初一数学联赛班第十二讲

方程的构造

例 1

（1）设$a^2+1=3a$，$b^2+1=3b$，且$a\neq b$，求$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}$的值.

（2）如果实数a,b分别满足$a^2+2a=2$，$b^2+2b=2$，求$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$的值.

【解析】

（1）由题设条件可知$a^2-3a+1=0$，$b^2-3b+1=0$，且$a\neq b$，

所以a，b是一元二次方程$x^2-3x+1=0$的两根，故$a+b=3$，

$ab=1$,

因此$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}=\frac{a^2+b^2}{a^2b^2}$

$=\frac{(a+b)^2-2ab}{(ab)^2}=\frac{3^2-2\times1}{1^2}=7$.

(2) 由题意知：a,b为方程

$x^2+2x-2=0$的两个根，且

$a\neq0,b\neq0$,

解方程$x^2+2x-2=0$得：

$x_1=-1+\sqrt{3}$，$x_2=-1-\sqrt{3}$

①当$a\neq b$时，有$a+b=-2$,

$ab=-2$，$\therefore\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{a+b}{ab}=\frac{-2}{-2}=1$;

②当$a=b$时，方程的根为

$x_1=-1+\sqrt{3}$，$x_2=-1-\sqrt{3}$.

当$a=b=-1+\sqrt{3}$时，

$$\therefore \frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{2}{a}=\frac{2}{\sqrt{3}-1}=\sqrt{3}+1;$$

当$a=b=-1-\sqrt{3}$时，

$$\therefore \frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{2}{a}=\frac{2}{-\sqrt{3}-1}=1-\sqrt{3}.$$

例 2

(1) 已知$2m^2-5m-1=0$，

$\frac{1}{n^2}+\frac{5}{n}-2=0$，且$m\neq n$，求$\frac{1}{m}+\frac{1}{n}$

的值.

(2) 设实数s,t分别满足

$19s^2+99s+1=0$，$t^2+99t+19=0$

并且$st\neq 1$，求$\frac{st+4s+1}{t}$的值.

【解析】

(1) 由$2m^2-5m-1=0$可知，$m\neq 0$，

故$2-\frac{5}{m}-\frac{1}{m^2}=0$，

即$\frac{1}{m^2}+\frac{5}{m}-2=0$

又$\frac{1}{n^2}+\frac{5}{n}-2=0$，$m\neq n$，故$\frac{1}{m}$、$\frac{1}{n}$是方程$x^2+5x-2=0$的两根

由根系关系可知，$\frac{1}{m}+\frac{1}{n}=-5$.

(2) 由$t^2+99t+19=0$可知，$t\neq 0$，

故$19\left(\frac{1}{t}\right)^2+99\cdot\frac{1}{t}+1=0$.

又$19s^2+99s+1=0$，

$st \neq 1 \Rightarrow s \neq \frac{1}{t}$，故$s$、$\frac{1}{t}$是方程$19x^2+99x+1=0$的两根，从而可知$s+\frac{1}{t}=-\frac{99}{19}$，$\frac{s}{t}=\frac{1}{19}$，故

$$\frac{st+4s+1}{t}=s+\frac{1}{t}+4\cdot\frac{s}{t}$$

$$=-\frac{99}{19}+4\times\frac{1}{19}=\frac{-95}{19}=-5.$$

例 3

(1) 求自然数n，使$2^8+2^{11}+2^n$是完全平方数.

(2) 已知$\sqrt{3}y-3z=x$，

求证：$y^2 \geqslant 4xz$.

【解析】

(1) 令$2^4=x$，则原式可以化为
$x^2+2^7x+2^n$.
欲使它为完全平方，只需
$\Delta=\left(2^7\right)^2-4\cdot 2^n=0$，即$2^{n+2}=2^{14}$，
解得$n=12$.
即自然数12能够使原式成为完全平方数.
(2) 已知式可以看成
$\left(\sqrt{3}\right)^2z-\sqrt{3}y+x=0$，则关于$t$的
方程$zt^2-yt+x=0$有实根$\sqrt{3}$.
于是$\Delta=y^2-4zx\geqslant 0$，即
$y^2\geqslant 4xz$.

例 4

比较$\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}+1\right)^{2}$与$4\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)$的大小.

【解析】

$\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}+1\right)^{2}-4\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)$是方程

$x^{2}-\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}+1\right)x+\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)=0$

的判别式.

通过观察可知道方程有两个不同的实数根1和$\sqrt{5}-\sqrt{3}$.

$\Delta=\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}+1\right)^{2}-4\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)>0$

，即$\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}+1\right)^{2}>4\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)$

例 5

已知a、b、c、m、n、p均为实数，

求证：

$\left(a^2+b^2+c^2\right)\left(m^2+n^2+p^2\right)\geqslant\left(am+bn+cp\right)^2$

.

【解析】

若$a=b=c=0$，则不等式显然成立，

若a、b、c不全为0，

构造方程

$\left(a^2+b^2+c^2\right)t^2-2\left(am+bn+cp\right)t+\left(m^2+n^2+p^2\right)=0$

，显然$a^2+b^2+c^3\neq0$，

对方程变形得

$\left(at-m\right)^2+\left(bt-n\right)^2+\left(ct-p\right)^2=0$

，

此方程有两个相等实根或无实根，

∴

$$\Delta=(am+bn+cp)^2-(a^2+b^2+c^2)(m^2+n^2+p^2)\leqslant 0$$

，

∴

$$(a^2+b^2+c^2)(m^2+n^2+p^2)\geqslant(am+bn+cp)^2.$$

例 6

已知x，y是正整数，并且

$xy+x+y=23$，$x^2y+xy^2=120$，

求x^2+y^2的值.

【解析】

令$x+y=s$，$xy=t$.

则$s+t=23$，$st=120$.

故可得s，t为方程

$x^2-23x+120=0$的两根，

故可得：$s=8$，$t=15$或$s=15$，

$t=8$（舍去）.

则：

$$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=s^2-2t=34$$

.

例 7

（1）已知：a，b，c三数满足方程

组$\begin{cases} a+b=8 \\ ab-c^2+8\sqrt{2}c=48 \end{cases}$，试求方

程$bx^2+cx-a=0$的根．

(2) 已知△ABC的三边a,b,c满足：$b+c=8$，$bc=a^2-12a+52$，试确定△ABC的形状．

【解析】

(1) 由方程组得：a，b是方程$x^2-8x+c^2-8\sqrt{2}c+48=0$的两根，

$\Delta=-4\left(c-4\sqrt{2}\right)^2\geqslant 0$，$c=4\sqrt{2}$，

$a=b=4$，

所以原方程为$x^2+\sqrt{2}x-1=0$，

$x_1=\dfrac{-\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}$，$x_2=\dfrac{-\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2}$．

(2) ∵$b+c=8$，$bc=a^2-12a+52$，

∴b，c是关于x的方程

$x^2-8x+(a^2-12a+52)=0$的两个实数根.

$\because \Delta=(-8)^2-4(a^2-12a+52)\geqslant 0$,

整理得：$(a-6)^2\leqslant 0$.

又$(a-6)^2\geqslant 0$，$\therefore a=6$.

此时$\Delta=0$,方程的两根相等,即：

$b=c=4$.

$\therefore \triangle ABC$是等腰三角形.

例 8

设实数a、b、c满足$a+b+c=0$，$abc=2$．求$u=|a|^3+|b|^3+|c|^3$的最小值.

【解析】

由题设知，a、b、c必为一正两

负．不妨设$a>0$、$b<0$、$c<0$．

$\because b+c=-a$，$bc=\dfrac{2}{a}$，$\therefore b$、c为

方程$x^2+ax+\dfrac{2}{a}=0$的两个负根．

于是，有$\Delta=a^2-\dfrac{8}{a}\geqslant 0$．

解得$a^3\geqslant 8$，$a\geqslant 2$．

故$u=a^3-b^3-c^3$

$=a^3-(b+c)\left[(b+c)^2-3bc\right]$

$=a^3+a\left(a^2-\dfrac{6}{a}\right)=2a^3-6\geqslant 2\times 8-6=10$．

当且仅当$a^3=8$，即$a=2$时，上式等号成立．

此时，$b=c=-1$．因此u的最小

值为10.

例 9

已知t是一元二次方程$x^2+x-1=0$的一个根，若正整数a，b，m使得等式$(at+m)(bt+m)=31m$成立，求ab的值.

【解析】

因为t是一元二次方程$x^2+x-1=0$的一个根，显然t是无理数，且$t^2=1-t$.

等式$(at+m)(bt+m)=31m$即$abt^2+m(a+b)t+m^2=31m$，即$ab(1-t)+m(a+b)t+m^2=31m$，

即

$$[m(a+b)-ab]t+(ab+m^2-31m)=0$$

.

因为a，b，m是正整数，t是无理数，所以$\begin{cases} m(a+b)-ab=0, \\ ab+m^2-31m=0, \end{cases}$

于是可得$\begin{cases} a+b=31-m, \\ ab=31m-m^2 \end{cases}$

因此，a，b是关于x的一元二次方程$x^2+(m-31)x+31m-m^2=0$①的两个整数根，方程①的判别式$\Delta=(m-31)^2-4(31m-m^2)$

$=(31-m)(31-5m)\geqslant 0$.

又因为a，b是正整数，

所以$a+b=31-m>0$，从而可得$0<m\leqslant\frac{31}{5}$.

又因为判别式Δ是一个完全平方数，验证可知，只有$m=6$符合要求.

把$m=6$代入可得

$ab=31m-m^2=150$.

拓 1

当$x=\frac{1}{2}\left(5^{\frac{1}{n}}-5^{-\frac{1}{n}}\right)$时，求

$\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)^n$的值（$n$是自然数）.

【解析】

由已知得$\left(5^{\frac{1}{n}}\right)^2-2x\cdot 5^{\frac{1}{n}}-1=0$，

故$5^{\frac{1}{n}}$是方程$t^2-2xt-1=0$的根，

$\therefore 5^{\frac{1}{n}}=x+\sqrt{1+x^2}$（舍负），

$\therefore \left(x+\sqrt{1+x^2}\right)^n=5$.

拓 2

证明柯西不等式：

$$\left(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2\right)\left(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2\right)\geqslant\left(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n\right)^2$$

，（其中n为正整数）.

【解析】

若$\sum_{i=1}^{n} a_i^2 = 0$，显然成立；

若$\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \neq 0$，构造方程

$t^2\sum_{i=1}^{n} a_i^2 - 2t\sum_{i=1}^{n} a_1 b_1 + \sum_{i=1}^{n} b_i^2 = 0$，

对方程变形得$\sum_{i=1}^{n}\left(a_i t - b_i\right)^2 = 0$，

此方程有两个相等实根或无实根，

∴

$\Delta = 4\left(a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n\right)^2 - 4\left(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2\right)\left(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2\right) \leqslant 0$

，

∴

$\left(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2\right)\left(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2\right) \geqslant \left(a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n\right)^2$

.

拓 3

已知$a=\frac{1}{2}\sqrt{\sqrt{2}+\frac{1}{8}}-\frac{\sqrt{2}}{8}$，求$a^2+\sqrt{a^4+a+1}$的值.

【解析】

$\because a=\frac{1}{2}\sqrt{\sqrt{2}+\frac{1}{8}}-\frac{\sqrt{2}}{8}$

$=\frac{-\sqrt{2}+\sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2-4\times4\times\left(-\sqrt{2}\right)}}{2\times4}$，

$\therefore a$是一元二次方程

$4t^2+\sqrt{2}t-\sqrt{2}=0$的一个实数根，

$\therefore 4a^2+\sqrt{2}a-\sqrt{2}=0$，

$\therefore a^2=\dfrac{\sqrt{2}}{4}(1-a)$，

$\therefore a^4=\dfrac{1}{8}(1-a)^2$，

$\therefore a^4+a+1=\dfrac{1}{8}(a+3)^2$，

由已知可得$a>0$，

$\therefore$原式$=\dfrac{\sqrt{2}}{4}(1-a)+\dfrac{a+3}{2\sqrt{2}}=\sqrt{2}$．

拓 4

已知$a>b>c$，$a+b+c=1$，

$a^2+b^2+c^2=3$．求证：

$-\dfrac{2}{3}<b+c<\dfrac{1}{2}$．

【解析】

由已知得：$b+c=1-a$，

$(b+c)^2-2bc=3-a^2$．从而

$bc=a^2-a-1$.

因此，以b、c为根的方程为

$x^2+(a-1)x+a^2-a-1=0$.

又$b>c$，则有

$\Delta=(a-1)^2-4(a^2-a-1)>0$，

整理得$3a^2-2a-5<0$.

解得$-1<a<\frac{5}{3}$．故$b+c>-\frac{2}{3}$.

同理，$-1<b<\frac{5}{3}$，$-1<c<\frac{5}{3}$.

下证$a>\frac{1}{2}$，用反证法.

若$a\leqslant\frac{1}{2}$，由$a>b>c$，

有$-1<b<\frac{1}{2}$，$-1<c<\frac{1}{2}$.

所以$a^2<1$，$b^2<1$，$c^2<1$，

因此$a^2+b^2+c^2<3$，矛盾.

综上，$-\frac{2}{3}<b+c<\frac{1}{2}$.

拓 5

已知：x、y为正数，且$x+y=1$，

求证：$\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right)\geqslant 9$.

【解析】

设$\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right)=a$，显然$a>1$，

$\because x+y=1$，$\therefore xy=\frac{2}{a-1}$，

$\therefore x$，y是关于t的一元二次方程

$t^2-t+\frac{2}{1-a}=0$的两根，

$\therefore \Delta=1-\frac{8}{a-1}\geqslant 0$，解得$a\geqslant 9$，

$\therefore \left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right)\geqslant 9$.

拓 6

解方程：

$\frac{13x-x^2}{x+1}\left(x+\frac{13-x}{x+1}\right)=42$.

【解析】

设$y=\frac{13-x}{x+1}$，原方程变为

$xy(x+y)=42$，

又

$$xy+(x+y)=\frac{13x-x^2}{x+1}+x+\frac{13-x}{x+1}=13$$

，

故xy、$x+y$是方程

$t^2-13t+42=0$的两根，

进而解得$x_1=1$，$x_2=6$，

$x_3=3+\sqrt{2}$，$x_4=3-\sqrt{2}$．