初一数学联赛班第十讲

判别式与韦达定理

例 1

(1) 关于x的方程$(1-2k)x^2-2\sqrt{k+1}x-1=0$有两个不相等的实数根，求$k$的取值范围.

(2) 已知$a>0$，$b>a+c$，判断关于x的方程$ax^2+bx+c=0$的根的情况，并给出说明.

(3) 设a、b、c为互不相等的非零实数，求证：以下三个方程$ax^2+2bx+c=0$，$bx^2+2cx+a=0$，$cx^2+2ax+b=0$，不可能都有 2 个相等的实数根.

【解析】

(1) 由题意，得

$$\begin{cases} 4(k+1)+4(1-2k)>0 \\ k+1\geqslant 0 \\ 1-2k\neq 0 \end{cases},$$

解得$-1\leqslant k<2$且$k\neq \frac{1}{2}$

(2) ① 当$c\geqslant 0$时，$a>0$，$b>a+c$，从而$b^2>(a+c)^2$，$b^2-(a+c)^2>0$，

$b^2-4ac-(a-c)^2>0$，

$\therefore b^2-4ac>(a-c)^2\geqslant 0$，即$\Delta>0$，原方程必有两个不等实根；

② 当$c<0$时，由$a>0$，得$ac<0$，

$\Delta=b^2-4ac>0$.

综合①、②得关于x的方程总有

两个不等的实根.

⑶ 设三个方程都有 2 个相等的实根，则有

$$\begin{cases}\Delta_1 = 4b^2 - 4ac = 0, \\ \Delta_2 = 4c^2 - 4ab = 0, \\ \Delta_3 = 4a^2 - 4bc = 0,\end{cases}$$

$\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 = 4(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) = 0$

，

即 $a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca = 0$，

$(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 = 0$.

故 $a = b = c$，这与题设矛盾，因此，题中的三个方程不可能都有 2 个相等的实数根.

例 2

(1) 已知：a、b、c分别是$\triangle ABC$的三边长，求证：方程$b^2x^2+(b^2+c^2-a^2)x+c^2=0$没有实数根.

(2) 在等腰$\triangle ABC$中，$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$的对边分别为a、b、c，已知$a=3$，b和c是关于x的方程$x^2+mx+2-\frac{1}{2}m=0$的两个实数根，求$\triangle ABC$的周长.

【解析】

(1) $\left(b^2+c^2-a^2\right)^2-4b^2\cdot c^2$

$=\left(b^2+c^2-a^2+2bc\right)\left(b^2+c^2-a^2-2bc\right)$

$$=\left[\left(b^2+c^2+2bc\right)-a^2\right]\left[\left(b^2+c^2-2bc\right)-a^2\right]$$

$$=\left(a+b+c\right)\left(b+c-a\right)\left(b-c+a\right)\left(b-c-a\right)$$

$\because a+b+c>0$，$b+c-a>0$，

$b-c+a>0$，$b-c-a<0$

$\therefore \left(b^2+c^2-a^2\right)^2-4b^2\cdot c^2<0$，

故方程无实数根.

(2) 当$b=c$时，方程有两个相等的实数根，

则$\Delta=m^2-4\left(2-\dfrac{1}{2}m\right)=0$，

$\therefore m_1=-4$，$m_2=2$.

若$m=-4$，原方程化为

$x^2-4x+4=0$，则$x_1=x_2=2$，

即$b=c=2$，

$\therefore\triangle ABC$的周长为$2+2+3=7$.

若$m=2$，原方程化为

$x^2+2x+1=0$，则$x_1=x_2=-1$，不合题意.

当$a=b$或$a=c$时，$x=3$是方程的一个根，

则$9+3m+2-\frac{1}{2}m=0$，则

$m=-\frac{22}{5}$，

原方程化为$x^2-\frac{22}{5}x+\frac{21}{5}=0$，

解得$x_1=3$，$x_2=\frac{7}{5}$，

$\therefore \triangle ABC$的周长为$3+3+\frac{7}{5}=\frac{37}{5}$.

综上所述，$\triangle ABC$的周长为7或$\frac{37}{5}$.

例 3

设方程$\left|x^2+ax\right|=4$只有 3 个不相等的实数根，求a的取值和相应的 3 个根.

【解析】

方程等价于以下两个方程：

$x^2+ax-4=0$①，$x^2+ax+4=0$②

两方程无相同的根，由于原方程

只有 3 个不相等的实根，故必有且只有方程①或②有重根，

$\Delta_1 = a^2 + 16 \geqslant 0$，$\Delta_2 = a^2 - 16 \geqslant 0$，

由于$\Delta_1 > \Delta_2$，故只可能是$\Delta_2 = 0$，

即$a = \pm 4$，

相应求得方程根为-2，$-2 \pm 2\sqrt{2}$；

2， $2 \pm 2\sqrt{2}$．

例 4

(1) 若

$(x+a)(x+b)+(x+b)(x+c)+(x+c)(x+a)$

是关于x的完全平方式，证明：

$a = b = c$．

(2) 已知$b^2 - 4ac$是一元二次方程$ax^2 + bx + c = 0\left(a \neq 0\right)$的一个

实数根，求ab的取值范围.

(3) 若关于x的方程

$x^2+2px-q=0$和

$x^2-2qx+p=0$都没有实数根（p、

q是实数），①问式子$\frac{q}{p}+\frac{p}{q}$是否

总有意义，说明理由. ②问$p+q$

是否可以是整数，若可以，当

$p+q$为整数时，求

$\frac{p+pq}{q}+\frac{q+pq}{p}$的值；若$p+q$不

可以为整数，说明理由.

【解析】

(1) 由题意知，方程

$(x+a)(x+b)+(x+b)(x+c)+(x+c)(x+a)=0$

有两个相等的实数根.

即方程

$3x^2+2(a+b+c)x+(ab+bc+ca)=0$

有两个相等的实数根.

∵

$\Delta=\left[2(a+b+c)\right]^2-12(ab+bc+ca)=0$

整理上式得：

$2\left[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right]=0$

，

∵$(a-b)^2\geqslant 0$，$(b-c)^2\geqslant 0$，

$(c-a)^2\geqslant 0$，∴$a=b=c$；

(2) ∵方程有实数根，

$\because b^2-4ac\geqslant 0$.

由题意，得

$$\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=b^2-4ac \quad ①$$

或

$$\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=b^2-4ac \quad ②$$

令$u=\sqrt{b^2-4ac}$，则方程①可化为：$2au^2-u+b=0$，方程②化为：$2au^2+u+b=0$

$\because u=\sqrt{b^2-4ac}$是方程①或②的解，

$\therefore$方程①、②的判别式非负，即$\Delta_1=\Delta_2=1-8ab\geqslant 0$，$\therefore ab\leqslant\frac{1}{8}$.

(3) ① 由题意可知,

$\Delta_1 = 4p^2 + 4q < 0$,

$\Delta_2 = 4q^2 - 4p < 0$，故 $p^2 + q < 0$，$q^2 - p < 0$

故$q < -p^2 \leqslant 0$， $p > q^2 \geqslant 0$，故 $q < 0 < p$， $\frac{q}{p} + \frac{p}{q}$总有意义.

另外, 也可使用反证法, 若$\frac{q}{p} + \frac{p}{q}$无意义，则必有$p = 0$或$q = 0$

若$p = 0$，则有$x^2 - 2qx = 0$，此时该方程必有实数根，与题意矛盾

同理可知， $q = 0$也不成立，故$\frac{q}{p} + \frac{p}{q}$总有意义.

② 由①可知，$q<-p^2<0$，

$p>q^2>0$

由$p>q^2>0 \Rightarrow p^2>q^4>0$，故

$q<-p^2<-q^4<0 \Rightarrow q(q^3+1)<0 \Rightarrow -1<q<0$

故

$-1<q<-p^2<0 \Rightarrow 0<p^2<1 \Rightarrow 0<p<1$

从而可知，$-1<p+q<1$，若$p+q$

为整数，则$p+q=0$，$p=-q$

故$\frac{p+pq}{q}+\frac{q+pq}{p}=\frac{p-p^2}{-p}+\frac{-p-p^2}{p}=-2$

例 5

(1) 已知x_1，x_2是方程$x^2+5x+2=0$的两个实数根，求下列代数式的值：

$x_1^{\ 2}+x_2^{\ 2}$，$\left|x_1-x_2\right|$，$\left(2x_1+1\right)\left(2x_2+1\right)$，

$\frac{x_2}{x_1}+\frac{x_1}{x_2}$，$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}$，$\sqrt{\frac{x_1}{x_2}}+\sqrt{\frac{x_2}{x_1}}$.

(2) 已知m，n是有理数，并且方程$x^2+mx+n=0$有一个根是$\sqrt{5}-2$，求$m+n$的值.

【解析】

(1) 由韦达定理知

$x_1+x_2=-5, x_1x_2=2$．于是

$x_1<0, x_2<0$．于是

$x_1^{\ 2}+x_2^{\ 2}=\left(x_1+x_2\right)^2-2x_1x_2=21$；

$$\left|x_1 - x_2\right| = \sqrt{\left(x_1 + x_2\right)^2 - 4x_1x_2} = \sqrt{17}$$

;

$$\left(2x_1 + 1\right)\left(2x_2 + 1\right)$$

$$= 4x_1x_2 + 2\left(x_1 + x_2\right) + 1 = -1;$$

$$\frac{x_2}{x_1} + \frac{x_1}{x_2} = \frac{x_1{}^2 + x_2{}^2}{x_1x_2} = \frac{21}{2};$$

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1x_2} = -\frac{5}{2};$$

$$\sqrt{\frac{x_1}{x_2}} + \sqrt{\frac{x_2}{x_1}}$$

$$= \sqrt{\frac{x_2{}^2}{x_1x_2}} + \sqrt{\frac{x_1{}^2}{x_1x_2}}$$

$$= \frac{\left|x_1\right| + \left|x_2\right|}{\sqrt{x_1x_2}} = \frac{-\left(x_1 + x_2\right)}{\sqrt{x_1x_2}} = \frac{5\sqrt{2}}{2}.$$

（2）由于m，n是有理数，并且方程$x^2+mx+n=0$有一个根是$\sqrt{5}-2$，

所以方程的另一个根是$-\sqrt{5}-2$.

由韦达定理知：

$-m=(-\sqrt{5}-2)+(\sqrt{5}-2)$，

$n=(-\sqrt{5}-2)\times(\sqrt{5}-2)$

$\therefore m=4$，$n=-1$，$\therefore m+n=3$.

例 6

（1）若方程$x^2+px+q=0$的一根为另一根的 2 倍，求p，q所满足的关系式.

（2）已知关于x的方程

$4x^2-8nx-3n=2$和

$x^2-(n+3)x-2n^2+2=0$，是否存在这样的n值，使第一个方程的两个实数根的差的平方等于第二个方程的一整数根？若存在，请求出这样的n值；若不存在，请说明理由.

【解析】

(1) 设$x^2+px+q=0$的二根为a，$2a$，

则$3a=-p$，且$2a^2=q$，

消去a得：$2p^2=9q$

(2) 方程一：

$$\Delta_1=(-8n)^2-4\times4\times(-3n-2)$$

$$=(8n+3)^2+23>0.$$

可见，n为任意实数，方程

$4x^2-8nx-3n=2$都有实数根，

记这两个实数根为α、β，则

$\alpha+\beta=2n$，$\alpha\beta=\dfrac{-3n-2}{4}$.

$(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=4n^2+3n+2$

.

由方程$x^2-(n+3)x-2n^2+2=0$

得$\left[x-(2n+2)\right]\left[x+(n-1)\right]=0$，

解得$x_1=2n+2$，$x_2=1-n$.

若x_1为整数根，则

$4n^2+3n+2=2n+2$，从而$n_1=0$，

$n_2=-\dfrac{1}{4}$.

当$n_1=0$时，$x_1=2$是整数．当

$n_2=-\frac{1}{4}$时，$x_1=\frac{3}{2}$不是整数，舍去.

若x_2为整数根，则

$4n^2+3n+2=1-n$，从而

$n_3=n_4=-\frac{1}{2}$.

当$n=-\frac{1}{2}$时，$x_2=\frac{3}{2}$不是整数，舍去.

综上可知，当$n=0$时，第一个方程的两个实数根的差的平方等于第二个方程的一整数根.

例 7

已知某二次项系数为1的一元二次方程的两个实根为p、q，且$\begin{cases} p+q(p+1)=5 \\ p^2q+pq^2=6 \end{cases}$，试求这个一元二次方程.

【解析】

$(x-p)(x-q)=0$，即

$x^2-(p+q)x+pq=0$，

由$\begin{cases} p+q(p+1)=5 \\ p^2q+pq^2=6 \end{cases}$得

$$\begin{cases} (p+q)+pq=5 \\ pq(p+q)=6 \end{cases}$$

令$p+q=m$，$pq=n$，即$\begin{cases} m+n=5 \\ mn=6 \end{cases}$，

解得$\begin{cases} m=3 \\ n=2 \end{cases}$，$\begin{cases} m=2 \\ n=3 \end{cases}$，

当$\begin{cases} m=3 \\ n=2 \end{cases}$，$\begin{cases} p+q=3 \\ pq=2 \end{cases}$，此时方程为$x^2-3x+2=0$，解得$\begin{cases} p=1 \\ q=2 \end{cases}$或$\begin{cases} p=2 \\ q=1 \end{cases}$；

当$\begin{cases} m=2 \\ n=3 \end{cases}$，$\begin{cases} p+q=2 \\ pq=3 \end{cases}$，此时方程为$x^2-2x+3=0$，$p$、$q$不存在；

$\therefore$所求方程为$x^2-3x+2=0$．

例 8

已知m是不等式组$\begin{cases}2m-1\geqslant 0\\4-3m>0\end{cases}$的整数解，$\alpha$、$\beta$是关于$x$的方程$x^2-mx-m=0$的两个实根，求：(1) $\alpha^3+\beta^3$的值；(2) $\alpha^4+3\beta$的值.

【解析】

$\begin{cases}2m-1\geqslant 0\\4-3m>0\end{cases}\Rightarrow\frac{1}{2}\leqslant m<\frac{4}{3}$，又$m$是整数，故$m=1$，$x^2-x-1=0$，

$\alpha,\beta=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$

又α、β是$x^2-x-1=0$的两个实根，故$\alpha^2-\alpha-1=0$，

$\beta^2-\beta-1=0$.

故$\alpha^3+\beta^3=\alpha(\alpha+1)+\beta(\beta+1)$

$=\alpha^2+\alpha+\beta^2+\beta$

$=2(\alpha+\beta)+2=4$.

故$\alpha^4+3\beta=3(\alpha+\beta)+2=5$.

例 9

已知方程$x^2+ax-b=0$的根是a和c，方程$x^2+cx+d=0$的根是b和d．其中，a、b、c、d为不同实数，求a、b、c、d的值.

【解析】

$\because$方程$x^2+ax-b=0$的根是a和c，$\therefore a+c=-a$，$ac=-b$.

$\because x^2+cx+d=0$的根是b和d，

$\therefore b+d=-c$，$bd=d$，

① 若$d\neq 0$，则由$bd=d$知$b=1$.

由$a+c=-a$知$c=-2a$，由$ac=-b$

知$-2a^2=-1$，解得$a=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

当$a=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$时，$c=-\sqrt{2}$，得

$d=-c-b=\sqrt{2}-1$；

当$a=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$时，$c=\sqrt{2}$，得

$d=-c-b=-\sqrt{2}-1$.

经验证，$a=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$b=1$，$c=\mp\sqrt{2}$，

$d=\pm\sqrt{2}-1$是符合条件的两组解.

② 若$d=0$，则$b=-c$，由

$a+c=-a$知$c=-2a$，由$ac=-b$知

$ac=c$

若$c=0$，则$a=0$，这与a、b、c、d是不同的实数矛盾.

若$c\neq 0$，则$a=1$，再由$c=-2a$知$c=-2$，从而$b=-c=2$.

经验证，$a=1$，$b=2$，$c=-2$，$d=0$也是符合条件的解.

拓 1

当a、b为何值时，方程

$$x^2+2(1+a)x+3a^2+4ab+4b^2+2=0$$

有实根？

【解析】

要使关于x的一元二次方程

$$x^2+2(1+a)x+3a^2+4ab+4b^2+2=0$$

有实根，

则必有$\Delta \geqslant 0$，即

$4(1+a)^2-4(3a^2+4ab+4b^2+2) \geqslant 0$

，得$(a+2b)^2+(a-1)^2 \leqslant 0$.

又因为$(a+2b)^2+(a-1)^2 \geqslant 0$，

所以$(a+2b)^2+(a-1)^2=0$，得

$a=1$，$b=-\dfrac{1}{2}$.

拓 2

证明：任何不等边三角形的各边都可以或者同加或者同减某个相同的值，得到直角三角形.

【解析】

设$a<b<c$是三角形的三边之长.

题目即为证明，存在一个实数x，使得$a+x$，$b+x$，$c+x$是直角三角形的三边长.

即要证明方程

$(a+x)^2+(b+x)^2=(c+x)^2$有解，

且至少有一根满足$x+a>0$.

化简得到

$$x^2+2(a+b-c)x+\left(a^2+b^2-c^2\right)=0$$

.

方程根的判别式

$$\Delta=4\left[(a+b-c)^2-\left(a^2+b^2-c^2\right)\right]$$

$$=8\left(c^2+ab-ac-bc\right)$$

$$=8(c-a)(c-b)$$

$\because a<b<c$，$\therefore \Delta>0$ 方程有实根；

接下来证$x+a>0$：

假设$x_1\leqslant -a$，$x_2\leqslant -a$，则

$x_1+x_2=-2(a+b-c)\leqslant -2a$，

$\therefore c-b\leqslant 0$，矛盾.

$\therefore x_1+a>0$或$x_2+a>0$.

故，三角形三边都可以通过同加x得到一个直角三角形.

拓 3

某学生解一道没有实数解的二次方程$ax^2+bx+c=0$时，因看错了某一项的符号，得到的两根为$\dfrac{1\pm\sqrt{32185}}{4}$，求$\dfrac{b+c}{a}$的值.

【解析】

看错的符号只能是二次项的或者常数的，不可能是一次项，该同学解的方程是$-ax^2+bx+c=0$或者$ax^2+bx-c=0$．由根与系数的关系，有

$$\begin{cases}-\dfrac{b}{-a}=\dfrac{1+\sqrt{32185}}{4}+\dfrac{1-\sqrt{32185}}{4}\\ \dfrac{c}{-a}=\dfrac{1+\sqrt{32185}}{4}\cdot\dfrac{1-\sqrt{32185}}{4}\end{cases}$$

或

$$\begin{cases}-\dfrac{b}{a}=\dfrac{1+\sqrt{32185}}{4}+\dfrac{1-\sqrt{32185}}{4}\\ \dfrac{-c}{a}=\dfrac{1+\sqrt{32185}}{4}\cdot\dfrac{1-\sqrt{32185}}{4}\end{cases}$$

解得$\dfrac{b+c}{a}=2012$或2011.

拓 4

若方程$x^2+2px-3p-2=0$的两个不相等的实数根x_1，x_2满足$x_1^2+x_1^3=4-\left(x_2^2+x_2^3\right)$，求实数$p$的所有可能的值之和.

【解析】

由题意：$x_1+x_2=-2p$,

$x_1x_2=-3p-2$,

$\therefore x_1{}^2+x_2{}^2$

$=\left(x_1+x_2\right)^2-2x_1x_2$

$=4p^2+6p+4$,

$x_1{}^3 + x_2{}^3 = (x_1 + x_2)(x_1{}^2 + x_2{}^2 - x_1x_2)$

$= -2p(4p^2 + 9p + 6)$，

$\because x_1^2 + x_1^3 = 4 - (x_2^2 + x_2^3)$，

$\therefore x_1{}^3 + x_1{}^2 + x_2{}^3 + x_2{}^2 = 4$，

$\therefore$

$-2p(4p^2 + 9p + 6) + 4p^2 + 6p + 4 = 4$

，$p(4p+3)(p+1) = 0$，

$\therefore p_1 = 0$，$p_2 = -\dfrac{3}{4}$，$p_3 = -1$，

当$p = -1$时，

$\Delta = 4p^2 + 4(3p+2) = 0$，此时方程有两个相等的实根，故舍去，

$p_1 + p_2 = -\dfrac{3}{4}$.

拓 5

若方程$(x^2-1)(x^2-4)=k$有四个非零实根，且它们在数轴上对应的四个点等距排列，求k的值.

【解析】

设$x^2=y$，原方程变为

$y^2-5y+4-k=0$，设此方程有根α，$\beta(x<\alpha<\beta)$，则原方程的四个根为$\pm\sqrt{\alpha}$，$\pm\sqrt{\beta}$，由于它们的在数轴对应的四个点等距排列，

$\therefore\sqrt{\beta}-\sqrt{\alpha}=\sqrt{\alpha}-\left(-\sqrt{\alpha}\right)$，

故$\beta=9\alpha$.

$\because\alpha+\beta=5$，$\therefore\alpha=\dfrac{1}{2}$，$\beta=\dfrac{9}{2}$，

于是$4-k=\alpha\beta=\dfrac{9}{4}$，

$\therefore k=\dfrac{7}{4}$.

拓 6

关于x的二次方程$x^2-5x=m^2-1$有实根α和β，且$|\alpha|+|\beta|\leqslant 6$，确定$m$的取值范围.

【解析】

不妨设方程的根$\alpha\geqslant\beta$，由求根公式得

$$\alpha=\frac{5+\sqrt{21+4m^2}}{2},$$

$$\beta=\frac{5-\sqrt{21+4m^2}}{2}.$$

① 当$5-\sqrt{21+4m^2}\geqslant 0$时，即$m^2\leqslant 1$，方程的两个根均为非负数，故

$|\alpha|+|\beta|=\alpha+\beta=5<6$，符合要求，

所以$m^2\leqslant 1$.

② 当$5-\sqrt{21+4m^2}<0$，即$m^2>1$，α为正数，β为负数，故

$|\alpha|+|\beta|=\alpha-\beta=\sqrt{21+4m^2}$.

所以$\begin{cases} m^2>1 \\ \sqrt{21+4m^2}\leqslant 6 \end{cases}$，

解之得$1<m^2\leqslant\dfrac{15}{4}$.

由①②有$m^2\leqslant\dfrac{15}{4}$，

即$-\frac{\sqrt{15}}{2}\leqslant m\leqslant\frac{\sqrt{15}}{2}$.

综上，m的取值范围为

$-\frac{\sqrt{15}}{2}\leqslant m\leqslant\frac{\sqrt{15}}{2}$.