

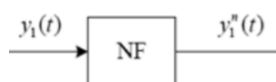
## Zadatak 1. a)

Niskopropusni filtri NF služe za ograničavanje opsega frekvencija u spektru ulaznog signala na interval  $(-\omega_b, \omega_b)$ .

$$H(j\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| < \omega_b \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$$

Tako se za signal  $y_1(t)$  pri propuštanju kroz NF filter (opisan frekvencijskim odzivom ispod) dobija signal  $y_1^n(t)$  čiji je spektar ograničen na interval  $\omega \in (-\omega_{b1}, \omega_{b1})$ .

$$H_1(j\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| < \omega_{b1} \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$$

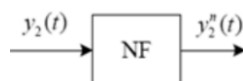


$$Y_1^n(j\omega) = Y_1(j\omega)H_1(j\omega) = \begin{cases} Y_1(j\omega), & |\omega| < \omega_{b1} \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$$

U prethodnom izrazu:  $Y_1(j\omega) = \mathcal{F}\{y_1(t)\}$  i  $Y_1^n(j\omega) = \mathcal{F}\{y_1^n(t)\}$ .

Slično, za signal  $y_2(t)$  pri propuštanju kroz NF filter (opisan frekvencijskim odzivom ispod) dobijamo signal  $y_2^n(t)$  čiji je spektar ograničen na interval  $\omega \in (-\omega_{b2}, \omega_{b2})$ .

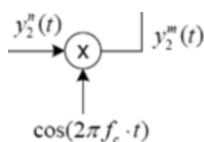
$$H_2(j\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| < \omega_{b2} \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$$



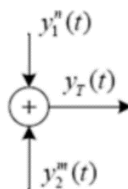
$$Y_2^n(j\omega) = Y_2(j\omega)H_2(j\omega) = \begin{cases} Y_2(j\omega), & |\omega| < \omega_{b2} \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$$

U prethodnom izrazu:  $Y_2(j\omega) = \mathcal{F}\{y_2(t)\}$  i  $Y_2^n(j\omega) = \mathcal{F}\{y_2^n(t)\}$ .

Množenjem signala  $y_2^n(t)$  signalom  $\cos(2\pi f_c t)$  se dobija **modulisani signal**  $y_2^m(t)$  čija je amplitudska karakteristika pomeren u opseg narednog frekvencijskog kanala kako bi se izbeglo preklapanje frekvencija između signala  $y_1^n(t)$  i  $y_2^n(t)$ . U tom slučaju, spektar signala  $y_2^m(t)$  je ograničen na interval  $\omega \in (-2\pi f_c - \omega_{b2}, -2\pi f_c + \omega_{b2}) \cup (2\pi f_c - \omega_{b2}, 2\pi f_c + \omega_{b2})$ .

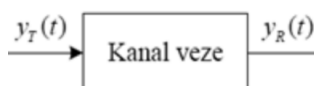


Jednostavnim sabiranjem signala  $y_1^n(t)$  i  $y_2^m(t)$  dobijamo transmisioni signal  $y_T(t)$  koji dovodimo na ulaz kanala veze. U spektru transmisionog signala se mogu naći spektri signala  $y_1^n(t)$  u opsegu **jednog frekvencijskog kanala** ( $|\omega| < \omega_{b1}$ ) i signala  $y_2^m(t)$  u opsegu **drugog frekvencijskog kanala** ( $2\pi f_c - \omega_{b2} < |\omega| < 2\pi f_c + \omega_{b2}$ ), pri čemu za pravilno izabrano  $f_c$  ne dolazi do preklapanja spektara, nema gubitka informacija, pa je moguć nezavisan paralelni prenos ova dva signala kroz zajednički kanal veze. Kako ne bi došlo do gubitka informacija, to jest preklapanja delova spektra prvog i drugog frekvencijskog kanala,  $f_c$  mora biti takvo da je zadovoljen uslov  $2\pi f_c \geq \omega_{b1} + \omega_{b2}$ .



Na izlazu kanala veze, koji po uslovu zadatka modelujemo niskopropusnim filtrom propusnog opsega  $f_k$ , nalazi se prijemni signal  $y_R(t)$ . Kako ne bi došlo do gubitka informacija, to jest odsecanja dela spektra koji želimo da zadržimo,  $f_k$  mora biti takvo da je zadovoljen uslov  $2\pi f_k \geq 2\pi f_c + \omega_{b2}$ .

$$H_k(j\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| < 2\pi f_k \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$$



$$Y_R(j\omega) = Y_T(j\omega)H_2(j\omega) = \begin{cases} Y_T(j\omega), & |\omega| < 2\pi f_k \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$$

U prethodnom izrazu:  $Y_T(j\omega) = \mathcal{F}\{y_T(t)\}$  i  $Y_R(j\omega) = \mathcal{F}\{y_R(t)\}$ .

Iz prijemnog signala je neophodno izolovati željene signale (iz odgovarajućih frekvencijskih kanala). Rekonstruisani signal  $y_1^r(t)$  možemo dobiti jednostavnim propuštanjem prijemnog signala  $y_R(t)$  kroz NF filter opisan frekvencijskim odzivom ispod.

$$H_1^r(j\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| < \omega_{b1} \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$$

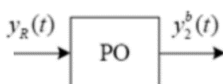


$$Y_1^r(j\omega) = Y_R(j\omega)H_1^r(j\omega) = \begin{cases} Y_R(j\omega), & |\omega| < \omega_{b1} \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$$

U prethodnom izrazu:  $Y_R(j\omega) = \mathcal{F}\{y_R(t)\}$  i  $Y_1^r(j\omega) = \mathcal{F}\{y_1^r(t)\}$ .

Rekonstruisani modulisani signal  $y_2^b(t)$  možemo dobiti propuštanjem prijemnog signala  $y_R(t)$  kroz PO filter opisan frekvencijskim odzivom ispod.

$$H_2^b(j\omega) = \begin{cases} 1, & 2\pi f_c < |\omega| < \omega_{b1} + 2\pi f_c \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$$

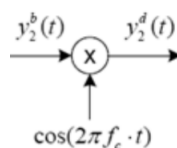


$$Y_2^b(j\omega) = Y_R(j\omega)H_2^b(j\omega) = \begin{cases} Y_R(j\omega), & 2\pi f_c - \omega_{b2} < |\omega| < 2\pi f_c + \omega_{b2} \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$$

U prethodnom izrazu:  $Y_R(j\omega) = \mathcal{F}\{y_R(t)\}$  i  $Y_2^b(j\omega) = \mathcal{F}\{y_2^b(t)\}$ .

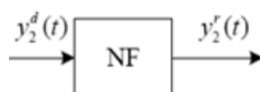
Međutim, budući da smo prethodno modulisali signal  $y_2^n(t)$ , potrebno je izvršiti demodulaciju rekonstruisanog modulisanog signala  $y_2^b(t)$ , kako bismo spektar rekonstruisanog signala vratili u

opseg spektra originalnog signala. Množenjem signala  $y_2^b(t)$  signalom  $\cos(2\pi f_c t)$  se dobija **demodulisani signal**  $y_2^d(t)$  čiji je spektar vraćen u opseg spektra originalnog signala  $y_2^n(t)$ .



Konačno, propuštanjem demodulisano signala  $y_2^d(t)$  kroz NF filter opisan frekvencijskim odzivom ispod, dobijamo rekonstrukciju drugog signala  $y_2^r(t)$ .

$$H_2^r(j\omega) = \begin{cases} 2, & |\omega| < \omega_{b2} \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$$



$$Y_2^r(j\omega) = Y_2^d(j\omega)H_2^r(j\omega) = \begin{cases} 2Y_R(j\omega), & |\omega| < \omega_{b2} \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$$

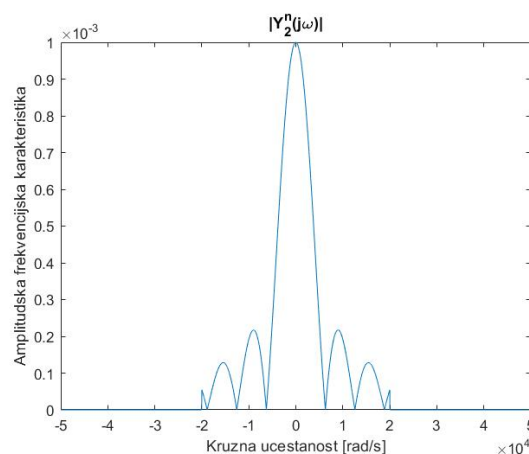
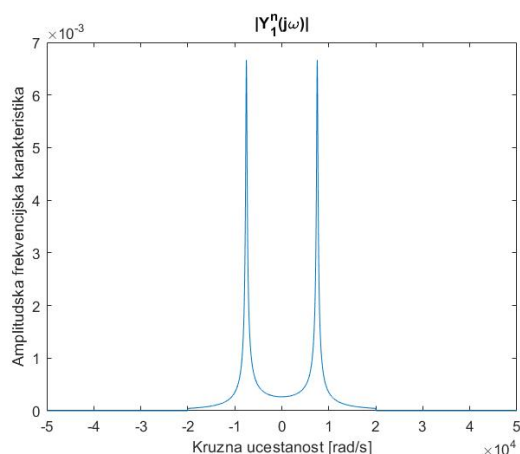
U prethodnom izrazu:  $Y_2^d(j\omega) = \mathcal{F}\{y_2^d(t)\}$  i  $Y_2^r(j\omega) = \mathcal{F}\{y_2^r(t)\}$ .

## Zadatak 1. b)

Kao što je prethodno opisano,  $f_c$  mora biti takvo da je zadovoljen uslov  $2\pi f_c \geq 2\omega_{b1}$ . U graničnom slučaju uzimamo vrednost  $f_c = \frac{\omega_{b1}}{\pi}$ .

Za vrednosti kružnih frekvencija NF filtera  $\omega_{b1}$  i  $\omega_{b2}$  biramo one kružne frekvencije koje omogućavaju očuvanje većeg dela originalnih informacija sadržanih u spektru signala.

Recimo, možemo uzeti  $\omega_{b1} = \omega_{b2} = 20000 \text{ rad/s}$ . Tada spektri filtriranih signala  $y_1^n(t)$  i  $y_2^n(t)$  izgledaju ovako:



Za ove konkretne vrednosti  $\omega_{b1}$  i  $\omega_{b2}$  možemo reći da je veći deo spektra očuvan, pa nema prevelikog gubitka informacija, pri čemu same vrednosti nisu prevelike za realnu primenu.

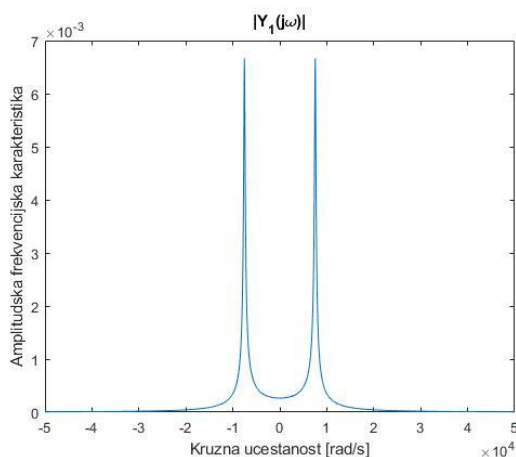
Ukoliko usvojimo ove vrednosti, dobijamo sledeću vrednost frekvencije prostoperiodičnog signala koji koristimo za modulaciju/demodulaciju:  $f_c = \frac{\omega_{b1}}{\pi} = \frac{20000 \text{ rad/s}}{\pi \text{ rad}} = \frac{20000}{\pi} \text{ Hz} \approx 6366,2 \text{ Hz}$ .

Zadatak 1. c)

Spektar signala  $y_1(t)$ :

$$\begin{aligned}
 y_1(t) &= 2 \sin(2400\pi t) e^{-150t} u(t) \\
 Y_1(j\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} (2 \sin(2400\pi t) e^{-150t} u(t)) e^{-j\omega t} dt = \int_0^{+\infty} 2 \sin(2400\pi t) e^{-(150+j\omega)t} dt = \left| \lambda = (150+j\omega)t \right| = \\
 &= 2 \int_0^{+\infty} \sin\left(\frac{2400\pi}{150+j\omega} \lambda\right) e^{-\lambda} d\lambda = \frac{2}{150+j\omega} \int_0^{+\infty} \sin\left(\frac{2400\pi}{150+j\omega} \lambda\right) e^{-\lambda} d\lambda = \dots \\
 I &= \int \sin(a\lambda) e^{-\lambda} d\lambda = -e^{-\lambda} \sin(a\lambda) - \int a \cos(a\lambda) (-e^{-\lambda}) d\lambda = -e^{-\lambda} \sin(a\lambda) + a \int \cos(a\lambda) e^{-\lambda} d\lambda = \\
 u &= \sin(a\lambda) \quad du = a \cos(a\lambda) d\lambda \quad v = e^{-\lambda} \quad dv = -e^{-\lambda} d\lambda \\
 &= -e^{-\lambda} \sin(a\lambda) + a (-e^{-\lambda} \cos(a\lambda)) - \int (-a \cos(a\lambda)) (-e^{-\lambda}) d\lambda = -e^{-\lambda} (\sin(a\lambda) + a \cos(a\lambda)) - a^2 I \\
 \Rightarrow I(1+a^2) &= -e^{-\lambda} (\sin(a\lambda) + a \cos(a\lambda)) \Rightarrow I = \frac{-e^{-\lambda} (\sin(a\lambda) + a \cos(a\lambda))}{1+a^2} + C \\
 \dots &= \frac{2}{150+j\omega} \cdot \frac{-e^{-\lambda} (\sin(\frac{2400\pi}{150+j\omega} \lambda) + \frac{2400\pi}{150+j\omega} \cos(\frac{2400\pi}{150+j\omega} \lambda))}{1 + (\frac{2400\pi}{150+j\omega})^2} \Big|_0^{+\infty(150+j\omega)} \\
 &= \frac{-2}{(150+j\omega)(1 + (\frac{2400\pi}{150+j\omega})^2)} \left( e^{-\infty(150+j\omega)} \cdot \frac{2400\pi}{150+j\omega} \cos\left(\frac{2400\pi}{150+j\omega} \cdot \infty(150+j\omega)\right) + \right. \\
 &\quad \left. - \left[ \frac{\sin(0)}{0} + \frac{2400\pi}{150+j\omega} \cos(0) \right] \right) = \\
 &= \frac{-2}{150+j\omega + \frac{(2400\pi)^2}{150+j\omega}} \cdot \left( -\frac{2400\pi}{150+j\omega} \right) = \frac{4800\pi}{(2400\pi)^2 + (150+j\omega)^2} \\
 \Rightarrow |Y_1(j\omega)| &= \left| \frac{4800\pi}{(2400\pi)^2 + (150+j\omega)^2} \right| = \frac{4800\pi}{\sqrt{(2400\pi)^2 + 150^2 - \omega^2 + j^2 300\omega}} = \frac{4800\pi}{\sqrt{(2400\pi)^2 + 150^2 - \omega^2 + (300\omega)^2}} \\
 \arg\{Y_1(j\omega)\} &= -\arg\{(2400\pi)^2 + 150^2 - \omega^2 + j^2 300\omega\} \\
 &= -\arctan 2 \left( \frac{300\omega}{(2400\pi)^2 + 150^2 - \omega^2} \right)
 \end{aligned}$$

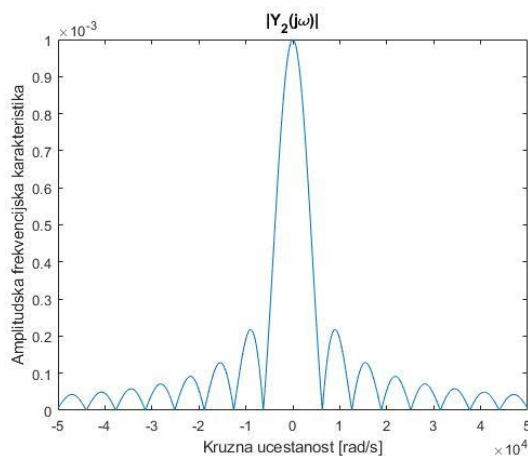
Amplitudska karakteristika spektra signala  $y_1(t)$ :



Spektar signala  $y_2(t)$ :

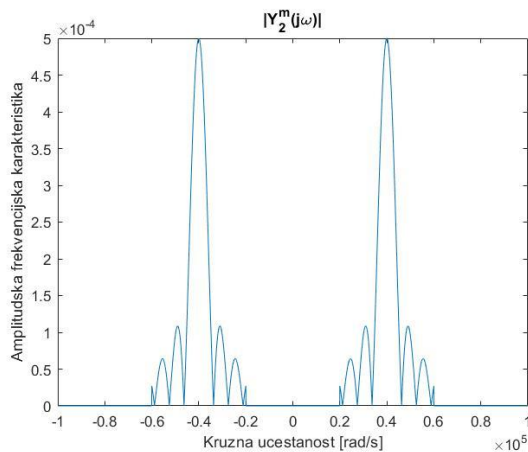
$$\begin{aligned}
 y_2(t) &= u(t-0,001) - u(t-0,002) \\
 Y_2(j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} y_2(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{0,001}^{0,002} e^{-j\omega t} dt = \frac{e^{-j\omega t}}{-j\omega} \Big|_{0,001}^{0,002} = \frac{e^{-j0,002\omega} - e^{-j0,001\omega}}{-j\omega} = \frac{e^{-j0,001\omega} - e^{-j0,002\omega}}{j\omega} \\
 &= \frac{e^{-j0,0015\omega} (e^{j0,0005\omega} - e^{-j0,0005\omega})}{j\omega} = e^{-j0,0015\omega} \cdot \frac{1}{j\omega} \left[ \frac{e^{j0,0005\omega} - e^{-j0,0005\omega}}{0,0005\omega} \right] \cdot 2 \cdot 0,0005 \\
 &= 0,001 e^{-j0,0015\omega} \text{sinc}(0,0005\omega) \\
 \Rightarrow |Y_2(j\omega)| &= 0,001 \cdot |e^{-j0,0015\omega}| \cdot |\text{sinc}(0,0005\omega)| = 0,001 |\text{sinc}(0,0005\omega)| \\
 \angle Y_2(j\omega) &= \angle \{ e^{-j0,0015\omega} \} = -0,0015\omega
 \end{aligned}$$

Amplitudska karakteristika spektra signala  $y_2(t)$ :



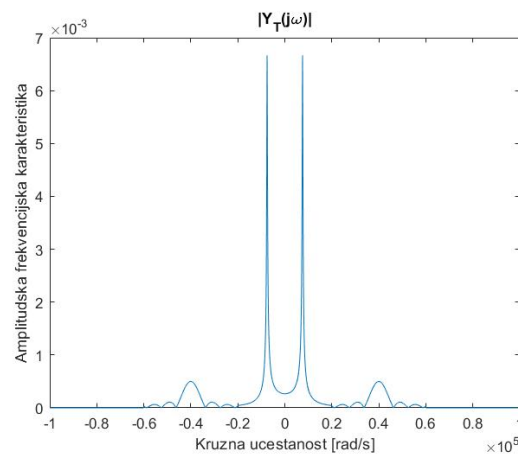
## Zadatak 1. d)

Spektar amplitudski modulisanog signala  $y_2^m(t)$ :

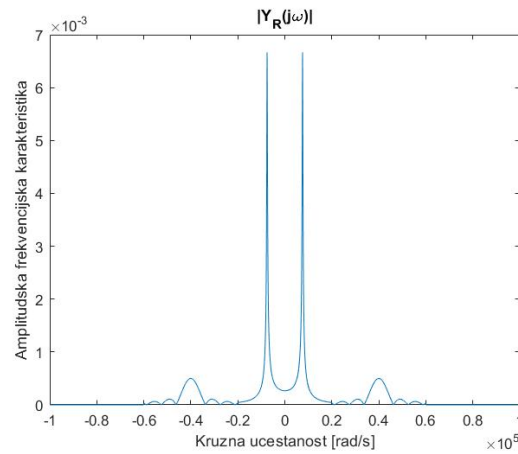


## Signali i sistemi (13E052SISR)

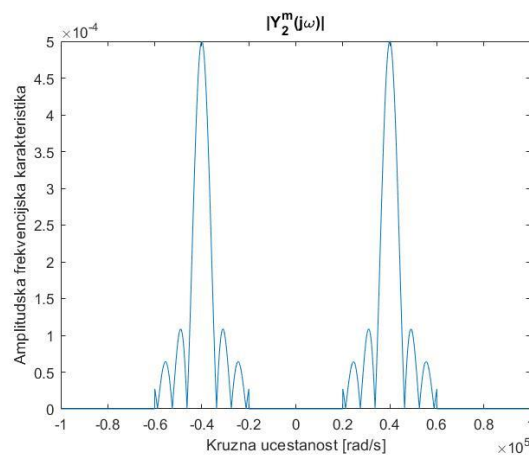
Spektar transmisionog signala  $y_T(t)$ :



Spektar prijemnog signala  $y_R(t)$ :

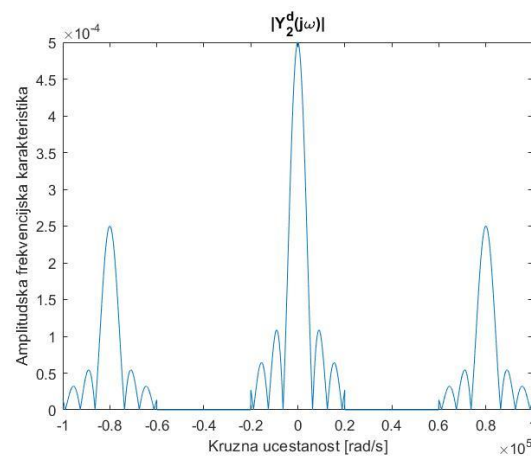


Spektar filtracijom dobijenog signala  $y_2^b(t)$ :

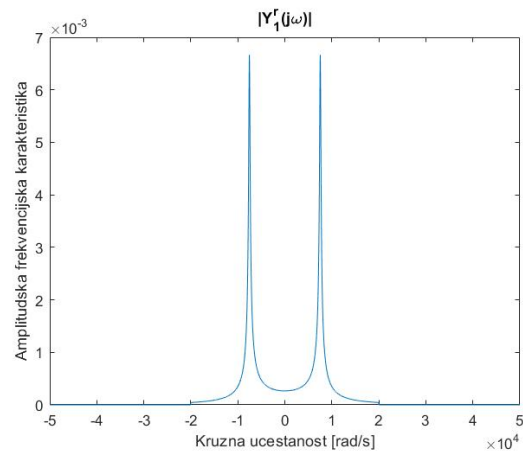


## Signali i sistemi (13E052SISR)

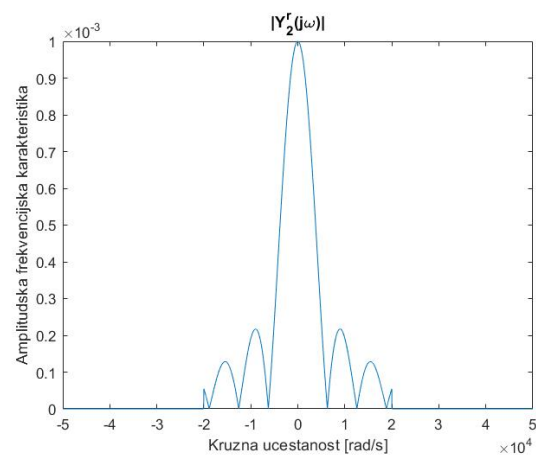
Spektar demodulisanog signala  $y_2^d(t)$ :



Spektar finalno rekonstruisanog signala  $y_1^r(t)$ :



Spektar finalno rekonstruisanog signala  $y_2^r(t)$ :



### Zadatak 1. e)

---

Očekujemo da vremenski oblik rekonstruisanih signala  $y_1^r(t)$  i  $y_2^r(t)$  izgledaju isto kao vremenski oblici signala  $y_1^n(t)$  i  $y_2^m(t)$ , respektivno. To je zato što očekujemo da delovi spektra rekonstruisani na osnovu prijemnog signala odgovaraju upravo onim delovima spektra koji su prosleđeni sabiraču signala koji formira transmisioni signal na ulazu zajedničkog kanala veze. U slučaju da su frekvencije filtara odabrane ispravno, neće doći do dodatnog gubitka informacija i delovi spektra će kroz kanal biti preneti u celosti i nezavisno jedan od drugog.

Međutim, kako smo na samom početku signale  $y_1(t)$  i  $y_2(t)$  propustili kroz NF filtre, to jest ograničili njihove spektre, vremenski oblici rekonstruisanih signala  $y_1^r(t)$  i  $y_2^r(t)$  neće biti identični originalima, ali će ličiti na njih. Mera sličnosti rekonstruisanih i originalnih signala je određena veličinom vrednosti kružnih frekvencija NF filtara  $\omega_{b1}$  i  $\omega_{b2}$  – što su vrednosti maksimalnih kružnih frekvencija u spektru veće, to će rekonstruisani signali biti sličniji originalima.