初一数学联赛班第十三讲

整除与同余

例 1

设n为正奇数，求证：

$60 \mid 6^n - 3^n - 2^n - 1$.

【解析】

$\because 3 \mid 6^n - 3^n$， $3 \mid 2^n + 1$，

$\therefore 3 \mid 6^n - 3^n - 2^n - 1$；

$\because 4 \mid 6^n - 2^n$， $4 \mid 3^n + 1$，

$\therefore 4 \mid 6^n - 3^n - 2^n - 1$；

$\because 5 \mid 6^n - 1$， $5 \mid 3^n + 2^n$，

$\therefore 5 \mid 6^n - 3^n - 2^n - 1$；

又$\because 3$，4，5两两互质，

$\therefore 60 \mid 6^n - 3^n - 2^n - 1$.

例 2

你能找到三个整数 a，b，c，使得关系式

$$(a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)(b+c-a)=3388$$

成立吗？如果能找到，请举一例，如果找不到，请说明理由.

【解析】

找不到满足条件的三个整数．理由如下：

如果存在整数 a，b，c，使

$$(a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)(b+c-a)=3388$$

成立.

因为 3388 是偶数，则左边四个因子中至少有一个是偶数.

不妨设 $a+b+c$ 为偶数，则

$a-b+c=(a+b+c)-2b$ 为偶数．同理 $a+b-c=(a+b+c)-2c$ 为偶数． $b+c-a=(a+b+c)-2a$ 为偶数．因此

$(a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)(b+c-a)$

能被 16 整除，而 3388 不能被 16 整除，得出矛盾．故不存在三个整数 a， b， c 满足关系式

$$(a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)(b+c-a)=3388$$

．

例 3

已知n为奇数，设a_1，a_2，…，a_n是1，2，…，n这n个正整数的任何一种次序的排列，求证：

$(a_1-1)^2(a_2-2)^2\cdots(a_n-n)^2$是偶数.

【解析】

假设$(a_1-1)^2(a_2-2)^2\cdots(a_n-n)^2$是奇数，则有

a_1-1，a_2-2，…，a_n-n均为奇数，

又n为奇数，故

$(a_1-1)+(a_2-2)+\cdots+(a_n-n)$为奇数；

但是

$(a_1-1)+(a_2-2)+\cdots+(a_n-n)=0$为偶数，与假设矛盾，

故$(a_1-1)^2(a_2-2)^2\cdots(a_n-n)^2$是偶数.

例 4

若从1，2，…，n中任取五个两两互质的不同的整数a_1、a_2、a_3、a_4、a_5，且其中总有一个整数是质数，求n的最大值.

【解析】

若$n\geqslant 49$，取整数1，2^2，3^2，5^2，7^2，这五个整数是五个两两互素的不同的整数，但没有一个整数是素数，∴$n\leqslant 48$，在1，2，3，…，48中任取5个两两互素的不同的整数a_1，a_2，a_3，a_4，a_5，

若a_1，a_2，a_3，a_4，a_5都不是素

数，则a_1，a_2，a_3，a_4，a_5中至少有四个数是合数，不妨假设a_1，a_2，a_3，a_4为合数，

设a_1，a_2，a_3，a_4的最小的素因数分别为p_1，p_2，p_3，p_4，

由于a_1，a_2，a_3，a_4两两互素，

$\therefore p_1$，p_2，p_3，p_4两两不同

设p是p_1，p_2，p_3，p_4中的最大数，则$p \geqslant 7$，

因为a_1，a_2，a_3，a_4为合数，所以a_1，a_2，a_3，a_4中一定存在一个

$a_j \geqslant p^2 \geqslant 7^2 = 49$，$n \leqslant 48$，于是$a_1$，$a_2$，$a_3$，$a_4$，$a_5$中一定有一

个是素数

综上所述，正整数n的最大值为48.

例 5

41 名运动员所穿的运动衣的号码是 1，2，3，…，41，这 41 个自然数，问

(1) 能否使这 41 名运动员站成一排，使得任意两个相邻运动员的号码之和都是质数？

(2) 能否使这 41 名运动员站成一圈，使得任意两个相邻运动员的号码之和都是质数？

【解析】

(1) 可以，构造排列如下：

1，40，3，38，5，36，7，34，…，39，2，41

相邻两个运动员的号码之和为41或43，均为质数.

(2) 不能，理由如下：

显然两个相邻运动员的号码之和不为2，

若两个相邻运动员的号码之和都是质数，

则两个相邻运动员的号码之和都是奇数，

∴两个相邻运动员的号码必为一奇一偶，

$1\sim41$中有21个奇数，20个偶数，
故站成一圈时必有两个号码为
奇数的运动员相邻，
此时这两个运动员的号码之和
为偶数，且大于2，必为和数，
$\therefore$不能.

例 6

设n为正整数，$n^2+5n+13$有没有可能成为完全平方数？若不可能，请说明理由；若可能，求出所有使它成为完全平方数的n的值.

【解析】

$\because (n+2)^2<n^2+5n+13<(n+4)^2$，

$\therefore n^2+5n+13$若为完全平方数只可能是$(n+3)^2$，

$\therefore n^2+5n+13=(n+3)^2$，解得$n=4$，

$\therefore$满足条件的n值为 4.

例 7

求证：2^n+1不能被7整除（n为正整数）.

【解析】

若$n\equiv 0 \pmod 3$，则可设$n=3k$（k为非负整数），

$\therefore 2^n\equiv 8^k\equiv 1 \pmod 7$，

$2^n+1\equiv 2\pmod 7$;

若$n\equiv 1\pmod 3$，则可设$n=3k+1$（k为非负整数），

$\therefore 2^n\equiv 2\cdot 8^k\equiv 2\pmod 7$，

$2^n+1\equiv 3\pmod 7$；

若$n\equiv 2\pmod 3$，则可设

$n=3k+2$（k为非负整数），

$\therefore 2^n\equiv 4\cdot 8^k\equiv 4\pmod 7$，

$2^n+1\equiv 5\pmod 7$；

$\therefore 2^n+1$不能被7整除.

例 8

求证：任意54个互不相等的整数中，必可选出4个数a，b，c，d，使得$(a-b)(c-d)$是2014的倍数.

【解析】

$2014=2\times19\times53$，

在54个互不相等的整数中，必有两个模53同余，设为a，b，则$53\mid(a-b)$，

在剩余的52个整数数中，必有两个模38同余，设为c，d，则$38\mid(c-d)$，

$\therefore 2014\mid(a-b)(c-d)$.

例 9

已知n是一个偶数，$\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$与$\{b_1, b_2, \cdots, b_n\}$都是$n$的完全剩余系，求证：

$\{a_1+b_1, a_2+b_2, \cdots, a_n+b_n\}$不是$n$的完全剩余系.

【解析】

假设$\{a_1+b_1, a_2+b_2, \cdots, a_n+b_n\}$是$n$的完全剩余系,

$\because n$为偶数, $\therefore$设$n=2k$,

$\because \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$是$n$的完全剩余系,

$\therefore$

$$\sum_i^n a_i \equiv (1+2+\cdots+n) \equiv \frac{n(n+1)}{2} \equiv 2k^2+k \pmod n$$

,

同理: $\sum_i^n b_i \equiv 2k^2+k \pmod n$,

$$\sum_{i}^{n}(a_i+b_i)\equiv 2k^2+k\pmod n,$$

又∵

$$\sum_{i}^{n}(a_i+b_i)\equiv\sum_{i}^{n}a_i+\sum_{i}^{n}b_i\equiv 4k^2+2k\equiv n^2+n\equiv 0\pmod n$$

，

∴$2k^2+k\equiv 0\pmod n$，即

$n\mid(2k^2+k)$，

∴$2k\mid(2k^2+k)$，

∵$2k\mid 2k^2$，

∴$2k\mid k$，矛盾，

∴$\{a_1+b_1$，a_2+b_2，$\cdots$，$a_n+b_n\}$

不是n的完全剩余系.

拓 1

请你找出 6 个互异的自然数，使得它们同时满足：

⑴ 6个数中任两个都互质；

⑵ 6个数任取 2 个，3 个，4 个，5 个，6 个数之和都是合数．

并简述你选择的数合于条件的理由．

【解析】

选择 6 个互异自然数为

$a_i = i\times1\times2\times3\times4\times5\times6+1\left(i=1，2，\cdots，6\right)$

．

只须证明任两个都互质，证a_i，a_j

$\left(1\leqslant i< j\leqslant6\right)$互质，

设$\left(a_i, a_j\right)=d\neq 1$, 即$d\left|a_i\right., d\left|a_j\right.$.

则

$d\left|\left(a_j-a_i\right)\right.=(j-i)\times 1\times 2\times 3\times 4\times 5\times 6$

，其中$j-i$为$1\sim 5$的数.

即有一个自然数$n(1\leqslant n\leqslant 5)$是$d$的一个因子，则$n\mid a_i$.

但$a_i=i\times 1\times 2\times 3\times 4\times 5\times 6+1$与$n\left|a_i\right.$矛盾，故$\left(a_i, a_j\right)=1$.

由$a_i(i=1, 2, \cdots, 6)$的构成结构可知，其中任两个的和被 2 整除．任三个的和被 3 整除，任四个的和被 4 整除，任五个的和被 5 整除，任六个的和被 6 整除，

即六个数中任取 2 个、3 个、4 个、5 个、6 个数之和都是合数.

拓 2

n个正整数a_1，a_2，…，a_n满足如下条件：

$1=a_1<a_2<\cdots<a_n=2009$；且$a_1$，$a_2$，…，$a_n$中任意$n-1$个不同的数的算术平均数都是正整数．求$n$的最大值.

【解析】

设a_1，a_2，…，a_n中去掉a_i后剩下的$n-1$个数的算术平均数为正整数b_i，

$i=1，2，\cdots，n$．即

$$b_i=\frac{(a_1+a_2+\cdots+a_n)-a_i}{n-1}.$$

于是，对于任意的$1\leqslant i<j\leqslant n$，

都有$b_i-b_j=\dfrac{a_j-a_i}{n-1}$，

从而$n-1\mid(a_j-a_i)$.

由于$b_1-b_n=\dfrac{a_n-a_1}{n-1}=\dfrac{2008}{n-1}$是正整数，

故$n-1\mid 2^3\times 251$.

由于

$$a_n-1=\left(a_n-a_{n-1}\right)+\left(a_{n-1}-a_{n-2}\right)+\cdots+\left(a_2-a_1\right)$$

$$\geqslant\left(n-1\right)+\left(n-1\right)+\cdots+\left(n-1\right)=(n-1)^2$$

，

所以，$(n-1)^2 \leqslant 2008$，于是$n \leqslant 45$.

结合$n-1 \mid 2^3 \times 251$，所以，$n \leqslant 9$.

另一方面，令

$a_1 = 8\times 0+1$，$a_2 = 8\times 1+1$，$a_3 = 8\times 2+1$，…，$a_8 = 8\times 7+1$,

$a_9 = 8\times 251+1$，则这 9 个数满足题设要求.

综上所述，n的最大值为 9.

拓 3

已知正整数 n 可以表示为 2011 个数字和相同的自然数之和，同时也能表示为 2012 个数字和相同的自然数之和，试确定 n 的最

小值.

【解析】

设 2011 个数字和相同的自然数为a_1，a_2，…，a_{2011}，2012 个数字和相同的自然数为

b_1，b_2，…，b_{2012}，

故

$a_1+a_2+\ldots+a_{2011}=b_1+b_2+\ldots+b_{2012}$

，

∵a_1，a_2，…，a_{2011}中每个数的数字和都相同，∴

$a_1\equiv a_2\equiv\cdots\equiv a_{2011}\left(\mathrm{mod}\,9\right)$，

同理，$b_1\equiv b_2\equiv\ldots\equiv b_{2012}\left(\mathrm{mod}\,9\right)$，

设$a_1\equiv a_2\equiv\cdots\equiv a_{2011}\equiv p\left(\mathrm{mod}\,9\right)$，

$b_1\equiv b_2\equiv\ldots\equiv b_{2012}\equiv q\left(\mathrm{mod}\,9\right)$，其

中$0\leqslant p$，$q\leqslant 8$，

$\therefore 9|(n-2011p)$，$9|(n-2012q)$，

$\therefore\ 9|\left[(n-2011p)-(n-2012q)\right]$，

即$9|(2012q-2011p)$，

$\therefore 9|\left[2012(p+q)-4023p\right]$，

$\because 9|4023$，2012和9互质，

$\therefore 9|(p+q)$，

若$p=q=0$，则$n\geqslant 2011\times 9$，

若$p+q=9$，则$p\geqslant 5$或$q\geqslant 5$，

又$\because n-2011p\geqslant 0$，

$n-2012q\geqslant 0$，

$\therefore n\geqslant 2011\times 5$或$n\geqslant 2012\times 5$，

当$n=2011\times 5$时，2011 个数字和相同的自然数为 2011 个 5，2012

个数字和相同的自然数为 2011 个 4 和 1 个 2011，故10055满足题意，即n的最小值为10055.

拓 4

1 与 0 交替，组成下面形式的一串数：101、10101、1010101、101010101，⋯请你回答，在这串数中有多少个是质数？并请证明你的论断.

【解析】

很明显，101 是个质数.

下面证明，

$N=\underbrace{101010\cdots01}_{k个1}(k\geqslant 3)$都是合数

（中间有$k-1$个 0）.

$$11N=11\times1\underbrace{0101\cdots01}_{k个1}=\underbrace{1111\cdots11}_{2k个1}=\underbrace{11\cdots11}_{k个1}\times\left(10^k+1\right)$$

① 当k为不小于 3 的奇数时，根据被 11 整除的判别法可知

11 不整除$\underbrace{11\cdots11}_{k个1}$，所以

$11|10^k+1$. 即$\dfrac{10^k+1}{11}=M_1>1$

所以，

$$N=\underbrace{11\cdots11}_{k个1}\times\left(\frac{10^k+1}{11}\right)=\underbrace{11\cdots11}_{k个1}\times M_1$$

，N是个合数.

② 当k为不小于 3 的偶数时，易

知$11\left|\underbrace{11\cdots11}_{k个1}\right.$，即$\dfrac{\overbrace{11\cdots11}^{k个1}}{11}=M_2>1$

所以

$$N=\frac{\overbrace{11\cdots11}^{k个1}}{11}\times\left(10^k+1\right)=M_2\left(10^k+1\right)$$

，N是个合数.

综合①、②可得，当$k\geqslant3$时，

$N=\underbrace{10101\cdots01}_{k个1}$必为合数.

所以，在 101，10101，1010101，101010101，…中，只有 101 一个数是质数.

拓 5

定义：把m的完全剩余系中所有与m不互质的数去掉，剩下的数称为m的一个既约剩余系.

记m的一个既约剩余系为$\{s_1, s_2, \ldots, s_k\}$，若$(a, m)=1$，求证：$\{as_1, as_2, \ldots, as_k\}$也是$m$的一个既约剩余系.

【解析】

由题意，对于$s_i(i=1, 2, \ldots, k)$有$(s_i, m)=1$，

又$\because (a, m)=1$，$\therefore (as_i, m)=1$；

对于s_i，s_j有$s_i \not\equiv s_j \pmod{m}$，

$\therefore (s_i-s_j) \not\equiv 0 \pmod{m}$，

$\because (a, m)=1$,

$\therefore a\left(s_i - s_j\right) \not\equiv 0 \pmod m$,

$\therefore as_i \not\equiv as_j \pmod m$,

$\therefore \left\{as_1, as_2, \ldots, as_k\right\}$是$m$的一个既约剩余系.