「Codeforces 1228E」Another Filling the Grid ⫶T ◉

👤 Siyuan (https://blog.orzsiyuan.com/author/1/)   ⏱ 2019 年 10 月 01 日   👁 747 次浏览   💬 6 条评论

✏ 4932 字数   🏷 题解 (https://blog.orzsiyuan.com/category/Problem/)

🏠 首页 (https://blog.orzsiyuan.com/) / 正文

分享到： ⭐ / (http://sns.qzone.qq.com/cgi-bin/qzshare/cgi_qzshare_onekey?
url=https://blog.orzsiyuan.com/archives/Codeforces-1228E-Another-Filling-the-
Grid/&title=「Codeforces 1228E」Another Filling the Grid&site=https://blog.orzsiyuan.com/) 🐦
(http://service.weibo.com/share/share.php?url=https://blog.orzsiyuan.com/archives/Codeforces-
1228E-Another-Filling-the-Grid/&title=「Codeforces 1228E」Another Filling the Grid)

题目链接：Codeforces 1228E (https://codeforces.com/contest/1228/problem/E)

你有一个 $n \times n$ 的网格和一个整数 k，在每个格子中都填入一个整数，满足如下条件：

- 所有格子中的整数都介于 1 到 k 之间。
- 第 i 行的最小值为 1（$1 \le i \le n$）。
- 第 j 列的最小值为 1（$1 \le j \le n$）。

请求出填数的方案数，答案对 $10^9 + 7$ 取模。

数据范围：$1 \le n \le 250$，$1 \le k \le 10^9$。

Solution

算法 1

设 $f(i, j)$ 表示已经填完了前 i 行，有 j 列已经包含 1 了。枚举上一行填了 k 个 1 则有：

- $f(0, 0) = 1$。
- $f(i, j) = f(i - 1, j) \cdot \left(k^j - (k - 1)^j \right) \cdot (k - 1)^{n-j}$，其中第二项表示这 j 个位置至少需要有一个 1，则可以用全集减去补集表示。
- $f(i, j) = f(i - 1, k) \cdot \binom{n-k}{j-k} \cdot (k - 1)^{n-j}$ 其中 $0 \le k < j$。

时间复杂度：$\mathrm{O}(n^3)$。

算法 2

考虑**容斥**。我们枚举至少 i 行和 j 列没有 1。那么答案为：

$$\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}(-1)^{i+j}\binom{n}{i}\cdot\binom{n}{j}\cdot(k-1)^{n(i+j)-ij}\cdot k^{(n-i)(n-j)}$$

时间复杂度：$\mathrm{O}(n^2) \sim \mathrm{O}(n^2\log n)$。

算法 3

我们对 (1) 进行化简，具体方法为：对第二重 j 求和根据**二项式定理**展开，最终得到的式子为：

$$\sum_{i=0}^{n}(-1)^{i}\cdot\binom{n}{i}\cdot\left(k^{n-i}\cdot(k-1)^{i}-(k-1)^{n}\right)^{n}$$

时间复杂度：$\mathrm{O}(n\log n)$。

Code

算法 1

```
1   #include <cstdio>

2

3   const int N = 250;

4   const int MOD = 1e9 + 7;

5

6   int n, k, p[N + 5], q[N + 5], c[N + 5][N + 5], f[N + 5][N + 5];

7

8   void add(int &x, int y) {

9       (x += y) >= MOD && (x -= MOD);

10  }

11  void sub(int &x, int y) {

12      (x -= y) < 0 && (x += MOD);

13  }

14  int add(int x) {

15      return x >= MOD ? x - MOD : x;

16  }

17  int sub(int x) {

18      return x < 0 ? x + MOD : x;

19  }
```

算法 2

```cpp
1   #include <cstdio>
2
3   const int N = 250;
4   const int MOD = 1e9 + 7;
5
6   int n, k, fac[N + 5], ifac[N + 5], pw1[N * N + 5], pw2[N * N + 5];
7
8   void add(int &x, int y) {
9       (x += y) >= MOD && (x -= MOD);
10  }
11  void sub(int &x, int y) {
12      (x -= y) < 0 && (x += MOD);
13  }
14  int pow(int x, int k) {
15      int ans = 1;
16      for (; k > 0; k >>= 1, x = 1LL * x * x % MOD) {
17          if ((k & 1) == 1) ans = 1LL * ans * x % MOD;
18      }
19      return ans;
```

算法 3

```
1    #include <cstdio>

2

3    const int N = 250;

4    const int MOD = 1e9 + 7;

5

6    int n, k, fac[N + 5], ifac[N + 5], p[N + 5], q[N + 5];

7

8    void add(int &x, int y) {

9        (x += y) >= MOD && (x -= MOD);

10   }

11   void sub(int &x, int y) {

12       (x -= y) < 0 && (x += MOD);

13   }

14   int mod(int x) {

15       return x < 0 ? x + MOD : x >= MOD ? x - MOD : x;

16   }

17   int pow(int x, int k) {

18       int ans = 1;

19       for (; k > 0; k >>= 1, x = 1LL * x * x % MOD) {
```

6 条评论

lihaoxiang2006

November 8th, 2019 at 21:57

qwq

回复 (https://blog.orzsiyuan.com/archives/Codeforces-1228E-Another-Filling-the-Grid/?replyTo=348#respond-post-1120)

Schwarzkopf_Henkal (https://www.cnblogs.com/schwarzkopf-henkal/)

November 6th, 2019 at 09:08

代码部分的样式是用什么实现的?

回复 (https://blog.orzsiyuan.com/archives/Codeforces-1228E-Another-Filling-the-Grid/?replyTo=340#respond-post-1120)

Siyuan (http://orzsiyuan.com) 博主

November 6th, 2019 at 12:38

@Schwarzkopf_Henkal 插件 CodePrettify

回复 (https://blog.orzsiyuan.com/archives/Codeforces-1228E-Another-Filling-the-Grid/?replyTo=343#respond-post-1

dd

October 7th, 2019 at 08:28

技术的路过。

回复 (https://blog.orzsiyuan.com/archives/Codeforces-1228E-Another-Filling-the-Grid/?replyTo=323#respond-post-1120)

dd

October 7th, 2019 at 08:28

cai

回复 (https://blog.orzsiyuan.com/archives/Codeforces-1228E-Another-Filling-the-Grid/?replyTo=322#respond-post-1120)

repostone (https://repostone.home.blog/)

October 3rd, 2019 at 16:06

非技术的路过。

回复 (https://blog.orzsiyuan.com/archives/Codeforces-1228E-Another-Filling-the-Grid/?replyTo=317#respond-post-1120)

发表评论 ❶

评论 *

说点什么吧......

☺ 表情

私密评论

名称 *

姓名或昵称

邮箱 *

邮箱 (必填,将保密)

地址

网站或博客

发表评论

🔥 💬 ⇄

热门文章

[ZJOI 2019 游记](https://blog.orzsiyuan.com/archives/ZJOI-2019/) (https://blog.orzsiyuan.com/archives/ZJOI-2019/) 👁 6051

[CSP 2019 算法模板复习](https://blog.orzsiyuan.com/archives/hehezhou-AK-CSP-2019/) (https://blog.orzsiyuan.com/archives/hehezhou-AK-CSP-2019/) 👁 2892

[「算法笔记」多项式模板](https://blog.orzsiyuan.com/archives/Polynomial-Template/) (https://blog.orzsiyuan.com/archives/Polynomial-Template/) 👁 1080

[「SDOI 2017」数字表格](https://blog.orzsiyuan.com/archives/SDOI-2017-Number-Table/) (https://blog.orzsiyuan.com/archives/SDOI-2017-Number-Table/) 👁 1028

[「TJOI 2019」唱、跳、rap 和篮球](https://blog.orzsiyuan.com/archives/TJOI-2019-Sing-Dance-Rap-and-Basketball/) (https://blog.orzsiyuan.com/archives/TJOI-2019-Sing-Dance-Rap-and-Basketball/) 👁 843

博客信息

📄 文章数目	**187**
💬 评论数目	**243**
⚏ 运行天数	**1年25天**
↻ 最后活动	**4 个月前**