¿Qué estudiaremos hoy?

- 1. Modelos empíricos y velocidades típicas
- 2. Problemas frecuentes a resolver
- 3. Velocidad sónica y velocidad máxima
- 4. Descarga en reservorio
- 5. Flujo desde reservorio

Fórmulas empíricas

Existe un gran número de fórmulas empíricas para calcular parámetros de flujo compresible por ductos. Entre ellas figuran:

- Fórmula de Weymouth para gases a alta presión
- Fórmula de Panhandle para gas natural
- Fórmula de Spitzglass para gases a bajas presiones
- Fórmula de Babcock para vapor de agua
- Fórmula de Fritzche para vapor sobrecalentado
- Fórmulas y nomogramas Spirax Sarco para vapor

Velocidades típicas

Vapor saturado 1 a 3 atm: 20 a 30 m/s

Vapor saturado a más de 3 atm: 30 a 50 m/s

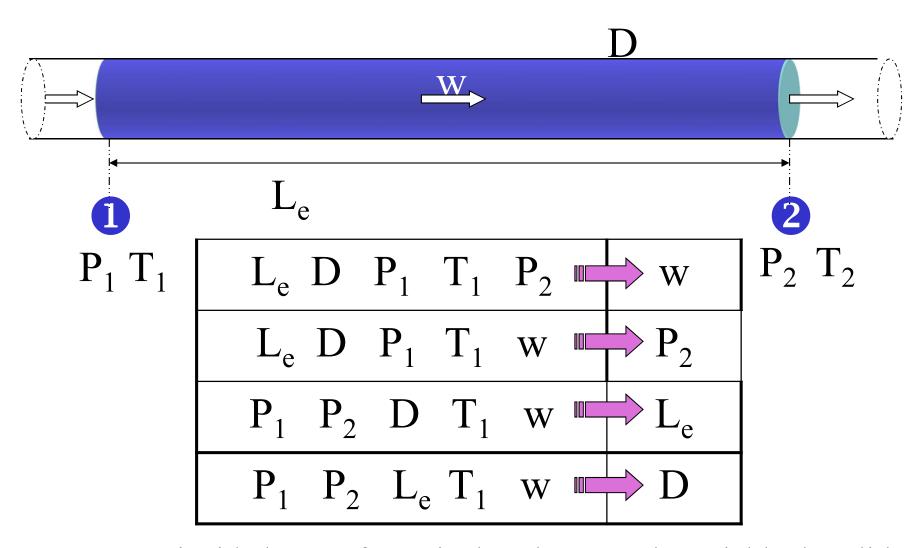
Vapor sobrecalentado: 35 a 100 m/s

Gases a tiro natural: 2 a 4 m/s

Gases a presión atmosférica o cercana a ésta en conductos de gas y tuberías de ventilación: 5 a 20 m/s

Fuente: "Problemas de Flujo de Fluidos" (Valiente Barderas)

Problemas frecuentes



¿Cómo incide la transferencia de calor en cada variable de salida?

Velocidad sónica

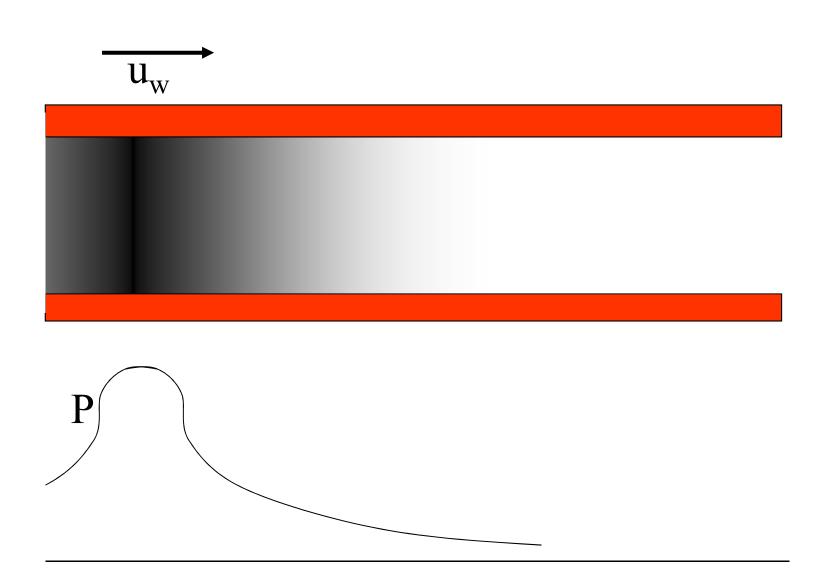
Si se pretende modificar las condiciones del flujo mediante un cambio en la presión ¿Cuánto demora en que el fluido sea afectado por ese cambio?

Determinaremos cuál es la velocidad de propagación de una pequeña perturbación de presión.

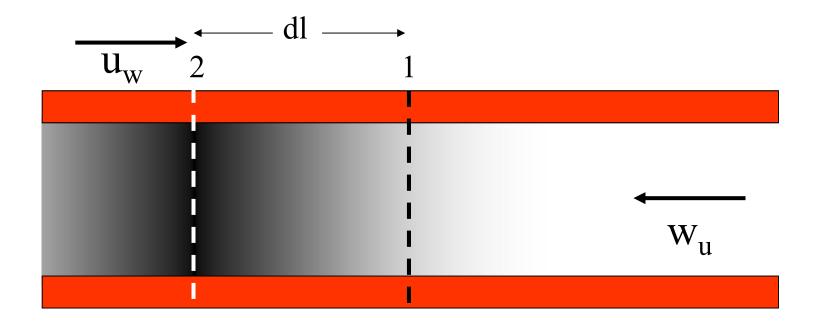
Velocidad sónica

sección A

Cuando se genera una alteración en la presión en un punto del fluido, la nueva condición tarda un tiempo finito en transmitirse a otro punto del fluido.

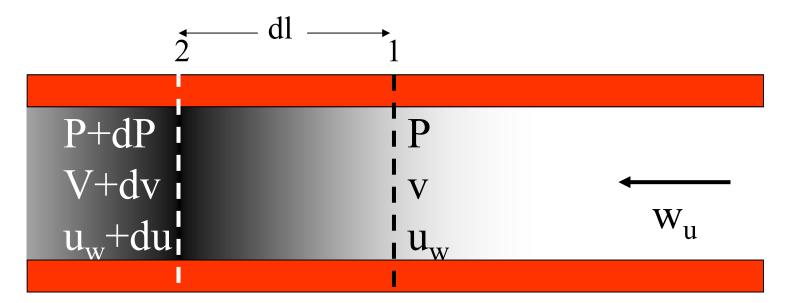


Sea u_w la velocidad a la que se propaga la perturbación u onda de presión.



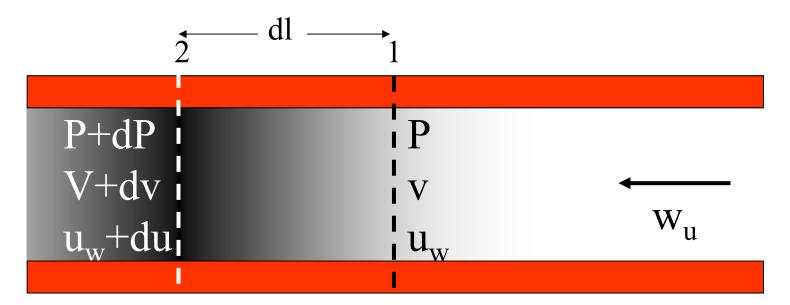
Supongamos que la onda de presión se mantiene inmóvil debido a que el fluido circula en el sentido contrario a igual velocidad y con un flujo másico w_u.

Definamos un volumen de control diferencial entre dos secciones de la zona perturbada (1 y 2)



Del balance de masa...

$$w_{entrada} = w_{salida} \longrightarrow uA/v = (u+du)A/(v+dv)$$



Del balance de cantidad de movimiento...

PA -
$$(P+dP)A = w_u (u+du) - w_u u$$

(suponemos despreciable el efecto del rozamiento)

$$-AdP = w_u du$$

$$w_u = A u/v \rightarrow u = (w_u/A)v \rightarrow du = (w_u/A)dv$$

$$\rightarrow (w_u/A)^2 = -(dP/dv)$$

Si la onda se pudiera transmitir en condiciones isotérmicas (físicamente imposible)

$$dP/dv = -P/v \rightarrow \left(u_w = \sqrt{Pv}\right)$$

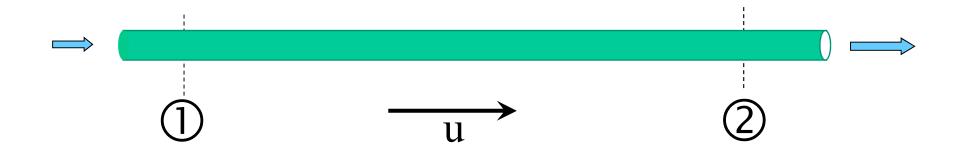
Las ondas de presión se propagan a altas velocidades, de modo que los procesos de transferencia de calor no las afectan, lo que hace de este un proceso adiabático.

Si la perturbación es infinitesimal, el proceso es reversible y por ser adiabático es isentrópico.

Para gas ideal en proceso isentrópico

$$dP/dv = -\gamma P/v \rightarrow u_w = \sqrt{\gamma Pv} \rightarrow velocidad$$
 $del sonido$

Condiciones de velocidad máxima en conducciones horizontales de sección constante



Manteniendo las restricciones: tubería horizontal, sección constante, estado estacionario, sin trabajo, altamente turbulento

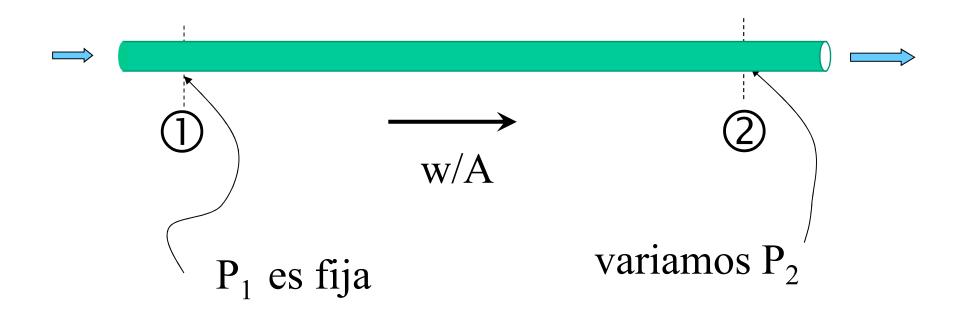
Vamos a demostrar que existen condiciones que limitan la velocidad (u) que puede alcanzar el fluido dentro de la tubería.



Habíamos visto que la ecuación de balance de energía mecánica que aplica para este caso es...

$$(w/A)^2 ln (v_2/v_1) + \int_1^2 dP/v + 2 f L/D (w/A)^2 = 0$$

Vamos a estudiar las variaciones de w/A con la presión aguas abajo P_2 (dejando fija la presión aguas arriba, P_1).



... y trataremos de ver qué efecto tiene esa variación de P₂ sobre w/A

$$\begin{array}{c} \longrightarrow \\ \hline 1 \end{array}$$

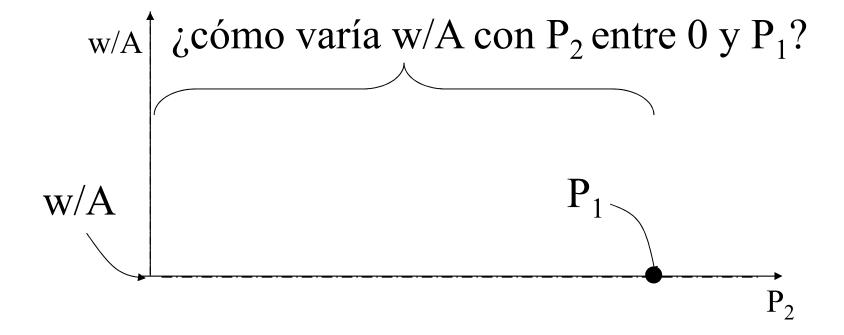
$$(w/A)^2 ln (v_2/v_1) + \int_1^2 dP/v + 2 f L/D (w/A)^2 = 0$$

$$w/A = \frac{-\int_{1}^{2} dP/v}{ln (v_{2}(P_{2})/v_{1}) + 2 f L/D}$$

Intentaremos graficar w/A en función de P₂

$$w/A = \frac{\int_{1}^{2} dP/v}{ln (v_{2}(P_{2})/v_{1}) + 2 f L/D}$$

Véase que si
$$P_2 = P_1$$
 $\rightarrow -\int_1^2 dP/v = 0 \rightarrow w = 0$



Para analizar la dependencia de w/A con P₂ vamos a estudiar la derivada de w/A respecto a P₂ ...

$$\frac{\partial(\mathbf{w}/\mathbf{A})}{\partial \mathbf{P}_{2}} = \frac{-\left[1 + (\partial \mathbf{v}/\partial \mathbf{P}|_{\mathbf{P}=\mathbf{P}_{2}})(\mathbf{w}/\mathbf{A})^{2}\right]}{2(\mathbf{w}/\mathbf{A}) \mathbf{v}(\mathbf{P}_{2}) \left[\ln(\mathbf{v}(\mathbf{P}_{2})/\mathbf{v}_{1}) + 2 \mathbf{f} \mathbf{L}/\mathbf{D}\right]}$$

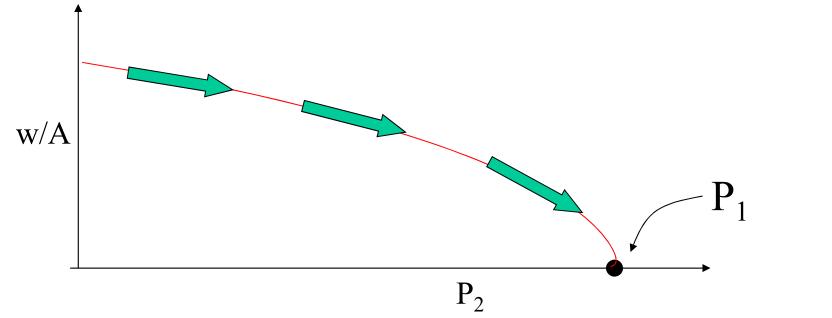
Signo
$$\left[\partial(\mathbf{w}/\mathbf{A})/\partial\mathbf{P}_{2}\right] = -\operatorname{Signo}\left[1 + \left(\partial\mathbf{v}/\partial\mathbf{P}\big|_{\mathbf{P}=\mathbf{P}_{2}}\right)(\mathbf{w}/\mathbf{A})^{2}\right]$$

Signo
$$[\partial(w/A)/\partial P_2] = -Signo \left[1 + (\partial v/\partial P|_{P=P_2})(w/A)^2\right]$$

Caso fluido incompresible

$$(\partial \mathbf{v}/\partial \mathbf{P}|_{\mathbf{P}=\mathbf{P}_2}) = 0 \Rightarrow \partial (\mathbf{w}/\mathbf{A})/\partial \mathbf{P}_2 < 0$$

w/A siempre disminuye al aumentar P₂



Signo
$$\left[\partial(\mathbf{w}/\mathbf{A})/\partial\mathbf{P}_{2}\right] = -\operatorname{Signo}\left(1 + (\partial\mathbf{v}/\partial\mathbf{P}|_{\mathbf{P}=\mathbf{P}_{2}})(\mathbf{w}/\mathbf{A})^{2}\right)$$

Caso fluido compresible

$$(\partial \mathbf{v}/\partial \mathbf{P}|_{\mathbf{P}=\mathbf{P}_2}) < 0 \Rightarrow \partial (\mathbf{w}/\mathbf{A})/\partial \mathbf{P}_2$$
?

$$[\partial (\mathbf{w}/\mathbf{A})/\partial \mathbf{P}_2] < 0$$

$$\begin{array}{c}
\text{si y s\'olo si} & \left[1 + (\partial v/\partial P|_{P=P_2})(w/A)^2\right] > 0 \\
\hline
 & P_1
\end{array}$$

$$[\partial (\mathbf{w}/\mathbf{A})/\partial \mathbf{P}_2] < 0$$

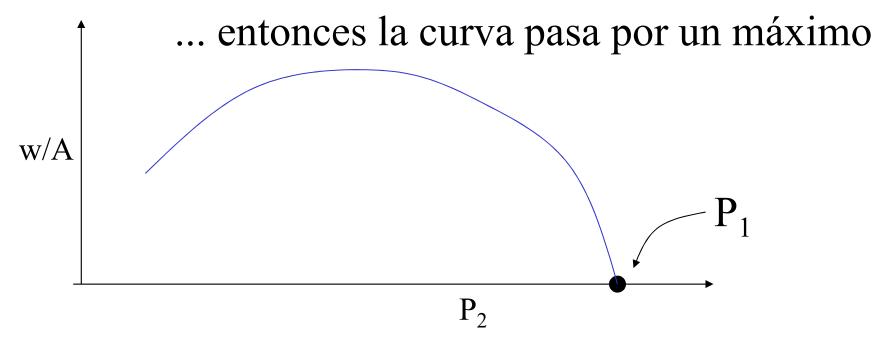
si y sólo si
$$\left(1 + (\partial v/\partial P|_{P=P_2})(w/A)^2 \right) > 0$$
 si y sólo si
$$(\partial v/\partial P|_{P=P_2})(w/A)^2 > -1$$
 si y sólo si
$$-(\partial v/\partial P|_{P=P_2})(w/A)^2 < +1$$
 si y sólo si
$$(w/A)^2 < -1/(\partial v/\partial P|_{P=P_2})$$
 si y sólo si
$$(w/A)^2 < -(\partial P/\partial v|_{P=P_2})$$
 si y sólo si
$$(w/A) < \sqrt{-(\partial P/\partial v|_{P=P_2})}$$
 si y sólo si
$$(w/A) < \sqrt{-(\partial P/\partial v|_{P=P_2})}$$
 si y sólo si
$$(w/A) - \sqrt{-(\partial P/\partial v|_{P=P_2})}$$

Caso fluido compresible

Signo
$$[\partial(w/A)/\partial P_2] = Signo((w/A) - \sqrt{-(\partial P/\partial v|_{P=P_2})})$$

Si para alguna P₂ se cumple que

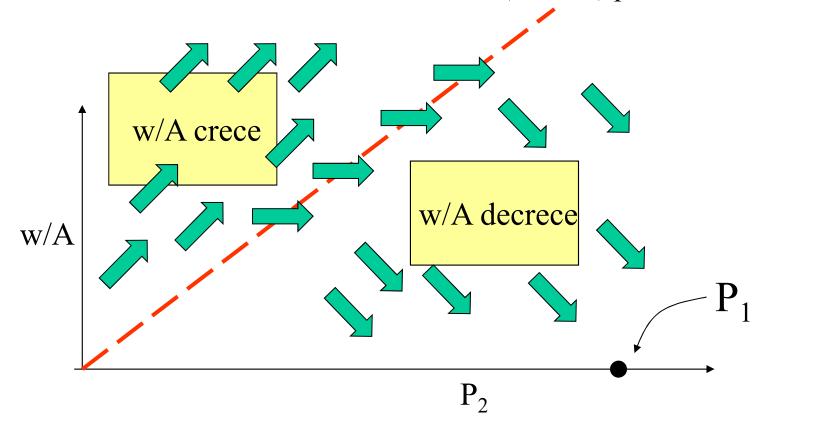
$$(w/A) = \sqrt{-(\partial P/\partial v|_{P=P_2})}$$



 $-(\partial P/\partial V)_T = P/V = PM P^2/RT$

Signo $[\partial(w/A)/\partial P_2] = Signo[(w/A) - \sqrt{-(\partial P/\partial v|_{P=P_2})}]$

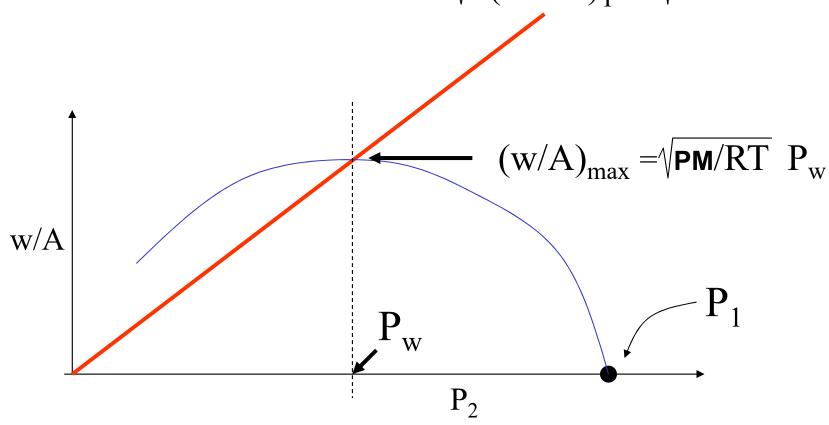
Condición de máximo: $w/A = \sqrt{-(\partial P/\partial v)_T} = \sqrt{PM/RT} P$



$$-(\partial P/\partial v)_T = P/v = PM P^2/RT$$

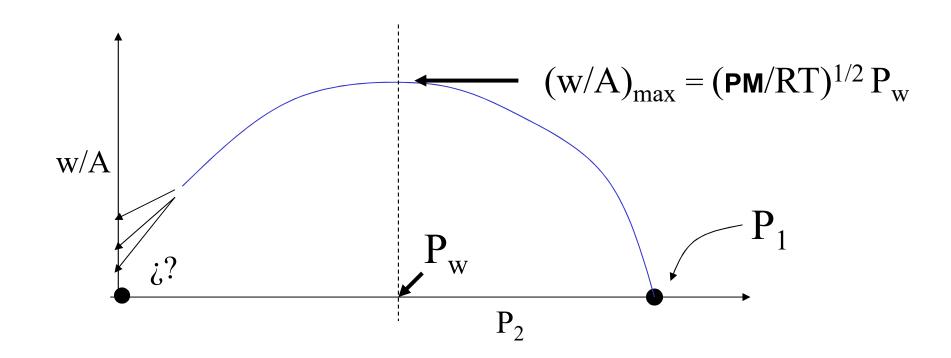
Signo
$$[\partial(w/A)/\partial P_2] = Signo[(w/A) - \sqrt{-(\partial P/\partial v|_{P=P_2})}]$$

Condición de máximo: $w/A = \sqrt{-(\partial P/\partial v)_T} = \sqrt{PM/RT} P$



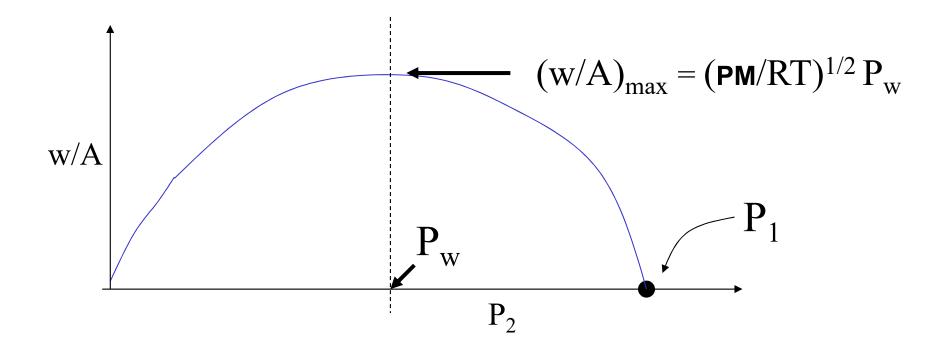
$$-(\partial P/\partial V)_T = P/V = PM P^2/RT$$

¿Qué pasa con w/A para $P_2 = 0$?



w/A =
$$\frac{\int_{1}^{2} dP/v}{ln(v_{2}(P_{2})/v_{1}) + 2 f L/D}$$
 1/2

Si $P_2 \rightarrow 0$, entonces $v_2 \rightarrow \infty$ y entonces w/A $\rightarrow 0$



$$(w/A)_{max} = (PM/RT)^{1/2} P_w = \sqrt{(P_w/v_w)}$$
 Pero w/A = u/v , entonces
$$u_w = \sqrt{(P_wv_w)}$$

Esta es la velocidad máxima a la que podría circular el fluido en condiciones isotérmicas.

ATENCION:

La condición de velocidad máxima que acabamos de ver no es físicamente alcanzable porque a las grandes velocidades de compresión y expansión involucradas no se puede mantener el comportamiento isotérmico.

Las condiciones de velocidad máxima tienen asociado un muy pobre intercambio de calor del fluido con los alrededores. Por esto, en general las condiciones adiabáticas son una aproximación satisfactoria para los casos reales.

En clases pasadas vimos que para mantener flujo isotérmico de un gas ideal la densidad de flujo de calor por unidad de longitud de ducto debería ser :

$$\frac{\delta Q}{\delta l} = \frac{2 (f/D) (w^5/A^4) v^4}{(RT/PM) - (w/A)^2 v^2} = \frac{2 (f/D) w u^4}{(RT/PM) - u^2}$$

Véase que si RT/PM = u_w^2 entonces $\delta Q/\delta l = \infty$

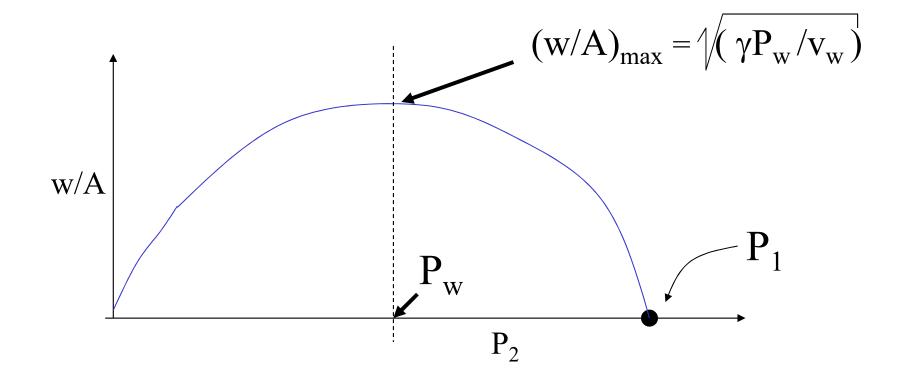
Las condiciones isotérmicas exigirían que la densidad de flujo de calor aumentara a lo largo del tubo conforme aumenta u. Para altos valores de u (próximos a u_w) esta condición no se puede cumplir y por eso, escurrimiento isotérmico en ductos sólo puede conseguirse a velocidades relativamente bajas.

Flujo adiabático de un gas ideal

Para este caso se demuestra que:

$$(w/A)_{max} = \sqrt{(\gamma P_w/v_w)}$$
 donde $\gamma = C_p/C_v$

y la velocidad máxima $u_w = \sqrt{(\gamma P_w v_w)}$

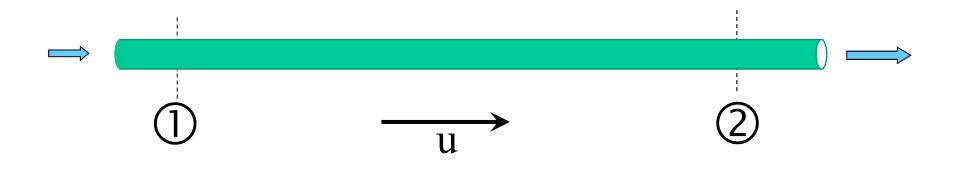


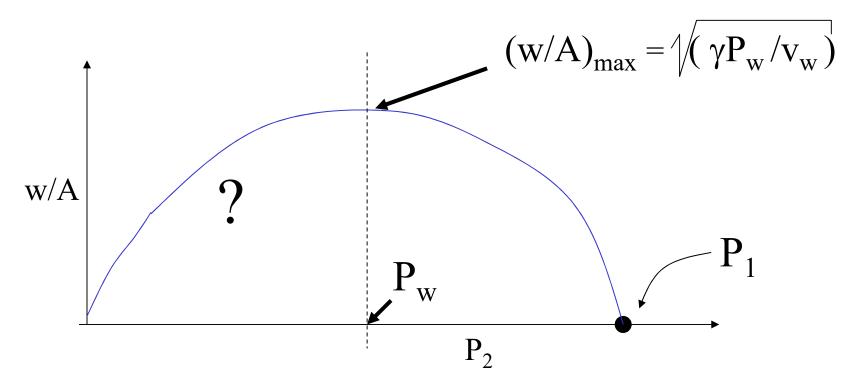
Lo que acabamos de ver enseña que...

Para una presión P_1 aguas arriba dada hay un flujo másico máximo que se puede alcanzar por el gas (a la presión $P_2 = P_w$).

La velocidad lineal máxima en las condiciones de flujo másico máximo, u_w, coincide con la velocidad del sonido.

Una eventual reducción posterior de P₂ no daría lugar a un aumento del flujo másico.

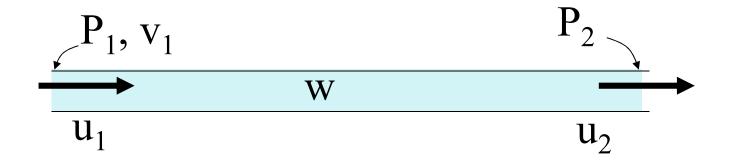




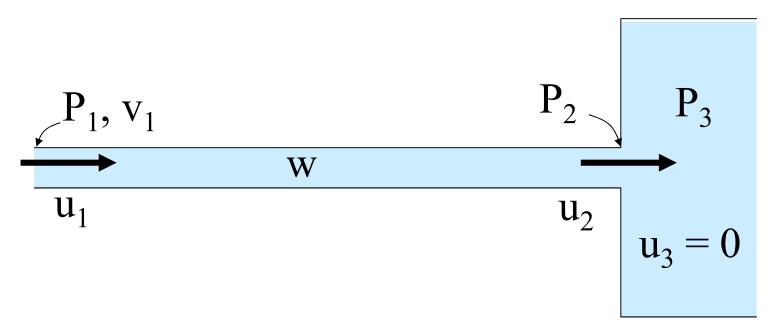
Pero en un flujo adiabático, si P1 está fija, P2 solo la puedo controlar desde un reservorio de descarga.

Descarga en reservorio estanco

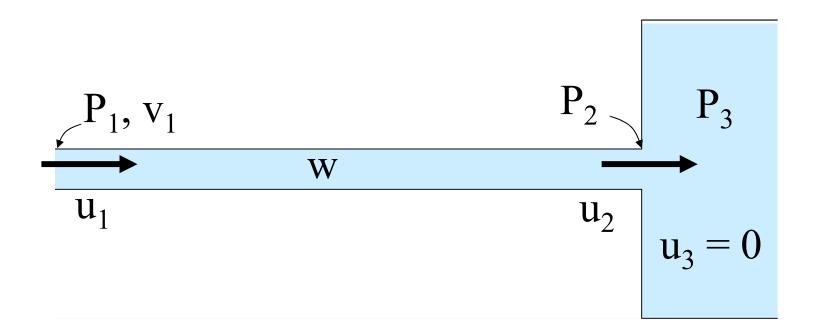
Consideremos la siguiente geometría...



La tubería ahora descarga en un reservorio donde el fluido está quieto.



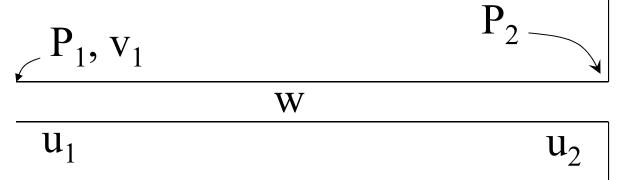
En la práctica no podemos conducir procesos en los que fijemos P_2 . La presión corriente abajo que podemos controlar y ajustar es P_3 .



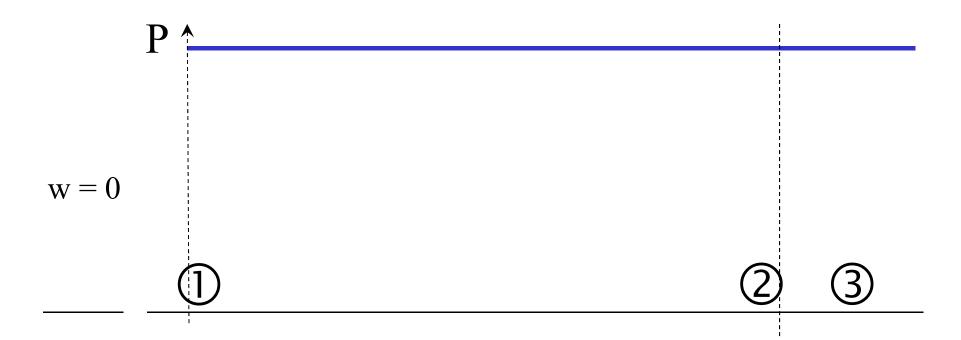
Supongamos que llevamos a cabo un proceso que reduce paulatinamente la presión P_3 mientras P_1 se mantiene constante.

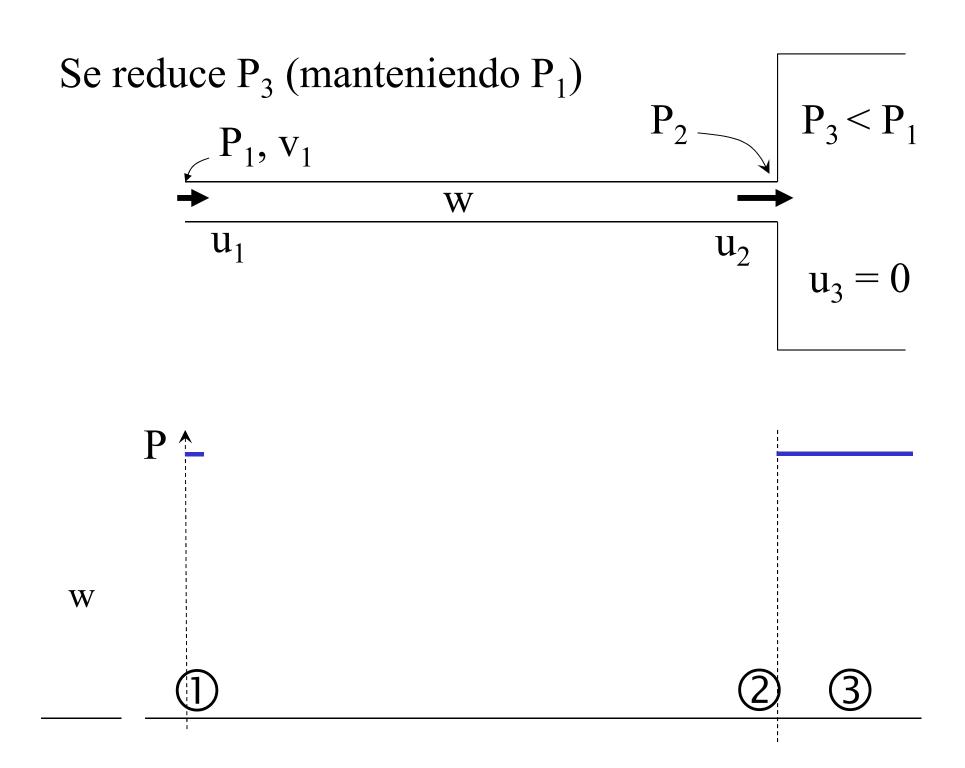
¿Cómo varía w?

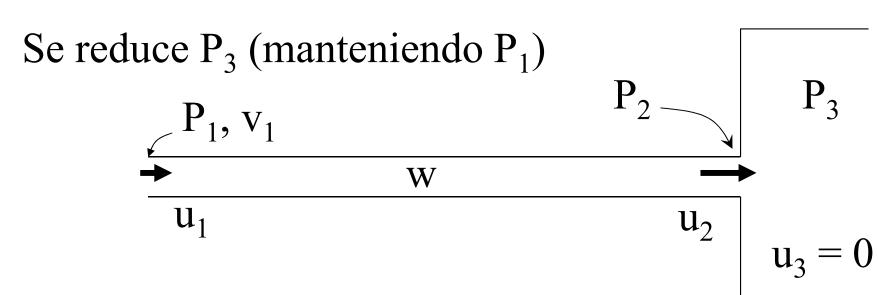
El proceso se inicia con $P_3 = P_1$.

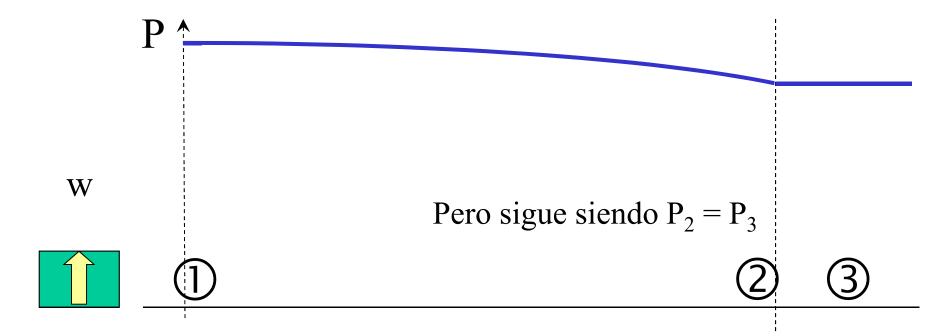


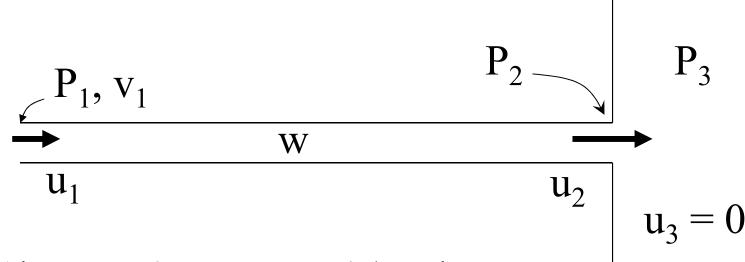
Desde luego si $P_3 = P_1$, entonces w = 0, $u_1 = u_2 = 0$ y $P_2 = P_3$

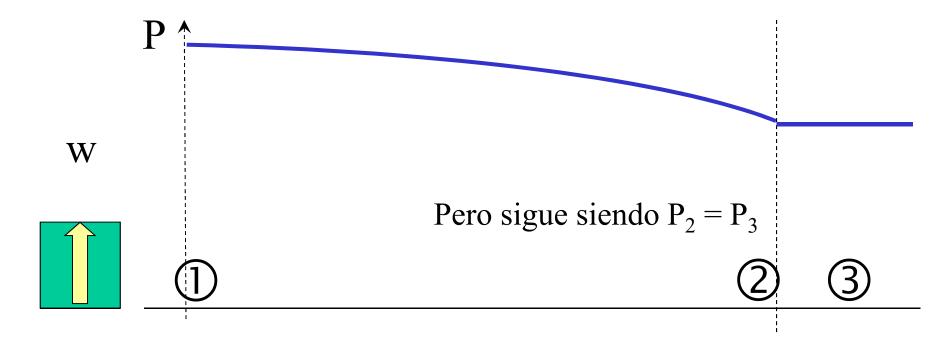


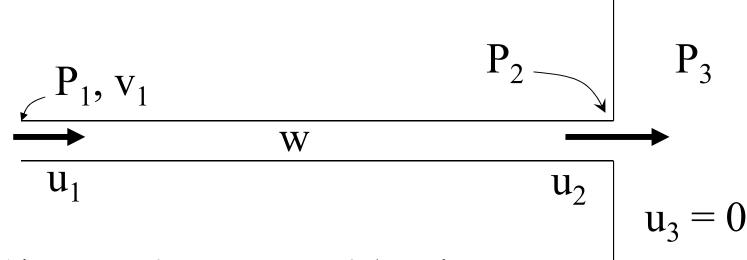


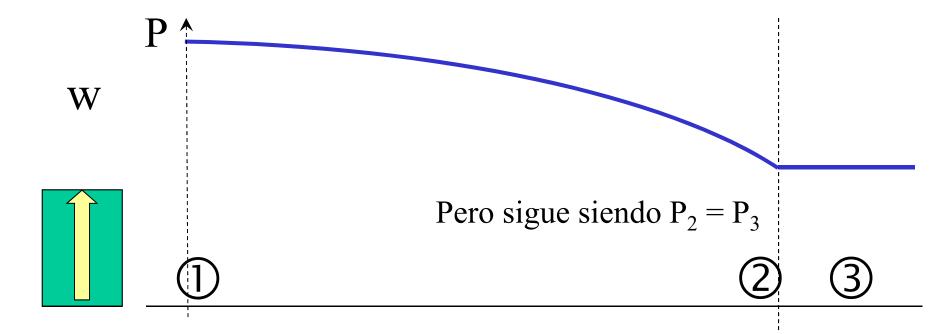


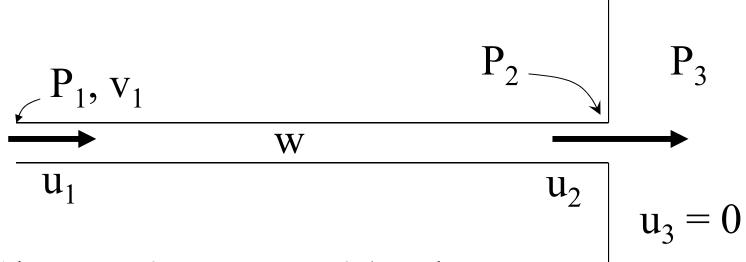


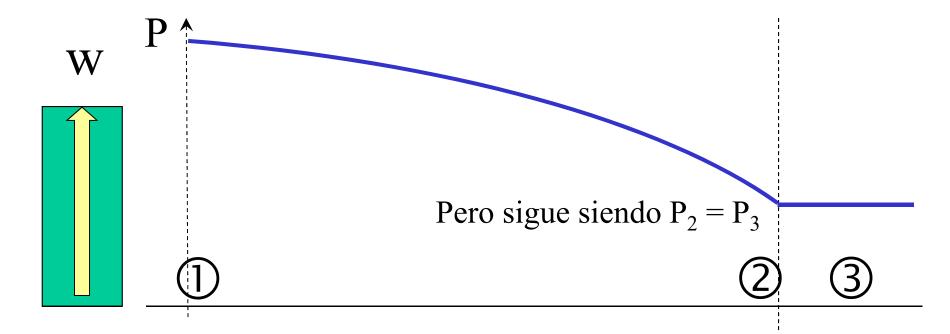


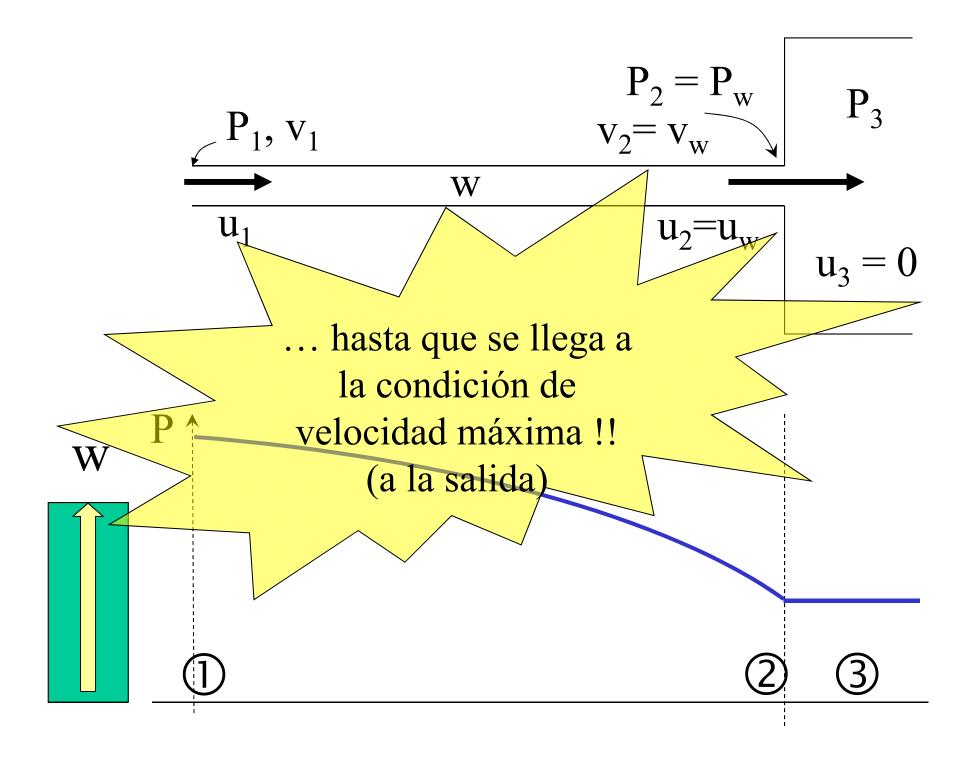








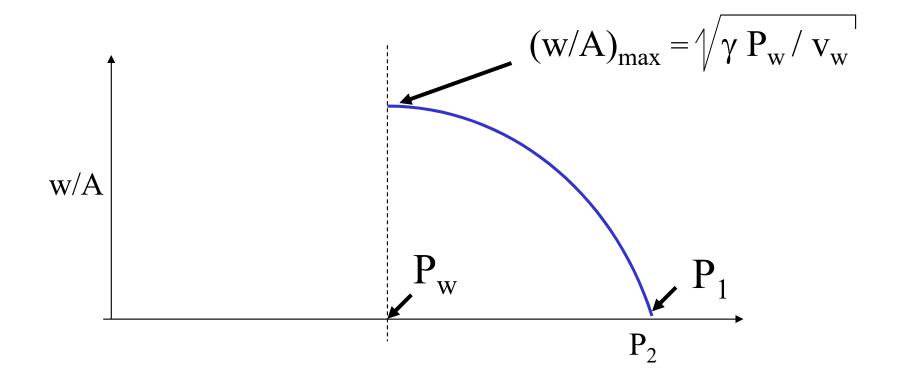




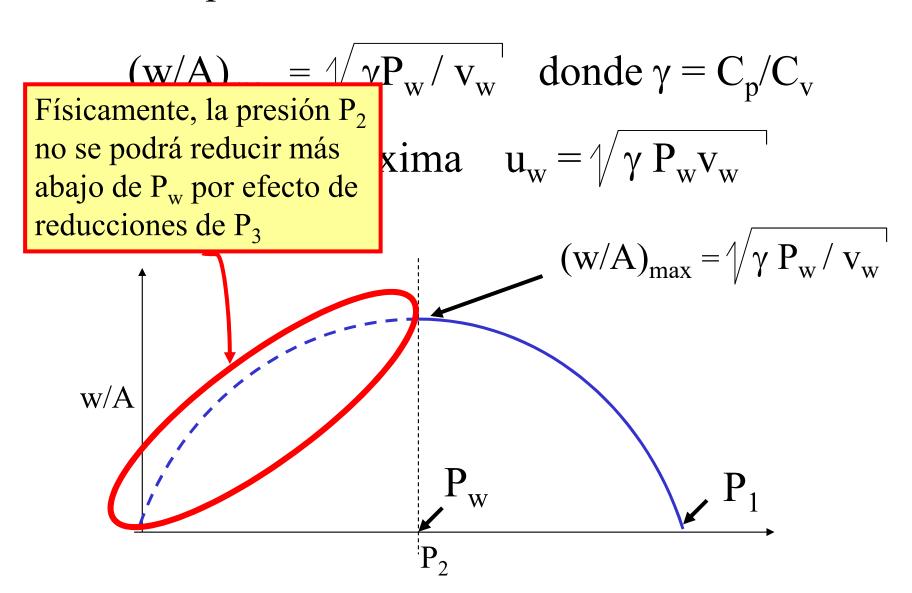
Para el caso de flujo adiabático de un gas ideal vimos que ...

$$(w/A)_{max} = \sqrt{\gamma P_w / v_w}$$
 donde $\gamma = C_p/C_v$

y la velocidad máxima $u_w = \sqrt{\gamma P_w v_w}$



Para el caso de flujo adiabático de un gas ideal vimos que ...

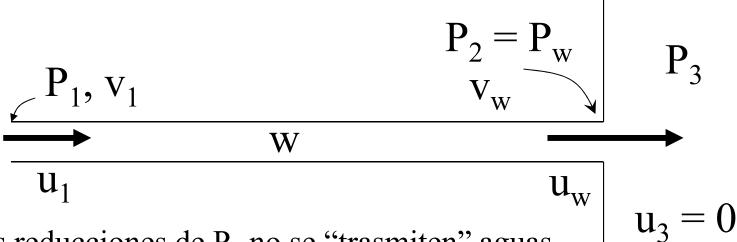


Para una presión P_1 aguas arriba dada hay una velocidad máxima de flujo másico que se puede alcanzar por el gas. La velocidad máxima tiene lugar <u>en el extremo corriente abajo</u>, cuando la presión (P_2) en dicho punto es tal que:

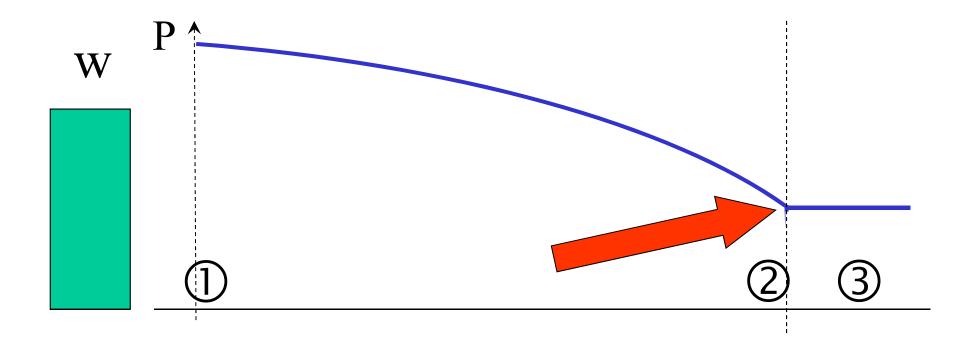
$$w/A = (\gamma P/v)^{1/2}$$

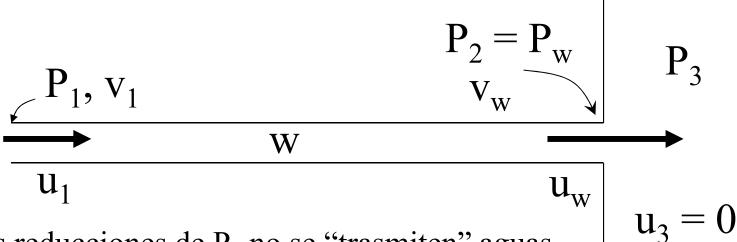
La velocidad máxima es la velocidad del sonido.

Una posterior reducción de P₂ no podrá lograrse por variaciones aguas abajo (pues los cambios de P no pueden trasmitirse aguas arriba).

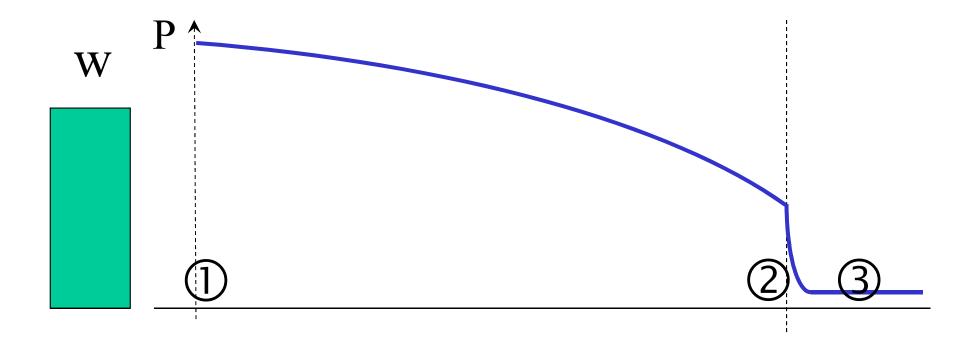


Posteriores reducciones de P_3 no se "trasmiten" aguas arriba por lo que P_2 sigue con su valor igual a P_w





Posteriores reducciones de P_3 no se "trasmiten" aguas arriba por lo que P_2 sigue con su valor igual a P_w



¿De que variable medible depende $(w/A)_{máx}$?

Para el caso de flujo adiabático de un gas ideal el flujo máximo verifica :

$$\frac{\left(w/A\right)_{max}^{2} = \gamma P_{w}/v_{w}}{\left(\frac{\gamma - 1}{2\gamma} + \frac{P_{1}}{v_{1}} \left(\frac{A}{w}\right)^{2}\right) \left[1 - \left(\frac{v_{1}}{v_{2}}\right)^{2}\right] - \frac{\gamma + 1}{\gamma} \ln \frac{v_{2}}{v_{1}} = \frac{4 \text{ f L}}{D} }{\frac{1}{2} \left[\frac{w}{A}\right]^{2} v_{1}^{2} + \frac{\gamma}{\gamma - 1} P_{1} v_{1} }$$

Resulta...

$$\frac{\left(\gamma + 1\right)\left(v_{w}\right)^{2}}{2\gamma\left(v_{1}\right)^{2}} - \frac{\left(\gamma + 1\right)}{\gamma}\ln\left(\frac{v_{w}}{v_{1}}\right) = \frac{4 f L}{D}$$
 (I)

$$\left(\frac{\mathbf{P}_1}{\mathbf{P}_{\mathbf{w}}}\right) = \frac{(\gamma - 1)}{2} \left(\frac{\mathbf{v}_{\mathbf{w}}}{\mathbf{v}_1} - \frac{\mathbf{v}_1}{\mathbf{v}_{\mathbf{w}}}\right) + \frac{\mathbf{v}_{\mathbf{w}}}{\mathbf{v}_1} \tag{II}$$

Véase que...

de (I): $v_w = v_1 \times función de (\gamma, fL/D)$

de (II y de I): $P_w = P_1 x$ función de $(\gamma, fL/D)$

O sea, $P_w/v_w = P_1/v_1 x$ función de $(\gamma, fL/D)$

Y entonces, $(w/A)_{max} = (\gamma P/v)^{1/2} = (P_1/v_1)^{1/2} f(\gamma, fL/D)$

Ejemplo:

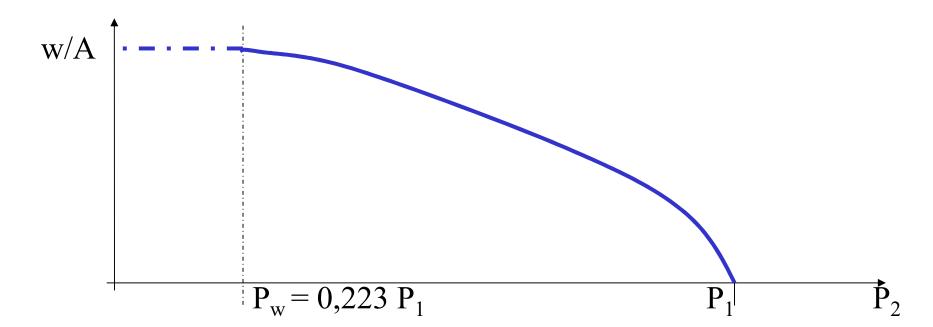
Flujo adiabático de gas ideal con $\gamma = 1,4$ por un tubo con 4 f L/D = 10. Determinar (en función de P_1 y v_1 , el valor máximo de P_3 para el cual hay flujo sónico, el valor de la velocidad sónica y el valor del flujo máximo por unidad de área.

$$\frac{\left(\frac{\gamma+1}{2\gamma}\right)\left(\frac{v_{w}}{v_{1}}\right)^{2}}{2\gamma} - \frac{\left(\frac{\gamma+1}{\gamma}\right)\ln\left(\frac{v_{w}}{v_{1}}\right)} = \frac{4 f L}{D} \quad (I)$$

De (I) resulta: $v_w/v_1 = 3,785$. Reemplazando en:

$$\left(\frac{P_1}{P_w}\right) = \frac{(\gamma - 1)}{2} \left(\frac{v_w}{v_1} - \frac{v_1}{v_w}\right) + \frac{v_w}{v_1} \quad (II)$$

...resulta $P_1/P_w = 4,490$, de donde $P_w = 0,223 P_1 = P_{3m\acute{a}x}$



Observación:

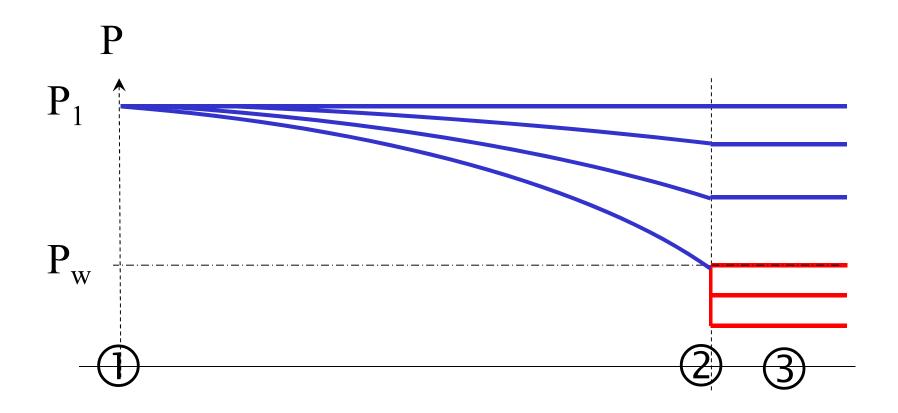
Para un G.I., dados γ y fL/D, P_w es directamente proporcional a P₁

La velocidad sónica (que se alcanza en el extremo 2) es en el ej.:

$$u_{\rm w} = (\gamma P_{\rm w} v_{\rm w})^{1/2} = (1.4 \times 0.223 P_1 \times 3.785 v_1)^{1/2} = 1.087 (P_1 v_1)^{1/2}$$

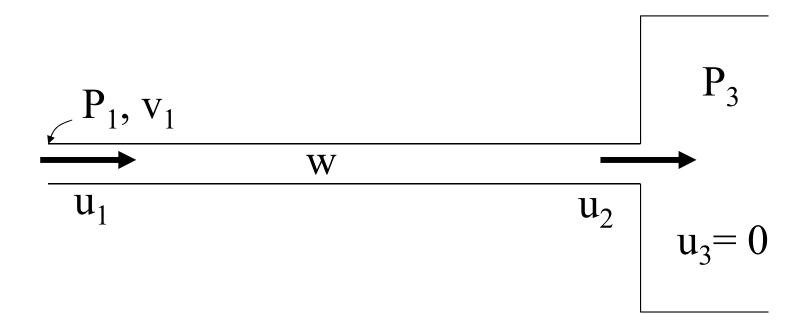
y el flujo máximo por unidad de área es

$$(w/A)_{\text{max}} = (\gamma P_{\text{w}}/v_{\text{w}})^{1/2} = (1.4 \times 0.223 P_{1}/3.785 v_{1})^{1/2} = 0.287 ((P_{1}/v_{1})^{1/2})^{1/2}$$



Para un gas ideal fluyendo por una tubería con una geometría dada (f L/D), si se fija la presión P_1 entonces P_w queda determinada.

El gráfico muestra cualitativamente las variaciones de presión a lo largo de la tubería para distintos valores de P₃



Supongamos ahora que llevamos a cabo un proceso en el que la presión P_3 se mantiene constante mientras P_1 va aumentando gradualmente.

¿Cómo varía w?

 $P_1 = P_3$ W = 0

u = 0

 $u_3 = 0$

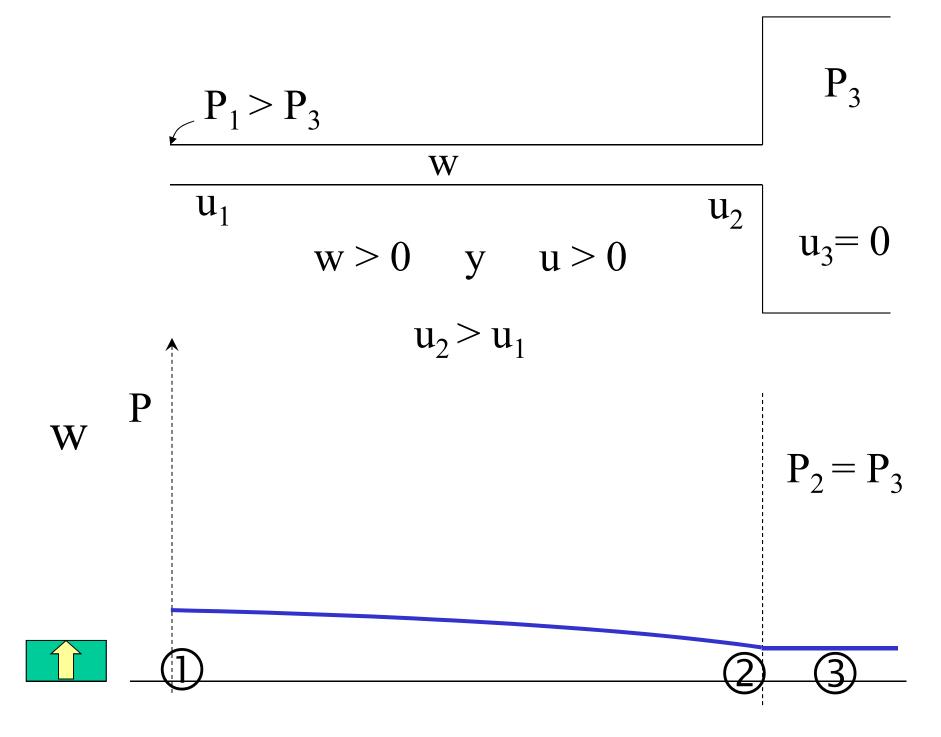
 P_3

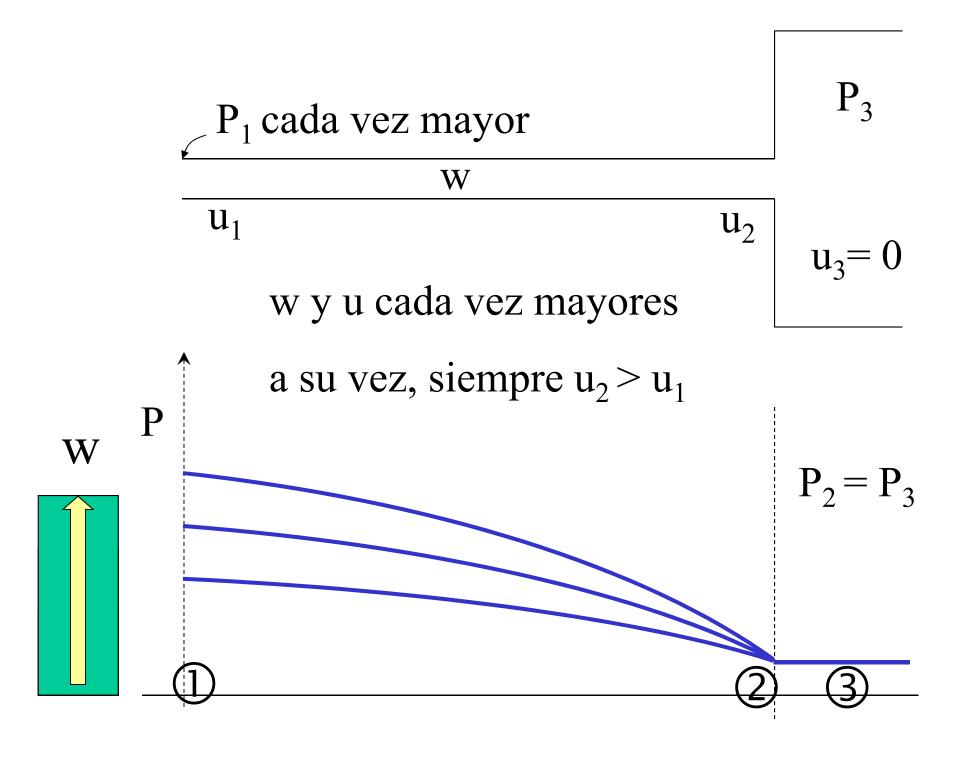
w P

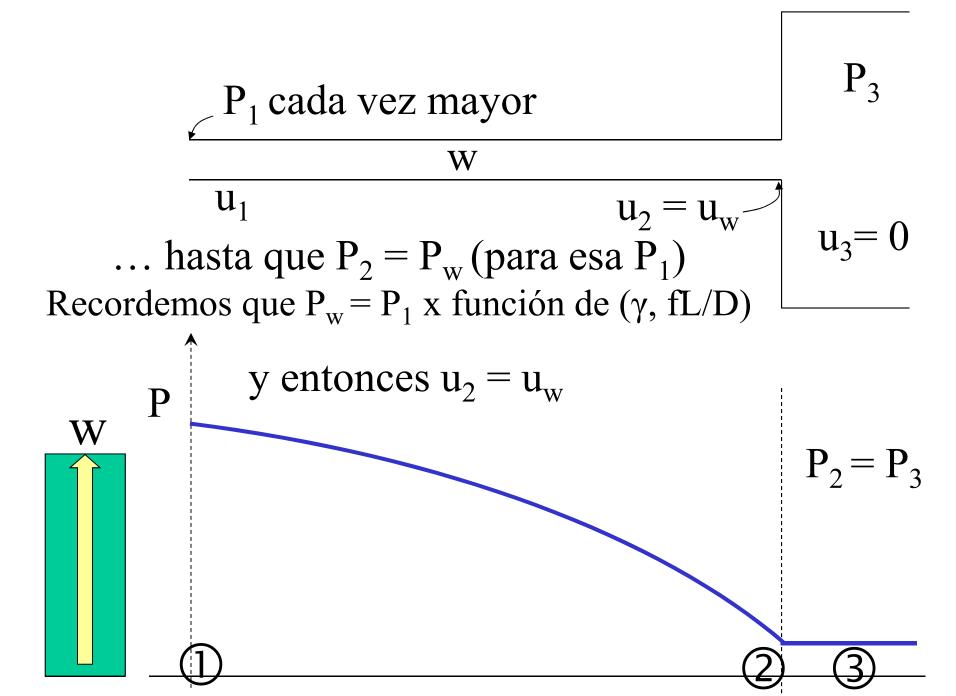
 $P_2 = P_3$

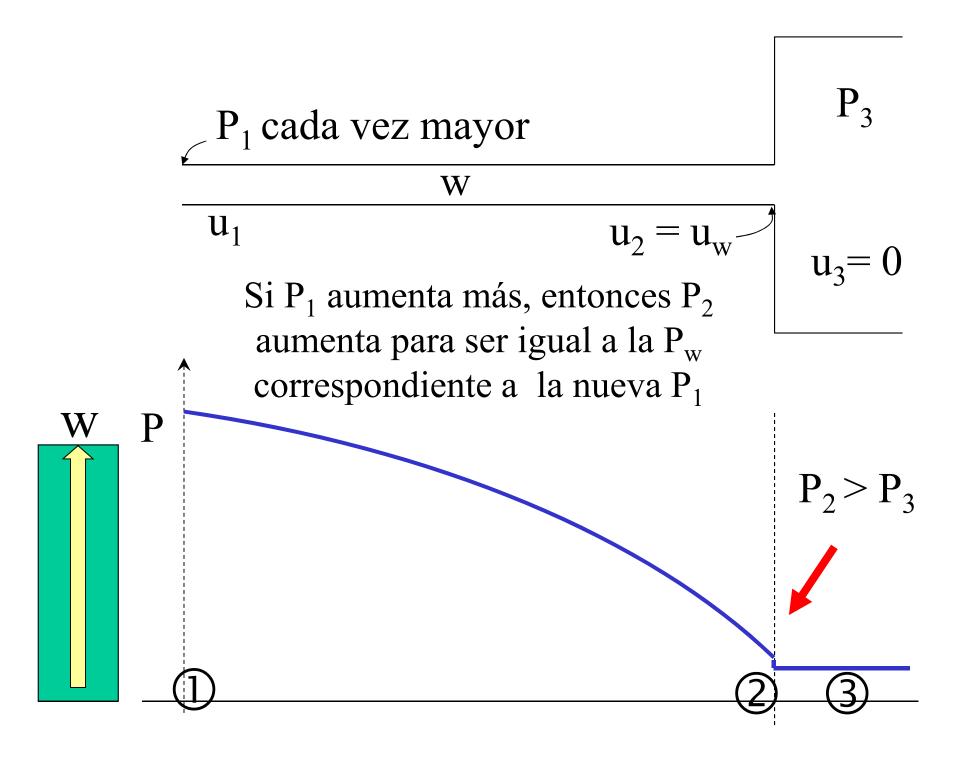
(1)

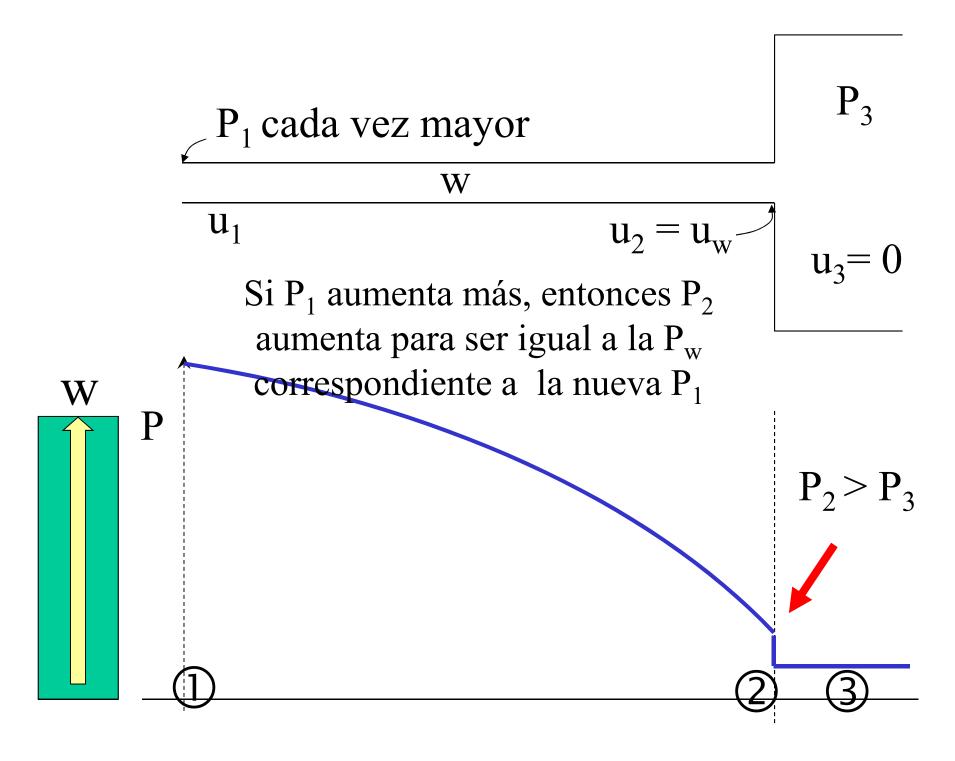
(2)









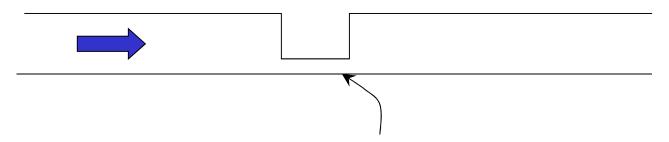


Para el flujo de un gas ideal por ductos horizontales vimos que si se fijan las condiciones termodinámicas en el punto 1, existirá un flujo másico máximo dado por

$$(w/A)_{max} = (\gamma P_w/v_w)^{1/2}$$
 (caso adiabático)

y que
$$(w/A)_{max} = (P_1/v_1)^{1/2} f(\gamma, fL/D)$$

Véase que para P_1 y v_1 fijas entonces $w_{máx} \propto A$ Y si P_1/v_1 cambia, también cambia $(w/A)_{max}$ En la práctica el caudal másico de compresibles puede no estar limitado por las condiciones en la tubería en sí, sino por el desarrollo de velocidad sónica en una válvula u otra constricción de la tubería.

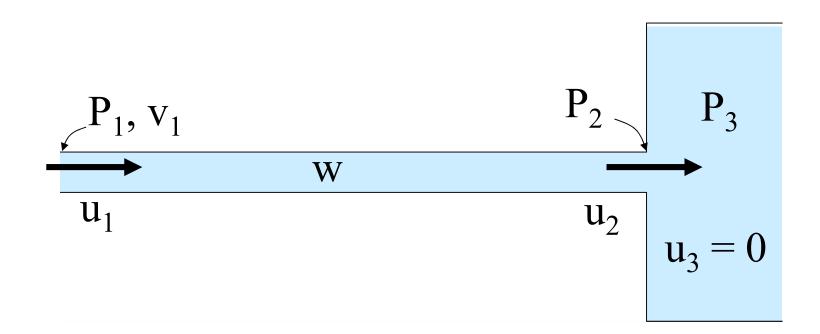


La constricción supone un A pequeño y establece un límite para el w.

En el caso de incompresibles, la constricción supone una mayor pérdida de carga pero no introduce la limitación que supone el alcanzar la velocidad sónica.

(Tener cuidado en la selección de accesorios de tuberías para el transporte de gases a elevadas velocidades)

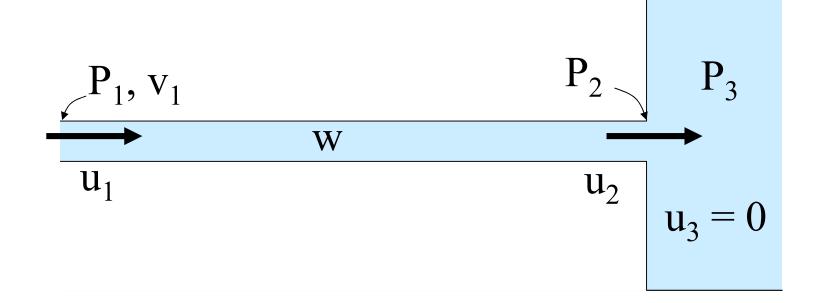
RELACIONES ENTRE LAS PROPIEDADES DE ② Y ③



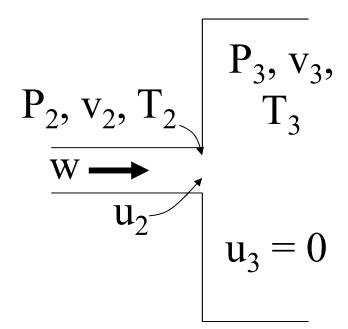
Según vimos:

Si $P_3 > P_w$ entonces la velocidad en ② es subsónica, $w/A < (w/A)_{max}$ y $P_3 = P_2 > P_w$

Si $P_3 \le P_w$ entonces la velocidad en ② es sónica, $w/A = (w/A)_{max}$ y $P_3 \le P_2 = P_w$



La energía cinética que tiene el fluido en ② se pierde por fricción al pasar al reservorio donde la velocidad es nula.

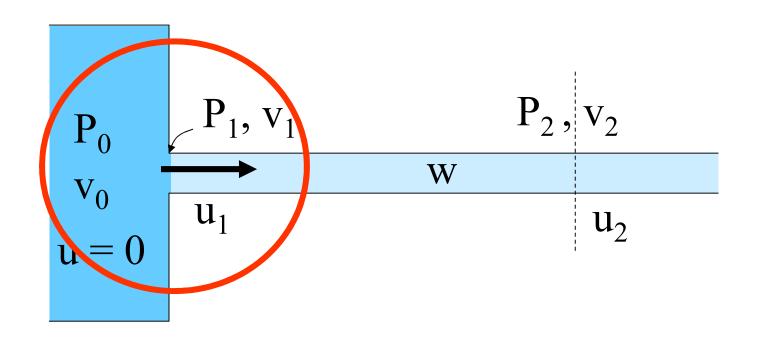


Las propiedades termodinámicas en el reservorio (T₃, v₃) dependerá del estado inicial del mismo y de:

- aporte de energía del fluido entrante $(w\hat{H}_2+wu_2^2/2)$
- eventual aporte o retiro de calor del reservorio
- •eventual compresión del fluido del reservorio
- •eventual salida de fluido del reservorio

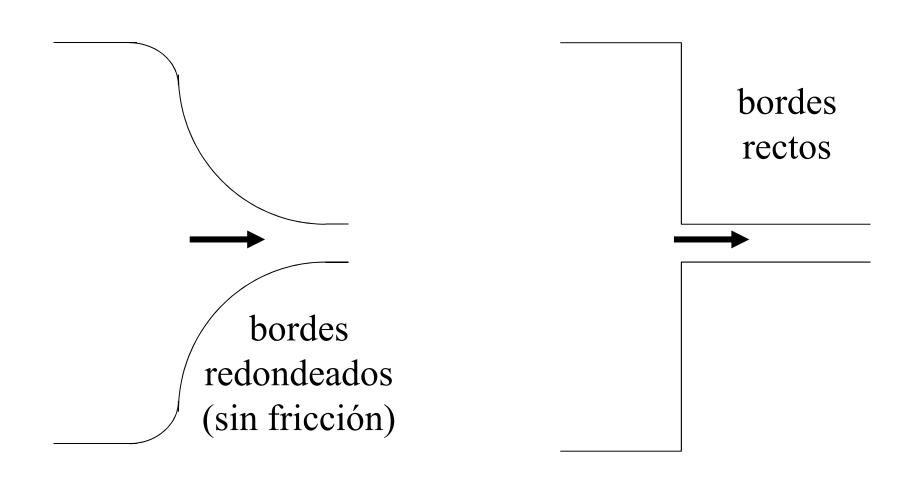
Descarga desde reservorio estanco

Entrada a la tubería

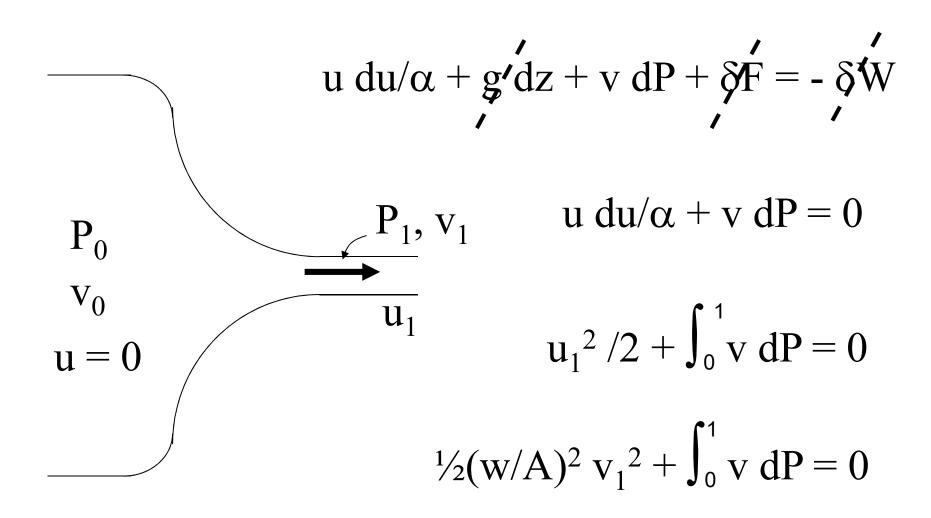


¿Qué relación existe entre P₁, v₁, P₀ y v₀?

La relación entre P_1 , v_1 y P_0 , v_0 depende del cambio de energía cinética y de la fricción en la entrada.



Entrada a través de boquilla sin fricción



Necesitamos conocer v = f(P) para integrar

Entrada a través de boquilla sin fricción

Isotérmico – Gas Ideal

$$v_0 P_0 = v_1 P_1$$
 entonces:

$$(w/A)^2 v_1 / P_1 = 2 ln (P_0/P_1)$$

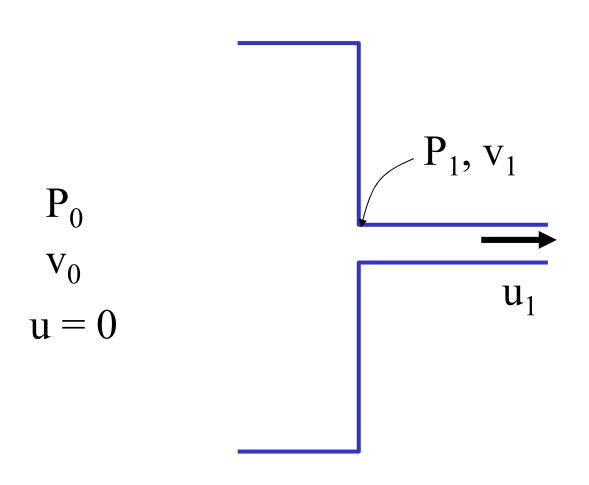
Adiabático – Gas Ideal

Isentrópica pues al no haber fricción es reversible

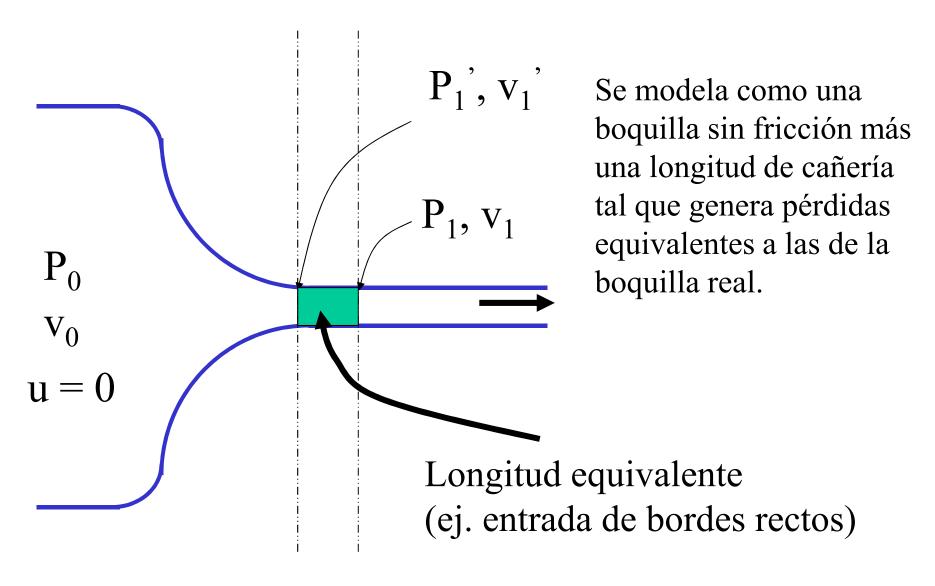
$$\mathbf{v_0}^{\gamma} \mathbf{P_0} = \mathbf{v_1}^{\gamma} \mathbf{P_1}$$
 entonces:

$$\frac{\left(\frac{\mathbf{W}}{\mathbf{A}}\right)^{2} \mathbf{v}_{1}}{\mathbf{A} \mathbf{P}_{1}} = \frac{2 \gamma}{\gamma - 1} \left(\frac{\mathbf{P}_{0}}{\mathbf{P}_{1}}\right)^{(\gamma - 1)/\gamma} - 1$$

Entrada de bordes rectos (con fricción)



Entrada de bordes rectos (con fricción)



Preguntas de autoevaluación:

- 1) Para el flujo compresible a través de una conducción horizontal de sección constante ¿Cómo incide la transferencia de calor en el diámetro interno requerido si el resto de las variables están fijas?
- 2) ¿Por qué una vez que se alcanza la velocidad del sonido en 2 no es posible aumentar la velocidad bajando la presión en 3?
- 3) ¿Cómo definiría P_w y v_w?
- 4) ¿Cómo es posible aumentar el flujo másico si están fijas las presiones en 1 y en 2, y en 2 se alcanzó la velocidad del sonido?
- 5) ¿En que lugares de una conducción puede alcanzarse la velocidad sónica?
- 6) ¿Qué inconvenientes tiene alcanzar la velocidad sónica en una conducción?
- 7) ¿Qué tipo de proceso permite modelar la entrada a una conducción desde un reservorio? ¿Por qué?