1) $\int e^{3x}\left(4\cos^3(x)-\cos(3x)+2\cos(x)\right)dx = \left[\cos(3x)=4\cos^3(x)-3\cos(x)\right]$

$= 5\int e^{3x}\cos(x)\,dx = \left[\cos(x)=\frac{1}{2}(e^{ix}+e^{-ix})\right] =$

$= \frac{5}{2}\int\left(e^{(3+i)x}+e^{(3-i)x}\right)dx = \frac{5}{2}e^{3x}\left(\frac{1}{3+i}e^{ix}+\frac{1}{3-i}e^{-ix}\right)+C=$

$= \left[\frac{1}{3\pm i}=\frac{3}{10}\mp\frac{i}{10}\right] = \frac{5}{2}e^{3x}\left(\frac{3}{10}(e^{ix}+e^{-ix})+\frac{i}{10}(e^{-ix}-e^{ix})\right)+C=$

$= \frac{1}{2}e^{3x}\left(3\cos(x)+\sin(x)\right)+C$

2) $x^2y''+xy'+y=5x^2,\ x>0$

частн. реш. $y_r=x^2$, однор. ур-е:

$x^2y''+xy'+y=0$ – ур-е типа Коши – Эйлера

$x=e^t \Rightarrow y'_t=y'_x x'_t=e^t y'_x \Rightarrow y'_x=e^{-t}y'_t$,

$y''_{tt}=(y'_t)'_t=(y'_x x'_t)'_t=(y'_x)'_t x'_t+y'_x x''_t=$

$=y''_{xx}(x'_t)^2+y'_x x''_{tt}=y''_{xx}e^{2t}+y'_x e^t \Rightarrow y''_{xx}=e^{-2t}y''_{tt}-e^{-t}y'_x=$

$=e^{-2t}y''_{tt}-e^{-2t}y'_t$

Подставляем: $y''_{tt}-\cancel{y'_t}+\cancel{y'_t}+y=0$

$y''_{tt}+y=0 \Rightarrow \alpha^2=-1 \Rightarrow \alpha_{1,2}=\pm i$

$y(t)=\tilde{C}_1e^{it}+\tilde{C}_2e^{-it}=$ [ф-ла Эйлера] $=C_1\sin(t)+C_2\cos(t)$

$t=\ln(x),\ x>0 \Rightarrow$ реш-е однор. ур-я:

$y_{oo}(x)=C_1\sin(\ln(x))+C_2\cos(\ln(x))$

Общее решение: $y(x)=y_{oo}(x)+y_r=C_1\sin(\ln(x))+C_2\cos(\ln(x))+x^2$

3) Интуитивное решение

t, с	1	2	3	4	5	....
N клеток #1	1	2	4	8	16	
N клеток #2	1	2	4	8	16	
Σ	2	4	8	16	32	

У прокариотов „бинарное" деление. Видно, что если одна клетка заполняет стакан за $t = T_n$, то две клетки заполнят з $t = T_{n-1}$. Т.О., если одна заполняет за 60 с., то <u>ответ</u>: две за <u>59 сек</u>

А размеры стакана тут не нужны, вообще метрика не нужна.

По формулам

Закон деления $N(t) = N_0 2^{vt}$ $\quad (\Delta N \sim v N_0 t)$

N_0 – нач. число клеток, v – скорость деления

$v = 1\ с^{-1}$, $N_0 = 1$ $\quad N_c = 2^t = 2^{60}$ – от одной клетки за минуту

$$t(N) = \frac{1}{v} \log_2 \left(N/N_0 \right)$$

, для двух клеток:

$$\underline{t(N_c)} = t(2^{60}) = \log_2 \left(\frac{2^{60}}{2} \right) =$$

$$\underline{\underline{= 59\ сек}}$$