「2019 Multi-University Training Contest 1」Function

Siyuan (https://blog.orzsiyuan.com/author/1/) 2019 年 07 月 26 日 518 次浏览 7 条评论
6852 字数 题解 (https://blog.orzsiyuan.com/category/Problem/)

> 题目链接：HDU 6588 (http://acm.hdu.edu.cn/showproblem.php?pid=6588)（加强版 LOJ 6686 (https://loj.ac/problem/6686)）

本文为加强版题解。

给定正整数 n，请你求如下式子的值：

$$\sum_{i=1}^{n}\gcd(\lfloor\sqrt[3]{i}\rfloor, i)$$

答案对 998244353 取模。

数据范围：$1\le n\le 10^{30}$。

Solution

~~当时订正多校赛题目时，花了一上午时间把这题变毒瘤了（~~

首先枚举 $\lfloor\sqrt[3]{i}\rfloor$ 的值 a 得到：

$$\sum_{a=1}^{\lfloor\sqrt[3]{n}\rfloor}\sum_{i=1}^{n}[\lfloor\sqrt[3]{i}\rfloor=a]\gcd(a,i)$$

又因为 $\lfloor\sqrt[3]{i}\rfloor=a$ 等价于 $a^3\le i\le(a+1)^3-1$，所以上述式子化为：

$$\sum_{a=1}^{\lfloor\sqrt[3]{n}\rfloor}\sum_{i=a^3}^{\min\left((a+1)^3-1,n\right)}\gcd(a,i)$$

这样我们把 $1\sim n$ 分为了若干块，最后一块可能不完整。设 $r=\lfloor\sqrt[3]{n}\rfloor-1$，带回原式子得到：

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{n}\gcd(\lfloor\sqrt[3]{i}\rfloor,i)\\=&\sum_{i=\lfloor\sqrt[3]{n}\rfloor^3}^{n}\gcd(\lfloor\sqrt[3]{n}\rfloor,i)+\sum_{a=1}^{r}\sum_{i=a^3}^{(a+1)^3-1}\gcd(a,i)\end{aligned}$$

考虑一个子问题：

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{n}\gcd(a,i)\\=&\sum_{d|a}d\sum_{i=1}^{n}[\gcd(a,i)=d]\\=&\sum_{d|a}d\sum_{td|i,td|a}\mu(t)\\=&\sum_{T|a}\left\lfloor\frac{n}{T}\right\rfloor\sum_{d|T}d\cdot\mu\left(\frac{T}{d}\right)\\=&\sum_{T|a}\left\lfloor\frac{n}{T}\right\rfloor\varphi(T)\end{aligned}$$

第一个和式

前半部分我们需要求出 $\lfloor\sqrt[3]{n}\rfloor$ 的所有约数的欧拉函数值。

暴力求解和线性筛的复杂度都是不正确的，它们都没有利用约数之间的有机关系。考虑先得到唯一分解，根据 φ 的性质可以 DFS 求得所有约数的 φ 值。

该部分的时间复杂度为 $\mathcal{O}(n^{\frac{1}{6}})$。

第二个和式

依旧按照子问题的推导：

$$\begin{aligned}
&\sum_{a=1}^{r}\sum_{i=a^3}^{(a+1)^3-1}\gcd(a,i)\\
=&\sum_{a=1}^{r}\sum_{T|a}\left(\left\lfloor\frac{(a+1)^3-1}{T}\right\rfloor-\left\lfloor\frac{a^3-1}{T}\right\rfloor\right)\cdot\varphi(T)\\
=&\sum_{T=1}^{r}\varphi(T)\sum_{i=1}^{\left\lfloor\frac{r}{T}\right\rfloor}\left(\left\lfloor\frac{(iT+1)^3-1}{T}\right\rfloor-\left\lfloor\frac{(iT)^3-1}{T}\right\rfloor\right)\\
=&\sum_{T=1}^{r}\varphi(T)\sum_{i=1}^{\left\lfloor\frac{r}{T}\right\rfloor}3Ti^2+3i+1\\
=&\sum_{T=1}^{r}\left(T\varphi(T)\cdot 3\sum_{i=1}^{\left\lfloor\frac{r}{T}\right\rfloor}i^2\right)+\left(\varphi(T)\cdot 3\sum_{i=1}^{\left\lfloor\frac{r}{T}\right\rfloor}i\right)+\left(\varphi(T)\left\lfloor\frac{r}{T}\right\rfloor\right)
\end{aligned}$$

对于 10^{21} 的数据，直接暴力求解就行了。但是对于 10^{30} 的数据，发现 $\left\lfloor\frac{r}{T}\right\rfloor$ 可以数论分块。我们使用「杜教筛」分别求出 $T\varphi(T)$，$\varphi(T)$ 的前缀和（卷上的函数分别为 $g(x)=x,g(x)=1$）即可。

该部分的时间复杂度为 $\mathcal{O}(n^{\frac{2}{9}})$。

时间复杂度：$\mathcal{O}(n^{\frac{2}{9}})$。

Code

```
#include <cstdio>
#include <cmath>
#include <algorithm>
#include <vector>
#include <unordered_map>

typedef std::pair<long long, int> pli;
typedef std::pair<long long, long long> pll;

const int LIM = 1e7 + 5;
const int MOD = 998244353, I2 = (MOD + 1) / 2, I6 = (MOD + 1) / 6;

int tot, phi[LIM], s1[LIM], s2[LIM];
bool flg[LIM];
std::vector<int> p;
std::unordered_map<long long, int> S1, S2;

template <class Tp>
void read(Tp &x) {
```


下一篇 (https://blog.orzsiyuan.com/archives/2019-Multi-University-Training-Contest-1-Sequence/)

上一篇 (https://blog.orzsiyuan.com/archives/2019-Multi-University-Training-Contest-1-Typewriter/)

7 条评论

happydef

February 12th, 2020 at 14:56

一些 php 和 md 文件，似乎是一篇博客文章。从博客名（orzsiyuan.com）可以看出即使对于个人，膜拜Siyuan也非常重要。

回复 (https://blog.orzsiyuan.com/archives/2019-Multi-University-Training-Contest-1-Function/?replyTo=373#respond-post-10

Y15BeTa (https://y15beta.cnblogs.com)

November 9th, 2019 at 09:32

膜Siyuan文档D（

回复 (https://blog.orzsiyuan.com/archives/2019-Multi-University-Training-Contest-1-Function/?replyTo=350#respond-post-10

blunt_axe (https://blunt-axe.github.io/)

August 14th, 2019 at 22:08

Siyuan 啊你这个式子推复杂了啊 建议您看看我写的博客 QwQ

回复 (https://blog.orzsiyuan.com/archives/2019-Multi-University-Training-Contest-1-Function/?replyTo=288#respond-

Siyuan (http://orzsiyuan.com) 博主

August 15th, 2019 at 13:51

@blunt_axe 第二个和式好像确实繁琐了一点，谢谢指点！ (https://blog.orzsiyuan.com/usr/themes/handsome/usr/img/emotion/twemoji/smile.png)

回复 (https://blog.orzsiyuan.com/archives/2019-Multi-University-Training-Contest-1-Function/?replyTo=289#responc

Mkozex (https://Mkozex.github.io)

August 2nd, 2019 at 14:03

Siyuan 又 D 出题人了 QAQ

回复 (https://blog.orzsiyuan.com/archives/2019-Multi-University-Training-Contest-1-Function/?replyTo=281#respond-post-10

LMOliver (http://lmoliver.github.io/)

July 28th, 2019 at 19:28

Siyuan 又 D 出题人了 QAQ

回复 (https://blog.orzsiyuan.com/archives/2019-Multi-University-Training-Contest-1-Function/?replyTo=273#respond-post-10

Anonymous (https://orzsiyuan.com/action/logout)

July 28th, 2019 at 18:09

Siyuan 又 D 出题人了 QAQ

回复 (https://blog.orzsiyuan.com/archives/2019-Multi-University-Training-Contest-1-Function/?replyTo=272#respond-post-10

发表评论

评论 *

说点什么吧......

表情 私密评论

名称 *

姓名或昵称

邮箱 *

邮箱 (必填,将保密)

地址

网站或博客

发表评论

热门文章

ZJOI 2019 游记 (https://blog.orzsiyuan.com/archives/ZJOI-2019/) 6051

CSP 2019 算法模板复习 (https://blog.orzsiyuan.com/archives/hehezhou-AK-CSP-2019/) 2892

「算法笔记」多项式模板 (https://blog.orzsiyuan.com/archives/Polynomial-Template/) 1080

「SDOI 2017」数字表格 (https://blog.orzsiyuan.com/archives/SDOI-2017-Number-Table/) 1028

「TJOI 2019」唱、跳、rap 和篮球 (https://blog.orzsiyuan.com/archives/TJOI-2019-Sing-Dance-Rap-and-Basketball/) 843

博客信息

文章数目	187
评论数目	243
运行天数	1年25天
最后活动	4 个月前