# 2016年全国初中数学联合竞赛（初二年级）试题

## 参考答案及评分标准

说明：评阅试卷时，请依据本评分标准.
第一试，选择题和填空题只设 7 分和 0 分两档；
第二试各题，请按照本评分标准规定的评分档次给分.如果考生的解答方法和本解答不同，只要思路合理，步骤正确，在评卷时请参照本评分标准划分的档次，给予相应的分数.

## 第一试（C）

### 一、选择题（本题满分 42 分，每小题 7 分）

1.已知$a$为实数，关于$x,y$的方程组$\begin{cases}ax+2y=24\\2x+2y=a\end{cases}$有整数解，则$a$的个数为（　　）

A.2　　B.3　　C.4　　D.5

【答案】C。

由$\begin{cases}ax+2y=24\\2x+2y=a\end{cases}\Rightarrow(a-2)x=24-a$，$\therefore x=\dfrac{24-a}{a-2}=-1+\dfrac{22}{a-2}$。

由$2x+2y=a$，可知$a$必为偶数，

又$-1+\dfrac{22}{a-2}$为整数，所以$a=0,4,24,-20$。　故选 C。

2．定义运算$a*b=\dfrac{a(a-1)(a-2)\times\cdots\times(a-b+2)(a-b+1)}{b(b-1)(b-2)\times\cdots\times2\times1}$，则 $10*7=$（　　）

A.720　　B.120

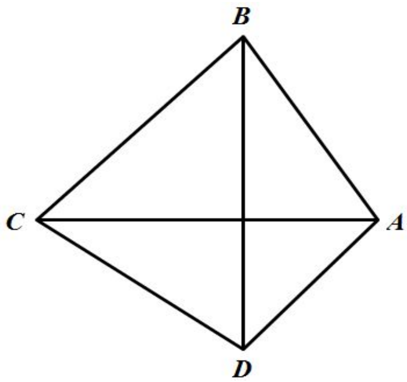
C.240　　D.80

【答案】B。

代入求值的结果。

3.如图，在四边形$ABCD$中，$AC\perp BD$，若

$AB=5\sqrt{3},AD=5\sqrt{2},CD=12$，则$BC=$（　　）




A.$\sqrt{219}$　　B.$4\sqrt{61}$　　C.5　　D.13

【答案】D。

记$AC$与$BD$交点为$O$，$BC^2=BO^2+CO^2,CD^2=CO^2+DO^2$，

$AD^2=AO^2+DO^2, AB^2=AO^2+BO^2$，$\therefore BC^2+AD^2=AB^2+CD^2$，$\therefore BC=13$，选 D。

4．定义$n!=1\times2\times\cdots\times(n-1)\times n$，则$\dfrac{2014^2\times2015-2016}{2015!}+\dfrac{2016^2\times2017-2018}{2017!}=$ （　　）

A. $\dfrac{1}{2011!}+\dfrac{1}{2012!}-\dfrac{1}{2016!}-\dfrac{1}{2017!}$　　B. $\dfrac{1}{2012!}+\dfrac{1}{2013!}-\dfrac{1}{2016!}-\dfrac{1}{2017!}$

C. $\dfrac{1}{2013!}+\dfrac{1}{2014!}-\dfrac{1}{2016!}-\dfrac{1}{2017!}$　　D. $\dfrac{1}{2014!}+\dfrac{1}{2015!}-\dfrac{1}{2016!}-\dfrac{1}{2017!}$

【答案】B。

$$\frac{2014^2\times2015-2016}{2015!}+\frac{2016^2\times2017-2018}{2017!}=\frac{2014^2\times2015}{2015!}-\frac{2016}{2015!}+\frac{2016^2\times2017}{2017!}-\frac{2018}{2017!}$$

$$=\frac{2014}{2013!}-\frac{2016}{2015!}+\frac{2016}{2015!}-\frac{2018}{2017!}=\frac{2004}{2013!}-\frac{2018}{2017!}=\frac{2013+1}{2013!}-\frac{2017+1}{2017!}$$

$$=\frac{1}{2012!}+\frac{1}{2013!}-\frac{1}{2016!}-\frac{1}{2017!}\text{。}$$

5.已知$x+y+z=1$，$\dfrac{1}{x+y}+\dfrac{1}{y+z}+\dfrac{1}{z+x}=0$，则$x^2+y^2+z^2$的值为 （　　）

A.$\dfrac{1}{3}$　　B.1　　C.$\dfrac{3}{2}$　　D.3

【答案】D。

$$\frac{1}{x+y}+\frac{1}{y+z}+\frac{1}{z+x}=\frac{(y+z)(z+x)+(x+y)(z+x)+(x+y)(y+z)}{(x+y)(y+z)(z+x)}$$

$$=\frac{3(xy+yz+zx)+x^2+y^2+z^2}{(x+y)(y+x)(z+x)}=\frac{(xy+yz+zx)+(x+y+z)^2}{(x+y)(y+z)(z+x)}=0,$$

$\therefore xy+yz+zx=-(x+y+z)^2=-1$，

$\therefore x^2+y^2+z^2=(x+y+z)^2-2(xy+yz+zx)=1+2=3$。故选 D。

6．在边长为 1 的正方形$ABCD$中，$P$、$Q$分别为$AD,DC$上的两点。若$\Delta QPB$的面积为$\dfrac{1}{4}$，则$AP+CQ$的最小值为 （　　）

A. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　B. 1　　C. $\sqrt{2}$　　D. $\dfrac{3}{2}$

【答案】C。

$\because S_{\Delta BPa}=\dfrac{1}{4}$，设$AP=a,CQ=b$ ，

$\therefore S_{\Delta DPQ}+S_{\Delta ABP}+S_{\Delta BCQ}=\frac{1}{2}\left[(1-a)(1-b)+a+b\right]=\frac{1}{2}(1+ab)=\frac{3}{4}$，

$\therefore ab=\frac{1}{2}$。 $\because(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2\geq0,\therefore a+b\geq2\sqrt{ab}=\sqrt{2}$。故选 C。

## 二、填空题（本题满分 28 分，每小题 7 分）

7．已知 $a,b$ 为实数，且 $\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1+x}+\frac{2}{1+x^2}+\frac{4}{1+x^4}+\frac{8}{1+x^8}$ 可化简为 $\frac{b}{1-x^a}$，则 $a+b=$_________。

【答案】32.

$\because\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1+x}+\frac{2}{1+x^2}+\frac{4}{1+x^4}+\frac{8}{1+x^8}=\frac{16}{1-x^{16}}$。

$\therefore a=16,b=16,a+b=32$。

8．若实数 $a,b$ 满足 $2a^2+|b|=1$，则 $a^2-2|b|$ 的取值范围为_________。

【答案】$-2\leq a^2-2|b|\leq\frac{1}{2}$。

令 $a^2-2|b|=t$，联立 $2a^2+|b|=1\Rightarrow0\leq a^2=\frac{2+t}{5},0\leq|b|=\frac{1-2t}{5}$。$\therefore-2\leq t=a^2-2|b|\leq\frac{1}{2}$。

9．将 1 米×1 米的地砖 $m$ 块，铺成 2 米宽的道路（仅允许最后 1 米可以少于 2 块地砖）比铺成 4 米宽的道路（仅允许最后 1 米可以少于 4 块地砖）长 5 米，则 $m$ 的最大值为_________。

【答案】 22.

1° $m=4k$ 时，$k$ 为整数。$\frac{4k}{2}-\frac{4k}{4}=k=5$，$\therefore m=20$；

2° $m=4k+1$，$(2k+1)-(k+1)=k=5$，$\therefore m=21$；

3° $m=4k+2$，$(2k+1)-(k+1)=k=5$，$\therefore m=22$；

4° $m=4k+3$，$(2k+2)-(k+1)=k+1=5$，$\therefore k=4$，$\therefore m=19$。

$\therefore m$ 的最大值为 22。

10．若 $n$ 为整数，且 $\sqrt{n^2+9n+30}$ 是自然数，则 $n=$_________。

【答案】$-14$ 或 $-7$ 或 $-2$ 或 $5$。

设 $\sqrt{n^2+9n+30}=p$（$p$ 为非负整数），

则 $n^2+9n+30=p^2 \Rightarrow 4n^2+36n+120=4p^2 \Rightarrow (2n+9)^2+39=4p^2$

$\Rightarrow 39=(2p+2n+9)(2p-2n-9)$，

$\begin{cases}2p+2n+9=1\\2p-2n-9=39\end{cases}$ 或 $\begin{cases}2p+2n+9=39\\2p-2n=9=1\end{cases}$ 或 $\begin{cases}2p+2n+9=3\\2p-2n-9=13\end{cases}$ 或 $\begin{cases}2p+2n+9=13\\2p-2n-9=3\end{cases}$

$\Downarrow$ $\qquad\Downarrow$ $\qquad\Downarrow$ $\qquad\Downarrow$

$\begin{cases}p=10\\n=-14\end{cases}$ $\qquad\begin{cases}p=10\\n=5\end{cases}$ $\qquad\begin{cases}p=4\\n=-7\end{cases}$ $\qquad\begin{cases}p=4\\n=-2\end{cases}$

$\therefore n=-14$ 或 $-7$ 或 $-2$ 或 5。

## 第二试（C）

**一、（本题满分 20 分）**

三只蚂蚁同时从点 $A$ 出发，沿三角形道路 $A\to B\to C\to A$ 爬行，已知第一只蚂蚁在 $AB,BC,CA$ 上爬行速度分别为 12 厘米/秒，10 厘米/秒，15 厘米/秒；第二只蚂蚁在此三段道路上的速度分别为 15 厘米/秒，15 厘米/秒，10 厘米/秒；第三只蚂蚁在此三段上的速度分别为 10 厘米/秒，20 厘米/秒，12 厘米/秒。若三只蚂蚁同时回到 $A$ 点，求 $\angle ABC$ 的值。

解：记 $AB=c,BC=a,CA=b$，

则 $\dfrac{c}{12}+\dfrac{a}{10}+\dfrac{b}{15}=\dfrac{c}{15}+\dfrac{a}{15}+\dfrac{b}{10}=\dfrac{c}{10}+\dfrac{a}{20}+\dfrac{b}{12}$，……………………………………………（5）

得 $5c+6a+4b=4c+4a+6b=6c+3a+5b$ ……………………………………………（10）

$\Rightarrow\begin{cases}c+2a=2b\\-c+3a=b\end{cases}\Rightarrow a:b:c=3:5:4$，……………………………………………（15）

$\therefore$ $\angle ABC=90^\circ$。……………………………………………（20）

**二、（本题满分 25 分）**

如图，在 $\Delta ABC$ 中，$\angle ABC=59^\circ,\angle ACB=30.5^\circ$，延长 $\angle ABC$ 的内角平分线 $BD$ 至 $E$，使得 $DE=DA$，求 $\angle E$ 的值。

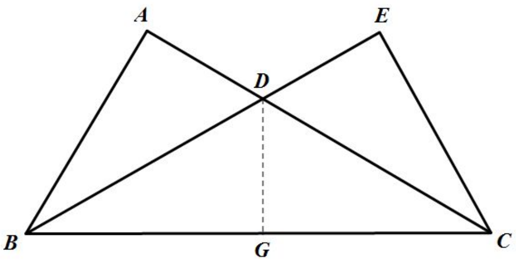
证明：在 $BC$ 上取一点 $G$，使得 $AB=BG$。……………………………………（5）

$\because BE$ 平分 $\angle ABC$， $\therefore \angle ABE = \angle EBC = \frac{1}{2}\angle ABC = 29.5^{\circ}$。

又 $BD = BD,$

故 $\Delta ABD \cong \Delta GBD$。……………………………………（10）

$\angle BAC = 180^{\circ} - \angle ABC - \angle ACB = 180^{\circ} - 59^{\circ} - 30.5^{\circ} = 90.5^{\circ}$，




$\therefore \angle BGD = \angle BAC = 90.5^{\circ}$，

$\angle BDA = \angle BDG = 180^{\circ} - 29.5^{\circ} - 90.5^{\circ} = 60^{\circ}$，

$\therefore \angle GDC = 180^{\circ} - 60^{\circ} - 60^{\circ} = 60^{\circ} = \angle EDC$，

………………………………………………（15）

又 $DG = AD = DE, DC = DC,$

所以 $\Delta DGC \cong \Delta DEC$。………………（20）

$\therefore \angle DCE = \angle DCG = 30.5^{\circ}$

$\therefore \angle CED = 180^{\circ} - 60^{\circ} - 30.5^{\circ} = 89.5^{\circ}$。………………（25）

三、**（本题满分 25 分）**

求满足 $\begin{cases} 2015 \le x < 2025 \\ 2015 \le x + y + z < 2025 \\ 2015 \le x + 2y + 4z < 2025 \end{cases}$ 的不同的有序整数组 $(x, y, z)$ 的个数。

解：$1^{\circ}$ $x = 2015$，$0 \le y + z \le 9$，$0 \le 2y + 4z \le 9$，

$2y + 4z$ 取 $0, 2, 4, 6, 8$；$y + z$ 取 0, 1, 2，・・・，9；共 50 组。…………（10）

$2^{\circ}$ $x = 2016$，$-1 \le y + z \le 8$，$-1 \le 2y + 4z \le 8$

$2y + 4z$ 取 $0, 2, 4, 6, 8$；$y + z$ 取 $-1$，0，・・・，8；共 50 组。…………（15）

同理，$x = 2017, 2018, \cdots, 2024$，每种情况，$y, z$ 恒有 50 种，……………（20）

故共有 500 种。………………………………………………………………（25）