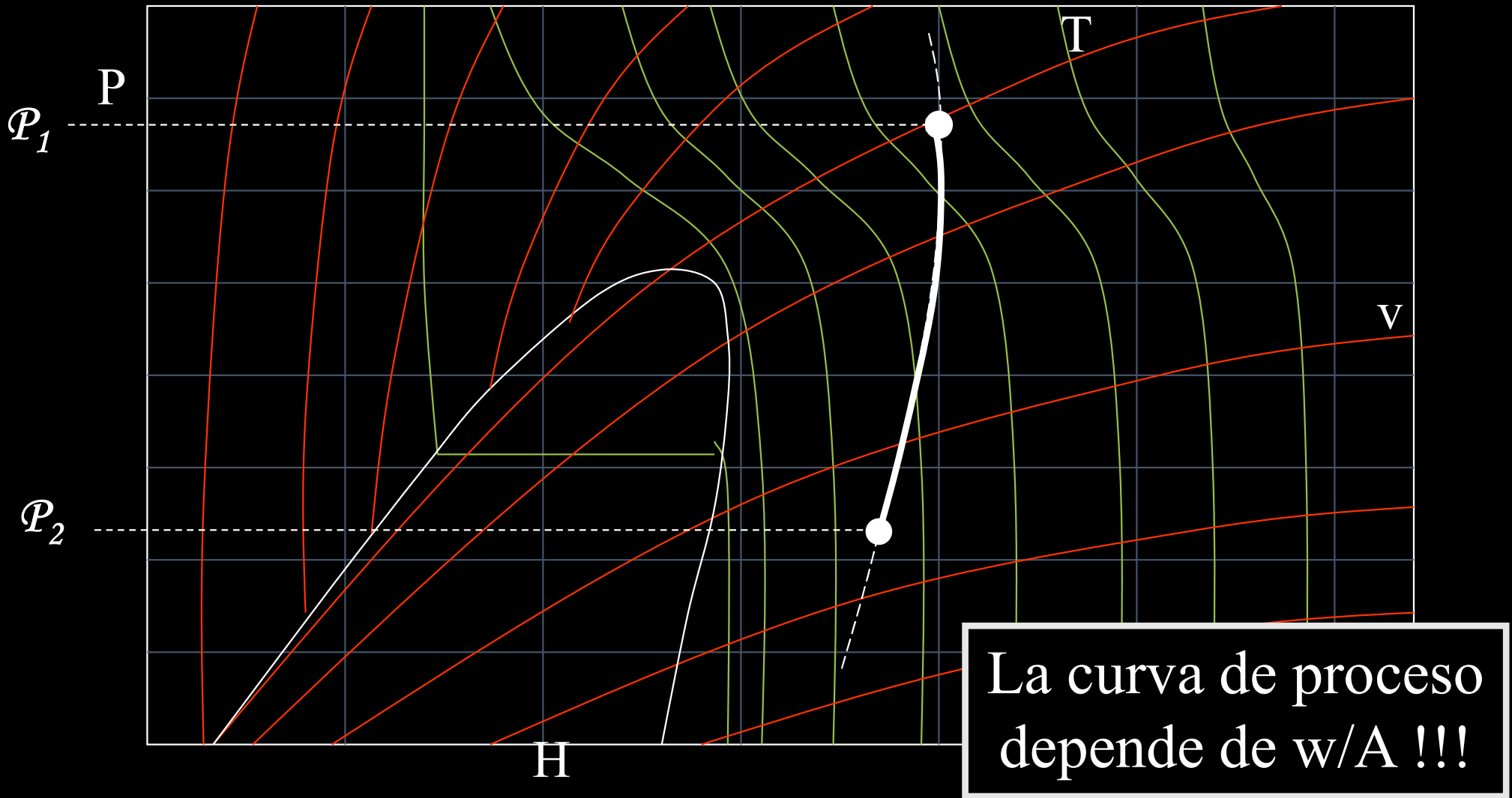
$$\int_1^2 dP/v = \int_1^2 (1/v_{(T,P)})dP$$

Necesitaríamos  
conocer  $T=f(P)$  !!!

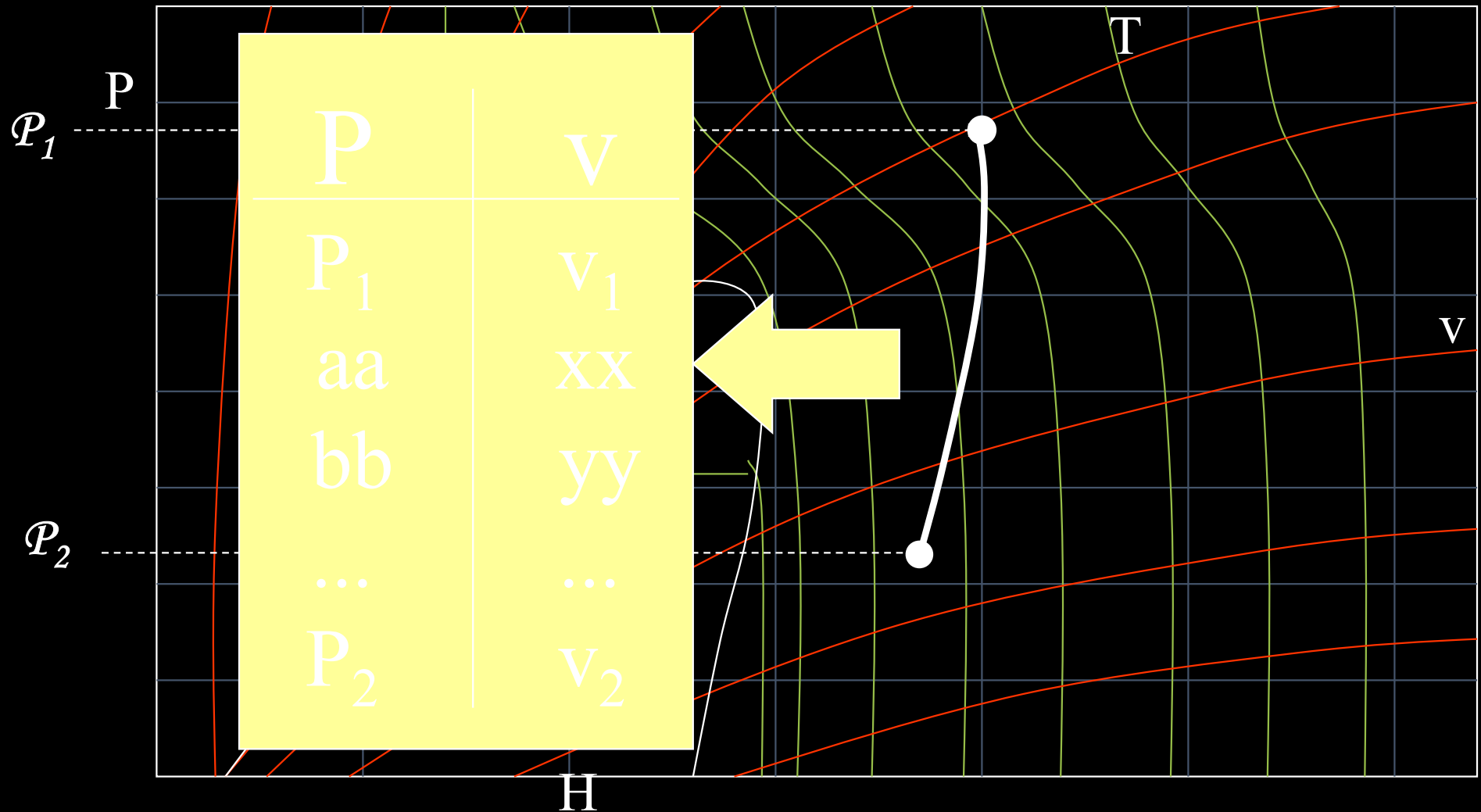
- (b) Si se dispone de una tabla de valores de propiedades termodinámicas o un diagrama  $P, H$  o similar se deberá intentar obtener una tabla de valores  $P, v$  (siguiendo la curva del proceso) para poder integrar numéricamente.

# Caso: Flujo adiabático, Gas Real

Curva del proceso:  $\widehat{H} = \widehat{H}_1 - (w/A)^2 \left[ v^2/2 - v_1^2/2 \right]$



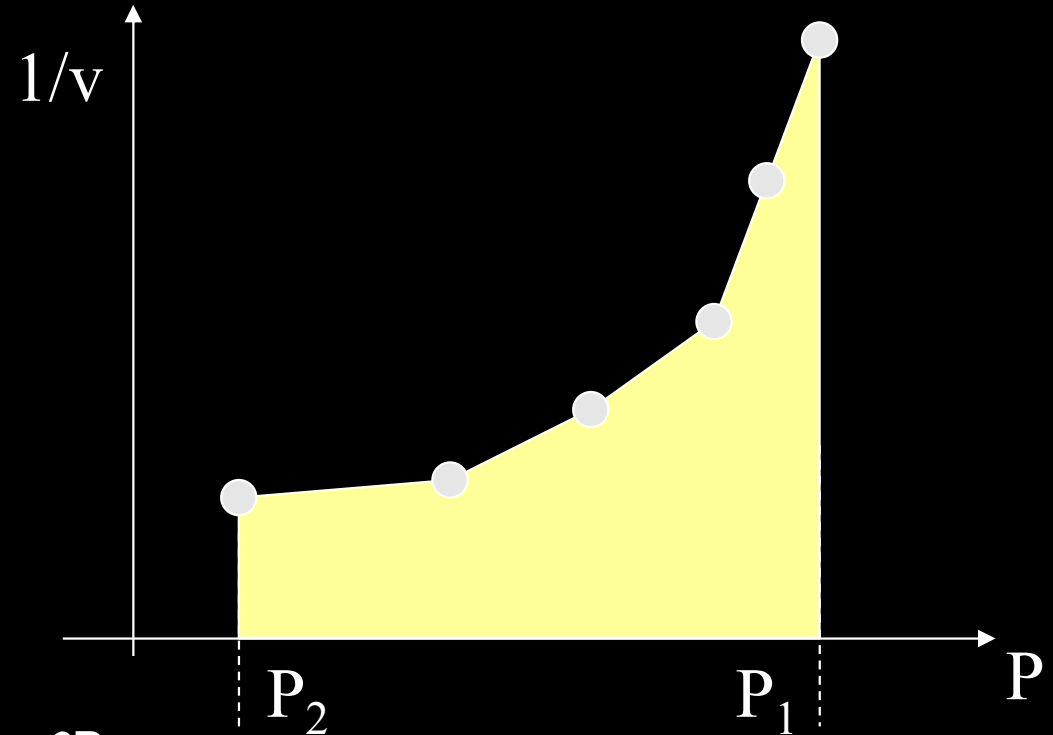
# Caso: Flujo adiabático, Gas Real



## Caso: Flujo adiabático, Gas Real

A partir de los valores P, v...

P	v	1/v



$$\int_1^2 dP/v = - \int_2^1 dP/v = - \int_{P_2}^{P_1} (1/v) dP$$

$$(w/A)^2 \ln (v_2/v_1) + \int_1^2 dP/v + 2 f L/D (w/A)^2 = 0$$



# RESUMEN DE ECUACIONES

## Caso general

Balance de energía mecánica

$$(w/A)^2 \ln (v_2/v_1) + \int_1^2 dP/v + 2 f L/D (w/A)^2 = 0$$

Balance de energía total

$$\Delta \hat{H} + \Delta u^2/2 = \hat{Q}$$

Ecuación de proceso

*(depende del proceso)*

# Proceso isotérmico

Balance de energía mecánica

$$(w/A)^2 \ln (v_2/v_1) + \int_1^2 dP/v + 2 f L/D (w/A)^2 = 0$$

Balance de energía total

$$\Delta \hat{H} + \Delta u^2/2 = \hat{Q}$$

Ecuación de proceso

$$T = T_1$$

## Proceso isotérmico

## Gas Ideal

Balance de energía mecánica

$$(w/A)^2 \ln(P_1/P_2) + (P_2^2 - P_1^2)/2P_1 v_1 + (w/A)^2 2fL/D = 0$$

Balance de energía total

$$\widehat{\Delta H} = 0$$

$$\widehat{Q} = \Delta u^2/2$$

Ecuación de proceso

$$P v = RT_1/\mathbf{PM}$$

# RESUMEN DE ECUACIONES

## Caso general

Balance de energía mecánica

$$(w/A)^2 \ln (v_2/v_1) + \int_1^2 dP/v + 2 f L/D (w/A)^2 = 0$$

Balance de energía total

$$\Delta \hat{H} + \Delta u^2/2 = \hat{Q}$$

Ecuación de proceso

*(depende del proceso)*

# Proceso adiabático

Balance de energía mecánica

$$(w/A)^2 \ln (v_2/v_1) + \int_1^2 dP/v + 2 f L/D (w/A)^2 = 0$$

Balance de energía total

$$\Delta \hat{H} = - \Delta u^2/2$$

$$\hat{Q} = 0$$

Ecuación de proceso

$$\hat{H} = \hat{H}_1 - (w/A)^2 \left[ v^2/2 - v_1^2/2 \right]$$

## Proceso adiabático

## Gas Ideal

### Balance de energía mecánica

$$\left( \frac{\gamma - 1}{2\gamma} + \frac{P_1}{v_1} \left( \frac{A}{w} \right)^2 \right) \left( 1 - \left( \frac{v_1}{v_2} \right)^2 \right) - \frac{\gamma + 1}{\gamma} \ln \frac{v_2}{v_1} = \frac{4 f L}{D}$$

### Balance de energía total

$$\Delta \hat{H} = - \Delta u^2 / 2$$

$$\hat{Q} = 0$$

### Ecuación de proceso

$$\frac{1}{2} \left( \frac{w}{A} \right)^2 v^2 + \frac{\gamma}{\gamma - 1} P v = \frac{1}{2} \left( \frac{w}{A} \right)^2 v_1^2 + \frac{\gamma}{\gamma - 1} P_1 v_1$$

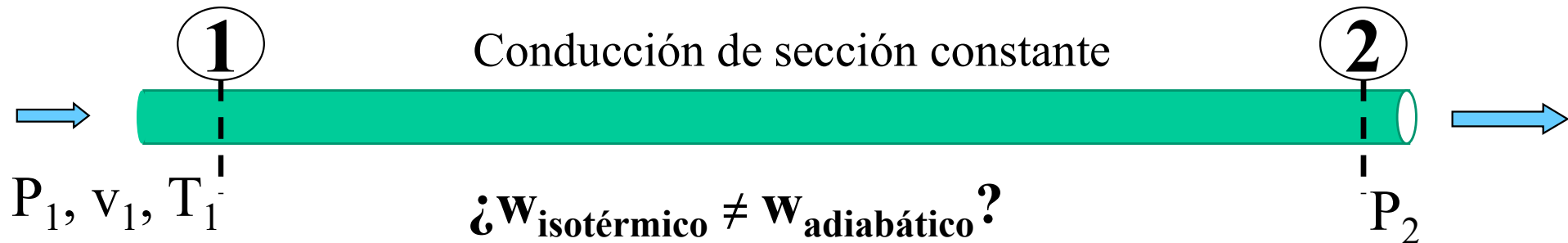
# Autoevaluación

- 1) ¿Qué consecuencias prácticas tiene la compresibilidad de un gas sobre las condiciones de almacenamiento?
- 2) ¿Por qué la compresibilidad afecta las condiciones del flujo en una conducción?
- 3) ¿Cómo varía el  $Re$  en el flujo estacionario compresible a través de una conducción de sección constante?
- 4) ¿Cómo explica que la velocidad aumente si el flujo es estacionario?
- 5) ¿Cómo explica que en el flujo isotérmico la temperatura se mantenga constante pese a que el fluido recibe calor?
- 6) ¿Por qué no alcanza conocer la relación entre  $P$ ,  $v$  y  $T$  para determinar la integral de  $dP/v$ ?
- 7) ¿Por qué son útiles los modelos isotérmico y adiabático si sabemos que en la realidad ningún flujo es estrictamente adiabático ni isotérmico?

# Comparación entre flujo real y los modelos Isotérmico y Adiabático



# Comparación entre flujo másico Isotérmico y Adiabático



- Del balance de energía mecánica

$$(w/A)^2 \ln (v_2/v_1) + \int_1^2 dP/v + 2 f L/D (w/A)^2 = 0$$

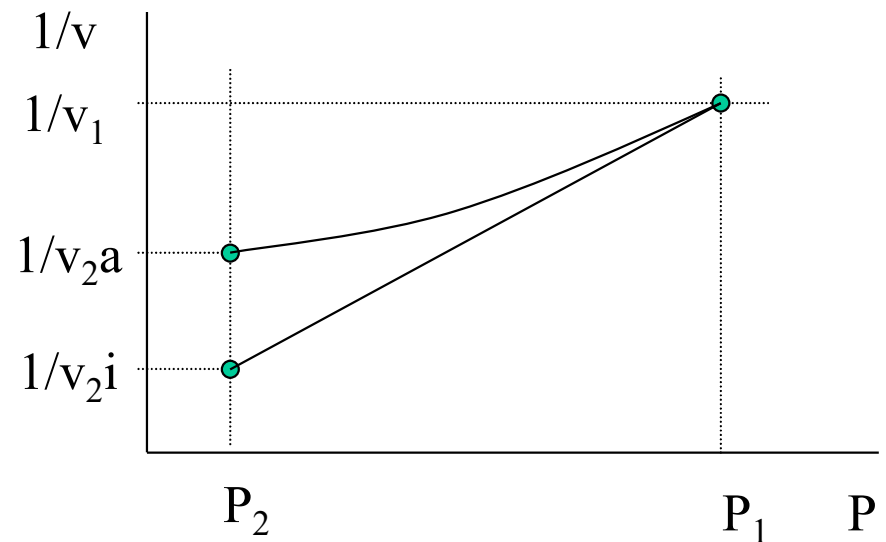
- Despejando:

$$(w/A) = \left[ \frac{- \int_1^2 dP/v}{\ln (v_2/v_1) + 2 f L/D} \right]^{1/2}$$

- Vamos a comparar cada término

# Comparación entre flujos Isotérmico y Adiabático

$$\left( -\int_1^2 dP/v \right)_i \text{ vs } \left( -\int_1^2 dP/v \right)_a$$



Asumiendo Gas ideal:

$$Pv/T = \text{cte} = P_1 v_1 / T_1 = (P_2 v_2 / T_2)_i = (P_2 v_2 / T_2)_a$$

Para isotérmico  $T_2 = T_1$

Para adiabático  $T_2 < T_1$

}

$P_2 i = P_2 a$

$T_2 i > T_2 a$

}

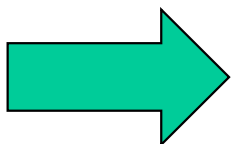
$v_2 i > v_2 a$

$$\left( -\int_1^2 dP/v \right)_i < \left( -\int_1^2 dP/v \right)_a$$

## Comparación entre flujos Isotérmico y Adiabático

$$(w/A) = \left[ \frac{-\int_1^2 dP/v}{\ln(v_2/v_1) + 2fL/D} \right]^{1/2}$$

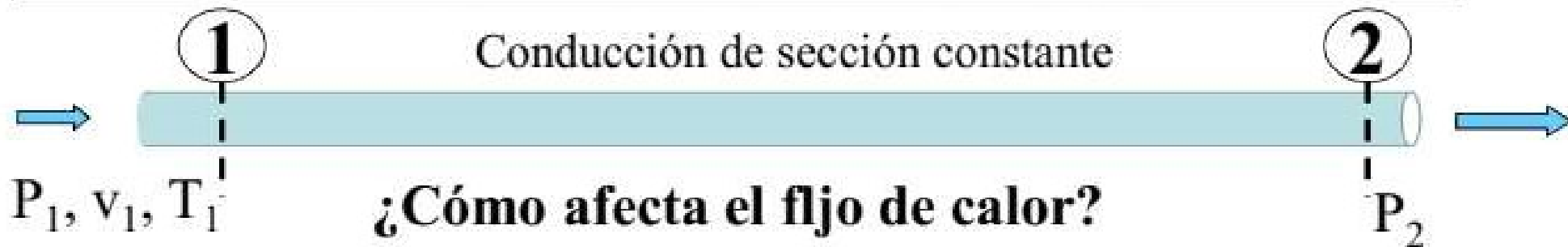
$$\left. \begin{array}{l} \left[ \ln(v_2/v_1) \right]_i \text{ vs } \left[ \ln(v_2/v_1) \right]_a \\ v_{2i} > v_{2a} \quad \text{y} \quad v_{1i} = v_{1a} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \left[ \ln(v_2/v_1) \right]_i > \left[ \ln(v_2/v_1) \right]_a \\ \left[ 2fL/D \right]_i \sim \left[ 2fL/D \right]_a \end{array}$$



$$(w/A)_{\text{isotérmico}} < (w/A)_{\text{adiabático}}$$

# Comparación de casos reales con modelos

## Efecto del Calor en el flujo másico respecto al caso Adiabático



- Del balance de energía mecánica

$$(w/A)^2 \ln (v_2/v_1) + \int_1^2 dP/v + 2 f L/D (w/A)^2 = 0$$

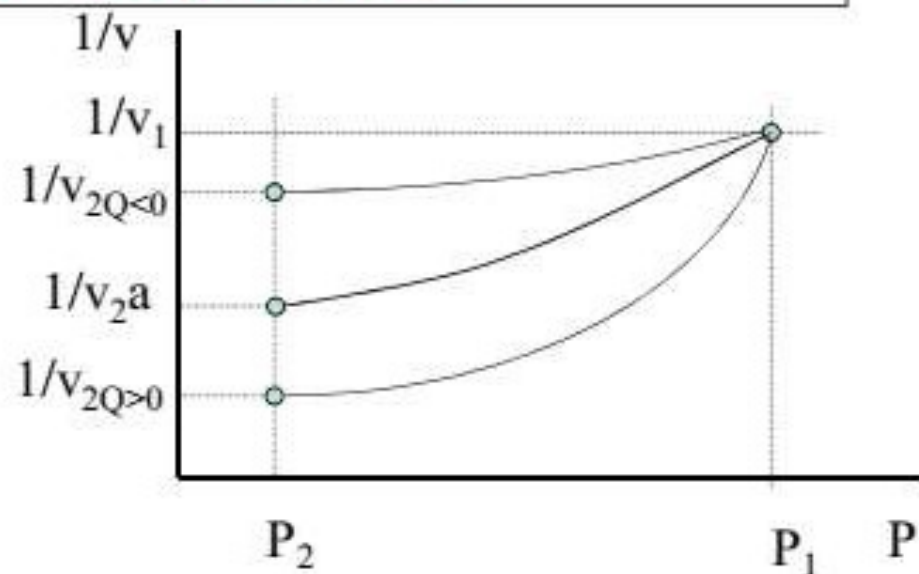
- Despejando:

$$(w/A) = \left[ \frac{- \int_1^2 dP/v}{\ln (v_2/v_1) + 2 f L/D} \right]^{1/2}$$

- Vamos a comparar cada término

## Efecto del Calor en el flujo másico respecto al caso Adiabático

Comparación de  $\left( -\int_1^2 dP/v \right)$



Asumiendo Gas ideal:

$Pv/T = \text{cte} \Rightarrow$  para  $P_x = \text{cte}'$   $v_x/T_x = \text{cte}'$  independientemente de  $Q$

Si  $Q>0$  a lo largo de toda la tubería, para cada  $P_x$ :  $T_x > T_{xa} \Rightarrow v_x > v_{xa}$

Si  $Q<0$  a lo largo de toda la tubería, para cada  $P_x$ :  $T_x < T_{xa} \Rightarrow v_x < v_{xa}$

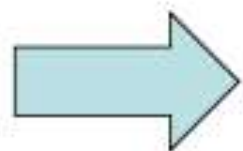
$$\left( -\int_1^2 dP/v \right)_{Q>0} < \left( -\int_1^2 dP/v \right)_a < \left( -\int_1^2 dP/v \right)_{Q<0}$$

## Efecto del Calor en el flujo másico respecto al caso Adiabático

$$(w/A) = \left[ \frac{-\int_1^2 dP/v}{\ln(v_2/v_1) + 2 f L/D} \right]^{1/2}$$

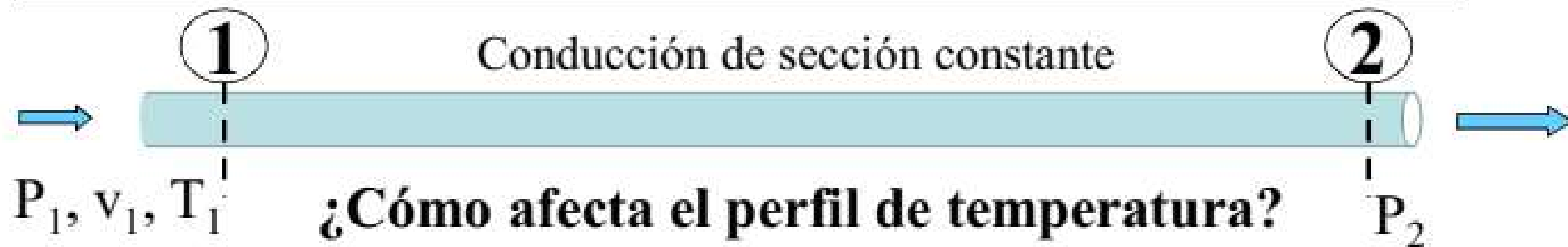
$$\left[ \ln(v_2/v_1) \right]_{Q>0} > \left[ \ln(v_2/v_1) \right]_a > \left[ \ln(v_2/v_1) \right]_{Q<0}$$

$$\left[ 2fL/D \right]_{Q>0} \sim \left[ 2fL/D \right]_a \sim \left[ 2fL/D \right]_{Q<0}$$



$$(w/A)_{Q>0} < (w/A)_{\text{adiabático}} < (w/A)_{Q<0}$$

## Efecto del perfil de Temperatura en el flujo másico respecto al caso Isotérmico a $T_1$



- Del balance de energía mecánica

$$(w/A)^2 \ln (v_2/v_1) + \int_1^2 dP/v + 2 f L/D (w/A)^2 = 0$$

- Despejando:

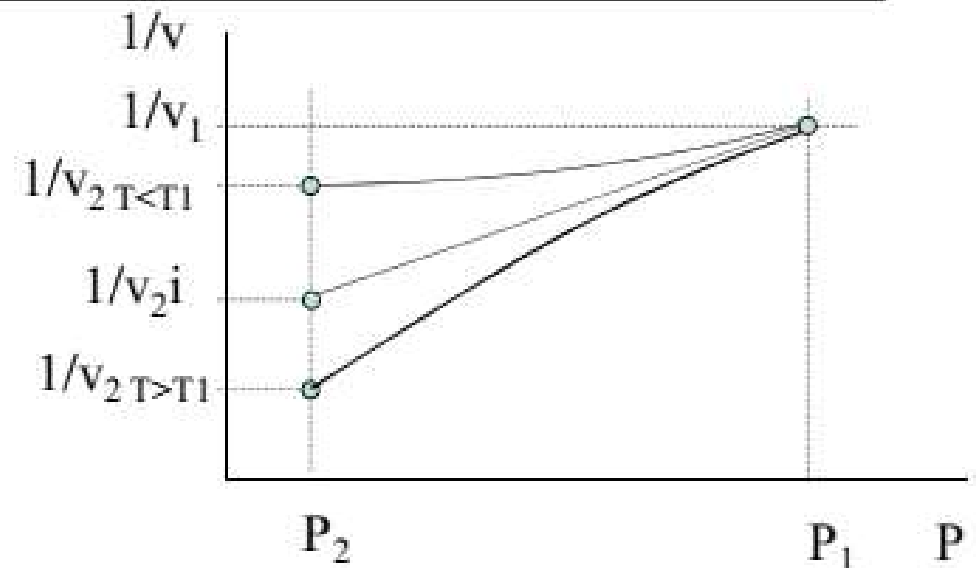
$$(w/A) = \left[ \frac{- \int_1^2 dP/v}{\ln (v_2/v_1) + 2 f L/D} \right]^{1/2}$$

- Vamos a comparar cada término



# Efecto del perfil de Temperatura en el flujo másico respecto al caso Isotérmico a $T_1$

Comparación de  $\left( -\int_1^2 dP/v \right)$



Asumiendo Gas ideal:  $Pv/T = \text{cte}$

Si en toda la tubería  $T > T_1$ , para cualquier  $P_x \Rightarrow v_x > v_{xi}$

Si en toda la tubería  $T < T_1$ , para cualquier  $P_x \Rightarrow v_x < v_{xi}$

$$\left( -\int_1^2 dP/v \right)_{T > T_1} < \left( -\int_1^2 dP/v \right)_i < \left( -\int_1^2 dP/v \right)_{T < T_1}$$

## Efecto del perfil de Temperatura en el flujo másico respecto al caso Isotérmico a $T_1$

$$(w/A) = \left[ \frac{-\int_1^2 dP/v}{\ln(v_2/v_1) + 2 f L/D} \right]^{1/2}$$

$$\left[ \ln(v_2/v_1) \right]_{T>T_1} > \left[ \ln(v_2/v_1) \right]_i > \left[ \ln(v_2/v_1) \right]_{T<T_1}$$

$$\left[ 2fL/D \right]_{T>T_1} \sim \left[ 2fL/D \right]_i \sim \left[ 2fL/D \right]_{T<T_1}$$


$$(w/A)_{T>T_1} < (w/A)_{\text{isotérmico a } T_1} < (w/A)_{T<T_1}$$

# Comparación de casos reales con modelos

$$(w/A)_{\text{isotérmico}} < (w/A)_{\text{adiabático}}$$

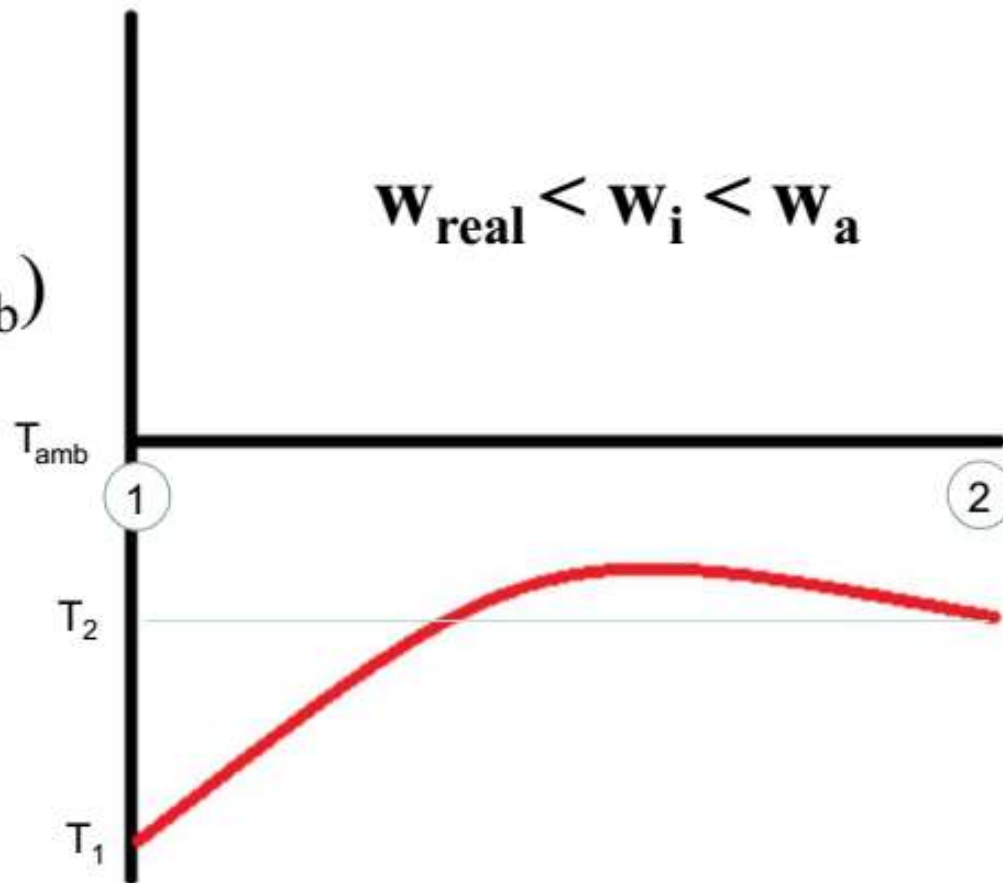
$$(w/A)_{Q>0} < (w/A)_{\text{adiabático}} < (w/A)_{Q<0}$$

$$(w/A)_{T>T1} < (w/A)_{\text{isotérmico a } T1} < (w/A)_{T<T1}$$

# Comparación de casos reales con modelos

$$\begin{aligned} Q &> 0 \\ T &> T_1 \\ (T_1 &\ll T_{\text{amb}}) \end{aligned}$$

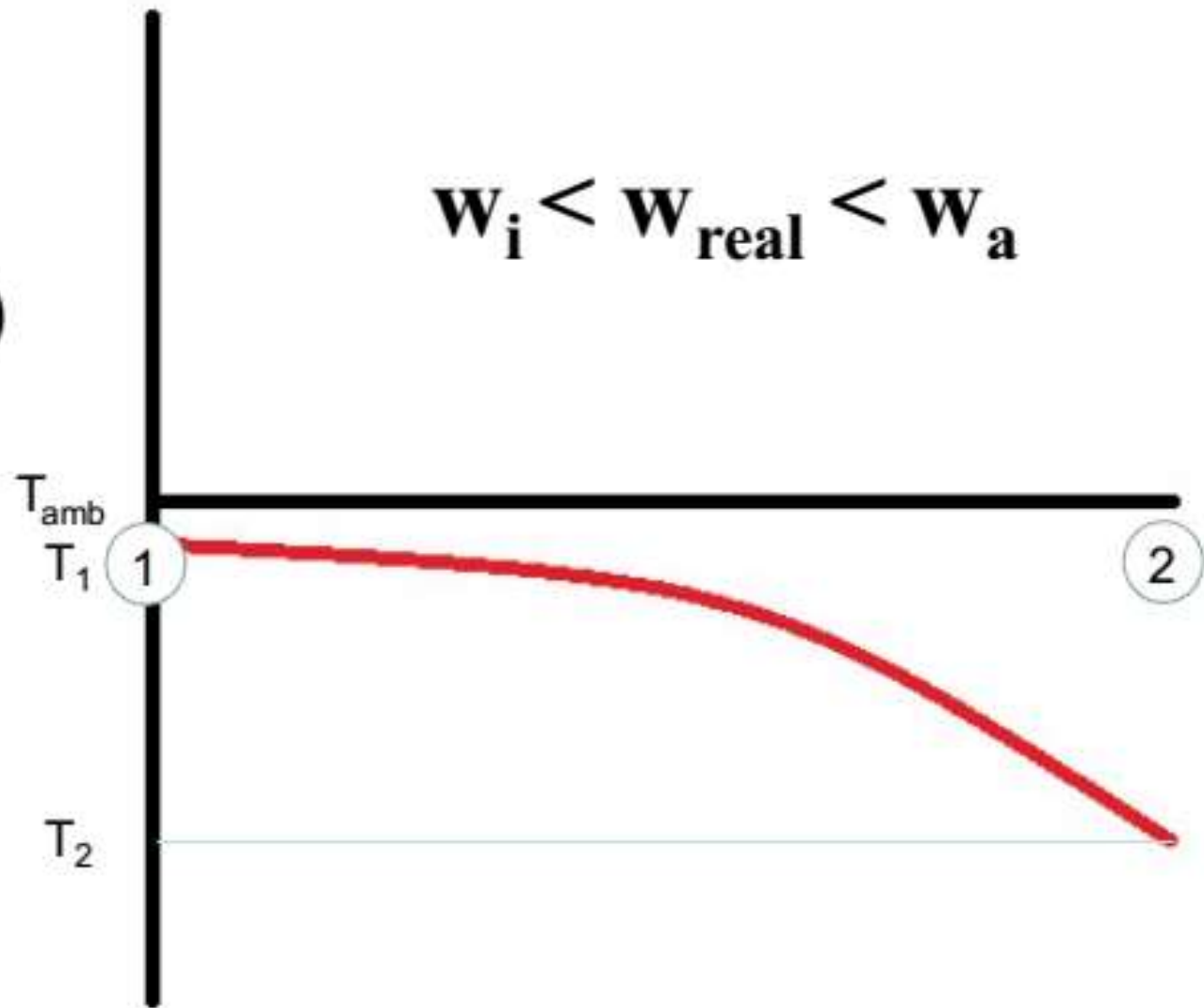
$$W_{\text{real}} < W_i < W_a$$



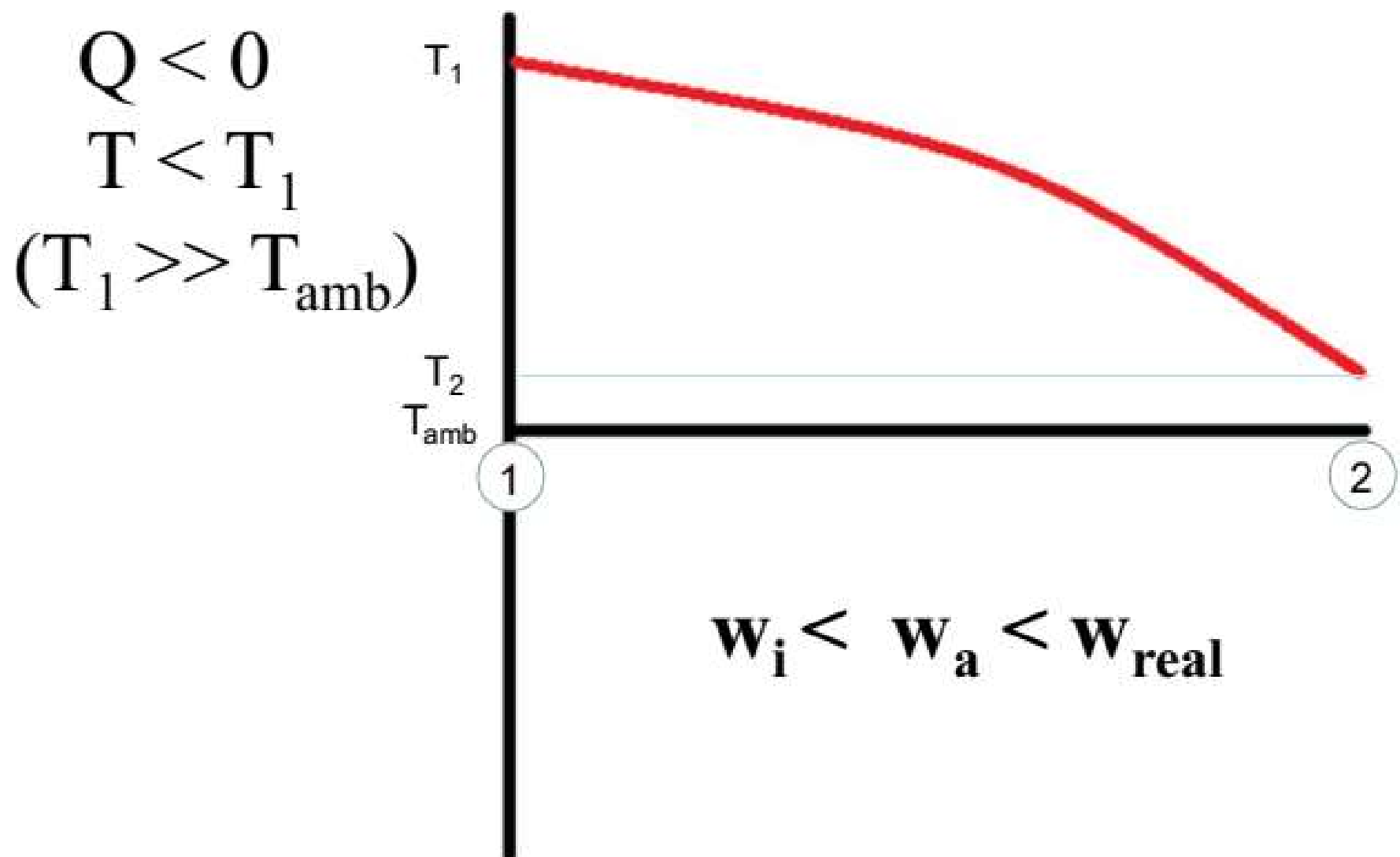
# Comparación de casos reales con modelos

$$Q > 0$$
$$T < T_1$$
$$(T_1 \leq T_{\text{amb}})$$

$$w_i < w_{\text{real}} < w_a$$



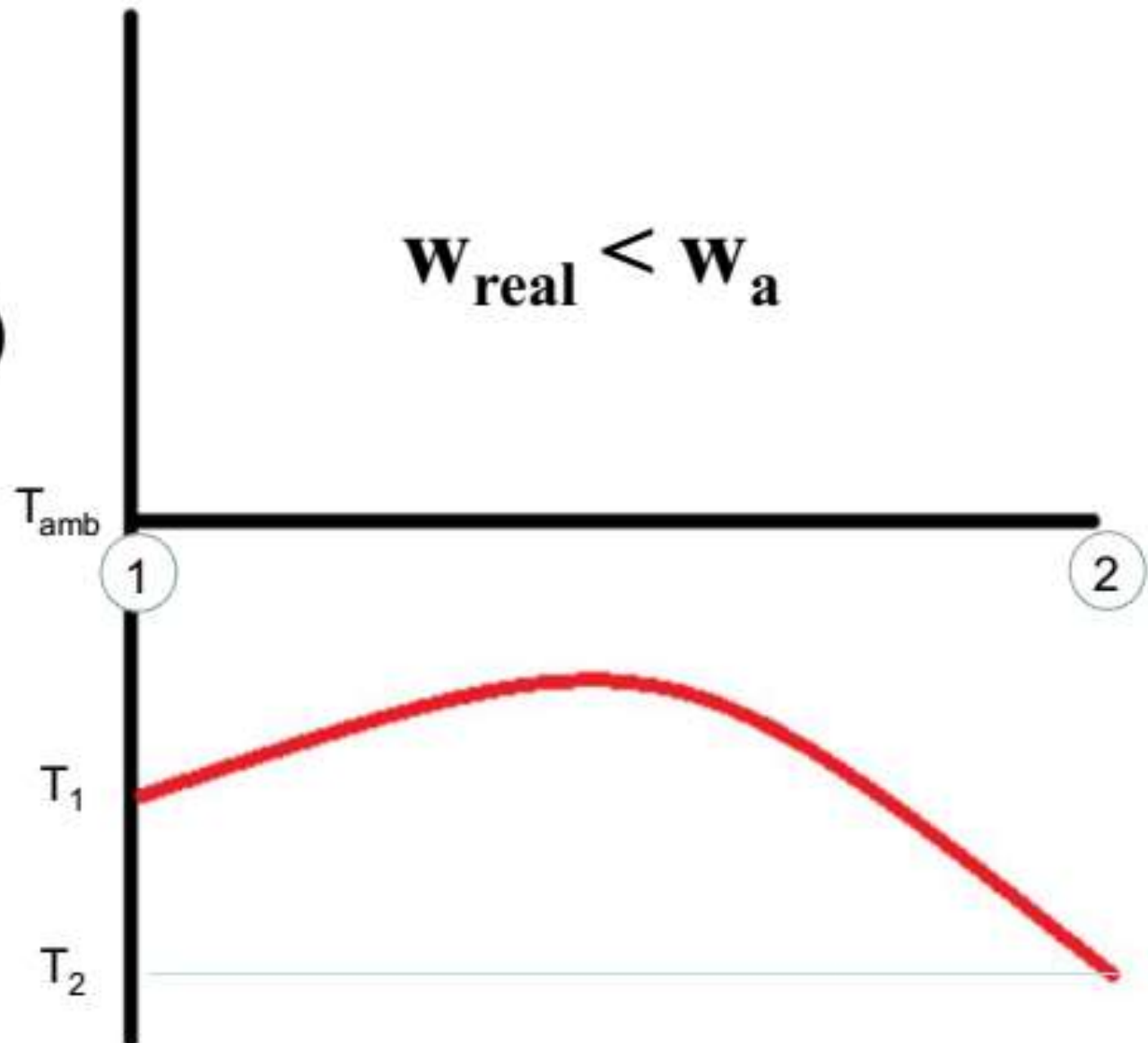
# Comparación de casos reales con modelos



# Comparación de casos reales con modelos

$$Q > 0$$
$$T ? T_1$$
$$(T_1 < T_{\text{amb}})$$

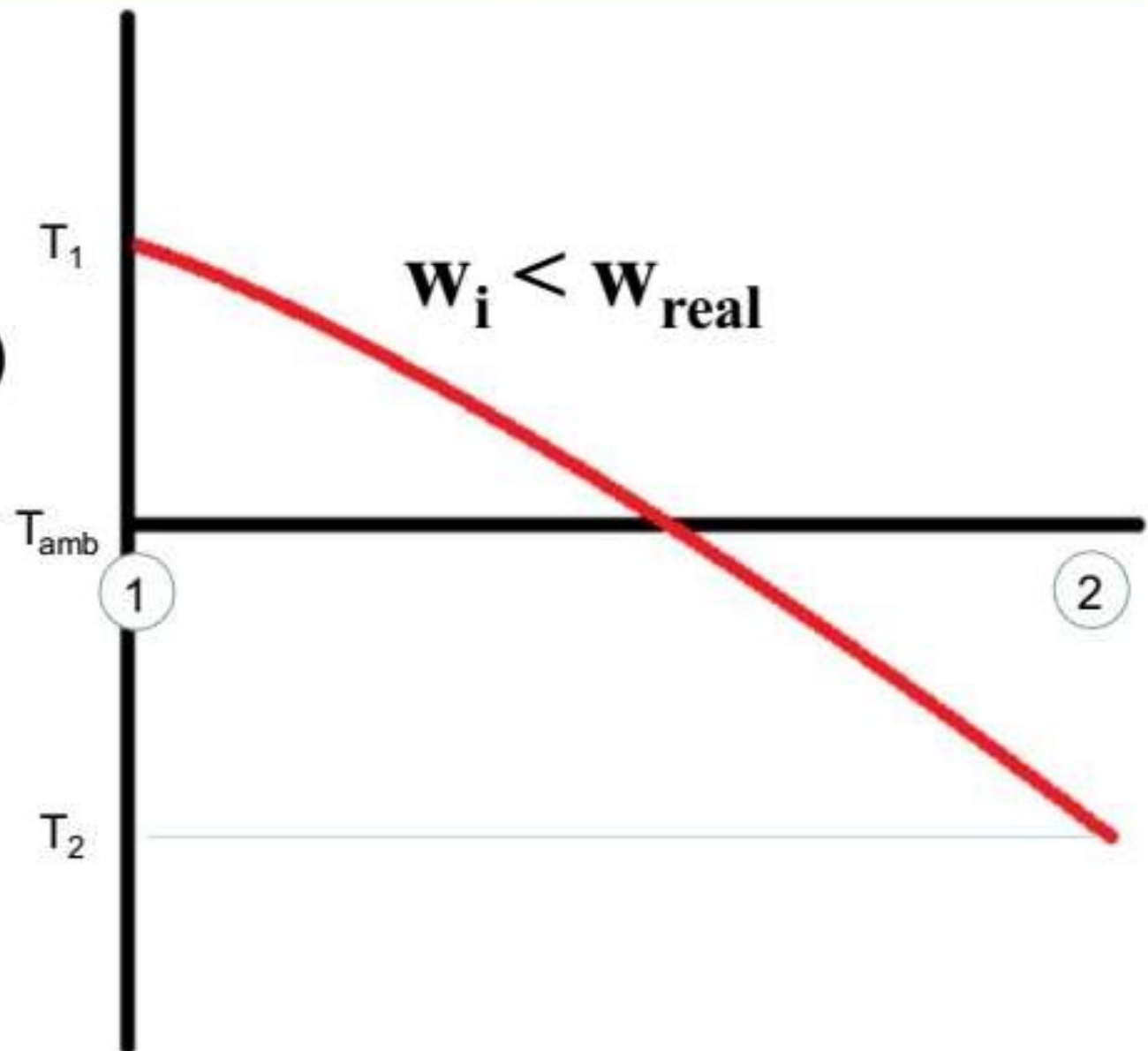
$$W_{\text{real}} < W_a$$





# Comparación de casos reales con modelos

$Q?$   
 $T < T_1$   
 $(T_1 > T_{\text{amb}})$





# Comparación de casos reales con modelos

$$(w/A)_{\text{isotérmico}} < (w/A)_{\text{adiabático}}$$

$$(w/A)_{Q>0} < (w/A)_{\text{adiabático}} < (w/A)_{Q<0}$$

$$(w/A)_{T>T_1} < (w/A)_{\text{isotérmico a } T_1} < (w/A)_{T<T_1}$$

$W < w_i < w < w_a < W$		
$T_1 \ll T_{\text{amb}}$	$T_1 \leq T_{\text{amb}}$	$T_1 \gg T_{\text{amb}}$
$T > T_1$	$Q > 0$	$Q < 0$
	$T < T_1$	