Електротехнички факултет Универзитета у Београду

Семестрални рад
(други део)

Нумеричка анализа
13Е08НАД/С

5.5 Развити програм који израчунава интеграл

$$\int_{-4}^{4} \frac{dx}{1+x^2},$$

применом трапезне и Симпсонове квадратурне формуле, примењујући корак поделе интервала $h = \frac{1}{2^k}$, $k = 1, 2, \ldots, 8$. За сваки корак поделе и за обе формуле програм треба да израчуна и испише апсолутну грешку добијене вредности у односу на тачну вредност интеграла $2\,\mathrm{arctg}(4)$. Коментарисати добијене резултате.

Професор:
др Наташа Ћировић

Студент:
Урош Бојанић

Београд, 2020.

Трапезна формула

Поделимо интервал интреграције $[a, b]$ на m подинтервала са кораком $h = \frac{b-a}{m}$, еквидистантним тачкама $x_i = x_0 + ih$ у којима су одговарајуће вредности функције $f_i = f(x_i)$ $(i = 1,2, \ldots, m)$. Композитна трапезна формула, тј. **трапезна формула** је облика:

$$T(h) = \frac{h}{2}\left(f_0 + f_m + 2\sum_{i=1}^{m-1} f_i\right)$$

Имплементација трапезне формуле у складу са поставком задатка на језику MATLAB:

trapez.m

```
% Uros Bojanic 2019/0077
f = @(x)1/(1+x^2);
a = -4;
b = 4;
I = zeros(8,1);
for k = 1 : 8
    h = (b-a)/(2^k);
    s = f(a) + f(b);
    for i = 1 : 2^k - 1
        s = s + 2 * f(a + i*h);
    end
    I(k) = h / 2 * s;
    fprintf('k = %d\tI = %.5f\n', k, I(k));
end
I_a = 2 * atan(4);
fprintf('tacno\tI = %.5f\n', I_a);
```

Покретањем програма добијамо вредности интеграла израчунатих применом трапезне формуле, као и тачну вредност интеграла.

```
>> trapez
k = 1       I = 4.23529
k = 2       I = 2.91765
k = 3       I = 2.65882
k = 4       I = 2.65051
k = 5       I = 2.65135
k = 6       I = 2.65156
k = 7       I = 2.65162
k = 8       I = 2.65163
tacno       I = 2.65164
```

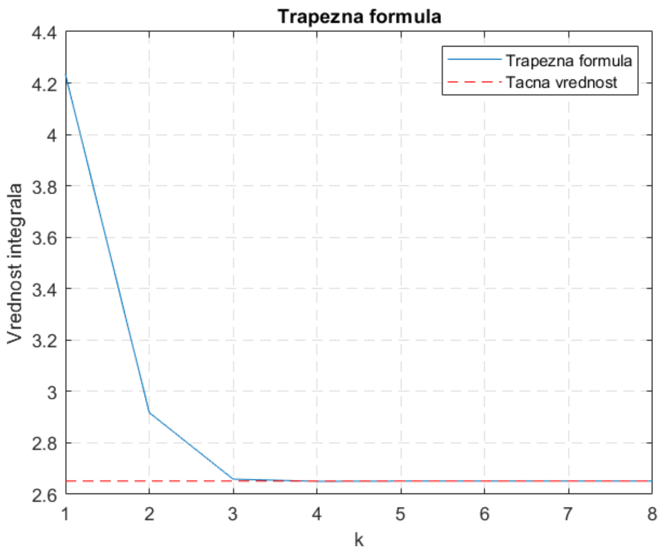
Ако исцртамо график добијених вредности интеграла у зависности од задатог броја k, видимо да се вредност интеграла израчуната трапезном формулом смањује и већ за $k = 3$ приближава асимптоти (тачној вредности интеграла).

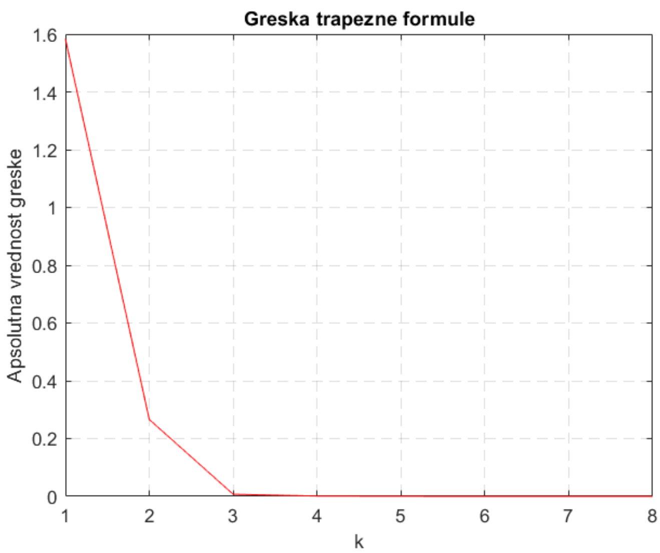
Грешка у рачунању вредности интеграла применом трапезне формуле опада са већим бројем k, што смо и очекивали.

trapez.m

```
figure(1)
plot(I);
hold all;
plot(I_a*ones(8),'--','color','red');
grid on
set(gca,'gridlinestyle','--')
legend('Trapezna formula','Tacna vrednost');
title('Trapezna formula')
xlabel('k')
ylabel('Vrednost integrala')
```

```
err = abs(I - I_a);
figure(2)
plot(err,'color','red');
grid on
set(gca,'gridlinestyle','--')
title('Greska trapezne formule')
xlabel('k')
ylabel('Apsolutna vrednost greske')
```





Симпсонова формула

Поделимо интервал интреграције $[a, b]$ на $2m$ подинтервала са кораком $h = \frac{b-a}{2m}$, еквидистантним тачкама $x_i = x_0 + ih$ у којима су одговарајуће вредности функције $f_i = f(x_i)$ $(i = 1,2, \dots, 2m)$. Композитна Симпсонова формула, тј. **Симпсонова формула** је облика:

$$S(h) = \frac{h}{3}\left(f_0 + f_{2m} + 4\sum_{i=1}^{m} f_{2i-1} + 2\sum_{i=1}^{m-1} f_{2i}\right)$$

Имплементација трапезне формуле у складу са поставком задатка на језику MATLAB:

simpson.m

```
% Uros Bojanic 2019/0077
f = @(x)1/(1+x^2);
a = -4;
b = 4;
I = zeros(8,1);
for k = 1 : 8
    h = (b-a)/(2^k);
    s = f(a) + f(b);
    for i = 1 : 2^(k-1) - 1
        s = s + 4 * f(a + (2*i-1)*h) + 2 * f(a + (2*i)*h);
    end
    I(k) = h / 3 * s;
    fprintf('k = %d\tI = %.5f\n', k, I(k));
end
I_a = 2 * atan(4);
fprintf('tacno\tI = %.5f\n', I_a);
```

Покретањем програма добијамо вредности интеграла израчунатих применом трапезне формуле, као и тачну вредност интеграла.

```
>> simpson
k = 1       I = 0.15686
k = 2       I = 1.94510
k = 3       I = 2.43922
k = 4       I = 2.59742
k = 5       I = 2.62950
k = 6       I = 2.64123
k = 7       I = 2.64659
k = 8       I = 2.64915
tacno       I = 2.65164
```

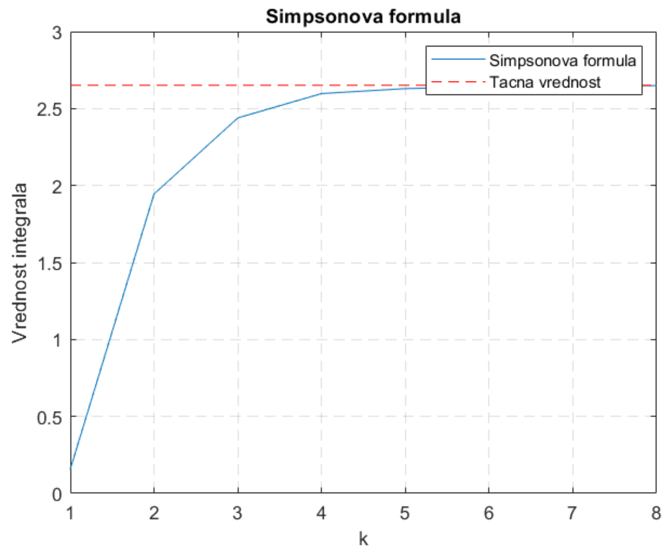
Ако исцртамо график добијених вредности интеграла у зависности од задатог броја k, видимо да се вредност интеграла израчуната трапезном формулом смањује и већ за $k = 5$ приближава асимптоти (тачној вредности интеграла).

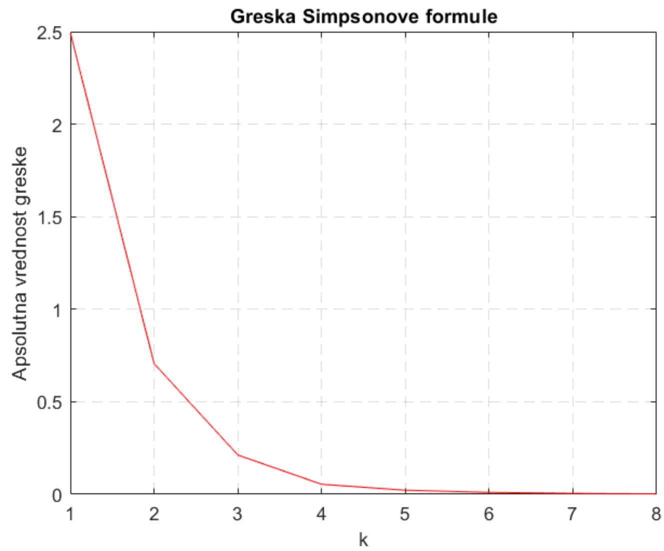
Грешка у рачунању вредности интеграла применом Симпсонове формуле опада са већим бројем k, што смо и очекивали.

simpson.m

```
figure(1)
plot(I);
hold all;
plot(I_a*ones(8),'--','color','red');
grid on
set(gca,'gridlinestyle','--')
legend('Simpsonova formula','Tacna vrednost');
title('Simpsonova formula')
xlabel('k')
ylabel('Vrednost integrala')
```

```
err = abs(I - I_a);
figure(2)
plot(err,'color','red');
grid on
set(gca,'gridlinestyle','--')
title('Greska Simpsonove formule')
xlabel('k')
ylabel('Apsolutna vrednost greske')
```





Додатак 1

trapez.m

```
% Uros Bojanic 2019/0077
f = @(x)1/(1+x^2);
a = -4;
b = 4;
I = zeros(8,1);
for k = 1 : 8
    h = (b-a)/(2^k);
    s = f(a) + f(b);
    for i = 1 : 2^k - 1
        s = s + 2 * f(a + i*h);
    end
    I(k) = h / 2 * s;
    fprintf('k = %d\tI = %.5f\n', k, I(k));
end
I_a = 2 * atan(4);
fprintf('tacno\tI = %.5f\n', I_a);

figure(1)
plot(I);
hold all;
plot(I_a*ones(8),'--','color','red');
grid on
set(gca,'gridlinestyle','--')
legend('Trapezna formula','Tacna vrednost');
title('Trapezna formula')
xlabel('k')
ylabel('Vrednost integrala')

err = abs(I - I_a);
figure(2)
plot(err,'color','red');
grid on
set(gca,'gridlinestyle','--')
title('Greska trapezne formule')
xlabel('k')
ylabel('Apsolutna vrednost greske')
```

Додатак 2

simpson.m

```
% Uros Bojanic 2019/0077
f = @(x)1/(1+x^2);
a = -4;
b = 4;
I = zeros(8,1);
for k = 1 : 8
    h = (b-a)/(2^k);
    s = f(a) + f(b);
    for i = 1 : 2^(k-1) - 1
        s = s + 4 * f(a + (2*i-1)*h) + 2 * f(a + (2*i)*h);
    end
    I(k) = h / 3 * s;
    fprintf('k = %d\tI = %.5f\n', k, I(k));
end
I_a = 2 * atan(4);
fprintf('tacno\tI = %.5f\n', I_a);

figure(1)
plot(I);
hold all;
plot(I_a*ones(8),'--','color','red');
grid on
set(gca,'gridlinestyle','--')
legend('Simpsonova formula','Tacna vrednost');
title('Simpsonova formula')
xlabel('k')
ylabel('Vrednost integrala')

err = abs(I - I_a);
figure(2)
plot(err,'color','red');
grid on
set(gca,'gridlinestyle','--')
title('Greska Simpsonove formule')
xlabel('k')
ylabel('Apsolutna vrednost greske')
```