Електротехнички факултет Универзитета у Београду

Семестрални рад
(први део)

Нумеричка анализа
13Е08НАД/С

4.5 За функцију $f(x) = e^{-x} - x$ одредити вредност $f'(x_k)$ у тачки $x_k = 2$, примењујући задату формулу за нумеричко диференцирање у еквидистантним чворовима са кораком h. За корак h узети вредности од $0,002$ до $0,5$ повећавајући h за $0,002$. Упоредити добијене резултате међусобно и са аналитичким решењем $f'(2)$. Приказати одговарајуће графике.

а) $f'(x_k) = \dfrac{f(x_{k+1}) - f(x_k)}{h}$

б) $f'(x_k) = \dfrac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{h}$

в) $f'(x_k) = \dfrac{f(x_{k+1}) - f(x_{k-1})}{2h}$

Професор:
др Наташа Ћировић

Студент:
Урош Бојанић

Београд, 2020.

Нумеричка диференцијација

Вредност извода функције $f(x)$ у тачки x_k се може наћи:

а) Рачунањем ***унапред***, помоћу разлике вредности функције у одабраној „следећој“ тачки $x_{k+1} = x_k + h$ и вредности функције у датој тачки x_k.

$$f'(x_k) = \frac{f(x_{k+1}) - f(x_k)}{h} = \frac{f(x_k + h) - f(x_k)}{h}$$

б) Рачунањем ***уназад***, помоћу разлике вредности вредности функције у датој тачки x_k и вредности функције у одабраној „претходној“ тачки $x_{k-1} = x_k - h$.

$$f'(x_k) = \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{h} = \frac{f(x_k) - f(x_k - h)}{h}$$

в) Рачунањем ***централно***, помоћу разлике вредности функције у одабраној „следећој“ тачки $x_{k+1} = x_k + h$ и вредности функције у одабраној „претходној“ тачки $x_{k-1} = x_k - h$.

$$f'(x_k) = \frac{f(x_{k+1}) - f(x_{k-1})}{2h} = \frac{f(x_k + h) - f(x_k - h)}{2h}$$

где је h вредност корака између дискретних вредности функције $f(x)$.

Имплементација претходних формула у складу са поставком задатка на језику MATLAB:

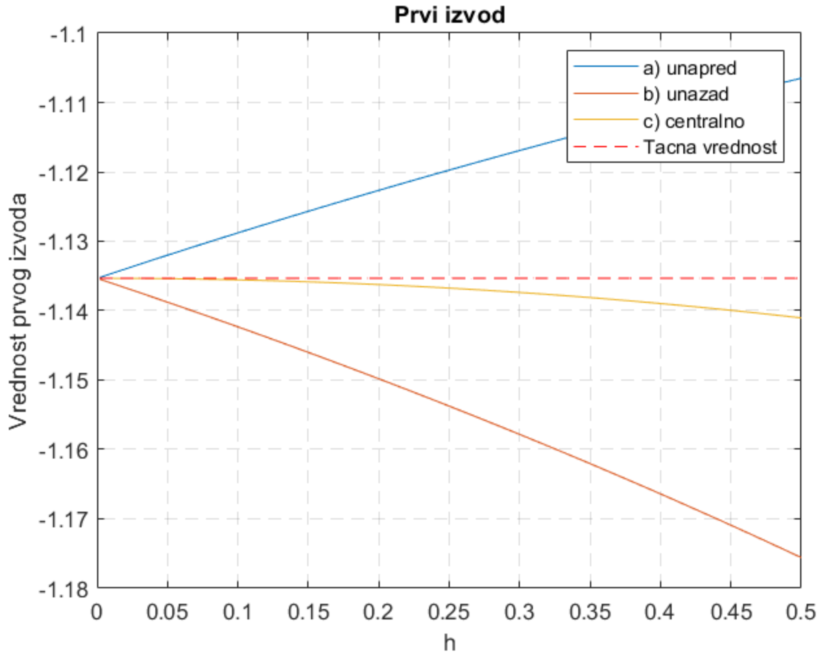
diferenciranje.m

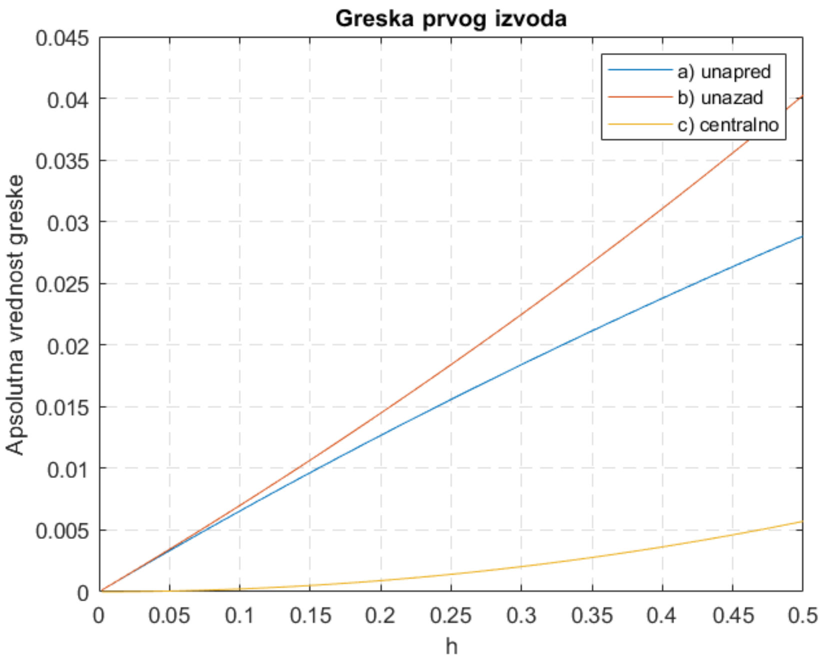
```
% Uros Bojanic 2019/0077
f = @(x)(exp(-x)-x);
f_a = @(x,h)((f(x+h)-f(x))/h);
f_b = @(x,h)((f(x)-f(x-h))/h);
f_c = @(x,h)((f(x+h)-f(x-h))/(2*h));
x = 2;
h = 0.002:0.002:0.5;
fpa = zeros(size(h));
fpb = zeros(size(h));
fpc = zeros(size(h));
for i = 1 : size(h,2)
    fpa(i) = f_a(x,h(i));
    fpb(i) = f_b(x,h(i));
    fpc(i) = f_c(x,h(i));
end
fp = -exp(-x) - 1;
```

Ако исцртамо график добијених вредности првог извода у зависности од задатог корака h, видимо да је за мале вредности корака вредност првог извода израчуната било којим од предложених начина блиска тачној вредности задате функције у тачки 2.

За веће вредности корака први извод функције израчунат *унапред* постаје све већи од тачне вредности, док за метод рачунања *уназад* постаје све мањи. Међутим, апсолутна вредност грешке у израчунавању вредности првог извода расте најбрже за рачунање *уназад*.

Код метода рачунања централно видимо далеко спорији пад вредности израчунатог првог извода, па се овај метод показује најефективнијим.


Prvi izvod
a) unapred
b) unazad
c) centralno
Tacna vrednost
Vrednost prvog izvoda
h
-1.1
-1.11
-1.12
-1.13
-1.14
-1.15
-1.16
-1.17
-1.18
0
0.05
0.1
0.15
0.2
0.25
0.3
0.35
0.4
0.45
0.5


Greska prvog izvoda
a) unapred
b) unazad
c) centralno
Apsolutna vrednost greske
h
0.045
0.04
0.035
0.03
0.025
0.02
0.015
0.01
0.005
0
0
0.05
0.1
0.15
0.2
0.25
0.3
0.35
0.4
0.45
0.5

Додатак 1

diferenciranje.m

```
% Uros Bojanic 2019/0077
f = @(x)(exp(-x)-x);
f_a = @(x,h)((f(x+h)-f(x))/h);
f_b = @(x,h)((f(x)-f(x-h))/h);
f_c = @(x,h)((f(x+h)-f(x-h))/(2*h));
x = 2;
h = 0.002:0.002:0.5;
fpa = zeros(size(h));
fpb = zeros(size(h));
fpc = zeros(size(h));
for i = 1 : size(h,2)
    fpa(i) = f_a(x,h(i));
    fpb(i) = f_b(x,h(i));
    fpc(i) = f_c(x,h(i));
end
fp = -exp(-x) - 1;

figure(1)
plot(h,fpa);hold all;
plot(h,fpb);hold all;
plot(h,fpc);hold all;
plot(h,fp*ones(size(h)),'--','color','red');
grid on
set(gca,'gridlinestyle','--')
legend('a) unapred','b) unazad','c) centralno','Tacna vrednost');
title('Prvi izvod')
xlabel('h')
ylabel('Vrednost prvog izvoda')

err_a = abs(fpa - fp);
err_b = abs(fpb - fp);
err_c = abs(fpc - fp);
figure(2)
plot(h,err_a);hold all;
plot(h,err_b);hold all;
plot(h,err_c);
legend('a) unapred','b) unazad','c) centralno')
grid on
set(gca,'gridlinestyle','--')
title('Greska prvog izvoda')
xlabel('h')
ylabel('Apsolutna vrednost greske')
```