初一数学联赛班第十四讲

不定方程

例 1

(1) 求方程$11x+15y=7$的整数解；

(2) 求方程$6x+22y=90$的非负整数解；

(3) 求方程$37x+107y=25$的整数解；

(4) 求方程组$\begin{cases} x+2y+3z=1 \\ 2x-y+2z=3 \end{cases}$的整数解.

【解析】

(1) 根据定理 2，先考察$11x+15y=1$的整数解的情况.

观察可知，$x=-4, y=3$是该方程

的一组解，故$x=-28, y=21$必是方程$11x+15y=7$的一组解，故该方程的所有解可表示为：

$$\begin{cases} x=-28+15k \\ y=21-11k \end{cases}$$（k为整数）．　该做法目的是让学生体会定理 2 的应用．

另解：观察可知$x=2, y=-1$是$11x+15y=7$的一组解，故方程的所有整数解可表示为：

$$\begin{cases} x=2+15k \\ y=-1-11k \end{cases}$$（k为整数）

对比两种解法中的表达式发现，实际上这两个式子是一致的，只

要将$\begin{cases} x=-28+15k \\ y=21-11k \end{cases}$中的$k$多取 2，

化简之后就得到$\begin{cases} x=2+15k \\ y=-1-11k \end{cases}$.

⑵ 遇到这类方程，首先将系数和常数的最大公约数除去.

原方程变为：$3x+11y=45$

到这一步之后，方法与⑴相同，如果学生能够直接看出$x=4, y=3$是方程的一组较解，则原方程的所有整数解可以表示为：$\begin{cases} x=4+11k \\ y=3-3k \end{cases}$（$k$为整数）

当然，如果能看出$x=15, y=0$，

则可表示为：$\begin{cases} x=15+11k \\ y=-3k \end{cases}$（$k$为整数）

可以先考察方程$3x+11y=1$的一组解，可以看出$x=4, y=-1$，故$x=180, y=-45$是原方程的一组解，故$\begin{cases} x=180+11k \\ y=-45-3k \end{cases}$（$k$为整数）.

但是本题要求的不是整数解，而是非负整数解，这也不难，令$x \geqslant 0$，$y \geqslant 0$即可.

故$\begin{cases} x=4+11k \geqslant 0 \\ y=3-3k \geqslant 0 \end{cases} \Rightarrow -\dfrac{4}{11} \leqslant k \leqslant 1$

（k为整数），从而$k=0$或$k=1$，代回原方程即可得原方程的非负整数解为：$\begin{cases}x=4\\y=3\end{cases}$，$\begin{cases}x=15\\y=0\end{cases}$．

(3) 观察本题发现，用我们上述讲过的任何一种方法好像都不好做，系数太大，观察一组特殊解难度较大.

下面介绍一种方法：（辗转相除法）

$107=2\times37+33$，$37=1\times33+4$，

$33=8\times4+1$

于是，$1=33-8\times4$

$=37-4-8\times4$

$=37-9\times4$

$=37-9\times(37-1\times33)$

$=9\times 33-8\times 37$
$=9\times(107-37\times 2)-8\times 37$

$=9\times 107-26\times 37$，

故$x=-26, y=9$是方程

$37x+107y=1$的一组解，由定理

2 可知，$x=-650, y=225$是

$37x+107y=25$的一组解，

故原方程的整数解可表示为：

$$\begin{cases} x=-650+107t \\ y=225-37t \end{cases}$$ （t为整数）

(4) 消去方程组$\begin{cases} x+2y+3z=1 \\ 2x-y+2z=3 \end{cases}$

中的z可得$4x-7y=7$，解此方程

可得

$\begin{cases} x=-7k \\ y=-1-4k \end{cases}$（$k$为整数），代入原方程中任何一个有$z=1+5k$，

故$\begin{cases} x=-7k \\ y=-1-4k \\ z=1+5k \end{cases}$（$k$为整数）

例 2

求方程$xy+3x-5y=9$的整数解.

【解析】

将原方程变形为

$(x-5)(y+3)=-6$.由此可见$x-5$是-6的约数. 因-6共有 8 个约数，故本题共有 8 组解：

$$\begin{cases}x-5\\y+3\end{cases}=\begin{cases}\pm1\\\mp6\end{cases};\begin{cases}\pm2\\\mp3\end{cases};\begin{cases}\pm3\\\mp2\end{cases};\begin{cases}\pm6\\\mp1\end{cases}$$

$$\therefore\begin{cases}x=6\\y=-9\end{cases}\text{或}\begin{cases}x=4\\y=3\end{cases}\text{或}\begin{cases}x=7\\y=-6\end{cases}\text{或}$$

$$\begin{cases}x=3\\y=0\end{cases}\text{或}\begin{cases}x=8\\y=-5\end{cases}\text{或}\begin{cases}x=2\\y=-1\end{cases}\text{或}$$

$$\begin{cases}x=11\\y=-4\end{cases}\text{或}\begin{cases}x=-1\\y=-2\end{cases}.$$

此题是应用分解因式的方法求形如$xy+ax+by=c$的方程的整数解；这里a，b，c为实数.

例 3

求满足

$$2015^2+m^2=2014^2+n^2(0<m<n<2015)$$

的整数对$(m，n)$共有多少组？

【解析】

由

$2015^2+m^2=2014^2+n^2(0<m<n<2015)$

可得：

$n^2-m^2=4029=3\times17\times79$，

$(n-m)(n+m)=3\times17\times79$，

显然，对4029的任意整数分拆均可得到$(m，n)$，

故满足条件的整数对$(m，n)$共

$2\times2\times2=8$（组）.

例 4

求证：方程$x^3+6x^2+5x=y^3-y+2$没有的整数解.

【解析】

原方程可变形为：

$x(x+1)(x+2)+3x(x+1)$

$=y(y-1)(y+1)+2$，左边是 6 的倍数，而右边不是 6 的倍数.

例 5

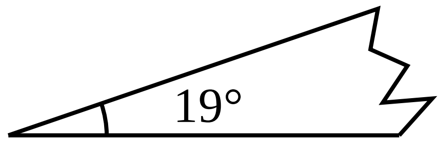
(1) 现有一个$19°$的“模板”（如图），请你设计一个办法，只用这个“模板”和铅笔在纸上画出$1°$的角来.

(2) 现有一个$17°$的“模板”与铅笔，你能否在纸上画出一个$1°$的角来？

(3) 用一个$21°$的“模板”与铅笔，

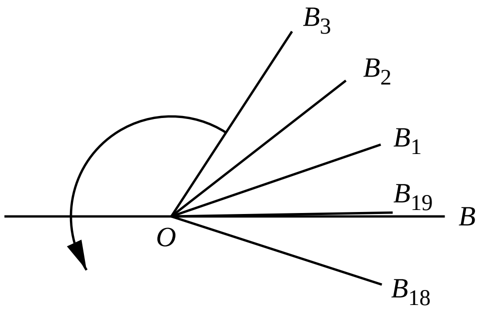
你能否在纸上画出一个1°的角来？

对(2)、(3)两问，如果能，请你简述画法步骤，如果不能，请你说明理由．



【解析】

(1）在平面上取一点O，过O点画一条直线AOB，以19°模板顶点与O重合，另一边落在射线OB_1，仍以O为顶点，解一边重合于OB_1，另一边落在射线OB_2，…，这样做出19个19°的角，其总和为361°，则$\angle BOB_{19}$就是1°的角．



(2) 利用 17° 的角的模板，要画出 1° 的角，关键在于找到整数m和n，使得$17m-180n=1$.

事实上

$17\times53-180\times5=901-900=1$.

作法如下，在平面上任取一点O，过O点画直线AOB，以OB为始边、O为顶点，反时针方向依次画 53 个 17° 的角，设最后的终边为OB_{53}，而$5\times180°$的终边在OA射线，这时$\angle AOB_{53}$即为 1° 的角.

(3) 若用 21° 的模板可以画出 1° 的角，

则存在整数 m，n，使得

$21m-180n=1$.

因为 $3|21$，$3|180 \Rightarrow 3|1$，矛盾.

因此，用 21° 角的模板与铅笔不能画出 1° 的角来.

例 6

某林场安排了 7 天的植树工作. 从第二天起每天都比前一天增加 5 个植树的人，但从第二天起每人每天都比前一天少植 5 棵树. 且同一天植树的人，植相同数量的树. 若这 7 天共植树 9947

棵，则植树最多的那天共植了多少棵？植树最少的那天，有多少人在植树？

【解析】

设第 4 天有m人植树，每人植树n棵，则第 4 天共植树mn棵，于是，第 3 天有$(m-5)$人植树，每人植树$(n+5)$棵，则第 3 天共植树$(m-5)(n+5)$棵；

同理，第 2 天共植树$(m-10)(n+10)$棵；

第 1 天共植树$(m-15)(n+15)$棵；

第 5 天共植树$(m+5)(n-5)$棵；

第 6 天共植树$(m+10)(n-10)$棵；

第 7 天共植树$(m+15)(n-15)$棵.

由 7 天共植树 9947 棵，知

$$(m-15)(n+15)+(m-10)(n+10)+(m-5)(n+5)+mn$$
$$+(m+5)(n-5)+(m+10)(n-10)+(m+15)(n-15)=9947$$

，

化简，得$7mn-700=9947$，即

$mn=1521$.

因为$1521=3^2\times13^2$，又每天都有人植树，所以$m>15$，$n>15$.故

$m=n=39$

因为第 4 天植树的棵数为

$39\times39=1521$，其他各天植树的棵数为

$(39-a)(39+a)$

$=39^2-a^2$

$=1521-a^2<1521$（其中$a=5$或

10 或 15）.（*）

所以第 4 天植树最多，这一天共植树 1521 棵.

由（*），知当$a=15$时，39^2-a^2的值最小.

又当$a=15$时，植树人数为 39+15=54 或 39−15=24，

所以植树最少的那天有 54 人或 24 人植树.

例 7

把若干颗花生分给若干只猴子，如果每只猴子分3颗，就剩下8颗；如果每只猴子分5颗，那么最后一只猴子得不到5颗，那么，共

有几只猴子，共有几花生.

【解析】

设有x只猴子和y颗花生，则：

$$\begin{cases} y-3x=8 & ① \\ 0<5x-y<5 & ② \end{cases}$$

由①得：$y=8+3x$③

③代入②得$0<5x-(8+3x)<5$,

$\therefore 4<x<6.5$.

因为y与x都是正整数，所以x可能为 5 或 6，相应地求出y的值为 23 或 26.

经检验知，$x=5$，$y=23$和$x=6$，$y=26$这两组解符合题意.

答：有 5 只猴子，23 颗花生，或者有 6 只猴子，26 颗花生.

例 8

求证方程$x^2-3y^2=17$没有整数解.

【解析】

由$x^2-3y^2=17$，得

$x^2=3y^2+17=3(y^2+6)-1$,

因此$x^2+1=3(6+y^2)$

∵ x^2被 3 除的余数只能是 0 或 1,

因此x^2+1被 3 除的余数是 1 或 2,

∴$3\nmid x^2+1$

∴原方程无整数解.

此题利用了整除概念来解不定方程问题.

例 9

若正整数x，y满足$x^2+y^2=1997$，求$x+y$的值.

【解析】

1997 为奇数，所以x，y两个数一个是奇数，一个是偶数，不妨设x为奇数，y为偶数. 同时，完全平方数的尾数只可能是1，4，5，6，9，1997的末尾数字为 7，所以，x，y的个位数字必是1，4或1，6或9，4或9，6. y是偶数，所以y^2除以 4 余 0，而 1997 除以 4 余 1，所以x^2除以 4 余 1. 由于$x^2<1997$可知$x<45$，因此x可能的值为1，9，21，29，41. 经

检验，仅当$x=29$时，有$y=34$，

此时$29^2+34^2=1997$，

$29+34=63$.

拓 1

若$\begin{cases}x=x_0\\y=y_0\end{cases}$是关于$x$，$y$的不定方程$ax+by+c=0$的一组整数解，其中$(a，b)=1$，

求证：此方程的所有整数解都可以写作$\begin{cases}x=x_0+bk\\y=y_0-ak\end{cases}$，其中$k$为整数.

【解析】

首先，将$\begin{cases} x = x_0 + bk \\ y = y_0 - ak \end{cases}$代入方程左边得，

$a\left(x_0 + bk\right) + b\left(y_0 - ak\right) = ax_0 + by_0 = c$，

所以$\begin{cases} x = x_0 + bk \\ y = y_0 - ak \end{cases}$（其中$k \in Z$）是方程的解，

其次，设$\begin{cases} x = x' \\ y = y' \end{cases}$是方程的任意一个解，

则$ax' + by' = c$，

又$\begin{cases} x = x_0 \\ y = y_0 \end{cases}$是方程的一个特解，

所以$ax_0+by_0=c$，

两式相减得

$a(x'-x_0)+b(y'-y_0)=0$，

所以$b\mid a(x'-x_0)$，

又$(a, b)=1$，所以$b\mid(x'-x_0)$，

于是存在整数k，使$x'-x_0=bk$，

即$x'=x_0+bk$，

代入方程得 $y'=y_0-ak$.

拓 2

a,b,c为正整数，且$a^2+b^3=c^4$，

求c的最小值.

【解析】

显然$c>1$. 由题设得：

$(c^2-a)(c^2+a)=b^3$，

若取$\begin{cases} c^2 - a = b \\ c^2 + a = b^2 \end{cases}$，则$c^2 = \dfrac{b(b+1)}{2}$

由大到小考察b，使$\dfrac{b(b+1)}{2}$为完全平方数，易知当$b = 8$时，$c^2 = 36$，则$c = 6$，从而$a = 28$．下面说明c没有比6更小的正整数解，列表如下：

c	c^4	$b^3\left(b^3 < c^4\right)$	$c^4 - b^3$
2	16	1，8	17，8
3	81	1，8，27，64	80，73，54，17
4	256	1，8，27，64，125，216	255，248，229，192，131，40
5	625	1，8，27，64，125，216，343，512	624，617，598，561，500，409，282，113

显然，表中$c^4 - x^3$的值均不是完全平方数．故c的最小值为 6

拓 3

求不定方程

$3x^2+7xy-2x-5y-17=0$的全

部正整数解.

【解析】

由$3x^2+7xy-2x-5y-17=0$得

$y=\dfrac{-3x^2+2x+17}{7x-5}$，又$x$，$y$均为

正整数，所以$x\geqslant 1$，$y\geqslant 1$，

从而$-3x^2+2x+17\geqslant 7x-5$，

$\therefore 3x^2+5x\leqslant 22$，

$\therefore$只可能$x=1$或$x=2$，

当$x=1$时，$y=8$；当$x=2$时，$y=1$.

拓 4

李林在银行兑换了一张面值为1万元以内的人民币支票，兑换员不小心将支票上的前两位与后两位数字看倒置了，（例如把1234元看成3412元），并按看错的数字支付．李林将其款花去了350元后，发现其余额恰为支票面额的 2 倍，于是急忙到银行将多领的款项退回，那么李林应退回的款额是多少元？

【解析】

设支票上原有的前两位与后两位数分别为x和y，则可列出方程：$(100y+x)-350=2(100x+y)$，其

中x，y为整数，且

$10 \leqslant x < 100$，$10 \leqslant y < 100$.

化简方程，得：$98y = 199x + 350$，

$$y = \frac{199x + 350}{98} = 2x + 3 + \frac{3x + 56}{98},$$

令$\frac{3x + 56}{98} = t$（t为整数），

$$x = \frac{98t - 56}{3} = 32t - 18 + \frac{2t - 2}{3}$$，令

$\frac{2t - 2}{3} = u$（u为整数），

$\therefore t = \frac{3u + 2}{2} = u + 1 + \frac{u}{2}$，令$\frac{u}{2} = w$

（w为整数），

$\therefore$ $u = 2w$，$t = 3w + 1$，

$x = 14 + 98w$，$y = 32 + 199w$，

∴原方程通解为$\begin{cases} x=14+98w \\ y=32+199w \end{cases}$（$w$为整数），

由$10\leqslant x<100$，即

$10\leqslant 14+98w<100$知$w=0$，

∴$\begin{cases} x=14 \\ y=32 \end{cases}$

故李林支票面额为1432元，误看成3214元．

应退$3214-1432=1782$（元）．

拓 5

如果两个整数x，y的和、差、积、商的和等于 100．那么这样的整数有几对？求x与y的和的最小

值，及x与y的积的最大值.

【解析】

由题意，知

$$\left(x+y\right)+\left(x-y\right)+xy+\frac{x}{y}=100\left(y\neq 0\right)$$

即$2x+xy+\dfrac{x}{y}=1^2\times 2^2\times 5^2$,

亦即$\dfrac{x}{y}\left(y+1\right)^2=1^2\times 2^2\times 5^2$,

因为x，y是整数,

所以$x+y$，$x-y$，xy都是整数,

又它们与$\dfrac{x}{y}$的和是整数100,故$\dfrac{x}{y}$也是整数.

(1)当$\dfrac{x}{y}=25$，$\left(y+1\right)^2=2^2$时,

$y+1=\pm 2$，所以$\begin{cases} x=25, \\ y=1, \end{cases}$ 或

$\begin{cases} x=-75, \\ y=-3. \end{cases}$

(2)当$\dfrac{x}{y}=4$，$(y+1)^2=5^2$时，

$y+1=\pm 5$所以$\begin{cases} x=16, \\ y=4, \end{cases}$ 或

$\begin{cases} x=-24, \\ y=-6. \end{cases}$

(3)当$\dfrac{x}{y}=1$，$(y+1)^2=10^2$时，

$y+1=\pm 10$，所以$\begin{cases} x=9, \\ y=9, \end{cases}$ 或

$$\begin{cases} x=-11, \\ y=-11. \end{cases}$$

(4)当$\dfrac{x}{y}=100$，$\left(y+1\right)^2=1^2$时，

$y+1=\pm 1$.

所以$\begin{cases} x=0, \\ y=0, \end{cases}$ （舍去），或

$$\begin{cases} x=-200, \\ y=-2. \end{cases}$$

由上可知，满足题意的整数x，y共 7 对.

其中，

$\left(x+y\right)_{\min}=-200+\left(-2\right)=-202$，

$\left(xy\right)_{\max}=\left(-200\right)\times\left(-2\right)=400$.

拓 6

有一长、宽、高分别为正整数m，n，$r\left(m\leqslant n\leqslant r\right)$的长方体，表面涂上红色后切成棱长为 1 的正方体，已知不带红色的正方体个数与两面带红色的正方体个数之和，减去一面带红的正方体个数得 1985．求m，n，r的值．

【解析】

首先设$m>2$，依题意，不带红色的正方体个数为

$k_0=(m-2)(n-2)(r-2)$；

一面带红色的正方体个数为

$k_1=2(m-2)(n-2)+2(m-2)(r-2)+2(n-2)(r-2)$

；

两面带红色的正方体的个数为

$k_2=4(m-2)+4(n-2)+4(r-2)$；

于是有$k_0-k_1+k_2=1985$，

即

$(m-2)(n-2)(r-2)+4[(m-2)+(n-2)+(r-2)]$

$-2[(m-2)(n-2)+(m-2)(r-2)+(n-2)(r-2)]=1985$

.

亦即

$[(m-2)-2][(n-2)-2][(r-2)-2]$

$=1985-8=1977$，

$(m-4)(n-4)(r-4)=1977$.

$\because 1977=1\times3\times659$

$=1\times1\times1977$

$=(-1)\times(-1)\times1977$，

$\therefore m-4=1, n-4=3, r-4=659$,

或$m-4=1, n-4=1, r-4=1977$,

或$m-4=-1$，$n-4=-1$,

$r-4=1977$.

因此$m=5$，$n=7$，$r=663$,

或$m=5$，$n=5$，$r=1981$,

或$m=3$，$n=3$，$r=1981$.

其次设$m=1$，这时$n=1$，无解.

$\therefore n\geqslant 2$. 依题意，不带红色的正方体的个数为$k_0=0$，一面带红色的正方体的个数为$k_1=0$.

两面带红色的正方体个数为

$k_2=(n-2)(r-2)$,

于是有$k_0+k_2-k_1=k_2=1985$.

即$(n-2)(r-2)=1985=5\times397$，

$\therefore n-2=5$，$r-2=397$，

或$n-2=1$，$r-2=1985$，

$\therefore m=1$，$n=7$，$r=399$，

或$m=1$，$n=3$，$r=1987$.

再设$m=2$，$k_0=0$，k_1与k_2都是偶数，显然$k_0+k_2-k_1\neq1985$.

综上所述，符合题意的m，n，r有五组：

$m_1=5$，$n_1=7$，$r_1=663$；

$m_2=5$，$n_2=5$，$r_2=1981$；

$m_3=3$，$n_3=3$，$r_3=1981$；

$m_4=1$，$n_4=7$，$r_4=399$；

$m_5=1$，$n_5=3$，$r_5=1987$.

拓 7

如果p，q，$\frac{2p-1}{q}$，$\frac{2q-1}{p}$都是整数，并且$p>1$，$q>1$，试求$p+q$的值.

【解析】

首先有$p \neq q$.

事实上，若$p=q$，则$\frac{2p-1}{q}=\frac{2p-1}{p}=2-\frac{1}{p}$，因为$p>1$，$\frac{2p-1}{q}$不是整数，与题设矛盾.

由对称性，不妨设$p>q$，且令

$\frac{2q-1}{p}=m$，则m为正整数.

$\because mp=2q-1<2p-1<2p$，

$\therefore m=1$.

这样$p=2q-1$，据此，

$\frac{2p-1}{q}=\frac{4q-3}{q}=4-\frac{3}{q}$，

但$\frac{2p-1}{q}$也是正整数，且$q>1$，

$\therefore q=3$，

于是$p=2q-1=5$，

$\therefore p+q=8$.

拓 8

求不定方程$3^x+4^y=5^z$的全部正整数解

【解析】

容易发现$x=y=z=2$是原方程的解.

原方程两边模 3 得

$1\equiv(-1)^z\pmod 3$故z是偶数．令

$z=2u\left(u\in N^+\right)$.

于是$3^x=\left(5^u+2^y\right)\left(5^u-2^y\right)$

由于$\left(5^u，2^y\right)=1$.

所以$\left(5^u+2^y，5^u-2^y\right)=1$.

从而$5^u+2^y=3^x$，$5^u-2^y=1$.

两边模 3 得到u是奇数，y是偶数.

另一方面，原方程模 4，则x为偶数．此时若$y>2$．则

$5^u + 2^y \equiv 5 \pmod 8$但是

$3^x \equiv 1 \pmod 8$.

所以$5 \equiv 1 \pmod 8$矛盾.

综上$x = y = z = 2$