初一数学联赛班第十五讲

高斯符号

例 1

求下列各数：

$[2]$；$\{2\}$；$[3.2]$；$\{3.2\}$；$[-2.3]$；

$\lceil -2.3 \rceil$；$\{-2.3\}$；$\{\pi\}$；$\lceil \pi \rceil$.

【解析】

$[2]=2$；$\{2\}=0$；$[3.2]=3$；

$\{3.2\}=0.2$；$[-2.3]=-3$；

$\lceil -2.3 \rceil=-2$；$\{-2.3\}=0.7$；

$\{\pi\}=\pi-3$；$\lceil \pi \rceil=4$.

例 2

设$[x]$表示不大于x的最大整数，

如$[\pi]=3$，求

$\left[\sqrt{1}\right]+\left[\sqrt{2}\right]+\left[\sqrt{3}\right]+\left[\sqrt{4}\right]+\cdots+\left[\sqrt{100}\right]$

的值.

【解析】

∵原式各求和项中，数值为n的

项从$\left[\sqrt{n^2}\right]$到$\left[\sqrt{(n+1)^2-1}\right]$.

所以数值为n的项有

$(n+1)^2-n^2=2n+1$（个），

∴原式

$=1\times(2+1)+2\times(2\times2+1)+\ldots+9\times(2\times9+1)+10$

$=1+2+\ldots+10+2\times\left(1^2+2^2+3^2+\ldots+9^2\right)=625$

.

例 3

正整数n小于100，并满足等式$\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{6} \right\rfloor = n$，其中$\lfloor x \rfloor$表示不超过$x$的最大整数，这样的正整数$n$有几个？

【解析】

分析：利用$\lfloor x \rfloor$表示不超过x的最大整数的性质，求出$\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{6} \right\rfloor$的范围.

$\because \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \leqslant \frac{n}{2}, \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor \leqslant \frac{n}{3}, \left\lfloor \frac{n}{6} \right\rfloor \leqslant \frac{n}{6}$

$\therefore$

$$\left[\frac{n}{2}\right]+\left[\frac{n}{3}\right]+\left[\frac{n}{6}\right]\leqslant\frac{n}{2}+\frac{n}{3}+\frac{n}{6}=n.$$

又$\because\left[\frac{n}{2}\right]+\left[\frac{n}{3}\right]+\left[\frac{n}{6}\right]=n$

$\therefore\left[\frac{n}{2}\right]=\frac{n}{2},\left[\frac{n}{3}\right]=\frac{n}{3},\left[\frac{n}{6}\right]=\frac{n}{6}$

$\therefore n$的个数有$\left[\frac{100}{6}\right]=16$个.

例 4

(1) 解方程：$[11x]=11$；

(2) 解方程：$5x+2[x]-31=0$；

(3) 解方程：$x^2-2[x]-3=0$.

【解析】

(1) 变为$11\leqslant 11x<12$

所以$1\leqslant x<\frac{12}{11}$.

(2) 由

$x-1<[x]\leqslant x$，$[x]=\frac{31-5x}{2}$得

$$\begin{cases}\frac{31-5x}{2}\leqslant x\\ \frac{31-5x}{2}>x-1\end{cases}，解得\begin{cases}x\geqslant\frac{31}{7}\\ x<\frac{33}{7}\end{cases}.$$

故$[x]=4$.代入原方程有

$5x+8-31=0$，得$x=\frac{23}{5}$.

(3) $[x]=\frac{x^2-3}{2}$，$\because x-1<[x]\leqslant x$，

$$\therefore\begin{cases}\frac{x^2-3}{2}>x-1\\ \frac{x^2-3}{2}\leqslant x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x^2-2x-1>0\\ x^2-2x-3\leqslant 0\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x>1+\sqrt{2}\text{ 或 }x<1-\sqrt{2}\\-1\leqslant x\leqslant 3\end{cases}$$

$\therefore -1\leqslant x<1-\sqrt{2}$ 或

$1+\sqrt{2}<x\leqslant 3$.

$\therefore [x]=-1,2,3$,

对应求得$x=-1,\sqrt{7},3$.

经检验成立.

例 5

解方程:

(1) $[2x]+[3x]=8x-\dfrac{7}{2}$;

(2) $[2x]+[3x]=95$.

【解析】

(1) $\because 2x-1<[2x]\leqslant 2x$,

$3x-1<[3x]\leqslant 3x$,

$\therefore 5x-2<8x-\frac{7}{2}\leqslant 5x$,

解得$\frac{1}{2}<x\leqslant\frac{7}{6}$,

$\therefore \frac{1}{2}<8x-\frac{7}{2}\leqslant\frac{35}{6}$,

则满足条件的整数为

1，2，3，4，5,

代入得$x=\frac{9}{16}$，$\frac{11}{16}$，$\frac{13}{16}$，$\frac{15}{16}$，$\frac{17}{16}$,

经检验，只有$\frac{13}{16}$，$\frac{17}{16}$是原方程的解.

(2) 方程左侧

$=[2([x]+\{x\})]+[3([x]+\{x\})]$

$=2[x]+\left[2\{x\}\right]+3[x]+\left[3\{x\}\right]$

故$5[x]+\left[2\{x\}\right]+\left[3\{x\}\right]=95$，由于$0\leqslant 2\{x\}<2$，$0\leqslant 3\{x\}<3$.

所以$90<5[x]\leqslant 95$，

故$[x]=19$，$\left[2\{x\}\right]=\left[3\{x\}\right]=0$.

所以$19\leqslant x<\dfrac{58}{3}$.

例 6

已知$\begin{cases} x+\{y\}=2014 \\ [y]+\{z\}=-2.4 \\ z+\{x\}=2.3 \end{cases}$，求$x+y+z$的值.

【解析】

由$[y]+\{z\}=-2.4$可知$[y]=-3$，

$\{z\}=0.6$,

$\therefore z+\{x\}=[z]+0.6+\{x\}=2.3$,

$\therefore [z]+\{x\}=1.7$,

$\therefore [z]=1$, $\{x\}=0.7$,

$\therefore x+\{y\}=[x]+0.7+\{y\}=2014$,

$\therefore [x]+\{y\}=2013.3$,

$\therefore [x]=2013$, $\{y\}=0.3$,

$\therefore x=[x]+\{x\}=2013.7$,

$y=[y]+\{y\}=-2.7$,

$z=[z]+\{z\}=1.6$,

$\therefore x+y+z=2012.6$.

例 7

(1) 求120!末尾有多少个 0?

⑵ 求30!的标准分解式.

【解析】

⑴ $\left[\frac{120}{5}\right]=24$，$\left[\frac{120}{25}\right]=4$．故一共有 28 个

⑵ 30!的全部质因数是不大于 30 的所有质数 2，3，5，7，11，13，17，19，23，29.

它们在的30!标准分解式中的指数各为

$$\left[\frac{30}{2}\right]+\left[\frac{30}{4}\right]+\left[\frac{30}{8}\right]+\left[\frac{30}{16}\right]$$

$$=15+7+3+1=26,$$

$$\left[\frac{30}{3}\right]+\left[\frac{30}{9}\right]+\left[\frac{30}{27}\right]=10+3+1=14,$$

$$\left[\frac{30}{5}\right]+\left[\frac{30}{25}\right]=6+1=7,$$

$$\left[\frac{30}{7}\right]=4,\left[\frac{30}{11}\right]=2,\left[\frac{30}{13}\right]=2,$$

$$\left[\frac{30}{17}\right]=1,\left[\frac{30}{19}\right]=1,\left[\frac{30}{23}\right]=1,\left[\frac{30}{29}\right]=1.$$

故30!的标准分解式为

$$30!=2^{26}\times3^{14}\times5^{7}\times7^{4}\times11^{2}\times13^{2}\times17\times19\times23\times29$$

.

例 8

（1）设$a_k=\left[\frac{2009}{k}\right]$，

$k=1$，2，$\cdots$，100，则这 100 个数中有多少个不同的整数？

(2) 在$\left[\frac{1^2}{2012}\right]$，$\left[\frac{2^2}{2012}\right]$，$\left[\frac{3^2}{2012}\right]$，……，$\left[\frac{2012^2}{2012}\right]$中，有多少个不同的整数？

【解析】

(1) $\because 44<\sqrt{2009}<45$，

$\left[\frac{2009}{45}\right]=44$，$\left[\frac{2009}{100}\right]=20$，

$\therefore$ 从$k=45$至$k=100$，一共有不同的整数$44-19=25$个，

而从$k=1$至$k=44$共有不同的整数44个，

∴共有不同的整数69个.

(2) 注意到$\dfrac{1006^2}{2012}-\dfrac{1005^2}{2012}<1$,

而$\dfrac{1007^2}{2012}-\dfrac{1006^2}{2012}>1$,

由$\left[\dfrac{1006^2}{2012}\right]=503$可得，共有

$504+1006=1510$个不同整数.

例 9

求$\sum\limits_{n=1}^{100}\left[\dfrac{23n}{101}\right]$的值.

【解析】

由题设得到对于

$n=1$，2，3，…，100，$\dfrac{23n}{101}$都不

是整数，

因为$\dfrac{23n}{101}+\dfrac{23(101-n)}{101}=23$，

所以$\left\{\dfrac{23n}{101}\right\}+\left\{\dfrac{23(101-n)}{101}\right\}=1$，

故$\left[\dfrac{23n}{101}\right]+\left[\dfrac{23(101-n)}{101}\right]=22$，

原式$=22\times 50=1100$.

拓 1

对任意正整数$n(n>2)$，证明：

$$\left[\frac{n(n+1)}{4n-2}\right]=\left[\frac{n+1}{4}\right].$$

【解析】

易得$\dfrac{n(n+1)}{4n-2}-\dfrac{n+1}{4}=\dfrac{n+1}{4(2n-1)}$.(1)

则$\dfrac{n(n+1)}{4n-2}=\dfrac{n+1}{4}+\dfrac{n+1}{4(2n-1)}$，(2)

因整数$n>2$时，故当

$n+1=4q(q\geqslant 1)$时，此时由(2)式得

$$\left[\frac{n(n+1)}{4n-2}\right]=\left[q+\frac{q}{8q-3}\right]$$

$$=q+\left[\frac{q}{8q-3}\right]=q=\left[\frac{n+1}{4}\right].$$

当$n+1=4q+1(q\geqslant 1)$时，由(2)式得

$$\left[\frac{n(n+1)}{4n-2}\right]=\left[q+\frac{12q}{4(8q-1)}\right]$$

$$=q+\left[\frac{12q}{4(8q-1)}\right]=q=\left[\frac{n+1}{4}\right].$$

当$n+1=4q+2(q\geqslant 1)$时，由(2)式

得

$$\left[\frac{n(n+1)}{4n-2}\right]=\left[q+\frac{5q+1}{8q+1}\right]$$

$$=q+\left[\frac{5q+1}{8q+1}\right]=q=\left[\frac{n+1}{4}\right].$$

当$n+1=4q+3(q\geqslant 1)$时，由(2)式

得

$$\left[\frac{n(n+1)}{4n-2}\right]=\left[q+\frac{7q+3}{8q+3}\right]$$

$$=q+\left[\frac{7q+3}{8q+3}\right]=q=\left[\frac{n+1}{4}\right].$$

拓 2

（1）证明：对于任意的实数x，都有$[x]+\left[x+\frac{1}{2}\right]=[2x]$

（2）证明：$[x]+\left[x+\frac{1}{n}\right]+\left[x+\frac{2}{n}\right]+\cdots+\left[x+\frac{n-1}{n}\right]=[nx]$，其中$n$是一个大于 1 的自然数.

【解析】

（1）因为$x=[x]+\{x\}$.

所以$x+\frac{1}{2}=[x]+\{x\}+\frac{1}{2}$，

$2x=2[x]+2\{x\}$

（分类讨论）当$0 \leqslant \{x\} < 0.5$时，$[x+0.5]=[x]$，$[2x]=2[x]$代入得证；

当$0.5 \leqslant \{x\} < 1$时，

$[x+0.5]=[x]+1$；$2x=2[x]+1$代入得证.

(2) 同上题类似，也是分类讨论

当$\frac{k}{n} \leqslant \{x\} < \frac{k+1}{n}$，等式左边$=n[x]+k$

等式右边$=n[x]+k$.

拓 3

(1) 解方程：$[x]\{x\}+x=2\{x\}+10$

(2) 解方程：$\left[\frac{x}{2}\right]+\left[\frac{x}{3}\right]=x.$

【解析】

(1) 化简得

$[x]\{x\}+[x]+\{x\}=2\{x\}+10$

$\{x\}([x]-1)=10-[x]$

如果$[x]-1=0$则$10-[x]\ =0$矛盾！

如果$[x]-1\neq 0$，则$\{x\}=\frac{10-[x]}{[x]-1}$

所以$\{x\}+1=\frac{9}{[x]-1}$.

$1\leqslant \frac{9}{[x]-1}<2$；

所以$4.5<[x]-1\leqslant 9$，

$5.5<[x]\leqslant 10$

所以$[x]=6,7,8,9,10$分别代入得

到$\{x\}=\frac{4}{5},\frac{1}{2},\frac{2}{7},\frac{1}{8},0$

综上$x=6\frac{4}{5},7\frac{1}{2},8\frac{2}{7},9\frac{1}{8},10$

(2) 首先等式左边是整数，

所以右边x也是整数

$\frac{x}{2}-\left\{\frac{x}{2}\right\}+\frac{x}{3}-\left\{\frac{x}{3}\right\}=x$，

推出$\left\{\frac{x}{2}\right\}+\left\{\frac{x}{3}\right\}=-\frac{x}{6}$（*）

由于x为整数，所以$0\leqslant\left\{\frac{x}{2}\right\}\leqslant\frac{1}{2}$；

$0\leqslant\left\{\frac{x}{3}\right\}\leqslant\frac{2}{3}$，

$\therefore 0 \leqslant \left\{\frac{x}{2}\right\} + \left\{\frac{x}{3}\right\} \leqslant \frac{7}{6}$,

$\therefore -7 \leqslant x \leqslant 0$.

将其中的整数代入*式,

$x = -7$，-5，-4，-3，-2，0.

拓 4

计算:

$$\left[\frac{1^3}{100}\right] + \left[\frac{2^3}{100}\right] + \left[\frac{3^3}{100}\right] + \cdots + \left[\frac{100^3}{100}\right]$$

.

（累加立方和公式:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$$

）

【解析】

由于$\dfrac{n^3}{100}+\dfrac{(100-n)^3}{100}$

$=\dfrac{100\left(n^2-100n+n^2+1000-200n+n^2\right)}{100}$

为整数，

当n不是10倍数时，

$\dfrac{n^3}{100}$，$\dfrac{(100-n)^3}{100}$均非整数，

故$\left\{\dfrac{n^3}{100}\right\}+\left\{\dfrac{(100-n)^3}{100}\right\}=1$，

所以$\left[\dfrac{n^3}{100}\right]+\left[\dfrac{(100-n)^3}{100}\right]$

$$=\frac{n^3}{100}+\frac{(100-n)^3}{100}-1;$$

当n是10的倍数时，

$$\left[\frac{n^3}{100}\right]+\left[\frac{(100-n)^3}{100}\right]=\frac{n^3}{100}+\frac{(100-n)^3}{100}$$

.

故所求=

$$\frac{1^3+2^3+\ldots+100^3}{100}-49+4=254980.$$

拓 5

求$\left[\frac{10^{20000}}{10^{100}+3}\right]$的个位数.

【解析】

因为

$$\left[\frac{10^{20000}}{10^{100}+3}\right]=\left[\frac{\left(10^{200}\right)^{100}}{10^{100}+3}\right]=\left[\frac{\left(10^{200}\right)^{100}-9^{100}+9^{100}}{10^{100}+3}\right]$$

$$=\left[\frac{\left(10^{200}\right)^{100}-9^{100}}{10^{100}+3}+\frac{9^{100}}{10^{100}+3}\right]=\frac{\left(10^{200}\right)^{100}-9^{100}}{10^{100}+3}$$

$$=\left(10^{100}-3\right)\left(10^{200\times 99}+10^{200\times 99}\cdot 9+10^{200\times 98}\cdot 9^{2}+\cdots+10^{200\times 1}\cdot 9^{98}+9^{99}\right)$$

易知$10^{100}-3$的个位数为 7，

$10^{200\times 99}+10^{200\times 99}\cdot 9+10^{200\times 98}\cdot 9^{2}+\cdots+10^{200\times 1}\cdot 9^{98}+9^{99}$

的个位数为 9，故$\left[\frac{10^{20000}}{10^{100}+3}\right]$的个位数为 3.