

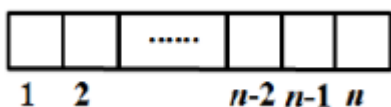
第四讲 组合总动员

【例 1】将一个正方体的表面都染成红色，再切割成 n^3 ($n > 3$) 个相同的小正方体，若只有一面是红色的小正方体数目与任何面都不是红色的小正方体数目相同，则 $n = \underline{\hspace{1cm}}$.

【例 2】甲乙丙丁的衬衫上各印有一个号码，甲说“我是 2 号，乙是 3 号”；乙说“我是 2 号，丙是 4 号”；丙说“我是 3 号，丁是 2 号”；丁说“我是 1 号，乙是 3 号”；他们四个人都说对一半，则甲是 ()
 A. 4 号 B. 3 号 C. 2 号 D. 1 号

【例 3】四支队伍参加足球赛，任意两支队伍都恰比赛一场，赢的队伍得 3 分，平手的两队各得 1 分，输的队伍得 0 分，比赛最终结果是这四支队伍各得 5, 1, x , 6 分，则 x 为 ()
 A. 3 B. 4 C. 5 D. 6

【例 4】将 $1 \times n$ 个小方格从左到右进行编号：1, 2, ..., $n-1, n$,



现有三粒棋子放在编号为 $n-2, n-1, n$ 的三个小方格中。甲乙两人玩下面的游戏：两人依次取一枚棋子放在左边编号小的空格（没有放过棋子）中，最后一个放棋子的为胜者，问谁有必胜策略

【例 5】已知四条直线 l_1, l_2, l_3, l_4 依次相交于点 O ，过 l_1 上的任意一点 A_1 引平行于 l_4 的直线交 l_2 于点 A_2 ，过 A_2 引平行于 l_1 的直线交 l_3 于点 A_3 ，过 A_3 引平行于 l_2 的直线交 l_4 于点 A_4 ，过 A_4 引平行于 l_3 的直线交 l_1 于点 P ，求证： $OP \leq \frac{1}{4}OA_1$.

【例 6】求证：对于任意的 8 个自然数，一定能从中找到 6 个数 a, b, c, d, e, f ，使得 $(a-b)(c-d)(e-f)$ 是 105 的倍数。

【例 7】圆周上有 2000 个点，在其上任意地标上 $0, 1, 2, \dots, 1999$ （每一点只标一个数，不同的点标上不同的数）。证明必然存在一点，与它紧相邻的两个点和这点上所标的三个数之和不小于 2999

【例 8】线段 AB 上有 1998 个点（包括 A, B 两点），将点 A 染成红色，点 B 染成蓝色，其余各点染成红色或蓝色。这时，图中共有 1997 条互不重叠的线段。
问：两个端点颜色相异的小线段的条数是奇数还是偶数？为什么？

【例 9】在 6×6 的正方形网格中，把部分小方格涂成红色。然后任意划掉 3 行和 3 列，使得剩下的小方格中至少有 1 个是红色的。那么，总共至少要涂红多少小方格？

【例 10】20 道复习题，小明在两周内做完，每天至少做一道题。证明：小明一定在连续的若干天内恰好做了 7 道题目。