初一数学联赛班第九讲

特殊方程的解法

例 1

解关于x的方程：

$$a^2(x^2-x+1)-a(x^2-1)=(a^2-1)x.$$

【解析】

化为一般式：

$$\left(a^2-a\right)x^2-\left(2a^2-1\right)x+\left(a^2+a\right)=0$$

当$\begin{cases}a^2-a=0\\-2a^2+1\neq 0\end{cases}$时，方程为一元一次方程，解为$x=0$（当$a=0$时）或$x=2$（当$a=1$时）；

当$a^2-a\neq 0$时，方程为一元二次方程，$\left(ax-a-1\right)\left(ax-x-a\right)=0$，

$x_1=\frac{a+1}{a}$， $x_2=\frac{a}{a-1}$.

例 2

解方程：

（1） $x^4-6x^2+5=0$；

（2） $(x^2+3x)^2-2(x^2+3x)-8=0$；

（3）

$(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)=120$.

【解析】

（1）设$x^2=y$，那么$x^4=y^2$，原方程可化为$y^2-6y+5=0$ ①，解得$y_1=1$， $y_2=5$.

当$y=1$时，$x^2=1$，$x=\pm1$；当$y=5$时， $x^2=5$， $x=\pm\sqrt{5}$.

故原方程有四个根：$x_1=1$，

$x_2=-1$，$x_3=\sqrt{5}$，$x_4=-\sqrt{5}$.

(2) 令$x^2+3x=m$，

原方程化为$m^2-2m-8=0$，

即$(m-4)(m+2)=0$，代回可得

$\left(x^2+3x-4\right)\left(x^2+3x+2\right)=0$，再

因式分解

$(x+4)(x-1)(x+1)(x+2)=0$，解

得

$x_1=-2$，$x_2=-1$，$x_3=-4$，$x_4=1$.

(3)原方程变形为

$\left(x^2+5x+4\right)\left(x^2+5x+6\right)=120$.

令$y=\dfrac{\left(x^2+5x+4\right)+\left(x^2+5x+6\right)}{2}$

$=x^2+5x+5$，则$y^2=121$，

即$y=11$或-11.

于是$x_1=-6$，$x_2=1$.

例 3

解方程：

$x=(x^2+3x-2)^2+3(x^2+3x-2)-2$

.

【解析】

令$y=x^2+3x-2$，则

$x=y^2+3y-2$

原方程可化为下面的方程组：

$\begin{cases} y=x^2+3x-2 \\ x=y^2+3y-2 \end{cases}$，两式相减得：

$y-x=(x^2+3x-2)-(y^2+3y-2)$

$=(x-y)(x+y)+3(x-y)$

$=(x-y)(x+y+3)=0$，

所以$x-y=0$或$x+y+3=-1$

若$x-y=0$，则$x=y$，有

$x=x^2+3x-2$．解得：$x=-1\pm\sqrt{3}$；

若$x+y+3=-1$，则$y=-x-4$，

有$-x-4=x^2+3x-2$，即：

$x^2+4x+2=0$，

解得：$x=-2\pm\sqrt{2}$；

综上，原方程的解为$x_1=-1+\sqrt{3}$，

$x_2=-1-\sqrt{3}$，$x_3=-2+\sqrt{2}$，

$x_4=-2-\sqrt{2}$．

例 4

（1）解方程

$$(2x-1)^2-3|2x-1|+2=0.$$

（2）解方程 $x^2-|2x-1|-4=0$.

（3）已知关于x的方程

$x^2-2|x|+2=m$恰有三个实数根，求m的值.

【解析】

（1）原方程可写为

$|2x-1|^2-3|2x-1|+2=0$，得

$(|2x-1|-1)(|2x-1|-2)=0$.

由$|2x-1|=1$，得$x_1=0$，$x_2=1$.

由$|2x-1|=2$，得$x_3=\frac{3}{2}, x_4=-\frac{1}{2}$.

∴原方程的根为$x_1=0, x_2=1$，$x_3=\frac{3}{2}, x_4=-\frac{1}{2}$.（其实即为换元$|2x-1|=t$）

(2) 令$2x-1=0$，得$x=\frac{1}{2}$，以$\frac{1}{2}$为分界点把数轴划分为两个区间，分别求解.

① 当$x<\frac{1}{2}$时，则$2x-1<0$，原方程可化为$x^2+2x-5=0$.

所以$x=-1-\sqrt{6}$或$x=-1+\sqrt{6}$（舍去）；

② 当$x \geqslant \frac{1}{2}$时，则$2x-1 \geqslant 0$，

原方程可以化为$x^2-2x-3=0$，

所以$x=3$或$x=-1$（舍去）.

综上所述，原方程的解为

$x_1=-1-\sqrt{6}$， $x_2=3$.

(3) 由原方程可得$(|x|-1)^2=m-1$，

由于方程有解，则$|x|=1\pm\sqrt{m-1}$，

由$|x|=1+\sqrt{m-1}>0$得到的

$x=\pm(1+\sqrt{m-1}>0)$是两个不同

的根，方程三个实数根中余下的

一个来自于$|x|=1-\sqrt{m-1}$，因此

$|x|=1-\sqrt{m-1}=0$， $m=2$.

例 5

解方程：

（1）

$$\frac{5x}{x^2+x-6}+\frac{2x-5}{x^2-x-12}=\frac{7x-10}{x^2-6x+8}$$

（2） $\frac{16}{4-x^2}+\frac{x-2}{x+2}=\frac{x+2}{x-2}$

【解析】

（1）这个分式方程的各分母都是多项式，应先分解因式确定最简公分母，转化为整式方程.

原方程可变形为：

$$\frac{5x}{(x-2)(x+3)}+\frac{2x-5}{(x+3)(x-4)}$$

$$=\frac{7x-10}{(x-2)(x-4)}$$

方程两边都乘以

$(x-2)(x+3)(x-4)$，

得$5x(x-4)+(2x-5)(x-2)$

$=(7x-10)(x+3)$

整理，得$-40x=-40$

$\therefore x=1$

检验，当$x=1$时

$(x-2)(x+3)(x-4)\neq 0$

∴原方程的解是$x=1$.

(2) 原方程化为

$$\frac{16}{(2+x)(2-x)}+\frac{x-2}{x+2}=\frac{x+2}{x-2}$$

方程两边同时乘以$(x+2)(x-2)$，

约去分母，

得$-16+(x-2)^2=(x+2)^2$

整理得$x^2-4x-12=x^2+4x+4$

解这个整式方程，得$x=-2$

检验：把$x=-2$代入$(x+2)(x-2)$，

得$(-2+2)(-2-2)=0$

所以$x=-2$是原方程的增根，原分式方程无解.

例 6

解方程：

(1) $\dfrac{x+2}{x+1}-\dfrac{x+4}{x+3}=\dfrac{x+6}{x+5}-\dfrac{x+8}{x+7}$；

(2) $\dfrac{x^2+x-3}{x^2+x-2}+1=\dfrac{2x^2+4x+1}{x^2+2x+1}$

【解析】

(1) 方程两边分别通分得

$$\frac{(x+2)(x+3)-(x+1)(x+4)}{(x+1)(x+3)}$$

$$=\frac{(x+6)(x+7)-(x+5)(x+8)}{(x+5)(x+7)},$$

$$\therefore \frac{2}{(x+1)(x+3)}=\frac{2}{(x+5)(x+7)},$$

$\therefore (x+1)(x+3)=(x+5)(x+7)$,

$\therefore 8x=-32$, $\therefore x=-4$.

经检验，$x=-4$是原方程的解.

(2) 原方程变形为

$$1-\frac{1}{x^2+x-2}+1=2-\frac{1}{x^2+2x+1},$$

即$\frac{1}{x^2+x-2}=\frac{1}{x^2+2x+1}$，

$\therefore x^2+x-2=x^2+2x+1$，

解得$x=-3$. 经检验$x=-3$是原方程的解.

例 7

如果关于x的方程

$\frac{2k}{x-1}-\frac{x}{x^2-x}=\frac{kx+1}{x}$只有一个解，求$k$的值.

【解析】

$k=0$或$k=\frac{1}{2}$.

例 8

解方程：

(1) $\sqrt{x-5}-\sqrt{3-x}=0$；

(2) $3\left(\sqrt{x-2}+2\right)=2x$；

(3) $\sqrt{x+8}-\sqrt{5x+20}=2$.

【解析】

(1) 两边平方得$x-5=3-x$，解得$x=4$，经检验：$x=4$是原方程的增根，∴原方程无解.

(2) 整理得$3\sqrt{x-2}=2x-6$，两边平方得$9(x-2)=4(x-3)^2$，解得

$x_1=6$，$x_2=\dfrac{9}{4}$，

经检验：$x_2=\frac{9}{4}$是原方程的增根，

∴原方程的解为$x=6$；

(3) 移项得$\sqrt{x+8}=\sqrt{5x+20}+2$；

两边平方，得

$x+8=5x+20+4\sqrt{5x+20}+4$

整理，得$\sqrt{5x+20}=-x-4$；两边平方整理，得$x^2+3x-4=0$

解得$x_1=-4$，$x_2=1$；经检验，$x_2=1$是增根，舍去，$x_1=-4$是原方程的根.

当然，不移项直接平方亦可，不过过程相对繁琐.

例 9

解方程：

(1)

$$2x^2-15x-\sqrt{2x^2-15x+1998}=-18$$

；

(2) $\sqrt{x^2+12}+\sqrt{x^2-12}=6\sqrt{2}$

【解析】

(1) 设$\sqrt{2x^2-15x+1998}=y$，原方程可以化为：$y^2-y-1980=0$，

$(y+44)(y-45)=0$，

$\because y+44>0$，$\therefore y-45=0$，$y=45$，

于是$\sqrt{2x^2-15x+1998}=45$，

两边平方，得：

$2x^2-15x+1998=2025$，

解之：$x=-\dfrac{3}{2}$，$x=9$，经检验

$x=-\dfrac{3}{2}$和$x=9$都是原方程的根．

(2) 方程两边都乘以

$\sqrt{x^2+12}-\sqrt{x^2-12}$，得到

$2\sqrt{2}=\sqrt{x^2+12}-\sqrt{x^2-12}$，

结合原式得到

$\sqrt{x^2+12}=\dfrac{2\sqrt{2}+6\sqrt{2}}{2}=4\sqrt{2}$，

$\sqrt{x^2-12}=\dfrac{6\sqrt{2}-2\sqrt{2}}{2}=2\sqrt{2}$，

所以$x^2+12=32$，$x=\pm 2\sqrt{5}$．

拓 1

（1）解关于x的方程：

$x^2-3mx+2m^2-mn-n^2=0$.

（2）解关于x的方程：

$(k^2-6k+8)x^2+(2k^2-6k-4)x+k^2=4$

.

【解析】

（1）

$x^2-3mx+\left(2m+n\right)\left(m-n\right)=0$，

$\left(x-2m-n\right)\left(x-m+n\right)=0$，

$x_1=2m+n$，$x_2=m-n$.

（2）① 当$k^2-6k+8=0$时，方程二次项系数为0，此时$k=2$，或$k=4$.

当$k=2$时，方程化为$-8x=0$，解

为$x=0$；

当$k=4$时，方程化为$4x=-12$，

解为$x=-3$.

② 当$k^2-6k+8\neq 0$时，方程可以因式分解为

$$\left[(k-2)x+k+2\right]\left[(k-4)x+k-2\right]=0$$

，

解为$x_1=\dfrac{k+2}{2-k}$， $x_2=\dfrac{k-2}{4-k}$.

拓 2

解关于x的方程

$$2x^3+(1-t)x^2-2tx+\left(t^2-t\right)=0.$$

【解析】

按字母t降幂排列，得到一个关

于t的二次方程：

$$t^2-\left(x^2+2x+1\right)t+x^2\left(2x+1\right)=0,$$

得$\left(t-x^2\right)\left[t-\left(2x+1\right)\right]=0$，于是

$x^2=t$或$2x+1=t$.

当$t\geqslant 0$时，

$$x_1=\sqrt{t},\ x_2=-\sqrt{t},\ x_3=\frac{t-1}{2};$$

当$t<0$时，$x=\dfrac{t-1}{2}$.

拓 3

求方程$\left|(x-2)(x+3)\right|=4+\left|x-1\right|$所有不同的实数解.

【解析】

分情况讨论：

① 当$x\geqslant 2$时，方程化为

$(x-2)(x+3)=4+(x-1)$，

即$x^2=9$，

解得：$x_1=3$，$x_2=-3$（舍去）

② 当$1\leqslant x<2$时，方程化为

$-(x-2)(x+3)=4+(x-1)$，

即$x^2+2x-3=0$，

解得：$x_3=1$，$x_4=-3$（舍去）

③ 当$-3\leqslant x<1$时，方程化为

$-(x-2)(x+3)=4-(x-1)$，

即$x^2-1=0$，

解得：$x_5=-1$，$x_6=1$（舍去）

④ 当$x<-3$时，方程化为

$(x-2)(x+3)=4-(x-1)$，

即 $x^2+2x-11=0$

解得： $x_7=-1-2\sqrt{3}<-3$，

$x_8=-1+2\sqrt{3}>-3$（舍去）

故方程的不同实数解有 4 个：

分别为3，1，-1，$-1-2\sqrt{3}$．

拓 4

解方程

$$\frac{3x^2+9x+7}{x+1}-\frac{2x^2+4x-3}{x-1}-\frac{x^3+x+1}{x^2-1}=0$$

．

【解析】

方程

$$\frac{3x^2+9x+7}{x+1}-\frac{2x^2+4x-3}{x-1}-\frac{x^3+x+1}{x^2-1}=0$$

可化为：

$$3x+6+\frac{1}{x+1}-\left(2x+6\right)-\frac{3}{x-1}-x-\frac{2x+1}{x^2-1}=0$$

$$\frac{1}{x+1}-\frac{3}{x-1}-\frac{2x+1}{x^2-1}=0\Rightarrow\frac{-4x-5}{x^2-1}=0$$

故$x=-\frac{5}{4}$，经检验，是原方程的解.

讲解此题之前，可以先讲如何使用多项式除法或逐步满足法将分式$\frac{x^2+bx+c}{x+a}$拆分成两个式子之和的形式.

拓 5

解方程：

$6x^4-35x^3+62x^2-35x+6=0$.

【解析】

显然$x\neq 0$，两边同除以x^2，得：

$$6x^2-35x+62-35\frac{1}{x}+\frac{6}{x^2}=0$$

即：

$$6(x^2+\frac{1}{x^2})-35(x+\frac{1}{x})+62=0 \quad ①$$

令$y=x+\dfrac{1}{x}$，则$y^2=x^2+\dfrac{1}{x^2}+2$，

所以方程①可化为：

$6(y^2-2)-35y+62=0$，即：

$6y^2-35y+50=0$.

解得：$y_1=\frac{5}{2}$，$y_2=\frac{10}{3}$，

即$x+\frac{1}{x}=\frac{5}{2}$，$x+\frac{1}{x}=\frac{10}{3}$.

解得：$x_1=2, x_2=\frac{1}{2}, x_3=3, x_4=\frac{1}{3}$.

拓 6

在正实数范围内，只存在一个数是关于x的方程$\frac{x^2+kx+3}{x-1}=3x+k$的解，求实数$k$的取值范围.

【解析】

原方程可化为

$2x^2-3x-(k+3)=0$，①

(1) 当$\Delta=0$时，$k=-\frac{33}{8}$，

$x_1=x_2=\frac{3}{4}$满足条件；

(2) 若$x=1$是方程①的根，得

$2\times1^2-3\times1-(k+3)=0$，

$k=-4$．此时方程的另一个根为

$\frac{1}{2}$，故原方程也只有一根$x=\frac{1}{2}$；

(3) 当方程①有异号实根时，

$x_1x_2=-\frac{k+3}{2}<0$，得$k>-3$，此

时原方程只有一个正实数根；

(4) 当方程①有一个根为 0 时，

$k=-3$，另一个根为$x=\frac{3}{2}$，此时原方程只有一个正实根.

综上所述，满足条件的k的取值范围是$k=-\frac{33}{8}$或$k=-4$或$k\geqslant -3$.

拓 7

解方程：

(1) $\sqrt{\frac{x-2}{2}}-2\sqrt{\frac{2}{x-2}}=1$；

(2) $\sqrt[3]{x+28}-\sqrt[3]{x-28}=2$；

(3)

$$\sqrt{7x^2+9x+13}+\sqrt{7x^2-5x+13}=7x$$

.

【解析】

(1) 设$\sqrt{\frac{x-2}{2}}=y$，则$\sqrt{\frac{2}{x-2}}=\frac{1}{y}$，

于是原方程可变形为$y-\frac{2}{y}=1$化为整式方程得$y^2-y-2=0$，

解之得$y_1=2$，$y_2=-1$；当$y=2$时，$\sqrt{\frac{x-2}{2}}=2$，解得$x=10$，

当$y=-1$时，$\sqrt{\frac{x-2}{2}}=-1$，无实数解；经检验$x=10$是原方程的解.

(2) 设$\sqrt[3]{x+28}=a$，

$\sqrt[3]{x-28}=b$．则$a^3-b^3=56$，

$a-b=2$.

所以$a^2+ab+b^2=56\div2=28$

又$a^2-2ab+b^2=2^2=4$，

那么$ab=\left(28-4\right)\div3=8$.

所以$a^2+2ab+b^2=36$.

所以$a+b=\pm6$．结合$a-b=2$，

得到$\begin{cases}a=4\\b=2\end{cases}$或$\begin{cases}a=-2\\b=-4\end{cases}$，

对应的$x=36$，或$x=-36$.

(3) 设$7x^2+9x+13=a$，

$7x^2-5x+13=b$，

则$a-b=14x$，由条件可得到，

$\sqrt{a}+\sqrt{b}=7x$.

结合等式还可以得到

$$\sqrt{a}-\sqrt{b}=\frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\frac{14x}{7x}=2.$$

其中$\sqrt{a}=\frac{7x+2}{2}$，$\sqrt{b}=\frac{7x-2}{2}$.

挑出其中一个等式还原以后解方程：$\sqrt{7x^2+9x+13}=\frac{7x+2}{2}$.

两边平方后化简得到

$21x^2-8x-48=0$，

所以$(3x+4)(7x-12)=0$，

因为$x>0$，所以$x=\frac{12}{7}$.