2015 年全国初中数学联合竞赛初一试题参考答案及评分标准

说明：评阅试卷时，请依据本评分标准.第一试，选择题和填空题只设 7 分和 0 分两档；第二试各题， 请按照本评分标准规定的评分档次给分.如果考生的解答方法和本解答不同，只要思路合理，步骤正确，在评卷时请参照本评分标准划分的档次，给予相应的分数.

第一试

一、选择题：（本题满分 42 分，每小题 7 分）

1. 若实数 a,b 满足 $a+2b+a^2+4=4a$，则 $(a+b)^{2015}=$（　　）

A. -1　　　　B. 0　　　　C.1　　　　D. 2015

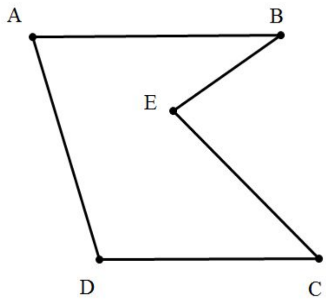
【答】C.

由条件，$a+2b+\left(a-2\right)^2=0$，

所以，$\begin{cases} a=2 \\ a+2b=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=-1 \end{cases}$

所以，$\left(a+b\right)^{2015}=1$

2. 如图所示，$\angle A=70^\circ, \angle B=30^\circ, \angle C=50^\circ, \angle D=110^\circ$,则 $\angle CEB=$（　　）



A. 70°　　　　B. 80°

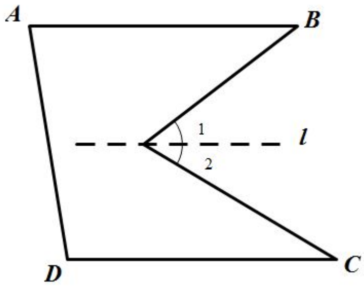
C. 90°　　　　D. 110°

【答】B.

因为，$\angle A+\angle D=180^\circ$

所以，$AB//CD$

如图，过 E 作 AB 的平行线 l



所以，$l//AB, l//CD$

所以，$\angle BEC=\angle 1+\angle 2=\angle ABE+\angle ECD=30^\circ+50^\circ=80^\circ$

3. 若实数 a 满足 $a^2-3a-1=0$，则 $a^3-10a=$（　）

A. -12　　B. -3　　C. 0　　D.3

【答】D.

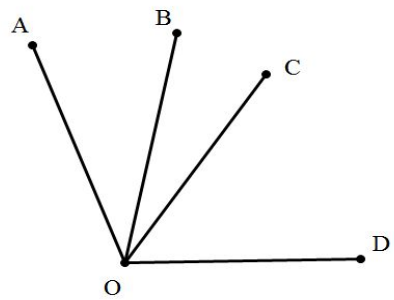
因为，$a^2-3a-1=0$；所以，$a^2=3a+1$，所以，$a^3=3a^2+a$

所以，$a^3-10a=3a^2-9a=3\left(a^2-3a\right)=3$。

4. 如图所示，$\angle AOC=50^{\circ},\angle BOD=80^{\circ},\angle COD=2\angle AOB$，则 $\angle BOC=$（ ）

A．15°　　B．20°

C．25°　　D．30°



【答】B。

设 $\angle AOB=\alpha,\angle BOC=\beta$

所以，$\angle COD=2\alpha$，所以，$\begin{cases}\alpha+\beta=50^{\circ}\\2\alpha+\beta=80^{\circ}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\alpha=30^{\circ}\\\beta=20^{\circ}\end{cases}$

5. 在一年的某月里，周五、周六出现的天数比周日多，周一、周二、周三、周四出现的天数不超过周日，则该月份一定不是（　）

A. 三月　　B. 四月　　C. 六月　　D. 十一月

【答】A。

每个月的后 28 天，周一至周日出现的天数相同，因此在这 28 天之外只能出现周五和周六，故这个月有 30 天

6． 设 $M=\dfrac{1}{3^3-12}+\dfrac{1}{4^3-16}+\ldots+\dfrac{1}{2015^3-4\cdot2015}$，则 $100M$ 最接近哪个整数（　　）

A．10　　B.11　　C.12　　D.13

【答】B.

因为，$\dfrac{1}{k^3-4k}=\dfrac{1}{k-\left(k^2-4\right)}=\dfrac{1}{(k-2)\cdot k\cdot(k+2)}=\dfrac{1}{4}\cdot\left[\dfrac{1}{(k-2)\cdot k}-\dfrac{1}{k\cdot(k+2)}\right]$

所以，$M=\dfrac{1}{4}\left[\dfrac{1}{1\cdot3}-\dfrac{1}{3\cdot5}+\dfrac{1}{2\cdot4}-\dfrac{1}{4\cdot6}+\cdots+\dfrac{1}{2013\cdot2015}-\dfrac{1}{2015\cdot2017}\right]$

$$=\frac{1}{4}\left[\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 4}-\frac{1}{2014\cdot 2016}-\frac{1}{2015\cdot 2017}\right]$$

$$=\frac{11}{96}-\frac{1}{4}\left[\frac{1}{2014\cdot 2016}+\frac{1}{2015\cdot 2017}\right]$$

因为，$\frac{11}{96}\cdot 100=11.46$

所以，$100M$ 最接近整数 11.

二、填空题（本题满分 28 分，每小题 7 分）

7．若两个不等实数 a,b 满足 $a^2=b+2,b^2=a+2$，则 $a+b=$________.

【答】-1

由条件，$a^2-b^2=(b+2)-(a+2)$

所以，$a^2-b^2+a-b=0$，所以，$(a-b)\cdot(a+b+1)=0$

又 $a\neq b$　所以，$a+b+1=0\Rightarrow a+b=-1$

8.有一项工程，若甲、乙合作 10 天可以完成. 甲单独工作 13 天后，因某原因离开了，此后由乙来接替，乙 3 天后完成了这项工程，则甲的工作效率是乙的______倍**.**

【答】$\frac{7}{3}$**。**

设甲单独工作 x 天可以完成工程，以单独工作 y 天可以完成工程。

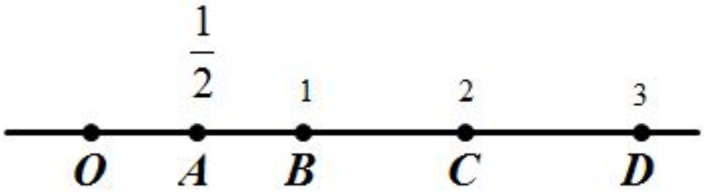
所以，$\begin{cases}10\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)=1\\ \frac{13}{x}+\frac{3}{y}=1\end{cases}$

作差得 $\frac{7}{y}=\frac{3}{x}$，所以，$\frac{x}{y}=\frac{3}{7}$

所以，甲的工作效率是乙的 $\frac{7}{3}$ 倍。

9.若 x 为实数，则代数式 $|x-1|+|2x-1|+|x-2|+|x-3|$ 最小值为_______.

【答】4.



设数轴上数 x 对应点 P

$\therefore$ 原式 $=2|PA|+|PB|+|PC|+|PD|$

$$=\left(|PA|+|PD|\right)+\left(|PA|+|PC|\right)+|PB|\geq|AD|+|AC|=4$$

$\therefore$ 当 P 在 B 点即 $x=1$ 时，原式有最小值 4.

10．若正整数 n 有 6 个正约数（包括 1 和本身），称其为“好数”，则不超过 50 的好数有_____个.

【答】8.

$\because$ n 有 6 个正约数

故 n 的标准质因数分解式为 $n=P^5$ 或 $n=pq^2$（p、q 为素数，$\left(p,q\right)=1$）

若 $n=p^5$，由 $n\leq 50$ 知 2^5

若 $n=p\cdot q^2$，则 $n=2\cdot 3^2,2\cdot 5^2$

$$3\cdot 2^2,5\cdot 2^2,5\cdot 3^2,7\cdot 2^2,11\cdot 2^2$$

$\therefore$“好数”共有 8 个。

第二试

一、**（本题满分 20 分）**定义运算 $*$: $x*y=ax+y+bxy$，且 $2*3=13,3*4=22$.若非负整数 m,n 满足 $m*n=17$，求 m 和 n 的值.

解　由条件

$$\begin{cases}2a+3+6b=13\\3a+4+12b=22\end{cases}$$ **…………… 5 分**

解得 $\begin{cases}a=2\\b=1\end{cases}$ **…………… 10 分**

$\therefore x*y=2x+y+xy$

$\therefore 2m+n+mn=17$

$\therefore (m+1)\cdot(n+2)=19$ ·············· 15 分

结合 m、n 为非负整数知 $\begin{cases} m+1=1 \\ n+2=19 \end{cases}$

$\therefore m=0, n=17$ ·············· **20 分**

二、（**本题满分 25 分**）正整数 a,b,c,d 满足 $1\le a\le b\le c\le d\le 9$，求 $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}$ 的最小值.

解　$\because a\ge 1$，$\therefore \frac{a}{b}\ge\frac{1}{b}$

$\because d\le 9$，$\therefore \frac{c}{d}\ge\frac{c}{9}$

$$\therefore \frac{a}{b}+\frac{c}{d}\ge\frac{1}{b}+\frac{c}{9}$$

$$\ge\frac{1}{b}+\frac{b}{9}$$ ·············· **10 分**

而 $\frac{1}{b}+\frac{b}{9}=\frac{b^2+q}{9b}=\frac{(b-3)^2+6b}{9b}\ge\frac{6b}{9b}=\frac{2}{3}$ ·············· **20 分**

$$\therefore \frac{a}{b}+\frac{c}{d}\ge\frac{2}{3}$$

当 $a=1, d=9, b=c=3$ 时原式取最小值 $\frac{2}{3}$。 ·············· **25 分**

三、（**本题满分 25 分**）设实数 $x_1, x_2, ..., x_n (n\ge 4)$ 的绝对值均为 1，且

$$x_1x_2x_3x_4+x_2x_3x_4x_5+...+x_nx_1x_2x_3=1,$$

求证：$4\,|\,n-1$.

证明　$\because x_1, x_2, \cdots, x_n$ 绝对值均为 1

$\therefore x_1x_2x_3x_4, x_2x_3x_4x_5, \cdots, x_nx_1x_2x_3$ 这 n 个数均为 1 或 -1，设 a 个为 1，b 个为 -1，

$\therefore a+b=n$

由条件，$a-b=1$　　（*）　　　　　　　　　　**…………… 10 分**

又$\left(x_1x_2x_3x_4\right)\cdot\left(x_2x_3x_4x_5\right)\cdots\left(x_nx_1x_2x_3\right)=x_1^4x_2^4\cdots x_n^4=1$

$\therefore 1^a\cdot\left(-1\right)^b=1$　　$\therefore b$ 为偶数。　　　　　　　　**…………… 20 分**

设$b=2k$，由$\left(*\right)$知$a=2k+1$

$\therefore a+b=4k+1$，故$4\,|\,n-1$　　　　　　　　　　**…………… 25 分**