

「SDOI 2017」数字表格

● Siyuan (<https://blog.orzsiyuan.com/author/1/>) ○ 2019 年 05 月 18 日 ● 1027 次浏览 ● 1 条评论
 ✎ 3506 字数 📄 题解 (<https://blog.orzsiyuan.com/category/Problem/>)



🏠 首页 (<https://blog.orzsiyuan.com/>) / 正文

分享到: ★ / (http://sns.qzone.qq.com/cgi-bin/qzshare/cgi_qzshare_onekey?

<url=https://blog.orzsiyuan.com/archives/SDOI-2017-Number-Table/&title=%E2%80%9CSDOI%202017%E2%80%9D%20%E5%8F%91%E8%A1%80>

<url=https://service.weibo.com/share/share.php?>

<url=https://blog.orzsiyuan.com/archives/SDOI-2017-Number-Table/&title=%E2%80%9CSDOI%202017%E2%80%9D%20%E5%8F%91%E8%A1%80>

题目链接: [LOJ 2000](https://loj.ac/problem/2000) (<https://loj.ac/problem/2000>)

Doris 刚刚学习了 Fibonacci 数列, 用 $f[i]$ 表示数列的第 i 项, 那么:

$$f[0] = 0$$

$$f[1] = 1$$

$$f[n] = f[n - 1] + f[n - 2], n \geq 2$$

Doris 用老师的超级计算机生成了一个 $n \times m$ 的表格, 第 i 行第 j 列的格子中的数是 $f[\gcd(i, j)]$, 其中 $\gcd(i, j)$ 表示 i 与 j 的最大公约数。

Doris 的表格中共有 $n \times m$ 个数, 她想知道这些数的乘积是多少。

这些数的乘积实在是太大了, 所以 Doris 只想知道乘积对 $10^9 + 7$ 取模后的结果。

本题有 T 组数组。

数据范围: $1 \leq T \leq 1000$, $1 \leq n, m \leq 10^6$.

Solution

直接列出答案的式子:

$$\prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^m f[\gcd(i, j)]$$

按照套路，我们枚举 \gcd 化为：

$$\begin{aligned}
 & \prod_{d=1}^{\min(n,m)} f[d]^{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m [\gcd(i,j)=d]} \\
 & \prod_{d=1}^{\min(n,m)} f[d]^{\sum_{i=1}^{\min\left(\left\lfloor \frac{n}{d} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{m}{d} \right\rfloor\right)} \mu(i) \cdot \left\lfloor \frac{n}{id} \right\rfloor \cdot \left\lfloor \frac{m}{id} \right\rfloor} \\
 & \prod_{d=1}^{\min(n,m)} f[d]^{\sum_{d|T} \mu\left(\frac{T}{d}\right) \cdot \left\lfloor \frac{n}{T} \right\rfloor \cdot \left\lfloor \frac{m}{T} \right\rfloor} \\
 & \prod_{T=1}^{\min(n,m)} \prod_{d|T} f[d]^{\mu\left(\frac{T}{d}\right) \cdot \left\lfloor \frac{n}{T} \right\rfloor \cdot \left\lfloor \frac{m}{T} \right\rfloor} \\
 & \prod_{i=1}^{\min(n,m)} \left(\prod_{d|i} f[d]^{\mu\left(\frac{i}{d}\right)} \right)^{\left\lfloor \frac{n}{i} \right\rfloor \cdot \left\lfloor \frac{m}{i} \right\rfloor}
 \end{aligned}$$

我们记 $F(n) = \prod_{d|n} f[d]^{\mu\left(\frac{n}{d}\right)}$ ，那么 $F(1) \dots F(n)$ 可以在 $O(n \log n)$ 的时间内预处理得到。

原式化为：

$$\prod_{i=1}^{\min(n,m)} F(i)^{\left\lfloor \frac{n}{i} \right\rfloor \cdot \left\lfloor \frac{m}{i} \right\rfloor}$$

可以直接数论分块计算。

时间复杂度： $\mathcal{O}(n \log n + T \sqrt{n} \log n)$ 。

Code

```

1 #include <cstdio>
2 #include <algorithm>
3
4 const int N = 1e6 + 5;
5 const int P = 1e9 + 7, phiP = 1e9 + 6;
6
7 int T, n, m, tot, p[N], mu[N], f[N], iF[N], g[N], pre[N];
8 bool flg[N];
9
10 void add(int &x, int y) {
11     (x += y) >= P && (x -= P);
12 }
13 int pow(int x, int p) {
14     if (p < 0) p += phiP;
15     int ans = 1;
16     for (; p; p >>= 1, x = 1LL * x * x % P) {
17         if (p & 1) ans = 1LL * ans * x % P;
18     }
19     return ans;

```

本作品采用 知识共享署名-相同方式共享 4.0 国际许可协议 (<http://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/>) 进行许可。

[下一篇 \(<https://blog.orzsiyuan.com/archives/NOI-2018-Your-Name/>\)](https://blog.orzsiyuan.com/archives/NOI-2018-Your-Name/)

[上一篇 \(<https://blog.orzsiyuan.com/archives/NOI-2016-Excellent-Split/>\)](https://blog.orzsiyuan.com/archives/NOI-2016-Excellent-Split/)

1 条评论

 LMOLiver (<https://lmoliver.github.io/>)
May 22nd, 2019 at 11:04

Siyuan 现在连莫比乌斯反演都觉得显然而不屑于提到了吗 QAQ

[回复 \(<https://blog.orzsiyuan.com/archives/SDOI-2017-Number-Table/?replyTo=207#respond-post-677>\)](https://blog.orzsiyuan.com/archives/SDOI-2017-Number-Table/?replyTo=207#respond-post-677)

发表评论

评论 *

说点什么吧.....

表情

私密评论

名称 *

 姓名或昵称

邮箱 *

邮箱 (必填, 将保密)

地址

网站或博客

发表评论



热门文章

(<https://blog.orzsiyuan.com/archives/ZJOI-2019/>)

2019/) 眼 6051

(<https://blog.orzsiyuan.com/archives/hehezhou-AK-CSP-2019/>)

AK- 眼 2892

CSP-

2019/) (<https://blog.orzsiyuan.com/archives/Polynomial-Template/>)
Template) 眼 1080

(<https://blog.orzsiyuan.com/archives/SDOI-2017-Number-Table/>)

2017- 眼 1028

Number-

Table/) (<https://blog.orzsiyuan.com/archives/TJOI-2019-Sing-2019-Dance-Rap-and-Basketball/>)

Sing- 眼 843

Dance-

Rap-

and-

Basketball/)

博客信息

| | |
|------|------------------------------------------------------------------------------------------|
| 文章数目 | 187 |
| 评论数目 | 243 |
| 运行天数 | 1年25天 |
| 最后活动 | 4个月前  |

© 2020 Copyright 浙ICP备19008446号-1 (<http://www.beian.miit.gov.cn>)