








[Codeforces 1204E] Natasha, Sasha and the Prefix Sums

 Siyuan (<https://blog.orzsiyuan.com/author/1/>)
  2019 年 09 月 08 日
  622 次浏览
  1 条评论
 3344 字数
  题解 (<https://blog.orzsiyuan.com/category/Problem/>)

 [首页](https://blog.orzsiyuan.com/) (<https://blog.orzsiyuan.com/>) / 正文

分享到:  / ([http://sns.qzone.qq.com/cgi-bin/qzshare/cgi_qzshare_onekey?url=https://blog.orzsiyuan.com/archives/Codeforces-1204E-Natasha-Sasha-and-the-Prefix-Sums/&title=\[Codeforces 1204E\] Natasha, Sasha and the Prefix](http://sns.qzone.qq.com/cgi-bin/qzshare/cgi_qzshare_onekey?url=https://blog.orzsiyuan.com/archives/Codeforces-1204E-Natasha-Sasha-and-the-Prefix-Sums/&title=[Codeforces%201204E]%20Natasha,%20Sasha%20and%20the%20Prefix%20Sums&site=https://blog.orzsiyuan.com/)

[Sums&site=https://blog.orzsiyuan.com/](https://blog.orzsiyuan.com/archives/Codeforces-1204E-Natasha-Sasha-and-the-Prefix-Sums/&title=[Codeforces 1204E] Natasha, Sasha and the Prefix Sums&site=https://blog.orzsiyuan.com/))  ([http://service.weibo.com/share/share.php?url=https://blog.orzsiyuan.com/archives/Codeforces-1204E-Natasha-Sasha-and-the-Prefix-Sums/&title=\[Codeforces 1204E\] Natasha, Sasha and the Prefix Sums](http://service.weibo.com/share/share.php?url=https://blog.orzsiyuan.com/archives/Codeforces-1204E-Natasha-Sasha-and-the-Prefix-Sums/&title=[Codeforces 1204E] Natasha, Sasha and the Prefix Sums))

[http://service.weibo.com/share/share.php?url=https://blog.orzsiyuan.com/archives/Codeforces-1204E-Natasha-Sasha-and-the-Prefix-Sums/&title=\[Codeforces 1204E\] Natasha, Sasha and the Prefix Sums](http://service.weibo.com/share/share.php?url=https://blog.orzsiyuan.com/archives/Codeforces-1204E-Natasha-Sasha-and-the-Prefix-Sums/&title=[Codeforces 1204E] Natasha, Sasha and the Prefix Sums))
 题目链接: [Codeforces 1204](https://codeforces.com/contest/1204/problem/E) (<https://codeforces.com/contest/1204/problem/E>)

Natasha 最喜欢的数字是 n 和 1 , Sasha 最喜欢的数字是 m 和 -1 。某一天他们写下了长度为 $n + m$ 且包含恰好 n 个 1 和 m 个 -1 的所有可能的序列。对于每一个序列计算出它的最大前缀和（允许为空）；形式化地，我们定义 $f(a)$ 表示序列 $a_1, \dots, a_l (l \leq 0)$ 的最大前缀和，那么有：

$$f(a) = \max \left(0, \max_{i=1}^l \sum_{j=1}^i a_j \right)$$

现在他们想要对于所有满足条件的序列，求出 $f(a)$ 的总和。答案对 998244853 取模。

数据范围： $0 \leq n, m \leq 2000$ 。

Solution

弱化版

我们设 $f(i, j)$ 表示含有 i 个 1 和 j 个 -1 的所有序列的 $f(a)$ 之和。为了体现「前缀和」的性质，我们每次加入一个数字时不是加在序列的最后面，而是加在最前面。因为我们发现这样可以使新的数字对所有前缀和造成影响；否则无法计算最大前缀和是否被修改。

为了方便描述，我们定义 $g(i, j)$ 表示含有 i 个 1 和 j 个 -1 的序列的个数。显然有：

$$g(i, j) = \binom{i+j}{i}$$

对于 f 有转移:

$$\begin{aligned} f(i, j) + 1 \cdot g(i, j) &\rightarrow f(i+1, j) \\ f(i, j) + (-1) \cdot (g(i, j) - h(i, j)) &\rightarrow f(i, j+1) \end{aligned}$$

第二个转移中的 $h(i, j)$ 是什么鬼? 如果原序列的 $f(a) = 0$, 那么在原序列最前面加上一个 -1 后不会影响其 f 值。这样一来我们就需要记录 $h(i, j)$ 表示含有 i 个 1 和 j 个 -1 的序列中最大前缀和为 0 的方案数, 其转移为 (考虑在序列末尾加入新数字):

$$h(i, j) = \begin{cases} 1 & i = 0 \\ 0 & i > j \\ h(i-1, j) + h(i, j-1) & \text{otherwise.} \end{cases}$$

题外话: 我们可以发现 h 的定义和「卡特兰数」类似, 则有 $h(i, j) = \binom{i+j}{j} - \binom{i+j}{j+1}$ 。

时间复杂度: $O(nm)$ 。

加强版

如果我们把数据范围加强到 $0 \leq n, m \leq 10^7$ 呢? 夫毒瘤!

我们对于每种答案统计方案数。设最大前缀和为 i 的方案数有 $f(i)$ 种, 我们不妨对其做后缀和得到: 最大前缀和 $\geq i$ 的方案数有 $g(i)$ 种。

我们参考卡特兰数的几何证明, 将 1 看做平面向量 $(1, 1)$ 、将 -1 看做平面向量 $(1, -1)$, 那么问题等价于: **从点 $(0, 0)$ 出发到达点 $(n+m, n-m)$ 的所有路径中, 经过直线 $y = i$ 的方案数。**

对于 i 分两种情况讨论:

1. 当 $0 \leq i \leq n-m$ 时, 起点和终点在直线的两侧, 则 $g(i) = \binom{n+m}{n}$ 。
2. 当 $n-m < i \leq n$ 时, 我们找到路径上第一个经过 $y = i$ 的点, 将起点到这个点的路径通过 $y = i$ 对称, 起点通过变换变成了 $(0, 2i)$ 。设路径上有 x 个 $(1, 1)$ 和 y 个 $(1, -1)$, 列出方程:

$$\begin{cases} x + y = n + m \\ x - y = n - m - 2i \end{cases}$$

得到 $x = n - i, y = m + i$, 方案数 $g(i) = \binom{x+y}{x} = \binom{n+m}{n-i}$ 。

最终的答案为

$$\sum_{i=0}^n i \cdot (g(i) - g(i+1))$$

时间复杂度: $O(n + m + \log p)$ 。

Code

此处只给出**加强版**的代码。

```

1  #include <cstdio>
2
3  const int N = 2e7;
4  const int MOD = 998244853;
5
6  int n, m, fac[N + 5], ifac[N + 5], f[N + 5];
7
8  void add(int &x, int y) {
9      (x += y) >= MOD && (x -= MOD);
10 }
11 void sub(int &x, int y) {
12     (x -= y) < 0 && (x += MOD);
13 }
14 int add(int x) {
15     return x >= MOD ? x - MOD : x;
16 }
17 int sub(int x) {
18     return x < 0 ? x + MOD : x;
19 }
```

本作品采用 知识共享署名-相同方式共享 4.0 国际许可协议 (<http://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/>) 进行许可。

[下一篇 \(https://blog.orzsiyuan.com/archives/Codeforces-662C-Binary-Table/\)](https://blog.orzsiyuan.com/archives/Codeforces-662C-Binary-Table/)[上一篇 \(https://blog.orzsiyuan.com/archives/Codeforces-1217D-Coloring-Edges/\)](https://blog.orzsiyuan.com/archives/Codeforces-1217D-Coloring-Edges/)

1 条评论

**xddd (https://cdn.jsdelivr.net)**

September 8th, 2019 at 19:54

Orz Siyuan

[回复 \(https://blog.orzsiyuan.com/archives/Codeforces-1204E-Natasha-Sasha-and-the-Prefix-Sums/?replyTo=304#respond-pos\)](https://blog.orzsiyuan.com/archives/Codeforces-1204E-Natasha-Sasha-and-the-Prefix-Sums/?replyTo=304#respond-pos)

发表评论

评论 *

说点什么吧.....

 表情私密评论 ☐

名称 *



姓名或昵称

邮箱 *

邮箱 (必填,将保密)


地址

网站或博客

发表评论



热门文章

[ZJOI-2019 游记 \(https://blog.orzsiyuan.com/archives/ZJOI-2019/\)](https://blog.orzsiyuan.com/archives/ZJOI-2019/)
2019/)  6051[CSP-2019 算法模板复习 \(https://blog.orzsiyuan.com/archives/hehezhou-AK-CSP-2019/\)](https://blog.orzsiyuan.com/archives/hehezhou-AK-CSP-2019/)
AK-  2892

- CSP-2019/)
(https://blog.orzsiyuan.com/archives/Polynomial-Template/)
Template/)
1080
- (https://blog.orzsiyuan.com/archives/SDOI-2017-Number-Table/)
SDOI-2017- Number-
Table/)
1026
- (https://blog.orzsiyuan.com/archives/TJOI-2019-Sing-Dance-Rap-and-Basketball/)
TJOI-2019- Sing-
Dance-
Rap-
and-
Basketball/)
843

博客信息

文章数目	187
评论数目	243
运行天数	1年25天
最后活动	4 个月前