「Codeforces 1228E」Another Filling the Grid

Siyuan (https://blog.orzsiyuan.com/author/1/) 2019 年 10 月 01 日 745 次浏览 6 条评论
4932 字数 题解 (https://blog.orzsiyuan.com/category/Problem/)

> 题目链接：Codeforces 1228E (https://codeforces.com/contest/1228/problem/E)

你有一个 $n \times n$ 的网格和一个整数 k，在每个格子中都填入一个整数，满足如下条件：

- 所有格子中的整数都介于 1 到 k 之间。
- 第 i 行的最小值为 1（$1 \le i \le n$）。
- 第 j 列的最小值为 1（$1 \le j \le n$）。

请求出填数的方案数，答案对 10^9+7 取模。

数据范围：$1 \le n \le 250$，$1 \le k \le 10^9$。

Solution

算法 1

设 $f(i,j)$ 表示已经填完了前 i 行，有 j 列已经包含 1 了。枚举上一行填了 k 个 1 则有：

- $f(0,0)=1$。
- $f(i,j)=f(i-1,j)\cdot\left(k^j-(k-1)^j\right)\cdot(k-1)^{n-j}$，其中第二项表示这 j 个位置至少需要有一个 1，则可以用全集减去补集表示。
- $f(i,j)=f(i-1,k)\cdot\binom{n-k}{j-k}\cdot(k-1)^{n-j}$ 其中 $0\le k<j$。

时间复杂度：$\mathcal{O}(n^3)$。

算法 2

考虑**容斥**。我们枚举至少 i 行和 j 列没有 1。那么答案为：

$$\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}(-1)^{i+j}\binom{n}{i}\cdot\binom{n}{j}\cdot(k-1)^{n(i+j)-ij}\cdot k^{(n-i)(n-j)} \quad (1)$$

时间复杂度：$\mathcal{O}(n^2)\sim\mathcal{O}(n^2\log n)$。

算法 3

我们对 (1) 进行化简，具体方法为：对第二重 j 求和根据**二项式定理**展开，最终得到的式子为：

$$\sum_{i=0}^{n}(-1)^{i}\cdot\binom{n}{i}\cdot\left(k^{n-i}\cdot(k-1)^{i}-(k-1)^{n}\right)^{n}$$

时间复杂度：$\mathcal{O}(n\log n)$。

Code

算法 1

```
#include <cstdio>

const int N = 250;
const int MOD = 1e9 + 7;

int n, k, p[N + 5], q[N + 5], c[N + 5][N + 5], f[N + 5][N + 5];

void add(int &x, int y) {
    (x += y) >= MOD && (x -= MOD);
}
void sub(int &x, int y) {
    (x -= y) < 0 && (x += MOD);
}
int add(int x) {
    return x >= MOD ? x - MOD : x;
}
int sub(int x) {
    return x < 0 ? x + MOD : x;
}
```

算法 2

```
#include <cstdio>

const int N = 250;
const int MOD = 1e9 + 7;

int n, k, fac[N + 5], ifac[N + 5], pw1[N * N + 5], pw2[N * N + 5];

void add(int &x, int y) {
    (x += y) >= MOD && (x -= MOD);
}
void sub(int &x, int y) {
    (x -= y) < 0 && (x += MOD);
}
int pow(int x, int k) {
    int ans = 1;
    for (; k > 0; k >>= 1, x = 1LL * x * x % MOD) {
        if ((k & 1) == 1) ans = 1LL * ans * x % MOD;
    }
    return ans;
```

算法 3

```
#include <cstdio>

const int N = 250;
const int MOD = 1e9 + 7;

int n, k, fac[N + 5], ifac[N + 5], p[N + 5], q[N + 5];

void add(int &x, int y) {
    (x += y) >= MOD && (x -= MOD);
}
void sub(int &x, int y) {
    (x -= y) < 0 && (x += MOD);
}
int mod(int x) {
    return x < 0 ? x + MOD : x >= MOD ? x - MOD : x;
}
int pow(int x, int k) {
    int ans = 1;
    for (; k > 0; k >>= 1, x = 1LL * x * x % MOD) {
```


下一篇 (https://blog.orzsiyuan.com/archives/hehezhou-AK-CSP-2019/)

上一篇 (https://blog.orzsiyuan.com/archives/%E5%A5%BD%E5%BA%B7%E7%9A%84/)

6 条评论

lihaoxiang2006

November 8th, 2019 at 21:57

qwq

回复 (https://blog.orzsiyuan.com/archives/Codeforces-1228E-Another-Filling-the-Grid/?replyTo=348#respond-post-1120)

Schwarzkopf_Henkal (https://www.cnblogs.com/schwarzkopf-henkal/)

November 6th, 2019 at 09:08

代码部分的样式是用什么实现的?

回复 (https://blog.orzsiyuan.com/archives/Codeforces-1228E-Another-Filling-the-Grid/?replyTo=340#respond-post-1120)

Siyuan (http://orzsiyuan.com) 博主

November 6th, 2019 at 12:38

@Schwarzkopf_Henkal 插件 CodePrettify

回复 (https://blog.orzsiyuan.com/archives/Codeforces-1228E-Another-Filling-the-Grid/?replyTo=343#respond-post-1

dd

October 7th, 2019 at 08:28

技术的路过。

回复 (https://blog.orzsiyuan.com/archives/Codeforces-1228E-Another-Filling-the-Grid/?replyTo=323#respond-post-1120)

dd

October 7th, 2019 at 08:28

cai

回复 (https://blog.orzsiyuan.com/archives/Codeforces-1228E-Another-Filling-the-Grid/?replyTo=322#respond-post-1120)

repostone (https://repostone.home.blog/)

October 3rd, 2019 at 16:06

非技术的路过。

回复 (https://blog.orzsiyuan.com/archives/Codeforces-1228E-Another-Filling-the-Grid/?replyTo=317#respond-post-1120)

发表评论

评论 *

说点什么吧......

表情

私密评论

名称 *

姓名或昵称

邮箱 *

邮箱 (必填,将保密)

地址

网站或博客

发表评论

热门文章

ZJOI 2019 游记 (https://blog.orzsiyuan.com/archives/ZJOI-2019/) 6051

CSP 2019 算法模板复习 (https://blog.orzsiyuan.com/archives/hehezhou-AK-CSP-2019/) 2892

「算法笔记」多项式模板 (https://blog.orzsiyuan.com/archives/Polynomial-Template/) 1080

「SDOI 2017」数字表格 (https://blog.orzsiyuan.com/archives/SDOI-2017-Number-Table/) 1028

「TJOI 2019」唱、跳、rap 和篮球 (https://blog.orzsiyuan.com/archives/TJOI-2019-Sing-Dance-Rap-and-Basketball/) 843

博客信息

文章数目	**187**
评论数目	**243**
运行天数	**1年25天**
最后活动	**4 个月前**