

「TJOI / HEOI 2016」求和

● Siyuan (<https://blog.orzsiyuan.com/author/1/>) ○ 2019 年 08 月 31 日 ○ 284 次浏览 ○ 暂无评论
 ● 2745 字数 ● 题解 (<https://blog.orzsiyuan.com/category/Problem/>)

🏠 首页 (<https://blog.orzsiyuan.com/>) / 正文

分享到: ★ / (http://sns.qzone.qq.com/cgi-bin/qzshare/cgi_qzshare_onekey?

url=<https://blog.orzsiyuan.com/archives/TJOI-HEOI-2016-Sum/>&title=「TJOI / HEOI 2016」求和

&site=<https://blog.orzsiyuan.com/>) ☁ (<http://service.weibo.com/share/share.php?>

url=<https://blog.orzsiyuan.com/archives/TJOI-HEOI-2016-Sum/>&title=「TJOI / HEOI 2016」求和)

题目链接: LOJ 2058 (<https://loj.ac/problem/2058>)

在 2016 年, 佳媛姐姐刚刚学习了第二类斯特林数, 非常开心。

现在他想计算这样一个函数的值:

$$f(n) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^i S(i, j) \cdot 2^j \cdot j!$$

$S(i, j)$ 表示第二类斯特林数, 递推公式为:

$$S(i, j) = j \cdot S(i-1, j) + S(i-1, j-1), 1 \leq j \leq i-1.$$

边界条件为: $S(i, i) = 1 (i \geq 0), S(i, 0) = 0 (i \geq 1)$ 。

你能帮帮她吗?

数据范围: $1 \leq n \leq 10^5$ 。

Solution

我们直接写出第二类斯特林数的通项公式:

$$S(n, m) = \frac{1}{m!} \sum_{i=0}^m (-1)^i \binom{m}{i} (m-i)^n$$

代入得到：

$$\begin{aligned}
 f(n) &= \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^i 2^j \sum_{k=0}^j (-1)^k \binom{j}{k} (j-k)^i \\
 &= \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^i 2^j \sum_{k=0}^j (-1)^k \frac{j!}{k! \cdot (j-k)!} (j-k)^i \\
 &= \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^i 2^j \cdot j! \sum_{k=0}^j \frac{(-1)^k}{k!} \frac{(j-k)^i}{(j-k)!} \\
 &= \sum_{j=0}^n 2^j \cdot j! \sum_{k=0}^j \frac{(-1)^k}{k!} \frac{\sum_{i=0}^n (j-k)^i}{(j-k)!}
 \end{aligned}$$

设 $g(i) = \frac{(-1)^i}{i!}$, $h(i) = \frac{\sum_{j=0}^n i^j}{i!} = \frac{i^{n+1}-1}{(i-1) \cdot i!}$ 。特殊地 $h(0) = 1, h(1) = n + 1$, 那么答案为：

$$\sum_{i=0}^n 2^i \cdot i! (g * h)(i)$$

直接做一遍卷积即可。

时间复杂度： $\mathcal{O}(n \log n)$ 。

Code

```
1  /* 此处省略多项式模板 */
2
3  const int N = 1e5;
4
5  int n, fac[N + 5], ifac[N + 5], pw[N + 5], in[N + 5];
6  std::vector<int> prime;
7  bool flg[N + 5];
8
9  void sieve(int n, int k) {
10     std::fill(flg + 2, flg + n + 1, true);
11     for (int i = 2; i <= n; i++) {
12         if (flg[i]) prime.push_back(i), pw[i] = pow(i, k);
13         for (auto j : prime) {
14             if (i * j > n) break;
15             flg[i * j] = false;
16             pw[i * j] = 1LL * pw[i] * pw[j] % MOD;
17             if (i % j == 0) continue;
18         }
19     }
}
```

本作品采用 知识共享署名-相同方式共享 4.0 国际许可协议 (<http://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/>) 进行许可。

[下一篇 \(<https://blog.orzsiyuan.com/archives/Codeforces-1174F-Ehab-and-the-Big-Finale/>\)](https://blog.orzsiyuan.com/archives/Codeforces-1174F-Ehab-and-the-Big-Finale/)

[上一篇 \(<https://blog.orzsiyuan.com/archives/Codeforces-662C-Binary-Table/>\)](https://blog.orzsiyuan.com/archives/Codeforces-662C-Binary-Table/)

发表评论 •

评论 *

说点什么吧.....

 表情

私密评论

名称 *



姓名或昵称

邮箱 *

邮箱 (必填, 将保密)

地址

网站或博客

发表评论



热门文章

(<https://blog.orzsiyuan.com/archives/ZJOI-2019/>)
2019-) 6051

(<https://blog.orzsiyuan.com/archives/hehezhou-AK-CSP-2019/>)
AK- 2892

CSP-
2019/) (<https://blog.orzsiyuan.com/archives/Polynomial-Template/>)
Template) 1080

(<https://blog.orzsiyuan.com/archives/SDOI-2017-Number-Table/>)
2017- 1028

Number-
Table/) (<https://blog.orzsiyuan.com/archives/TJOI-2019-Sing-2019-Dance-Rap-and-Basketball/>)
Sing- 843
Dance-
Rap-
and-
Basketball/)

博客信息

文章数目	187
评论数目	243
运行天数	1年25天
最后活动	4 个月前

© 2020 Copyright 浙ICP备19008446号-1 (<http://www.beian.miit.gov.cn>)

