初一数学联赛班第十一讲

方程的根

例 1

(1) 求k的值，使得一元二次方程 $x^2+kx-1=0$， $x^2+x+(k-2)=0$ 有相同的根，并求两个方程的根.

(2) 设a,b,c为$\triangle ABC$的三边，且二次三项式$x^2+2ax+b^2$与 $x^2+2cx-b^2$有一次公因式，证明：$\triangle ABC$一定是直角三角形.

【解析】

(1) 不妨设a是这两个方程相同的根，由方程根的定义有

$a^2+ka-1=0$ ……①，

$a^2+a+(k-2)=0$……②.

①−②有，$ka-1-a-(k-2)=0$，

即 $(k-1)(a-1)=0$，

∴$k=1$，或$a=1$.

当$k=1$时，两个方程都变为

$x^2+x-1=0$，

∴两个方程有两个相同的根

$x_{1,2}=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$，没有相异的根；

当$a=1$时，代入①或②都有$k=0$，

此时两个方程变为$x^2-1=0$，

$x^2+x-2=0$.

解这两个方程，$x^2-1=0$的根为

$x_1=1$，$x_2=-1$；$x^2+x-2=0$的

根为$x_1=1$，$x_2=-2$.

$x=1$为两个方程的相同的根.

$\therefore k$的值为0或1.

(2) 因为题目中的两个二次三项式有一次公因式,

所以二次方程$x^2+2ax+b^2=0$与$x^2+2cx-b^2=0$必有公共根，设公共根为x_0，则

$x_0{}^2+2ax_0+b^2=0$ ……①,

$x_0{}^2+2cx_0-b^2=0$ ……②

两式相加得$2x_0{}^2+2(a+c)x_0=0$,

即$2x_0[x_0+(a+c)]=0$.

若$x_0=0$，代入①式得$b=0$,

这与b为$\triangle ABC$的边不符,

$\therefore$公共根$x_0=-(a+c)$．把$x_0=-(a+c)$代入①式得

$(a+c)^2-2a(a+c)+b^2=0$，

整理得$a^2=b^2+c^2$，$\triangle ABC$为直角三角形.

例 2

三个二次方程$ax^2+bx+c=0$，$bx^2+cx+a=0$，$cx^2+ax+b=0$有公共根.

(1) 求证：$a+b+c=0$；

(2) 求$\dfrac{a^2}{bc}+\dfrac{b^2}{ca}+\dfrac{c^2}{ab}$的值.

【解析】

(1) 设上述三个方程的公共根为x_0，则有

$ax_0{}^2+bx_0+c=0$，

$bx_0{}^2+cx_0+a=0$，

$cx_0{}^2+ax_0+b=0$

三式相加并提取公因式可得，

$(a+b+c)(x_0{}^2+x_0+1)=0$

又$x_0{}^2+x_0+1=(x_0+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}>0$，

故$a+b+c=0$，公共根为$x_0=1$.

(2) 由$a^3+b^3+c^3-3abc$

$=\left(a+b+c\right)\left(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca\right)$

及$a+b+c=0$可知

$a^3+b^3+c^3=3abc$，

故$\frac{a^2}{bc}+\frac{b^2}{ca}+\frac{c^2}{ab}=\frac{a^3+b^3+c^3}{abc}=3$.

例 3

首项系数不相等的两个二次方程

$(a-1)x^2-(a^2+2)x+(a^2+2a)=0$

，①

$(b-1)x^2-(b^2+2)x+(b^2+2b)=0$

．②

（其中a，b为正整数）有一个公共根.

求$\dfrac{a^b+b^a}{a^{-b}+b^{-a}}$的值.

【解析】

由条件知$a>1$，$b>1$，$a\neq b$

解得①的两个根为a，$\dfrac{a+2}{a-1}$，②

的两个根为b，$\frac{b+2}{b-1}$.

$\because a \neq b$.

$\therefore a=\frac{b+2}{b-1}$. ③

或$b=\frac{a+2}{a-1}$. ④

由③，④均得$ab-a-b-2=0$，

即$(a-1)(b-1)=3$.

因a，b均为正整数，则有

$\begin{cases} a-1=1 \\ b-1=3 \end{cases}$或$\begin{cases} a-1=3 \\ b-1=1 \end{cases}$，

解得$\begin{cases} a=2 \\ b=4 \end{cases}$或$\begin{cases} a=4 \\ b=2 \end{cases}$.

代入所求值的表达式化简得

$$\frac{a^b+b^a}{a^{-b}+b^{-a}}=a^bb^a=4^2\cdot 2^4=256.$$

例 4

若关于x的方程$(6-k)(9-k)x^2-(117-15k)x+54=0$的解都是整数，求符合条件的整数$k$的值.

【解析】

当$k=6$时，得$x=2$；当$k=9$时，得$x=-3$，

当$k\neq 9$且$k\neq 6$时，解得$x_1=\frac{9}{6-k}$，$x_2=\frac{6}{9-k}$，

当$6-k=\pm 1,\pm 3,\pm 9$时，x_1是整

数，这时$k=7,5,3,15,-3$；

当$9-k=\pm 1,\pm 2,\pm 3,\pm 6$时，

x_2是整数这时

$k=10,8,11,7,12,15,3$；

综上所述，$k=3,6,7,9,15$时原方程的解为整数.

例 5

(1) 当m是什么整数时，关于x的一元二次方程$mx^2-4x+4=0$与$x^2-4mx+4m^2-4m-5=0$的根都是整数.

(2) 设方程$mx^2-(m-2)x+(m-3)=0$有整数解，试确定整数m的值，并求

出这时方程所有的整数解.

【解析】

(1) 由题意可知，方程

$mx^2-4x+4=0$的判别式

$\Delta_1=(-4)^2-16m=16(1-m)\geqslant 0\Rightarrow m\leqslant 1$

方程$x^2-4mx+4m^2-4m-5=0$

的判别式为

$\Delta_2=(4m)^2-4(4m^2-4m-5)$

$=4(4m+5)\geqslant 0$

故$m\geqslant -\dfrac{5}{4}$, 又m为整数, $m\neq 0$,

故$m=-1$或$m=1$

当$m=1$时, 题干中的两个方程分

别为$x^2-4x+4=0$、

$x^2-4x-5=0$，满足题意；

当$m=-1$时，题干中的两个方程分别为$x^2+4x-4=0$、$x^2+4x+3=0$，不合题意.

故$m=1$.

也可通过方程是否有整数根的条件来判断出$m=1$，此时两个判别式都要是完全平方数.

(2) 若$m=0$，则$2x-3=0$，此时方程无整数解；

若$m\neq 0$，$\because$方程有整数根，则

$\Delta=(m-2)^2-4m(m-3)\geqslant 0$，

即$3m^2-8m-4\leqslant 0$，

解得$\dfrac{4-2\sqrt{7}}{3}\leqslant m\leqslant\dfrac{4+2\sqrt{7}}{3}$.

$\therefore m$只能取1，2，3.

当$m=1$时，方程有整数解-2和1；

当$m=2$时，方程无整数解；

当$m=3$时，方程有整数解0.

例 6

已知a是正整数，如果关于x的方程

$$x^3+(a+17)x^2+(38-a)x-56=0$$

的根都是整数，求a的值及方程的整数根.

【解析】

观察易知方程有一个整数根

$x_1=1$，将方程的左边分解因式，得：

$(x-1)\left[x^{2}+(a+18)x+56\right]=0$.

因为a是正整数，所以关于x的方程：$x^{2}+(a+18)x+56=0$……①

的判别式$\Delta=(a+18)^{2}-224>0$，

它一定有两个不同的实数根.

而原方程的根都是整数，所以方程①的根都是整数，

因此它的判别式

$\Delta=(a+18)^{2}-224$应该是一个完全平方数.

设$(a+18)^{2}-224=k^{2}$（其中k为非负整数），

则$(a+18)^{2}-k^{2}=224$，即：

$(a+18+k)(a+18-k)=224$.

显然$a+18+k$与$a+18-k$的奇偶性相同，且$a+18+k\geqslant 18$，

$a+18+k\geqslant a+18-k$.

而$224=112\times 2=56\times 4=28\times 8$，

所以：

$\begin{cases} a+18+k=112 \\ a+18-k=2 \end{cases}$，或

$\begin{cases} a+18+k=56 \\ a+18-k=4 \end{cases}$，或

$\begin{cases} a+18+k=28 \\ a+18-k=8 \end{cases}$

解得$\begin{cases} a=39 \\ k=55 \end{cases}$，或$\begin{cases} a=12 \\ k=26 \end{cases}$，或

$\begin{cases} a=0 \\ k=10 \end{cases}$.

而a是正整数，所以只可能

$\begin{cases} a=39 \\ k=55 \end{cases}$，或$\begin{cases} a=12 \\ k=26 \end{cases}$.

当$a=39$时，方程①即

$x^2+57x+56=0$，它的两根分别为-1和-56.

此时原方程的三个根为1，-1和-56.

当$a=12$时，方程①即

$x^2+30x+56=0$，它的两根分别为-2和-28.

此时原方程的三个根为1，-2和-28.

例 7

已知a是正整数，且使得关于x的一元二次方程$ax^2+2(2a-1)x+4(a-3)=0$至少有一个整数根，求a的值.

【解析】

将原方程变形为$a(x+2)^2=2(x+6)$，显然$x+2\neq 0$，

于是$a=\dfrac{2(x+6)}{(x+2)^2}$

由于a是正整数，所以$a\geqslant 1$，

即$\dfrac{2(x+6)}{(x+2)^2}\geqslant 1$

所以$x^2+2x-8\leqslant 0$，

$(x+4)(x-2)\leqslant 0$，

所以$-4 \leqslant x \leqslant 2(x \neq -2)$

当$x=-4,-3,-1,0,1,2$时，得a的值为$1,6,10,3,\frac{14}{9},1$，所以a的值为$1,3,6,10$.

例 8

(1) 若k为正整数，一元二次方程$(k-1)x^2-px+k=0$有两个正整数根，求$k^{kp}\left(p^p+k^k\right)$之值.

(2) 试确定一切有理数r，使得关于x的方程$rx^2+(r+2)x+r-1=0$有且只有整数根.

【解析】

(1) 设该方程的两个正整数根分别为 x_1， x_2，则 $x_1x_2=\frac{k}{k-1}$，

$x_1+x_2=\frac{p}{k-1}$.

$\because \frac{k}{k-1}$为正整数，

$\therefore k=2$，于是 $x_1x_2=2$，

继而 $x_1+x_2=3$， $p=3$.

因此

$$k^{kp}\left(p^p+k^k\right)=2^6\times\left(3^3+2^2\right)=1984$$

.

(2) ① 若$r=0$，$x=\frac{1}{2}$，原方程无整数根.

② 当$r \neq 0$时，由韦达定理知

$x_1 + x_2 = -\frac{r+2}{2}$，$x_1x_2 = \frac{r-1}{r}$．因为方程的根是整数我们考虑消去$r$，

消去r得：$4x_1x_2 - 2\left(x_1 + x_2\right) + 1 = 7$，

即$\left(2x_1 - 1\right)\left(2x_2 - 1\right) = 7$．

由x_1，x_2是整数得：$x_1 = 4$，$x_2 = 1$

或$x_1 = 1$，$x_2 = 4$或$x_1 = 0$，$x_2 = -3$

或$x_1 = -3$，$x_2 = 0$，对应的$r = -\frac{1}{3}$，

1；

∴综上所述，$r = -\frac{1}{3}$或1．

例 9

k为什么实数时，关于x的方程

$(6-k)(9-k)x^2-(117-15k)x+54=0$

的解都是整数？

【解析】

易知$k=6$或$k=9$时，原方程的解都是整数．

当$k\neq 6$或$k\neq 9$时，原方程化为：

$[(6-k)x-9][(9-k)x-6]=0$，

从而解得$x_1=\dfrac{9}{6-k}=\dfrac{3}{2-\dfrac{k}{3}}$，

$x_2=\dfrac{6}{9-k}=\dfrac{2}{3-\dfrac{k}{3}}$．

于是有$2-\frac{3}{x_1}=3-\frac{2}{x_2}$，即

$\frac{2}{x_2}-\frac{3}{x_1}=1\Rightarrow x_2=2-\frac{6}{3+x_1}$

则$3+x_1=\pm1,\pm2,\pm3,\pm6$

于是有$\begin{cases}x_1=-2\\x_2=-4\end{cases}$，$\begin{cases}x_1=-4\\x_2=8\end{cases}$，

$\begin{cases}x_1=-1\\x_2=-1\end{cases}$，$\begin{cases}x_1=-5\\x_2=5\end{cases}$，$\begin{cases}x_1=0\\x_2=0\end{cases}$，

$\begin{cases}x_1=-6\\x_2=4\end{cases}$，$\begin{cases}x_1=3\\x_2=1\end{cases}$，$\begin{cases}x_1=-9\\x_2=3\end{cases}$，

于是

$k=\frac{21}{2}$，$\frac{33}{4}$，15，$\frac{39}{5}$，$\frac{15}{2}$，3，7

综上所述，当$k=3$，6，7，$\frac{15}{2}$，

$\frac{39}{5}$，$\frac{33}{4}$，9，$\frac{21}{2}$，15时，原方程的解都是整数.

例 10

求方程

$a^3b-ab^3+2a^2+2b^2+4=0$的所有整数解.

【解析】

将上述方程看成一个以2为根的二次方程，则

$2^2+(a^2+b^2)\cdot 2+a^3b-ab^3=0$

由于该方程有整数解，则

$\Delta=(a^2+b^2)^2-4(a^3b-ab^3)$

$=a^4+b^4+2a^2b^2-4a^3b+4ab^3$

$$=a^4+b^4+4a^2b^2-4a^3b+4ab^3-2a^2b^2$$

$$=(a^2-b^2-2ab)^2$$

（此处能够直接运用公式

$a^2+b^2+c^2-2ab+2bc-2ca$

$=(a-b-c)^2$，上述过程也可看成添项、拆项法，如下：

$$a^4+b^4+2a^2b^2-4a^3b+4ab^3$$

$$=a^4+b^4-2a^2b^2-4a^3b+4ab^3+4a^2b^2$$

$$=(a^2-b^2)^2-4ab(a^2-b^2)+4a^2b^2$$

$$=\left(a^2-b^2-2ab\right)^2$$

于是方程的两根分别为：

$x=-b^2-ab$或$x=-a^2+ab$

令$x=-b^2-ab=2$，则$b\neq 0$，

$a=-b-\dfrac{2}{b}$，由a,b为整数，则

$b=\pm 1,\pm 2$，此时$a=\pm 3$

令$x=-a^2+ab=2$，则$a\neq 0$，

$b=a+\dfrac{2}{a}$，由a,b为整数，则

$a=\pm 1,\pm 2$，此时$b=\pm 3$.

故所有整数解为：$\begin{cases}a=3\\b=-1\end{cases}$，

$\begin{cases}a=3\\b=-2\end{cases}$，$\begin{cases}a=-3\\b=1\end{cases}$，$\begin{cases}a=-3\\b=2\end{cases}$，

$\begin{cases}a=-1\\b=-3\end{cases}$，$\begin{cases}a=-2\\b=-3\end{cases}$，$\begin{cases}a=1\\b=3\end{cases}$，$\begin{cases}a=2\\b=3\end{cases}$

拓 1

设方程$x^2-px+n=0$①，

$x^2-qx+m=0$②，$x^2-rx+l=0$

③两两的公共根α,β,γ互不相等，

求证：$p^2+q^2+r^2+4(n+m+l)$

$=2(pq+qr+rp)$.

【解析】

设方程①②③的根分别为α,β；

β,γ；α,γ.

由韦达定理，有$\alpha+\beta=p,\alpha\beta=n$；

$\beta+\gamma=q,\beta\gamma=m$；

$\alpha+\gamma=r,\alpha\gamma=l$.

于是有$p^2+q^2+r^2$

$=(\alpha+\beta)^2+(\beta+\gamma)^2+(\alpha+\gamma)^2$

$$=2\left(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\alpha\beta+\beta\gamma+\alpha\gamma\right),$$

则

$$p^2+q^2+r^2+4(n+m+l)$$

$$=2\left(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\alpha\beta+\beta\gamma+\alpha\gamma\right)+4(\alpha\beta+\beta\gamma+\alpha\gamma)$$

$$=2\left(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+3\alpha\beta+3\beta\gamma+3\alpha\gamma\right)$$

而

$$2(pq+qr+rp)$$

$$=2(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)+2(\beta+\gamma)(\alpha+\gamma)+2(\alpha+\beta)(\alpha+\gamma)$$

$$=2\left(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+3\alpha\beta+3\beta\gamma+3\alpha\gamma\right)$$

于是得证.

拓 2

已知三个不同的实数a，b，c满足$a-b+c=3$，方程

$x^2+ax+1=0$和$x^2+bx+c=0$有一个相同的实根，方程$x^2+x+a=0$和$x^2+cx+b=0$也有一个相同的实根．求a，b，c的值．

【解析】

依次将题设中所给的四个方程编号为①，②，③，④．

设x_1是方程①和方程②的一个相同的实根，则$\begin{cases} x_1^2+ax_1+1=0, \\ x_1^2+bx_1+c=0, \end{cases}$

两式相减，可解得$x_1=\dfrac{c-1}{a-b}$．

设x_2是方程③和方程④的一个相同的实根，则

$\begin{cases} x_2^2 + x_2 + a = 0, \\ x_2^2 + cx_2 + b = 0, \end{cases}$ 两式相减，可

解得$x_2 = \dfrac{a-b}{c-1}$.

所以$x_1x_2 = 1$.

又方程①的两根之积等于 1，

于是x_2也是方程①的根，

则$x_2^2 + ax_2 + 1 = 0$.

又$x_2^2 + x_2 + a = 0$，两式相减，

得$(a-1)x_2 = a-1$.

若$a=1$，则方程①无实根，

所以$a \neq 1$，故$x_2 = 1$.

于是$a = -2$，$b + c = -1$.

又$a - b + c = 3$，解得$b = -3$，$c = 2$.

拓 3

求所有的正整数a，b，c使得关于x的方程$x^2-3ax+2b=0$，$x^2-3bx+2c=0$，$x^2-3cx+2a=0$的所有的根都是正整数.

【解析】

设三个方程的正整数解分别为x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6，则有

$$x^2-3ax+2b=(x-x_1)(x-x_2)$$

$$x^2-3bx+2c=(x-x_3)(x-x_4)$$

$$x^2-3cx+2a=(x-x_5)(x-x_6)$$

令$x=1$，并将三式相加，注意到$x_i\geqslant 1$（$i=$1，2，…6），有

$$3-(a+b+c)$$
$$=(1-x_1)(1-x_2)+(1-x_3)(1-x_4)+(1-x_5)(1-x_6)\geqslant 0+0+0=0$$

但 $a\geqslant 1$，$b\geqslant 1$，$c\geqslant 1$，又有

$3-(a+b+c)\leqslant 0$

$\therefore 3-(a+b+c)=0$

故$a=b=c=1$

拓 4

已知a，b为整数，且$a>b$，方程$3x^2+3\left(a+b\right)x+4ab=0$的两个根$\alpha$，$\beta$满足关系式$\alpha\left(\alpha+1\right)+\beta\left(\beta+1\right)=\left(\alpha+1\right)\left(\beta+1\right)$，试求所有的整数对$\left(a，b\right)$.

【解析】

由韦达定理得到

$$\begin{cases}\alpha+\beta=-\left(a+b\right)\\ \alpha\beta=\dfrac{4}{3}ab\end{cases},$$

代入到关系式

$\alpha(\alpha+1)+\beta(\beta+1)=(\alpha+1)(\beta+1)$

中，得到$(a+b)^2-4ab=1$，

即$(a-b)^2=1$，由于$a>b$，

所以$a-b=1$，即$a=b+1$，

代入到原方程中得到

$3x^2+3(2b+1)x+4b(b+1)=0$.

$\Delta=-4b^2-4b+3\geqslant 0$，即

$(2b+1)^2\leqslant 4$，所以b只可能是 0

或-1，对应的a是 1 或 0，

$\therefore$整数对为$(1,0)$或$(0,-1)$.

拓 5

(1) 是否存在正整数m，n，使

得$m\left(m+2\right)=n\left(n+1\right)$?

(2) 设$k\left(k\geqslant 3\right)$是给定的正整数，是否存在正整数$m$，$n$，使得$m\left(m+k\right)=n\left(n+1\right)$?

【解析】

(1) 由$m\left(m+2\right)=n\left(n+1\right)$得：

$$\left(m+1\right)^{2}=n^{2}+n+1$$

又因为当n为正整数时，

$n^{2}<n^{2}+n+1<\left(n+1\right)^{2}$,

所以$n^{2}+n+1$不是完全平方数，

即$m+1$不是正整数，

故不存在正整数m，n，使得$m\left(m+2\right)=n\left(n+1\right)$

(2) 当$k=3$时，由

$m(m+3)=n(n+1)$得：

$m^2+3m-n(n+1)=0$，

若关于m的方程有正整数解，则

$\Delta=9+4n(n+1)=(2n+1)^2+8=l^2$

（l为正整数），

即$l^2-(2n+1)^2=8$，

$\left[l+(2n+1)\right]\left[l-(2n+1)\right]=8$，

$\because n$，l为正整数，$\therefore l+(2n+1)$与

$l-(2n+1)$同奇或同偶，

$\therefore\begin{cases}l+(2n+1)=4\\l-(2n+1)=2\end{cases}$，解得$n=0$，

$\therefore$不存在正整数m，n，使得

$m(m+k)=n(n+1)$.

当$k>3$时，

①若$k=2t$（$t\geqslant 2$的正整数），

代入$m(m+k)=n(n+1)$.

整理得$m^2+2tm-n(n+1)=0$，

$\therefore \Delta=4t^2+4n(n+1)$

$=(4t^2-1)+(2n+1)^2=l^2$（l为正整数），

即$l^2-(2n+1)^2=4t^2-1$，

$[l+(2n+1)][l-(2n+1)]=4t^2-1$，

令$\begin{cases} l+(2n+1)=4t^2-1 \\ l-(2n+1)=1 \end{cases}$，

解得$\begin{cases} l=2t^2 \\ n=t^2-1 \end{cases}$，此时

$m=\dfrac{-2t+l}{2}=t^2-t$，

②若$k=2t+1$（$t\geqslant 2$的正整数），

代入$m(m+k)=n(n+1)$.

整理得

$m^2+(2t+1)m-n(n+1)=0$，

设$\Delta=(2t+1)^2+4n(n+1)$

$=4t(t+1)+(2n+1)^2=l^2$（l为正整数）

即$l^2-(2n+1)^2=4t(t+1)$，

$\left[l+(2n+1)\right]\left[l-(2n+1)\right]=4t(t+1)$

，

令$\begin{cases} l+(2n+1)=2t(t+1) \\ l-(2n+1)=2 \end{cases}$，

解得$\begin{cases} l=t^2+t+1 \\ n=\dfrac{t(t+1)}{2}-1 \end{cases}$，

此时$m=\dfrac{-(2t+1)+l}{2}=\dfrac{t^2-t}{2}$，

并且m，n的值都是正整数.

综上所述：当$k=3$时，不存在正整数m，n，使得$m(m+k)=n(n+1)$；

当$k=2t$（$t\geqslant 2$的正整数）时，

存在正整数$\begin{cases} m=t^2-t \\ n=t^2-1 \end{cases}$，

使得$m(m+k)=n(n+1)$；

当$k=2t+1$（$t\geqslant 2$的正整数）时，

存在正整数$\begin{cases} m=\dfrac{t^2-t}{2} \\ n=\dfrac{t^2+t}{2}-1 \end{cases}$，

使得$m(m+k)=n(n+1)$.

拓 6

已知方程$x^2+bx+c=0$及$x^2+cx+b=0$分别各有两个整数根x_1，x_2，及x_1'，x_2'，且$x_1x_2>0$，$x_1'x_2'>0$.

（1）求证：$x_1<0$，$x_2<0$，$x_1'<0$，$x_2'<0$.

（2）求证：$b-1\leqslant c\leqslant b+1$；

（3）求b，c所有可能的值.

【解析】

（1）假如$x_1>0$，由x_1x_2，知$x_2>0$，

对于已知两个方程用韦达定理

得$x_1+x_2=-b=-x_1'x_2'$，

这与已知$x_1x_2>0$，$x_1'x_2'>0$矛盾，

因此，$x_1<0$，$x_2<0$.

同理$x_1'<0$，$x_2'<0$.

（2）由韦达定理及$x_1<0$，$x_2<0$有

$c-(b-1)=x_1x_2+x_1+x_2+1$

$=(x_1+1)(x_2+1)\geqslant 0$，

所以$c\geqslant b-1$.

对于方程$x^2+cx+b=0$进行同样

讨论，得

$b \geqslant c-1$.

综合以上结果,

有$b-1 \leqslant c \leqslant b+1$.

(3) 根据(2)的结果可分下列情况讨论:

① 当$c=b+1$时，由韦达定理有$x_1x_2=-x_1-x_2+1$，从而$(x_1+1)(x_2+1)=2$．由于x_1，x_2 都是负整数，故

$$\begin{cases}x_1+1=-1\\x_2+1=-2\end{cases}或\begin{cases}x_1+1=-2\\x_2+1=-1\end{cases},$$

由此算出$b=5$，$c=6$.

经检验$b=5$时，$c=6$符合题意.

② 当$c=b$时，有$x_1x_2=-(x_1+x_2)$,

从而$(x_1+1)(x_2+1)=1$，

因此$x_1=x_2=-2$，故$b=c=4$.

经检验$b=c=4$符合题意.

③ 当$c=b-1$时，$b-c=1$对方程$x^2+cx+b=0$作类似①讨论，得$b=6$，$c=5$.

综上所述得三组值：

$$\begin{cases}b=5\\c=6\end{cases},\begin{cases}b=6\\c=5\end{cases},\begin{cases}b=4\\c=4\end{cases}.$$