2016 年全国初中数学联合竞赛（初一年级）试题

参考答案及评分标准（C）

一、选择题：（本题满分 48 分，每小题 8 分）

1. 定义运算 $a*b=(\dfrac{a^4+b^2}{a^2-b})^2-|a-b|$，则 $2*3=$ （　　）

A. 626　　B. 288　　C. 168　　D. 624

【答案】D。

代入求值得结果 624。

2. 已知多项式 $3x^2-2(y-x^2-1)+mx^2$ 的值与 x 无关，则 m 的值为 （　　）

A. 5　　B. 1　　C. -1　　D. -5

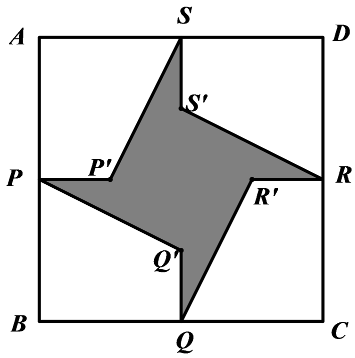
【答案】D。

合并同类项得：$3x^2-2\left(y-x^2-1\right)+mx^2=\left(5+m\right)x^2-2y+2$，

∵与 x 无关，∴ $5+m=0$。

解得 $m=-5$。

3.如图，已知正方形边长为 2，P,Q,R,S 分别为正方形边上的中点，点 P',R' 在直线 PR 上，点 Q',S' 在直线 QS 上，且 $PP'=QQ'=RR'=SS'=\dfrac{1}{2}$，则图中阴影部分的面积为（　　）



A. $\dfrac{1}{4}$　　B. $\dfrac{1}{2}$　　C. 1　　D. 2

【答案】C。

将阴影部分分成四个直角三角形，每个直角三角形的两条直角边分别为 1 和 $\dfrac{1}{2}$。

4.小明从东面上山西面下山，已知下山的路程是上山路程的两倍，上山的速度为 a 千米/小时，下山的速度为 b 千米/小时，则小明全程的平均速度为 （　　）

A. $\frac{a+b}{2}$ 千米/小时　　B. $\frac{a+2b}{3}$ 千米/小时

C. $\frac{3ab}{a+2b}$ 千米/小时　　D. $\frac{3ab}{2a+b}$ 千米/小时

【答案】D。

设上山路程为s,则下山路程为2s, $\bar{V}=\frac{3s}{\frac{s}{a}+\frac{2s}{b}}=\frac{3ab}{b+2a}$。

5. 已知a,b为正整数，满足$ab-2b-a-24=0$，则$a+b$的最大值为　　（　　）

A. 7　　B. 18　　C. 29　　D. 30

【答案】D。

由$ab-2b-a-24=0$得$b=\frac{a+24}{a-2}=1+\frac{26}{a-2}$。

$\because a,b$为正整数，$\therefore a-2\,|\,26$。

①$a=3,b=27$　②$a=4,b=14$　③$a=15,b=3$　④$a=28,b=2$，

$\therefore a+b$最大为30.

6. 若存在3个互不相同的实数a,b,c，使得

$|1-a|+|1-3a|+|1-4a|=|1-b|+|1-3b|+|1-4b|=|1-c|+|1-3c|+|1-4c|=t$，

则$t=$　　（　　）

A.2　　B. 1　　C. -1　　D. -2

【答案】B

$$|1-a|+|1-3a|+|1-4a|=\begin{cases}8a-3, a\ge 1\\ 6a-1, \frac{1}{3}\le a<1\\ 1\qquad, \frac{1}{4}\le a<\frac{1}{3}\\ 3-8a, a<\frac{1}{4}\end{cases}$$

所以，$t=1$。

二、填空题（本题满分52分；7-10题每题8分，11-12题每题10分）

7. 已知a,b为实数，且关于x的方程$(a-2)x=1-b$有无穷多个解，则$a+b=$_________。

【答案】3.

要使方程有无穷多个解$\begin{cases}a-2=0\\1-b=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=2\\b=1\end{cases}\Rightarrow a+b=3$。

8. 计算

$1^2-2^2-3^2+4^2+5^2-6^2-7^2+8^2+\cdots+2013^2-2014^2-2015^2+2016^2=$_________。

【答案】2016.

将计算式依次分组，每 4 个数一组得：$n^2-(n+1)^2-(n+2)^2+(n+3)^2=4$，

$\therefore$原式$=2016$。

9. 计算$\dfrac{(3^4+4)(7^4+4)(11^4+4)}{(1^4+4)(5^4+4)(9^4+4)}=$_________。

【答案】145.

$$n^4+4=n^4+4n^2+4-4n^2=(n^2+2)^2-(2n)^2=(n^2-2n+2)(n^2+2n+2)=[n(n-2)+2][n(n+2)+2]$$

$$\therefore 原式=\frac{(1\times3+2)(3\times5+2)(5\times7+2)(7\times9+2)(9\times11+2)(11\times13+2)}{(1\times(-1)+2)(1\times3+2)(3\times5+2)(5\times7+2)(7\times9+2)(9\times11+2)}$$

$$=\frac{11\times13+2}{1\times(-1)+2}=145。$$

或者直接计算得结果。

10. 在整数 8920 前面补上两个正整数a,b，得到六位数$\overline{ab8920}$，且该六位数被 3 和 11 整除，则$a+b=$_________。

【答案】5 或 11 或 17.

$\because 3\mid\overline{ab8920}$，$\therefore 3\mid a+b+8+9+2+0$，$\therefore 3\mid a+b+1$。

又$\because 11\mid\overline{ab8920}$，$\therefore 11\mid(a+8+2)-(b+9+0)$，$\therefore 11\mid a-b+1$。

设$a-b+1=11k$，k为整数。

$\because a,b$为不超过 9 的非负整数，$\therefore a-b+1=0$，即$b=a+1$。

由$3\mid a+b+1$，$\therefore 3\mid 2a+2$，即$3\mid a+1$。

可以取$\begin{cases} a=2,b=3 \\ a=5,b=6 \\ a=8,b=9 \end{cases}$ $\therefore a+b=5$ 或 11 或 17。

11．若n为整数，且$\sqrt{n^2+9n+30}$是自然数，则$n=$_________。

【答案】-14或-7或-2或5。

设$\sqrt{n^2+9n+30}=p$（p为非负整数），

则$n^2+9n+30=p^2 \Rightarrow 4n^2+36n+120=4p^2 \Rightarrow (2n+9)^2+39=4p^2$

$\Rightarrow 39=(2p+2n+9)(2p-2n-9)$

$\begin{cases} 2p+2n+9=1 \\ 2p-2n-9=39 \end{cases}$或$\begin{cases} 2p+2n+9=39 \\ 2p-2n=9=1 \end{cases}$或$\begin{cases} 2p+2n+9=3 \\ 2p-2n-9=13 \end{cases}$或$\begin{cases} 2p+2n+9=13 \\ 2p-2n-9=3 \end{cases}$

$\Downarrow$ $\Downarrow$ $\Downarrow$ $\Downarrow$

$\begin{cases} p=10 \\ n=-14 \end{cases}$ $\begin{cases} p=10 \\ n=5 \end{cases}$ $\begin{cases} p=4 \\ n=-7 \end{cases}$ $\begin{cases} p=4 \\ n=-2 \end{cases}$

$\therefore n=-14$或-7或-2或 5。

12．满足$\begin{cases} 2015 \le x < 2025 \\ 2015 \le x+y+z < 2025 \\ 2015 \le x+2y+4z < 2025 \end{cases}$ 的不同的有序整数组(x,y,z)的个数为_________。

【答案】500.

1° $x=2015$，$0 \le y+z \le 9$，$0 \le 2y+4z \le 9$，

$2y+4z$取 0, 2, 4, 6, 8；$y+z$取 0, 1, 2，•••，9；共 50 组。

2° $x=2016$，$-1 \le y+z \le 8$，$-1 \le 2y+4z \le 8$

$2y+4z$取 0, 2, 4, 6, 8；$y+z$取-1，0，•••，8；共 50 组。

同理，$x=2017,2018,\cdots,2024$，每种情况，y,z恒有 50 种，故共有 500 种。