初一数学联赛班第八讲

根式的恒等变形

例 1

（1）当 $x=\frac{1+\sqrt{1994}}{2}$ 时，求

$(4x^3-1997x-1994)^{2001}$ 的值.

（2）当 $a=-\frac{1}{2+\sqrt{5}}$，求代数式

$\frac{9-6a+a^2}{a-3}+\frac{\sqrt{a^2-2a+1}}{a^2-a}$ 的值.

【解析】

（1）$\because$ $x=\frac{1+\sqrt{1994}}{2}$，

$\therefore (2x-1)^2=1994$，

即 $4x^2-4x-1993=0$，

$\therefore$

$$(4x^3-1997x-1994)^{2001}=\left[(4x^2-4x-1993)x+(4x^2-4x-1993)-1\right]^{2001}=(-1)^{2001}=-1$$

(2) $a=-\dfrac{1}{2+\sqrt{5}}=2-\sqrt{5}$,

$\therefore a-1<0$,

$\therefore$原式

$$=\frac{(a-3)^2}{a-3}+\frac{\sqrt{(a-1)^2}}{a(a-1)}=\frac{a^2-3a-1}{a},$$

$\because a=2-\sqrt{5}$， $\therefore (a-2)^2=5$,

即$a^2-4a-1=0$，$\therefore a^2-3a-1=a$,

$\therefore$原式$=\dfrac{a}{a}=1$.

例 2

已知: $x=\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$, $y=\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$,

求$\dfrac{y}{x^2}+\dfrac{x}{y^2}$的值.

【解析】

$$x=\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}},\quad y=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}},$$

则$xy=1$,

$$x+y=\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$$

$$=\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^2+\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^2=10,$$

$$\therefore\frac{y}{x^2}+\frac{x}{y^2}=\frac{y^3+x^3}{x^2\cdot y^2}$$

$$=\frac{(x+y)(x^2-xy+y^2)}{x^2\cdot y^2}$$

$$=\frac{(x+y)\left[(x+y)^2-3xy\right]}{x^2\cdot y^2}=970.$$

例 3

化简：

（1）$2\sqrt{3-2\sqrt{2}}+\sqrt{17-12\sqrt{2}}$；

（2）

$$\frac{1}{4+\sqrt{59+30\sqrt{2}}}+\frac{1}{3-\sqrt{66-40\sqrt{2}}}$$；

（3）$\sqrt{8+\sqrt{63}}+\sqrt{8-\sqrt{63}}$.

【解析】

（1）$2\sqrt{3-2\sqrt{2}}+\sqrt{17-12\sqrt{2}}$

$=2\sqrt{\left(\sqrt{2}-1\right)^2}+\sqrt{\left(3-2\sqrt{2}\right)^2}$

$=2\sqrt{2}-2+3-2\sqrt{2}=1$.

(2)

$$\frac{1}{4+\sqrt{59+30\sqrt{2}}}+\frac{1}{3-\sqrt{66-40\sqrt{2}}}$$

$$=\frac{1}{4+\sqrt{\left(5\sqrt{2}+3\right)^2}}+\frac{1}{3-\sqrt{\left(5\sqrt{2}-4\right)^2}}$$

$$=\frac{1}{4+5\sqrt{2}+3}+\frac{1}{3-5\sqrt{2}+4}$$

$$=5\sqrt{2}-7-7-5\sqrt{2}=-14.$$

(3) $\sqrt{8+\sqrt{63}}+\sqrt{8-\sqrt{63}}$

$$=\sqrt{\frac{16+2\sqrt{63}}{2}}+\sqrt{\frac{16-2\sqrt{63}}{2}}$$

$$=\frac{3+\sqrt{7}}{\sqrt{2}}+\frac{3-\sqrt{7}}{\sqrt{2}}=3\sqrt{2}.$$

例 4

求比$\left(2+\sqrt{3}\right)^4$大的最小整数.

【解析】

考虑$2+\sqrt{3}$的共轭根式$2-\sqrt{3}$,

设$x=2+\sqrt{3}, y=2-\sqrt{3}$，则

$x+y=4, xy=1$.

于是

$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=16-2=14$

,

x^4+y^4

$=(x^2+y^2)^2-2x^2y^2$

$=14^2-2=194$,

注意到$0<y=2-\sqrt{3}=\dfrac{1}{2+\sqrt{3}}<1$,

所以$0<y^4<1$

因此比x^4大的最小整数是x^4+y^4，

即比$(2+\sqrt{3})^4$大的最小整数是

194．

例 5

已知实数x，y满足

$$\left(x-\sqrt{x^2-2014}\right)\left(y-\sqrt{y^2-2014}\right)=2014$$

，求$3x^2-2y^2+3x-3y-2013$的

值．

【解析】

$\because$

$$\left(x-\sqrt{x^2-2014}\right)\left(y-\sqrt{y^2-2014}\right)=2014$$

，

$\therefore x-\sqrt{x^2-2014}$

$=\dfrac{2014}{y-\sqrt{y^2-2014}}$，

$=y+\sqrt{y^2-2014}$

$y-\sqrt{y^2-2014}$

$=\dfrac{2014}{x-\sqrt{x^2-2014}}$

$=x+\sqrt{x^2-2014}$，

两式相加可得

$\sqrt{x^2-2014}+\sqrt{y^2-2014}=0$，

$\therefore x^2=y^2=2014$，

两式相减可得$x=y$，

$\therefore 3x^2-2y^2+3x-3y-2013$

$=3x^2-2x^2+3x-3x-2013$

$$=x^2-2013=1.$$

例 6

化简：

$$\sqrt{4-\sqrt{10+2\sqrt{5}}}+\sqrt{4+\sqrt{10+2\sqrt{5}}}$$

.

【解析】

$4-\sqrt{10+2\sqrt{5}}$和$4+\sqrt{10+2\sqrt{5}}$互为共轭根式，可对其进行和、积运算.

设原式$=x$，则

$$x^2=4-\sqrt{10+2\sqrt{5}}+4+\sqrt{10-2\sqrt{5}}+2\sqrt{\left(4-\sqrt{10+2\sqrt{5}}\right)\left(4+\sqrt{10+2\sqrt{5}}\right)}$$

$$=8+2\sqrt{16-10-2\sqrt{5}}$$

$=8+2\sqrt{6-2\sqrt{5}}$

$=8+2\left(\sqrt{5}-1\right)=6+2\sqrt{5}$，

∴原式$=\sqrt{6+2\sqrt{5}}=\sqrt{5}+1$.

例 7

(1) 若正数m，n满足

$m+4\sqrt{mn}-2\sqrt{m}-4\sqrt{n}+4n=3$，

求$\dfrac{\sqrt{m}+2\sqrt{n}-8}{\sqrt{m}+2\sqrt{n}+2002}$的值.

(2) 设a，b，c是实数，若$a+b+c$

$=2\sqrt{a+1}+4\sqrt{b+1}+6\sqrt{c-2}-14$，

求a，b，c的值.

【解析】

(1) 根据原式可得：

$$(\sqrt{m})^2+4\sqrt{mn}+(2\sqrt{n})^2-2(\sqrt{m}+2\sqrt{n})-3=0$$

即：

$$(\sqrt{m}+2\sqrt{n})^2-2(\sqrt{m}+2\sqrt{n})-3=0$$

，

$$(\sqrt{m}+2\sqrt{n}-3)(\sqrt{m}+2\sqrt{n}+1)=0$$

所以$\sqrt{m}+2\sqrt{n}=3$，

$$\frac{\sqrt{m}+2\sqrt{n}-8}{\sqrt{m}+2\sqrt{n}+2002}=-\frac{1}{401}$$；

（2）由已知得：

$$\left(\sqrt{a+1}-1\right)^2+\left(\sqrt{b+1}-2\right)^2+\left(\sqrt{c-2}-3\right)^2=0$$

，

$\therefore\sqrt{a+1}-1=0$，$\sqrt{b+1}-2=0$，

$\sqrt{c-2}-3=0$，

$\therefore a=0$，$b=3$，$c=11$.

例 8

若$\frac{1}{2\sqrt{1}+1\cdot\sqrt{2}}+\frac{1}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}+\frac{1}{4\sqrt{3}+3\sqrt{4}}+....+\frac{1}{(k+1)\sqrt{k}+k\sqrt{k+1}}=\frac{2}{3}$，求$k$的值.

【解析】

$\because$ $\frac{1}{2\sqrt{1}+1\cdot\sqrt{2}}+\frac{1}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}+\frac{1}{4\sqrt{3}+3\sqrt{4}}+....+\frac{1}{(k+1)\sqrt{k}+k\sqrt{k+1}}=\frac{2}{3}$，

$$\frac{1}{(n+1)\sqrt{n}+n\sqrt{n+1}}=\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

∴

$$1-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{k-1}}-\frac{1}{\sqrt{k}}+\frac{1}{\sqrt{k}}-\frac{1}{\sqrt{k+1}}$$

$$=1-\frac{1}{\sqrt{k+1}}=\frac{2}{3}\Rightarrow k=8.$$

例 9

证明：

$$\sqrt{a^2+\frac{1}{b^2}+\frac{a^2}{(ab+1)^2}}=\left|a+\frac{1}{b}-\frac{a}{ab+1}\right|$$

.

【解析】

$$\sqrt{\left(a+\frac{1}{b}-\frac{a}{ab+1}\right)^2}$$

$$=\sqrt{a^2+\frac{1}{b^2}+\frac{a^2}{(ab+1)^2}+\frac{2a}{b}-\frac{2a^2}{ab+1}-\frac{2a}{b(ab+1)}}$$

$$\sqrt{a^2+\frac{1}{b^2}+\frac{a^2}{(ab+1)^2}+2a\cdot\frac{ab+1-ab-1}{b(ab+1)}}$$

$$=\sqrt{a^2+\frac{1}{b^2}+\frac{a^2}{(ab+1)^2}}$$

故

$$\sqrt{a^2+\frac{1}{b^2}+\frac{a^2}{(ab+1)^2}}=\left|a+\frac{1}{b}-\frac{a}{ab+1}\right|$$

例 10

定义

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{x^2+2x+1}+\sqrt[3]{x^2-1}+\sqrt[3]{x^2-2x+1}}$$

，

求

$$f(1)+f(3)+f(5)+\cdots+f(999)$$

的值.

【解析】

$f(x)$

$$=\frac{1}{\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[3]{(x+1)(x-1)}+\sqrt[3]{(x-1)^2}}$$

$$=\frac{\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x-1}}{\left[\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[3]{(x+1)(x-1)}+\sqrt[3]{(x-1)^2}\right]\left[\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x-1}\right]}$$

$$=\frac{\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x-1}}{2}$$

所以 $f(1)=\dfrac{\sqrt[3]{2}-0}{2}$；

$f(3)=\dfrac{\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}}{2}$；

$f(5)=\dfrac{\sqrt[3]{6}-\sqrt[3]{4}}{2}$；……；

$f(999)=\dfrac{\sqrt[3]{1000}-\sqrt[3]{998}}{2}$

以上各式相加，得

$f(1)+f(3)+f(5)+\cdots+f(999)$

$$=\frac{\sqrt[3]{1000}}{2}=\frac{10}{2}=5.$$

拓 1

已知$x=\sqrt{5}+\sqrt{2}$，求

$x^6-2\sqrt{2}x^5-3x^4-x^3+2\sqrt{5}x^2-4x+\sqrt{5}$

的值.

【解析】

$x=\sqrt{5}+\sqrt{2}$，$x-\sqrt{2}=\sqrt{5}$，所以

$x^2-2\sqrt{2}x-3=0$，同理可得

$x^2-2\sqrt{5}x+3=0$，

原式

$=x^4(x^2-2\sqrt{2}x-3)-x(x^2-2\sqrt{5}x+3)-x+\sqrt{5}$

$=0-0-(\sqrt{5}+\sqrt{2})+\sqrt{5}=-\sqrt{2}$.

拓 2

已知$a=\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{1}$，求

$\frac{3}{a}+\frac{3}{a^2}+\frac{1}{a^3}$的值

【解析】

$$\frac{3}{a}+\frac{3}{a^2}+\frac{1}{a^3}$$

$$=\frac{3a^2+3a+1}{a^3}$$

$$=\frac{\left(a^3+3a^2+3a+1\right)-a^3}{a^3}$$

$$=\frac{(a+1)^3}{a^3}-1=\left(1+\frac{1}{a}\right)^3-1$$

由已知，可得$\frac{1}{a}=\frac{1}{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{1}}$

$$=\frac{\sqrt[3]{2}-1}{\left(\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{1}\right)\left(\sqrt[3]{2}-1\right)}=\sqrt[3]{2}-1$$

故原式$=\left(\sqrt[3]{2}\right)^3-1=1$.

拓 3

化简：$\sqrt{2\left(6-2\sqrt{3}-2\sqrt{5}+\sqrt{15}\right)}$.

【解析】

$$\sqrt{2\left(6-2\sqrt{3}-2\sqrt{5}+\sqrt{15}\right)}$$

$$=\sqrt{12-4\sqrt{3}-4\sqrt{5}+2\sqrt{15}}$$

$$=\sqrt{2^2+\left(\sqrt{3}\right)^2+\left(\sqrt{5}\right)^2-2\times2\times\sqrt{3}-2\times2\times\sqrt{5}+2\times\sqrt{3}\times\sqrt{5}}$$

$$=\sqrt{\left(\sqrt{3}+\sqrt{5}-2\right)^2}=\sqrt{3}+\sqrt{5}-2.$$

拓 4

已知正数a，b，且满足$a\sqrt{1-b^2}+b\sqrt{1-a^2}=1$，求证：$a^2+b^2=1$

【解析】

由已知，得$a\sqrt{1-b^2}=1-b\sqrt{1-a^2}$．

两边平方，得

$a^2(1-b^2)=1+b^2(1-a^2)-2b\sqrt{1-a^2}$

，

即$a^2-b^2-1=-2b\sqrt{1-a^2}$．

整理，$(1-a^2)-2b\sqrt{1-a^2}+b^2=0$，

$\left(\sqrt{1-a^2}-b\right)^2=0$，

所以$\sqrt{1-a^2}-b=0$，

化简即得$a^2+b^2=1$．

拓 5

化简：$\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}$．

【解析】

注意到被开方式是一对共轭根式，可以设原式$=x$，两边立方，得

$x^3=20+14\sqrt{2}+20-14\sqrt{2}$

$+3\sqrt[3]{\left(20+14\sqrt{2}\right)\left(20-14\sqrt{2}\right)}\left(\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}\right)$

$=6x+40$

，

$\therefore x^3-6x-40=0$，

$\therefore \left(x-4\right)\left(x^2+4x+10\right)=0$，

$\because x^2+4x+10=\left(x+2\right)^2+6>0$，

$\therefore x=4$，即

$\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}=4$.

拓 6

已知非零实数a、b满足等式

$\frac{b}{a}+\frac{a}{b}+\frac{5}{ab}=\frac{4}{b}+\frac{2}{a}$，求

$\frac{b+\sqrt{a}}{\sqrt{3b+2\sqrt{a}}}$的值.

【解析】

$\frac{b}{a}+\frac{a}{b}+\frac{5}{ab}=\frac{4}{b}+\frac{2}{a}$两边同时乘以

ab，则有$b^2+a^2+5=4a+2b$，

所以$(a-2)^2+(b-1)^2=0$，

所以$a=2$，$b=1$，

$$\frac{b+\sqrt{a}}{\sqrt{3b+2\sqrt{a}}}=\frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{3+2\sqrt{2}}}=\frac{1+\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}=1$$

.

拓 7

若$8a\geqslant 1$，求

$$\sqrt[3]{a+\frac{a+1}{3}\sqrt{\frac{8a-1}{3}}}+\sqrt[3]{a-\frac{a+1}{3}\sqrt{\frac{8a-1}{3}}}$$

的值.

【解析】

设$\sqrt[3]{a+\frac{a+1}{3}\sqrt{\frac{8a-1}{3}}}=x$，

$\sqrt[3]{a-\frac{a+1}{3}\sqrt{\frac{8a-1}{3}}}=y$，$p=x+y$，

则$x^3+y^3=2a$

$$x^3y^3=a^2-\left(\frac{a+1}{3}\sqrt{\frac{8a-1}{3}}\right)^2$$

$$=a^2-\frac{(a+1)^2(8a-1)}{27}=\left(\frac{1-2a}{3}\right)^3$$

$$\therefore xy=\frac{1-2a}{3}$$

$$\because x^3+y^3=(x+y)\left(x^2-xy+y^2\right)$$

$$=(x+y)\left[(x+y)^2-3xy\right]$$

$\therefore p\left[p^2-(1-2a)\right]=2a$，

即 $p^3-p+2ap-2a=0$，

$$\therefore (p-1)\left(p^2+p+2a\right)=0$$

$$\because p^2+p+2a$$

$$=\left(p+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}(8a-1)\geqslant 0$$

若$8a-1=0$，则$p=2\sqrt[3]{a}=1$；若$8a-1\neq 0$，则$p-1=0$，也有$p=1$.

∴原式的值为 1.