2013 年全国初中数学联合竞赛试题（附参考答案）

第一试

一、选择题：（本题满分 42 分，每小题 7 分）

1. 计算：$4\sqrt{3+2\sqrt{2}}-\sqrt{41+24\sqrt{2}}=$（　）

A. $\sqrt{2}-1$　　B. 1　　C. $\sqrt{2}$　　D. 2

解：B.

2. 满足等式$(2-m)^{m^2-m-2}=1$的所有实数m的和为（　）

A. 3　　B. 4　　C. 5　　D. 6

解：A.

3. 已知AB是$\odot O$的直径，C为$\odot O$上一点，$\angle CAB=15^\circ$，$\angle ACB$的平分线交$\odot O$于点D，若$CD=\sqrt{3}$，则$AB=$（　）

A. 2　　B. $\sqrt{6}$　　C. $2\sqrt{2}$　　D. 3

解：A.

4. 不定方程$3x^2+7xy-2x-5y-17=0$的全部正整数解(x,y)的组数为（　）

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

解：B.

5. 矩形$ABCD$的边长$AD=3$，$AB=2$，E为AB的中点，F为线段BC上，且$BF:FC=1:2$，AF分别与DE,DB交于点M,N，则$MN=$（　）

A. $\dfrac{3\sqrt{5}}{7}$　　B. $\dfrac{5\sqrt{5}}{14}$　　C. $\dfrac{9\sqrt{5}}{28}$　　D. $\dfrac{11\sqrt{5}}{28}$

解：C.

6. 设n为正整数，若不超过n的正整数中质数的个数等于合数的个数，则称n为“好数”，那么，所以“好数”之和为（　）

A. 33　　B. 34　　C. 2013　　D. 2014

解：B.

二、填空题：（本题满分 28 分，每小题 7 分）

1. 已知实数 x、y、z 满足 $x+y=4$，$|z+1|=xy+2y-9$，则 $x+2y+3z=$______

解：4

2. 将一个正方体的表面都染成红色，再切割成 n^3（$n>2$）个相同的小正方体，若只有一面是红色的小正方体数目与任何面都不是红色的小正方体的数目相同，则 $n=$______

解：8

3. 在 ΔABC 中，$\angle A=60°$，$\angle C=75°$，$AB=10$，D,E,F 分别在 AB,BC,CA 上，则 ΔDEF 的周长的最小值为______

解：$5\sqrt{6}$

4. 如果实数 x、y、z 满足 $x^2+y^2+z^2-(xy+yz+zx)=8$，用 A 表示 $|x-y|$，$|y-z|$，$|z-x|$ 的最大值，则 A 的最大值为______

解：$\dfrac{4\sqrt{6}}{3}$

第二试（A）

一、（本题满分 20 分）已知实数 a,b,c,d 满足 $2a^2+3c^2=2b^2+3d^2=(ad-bc)^2=6$，求 $(a^2+b^2)(c^2+d^2)$ 的值

解：设 $m=a^2+b^2$，$n=c^2+d^2$，则 $2m+3n=2a^2+2b^2+3c^2+3d^2=12$

因为 $(2m+3n)^2=(2m-3n)^2+24mn\geq 24mn$，即 $12^2\geq 24mn$，所以 $mn\leq 6$　①

又因为 $mn=(a^2+b^2)(c^2+d^2)=a^2c^2+b^2d^2+a^2d^2+b^2c^2$

$$=(ac+bd)^2+(ad-bc)^2\geq(ad-bc)^2=6 \quad ②$$

由①，②可得 $mn=6$，即 $\left(a^2+b^2\right)\left(c^2+d^2\right)=6$

注：符合条件的实数 a,b,c,d 存在且不唯一

$a=\sqrt{2}$，$b=1$，$c=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$，$d=-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ 就是一组

二、（本题满足 25 分）已知点 C 在以 AB 为直径的 $\odot O$ 上，过点 B,C 作 $\odot O$ 的切线，交于点 P，连 AC，若 $OP=\dfrac{9}{2}AC$，求 $\dfrac{PB}{AC}$ 的值

解：连 OC，因为 PC,PB 为 $\odot O$ 的切线，所以 $\angle POC=\angle POB$

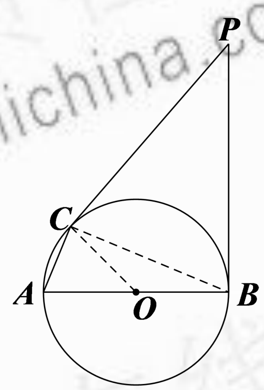
又因为 $OA=OC$，所以 $\angle OCA=\angle OAC$

又因为 $\angle COB=\angle OCA+\angle OAC$，所以 $2\angle POB=2\angle OAC$

所以 $\angle POB=\angle OAC$，所以 $PO//AC$

连接 BC，因为 AB 为 $\odot O$ 的直径，PB 为 $\odot O$ 的切线

所以 $\angle ACB=\angle OBP=90°$



又 $\angle POB=\angle OAC$，所以 $\Delta BAC\backsim\Delta POB$，所以 $\dfrac{AC}{OB}=\dfrac{AB}{OP}$

又 $OP=\dfrac{9}{2}AC$，$AB=2r$，$OB=r$（r 为 $\odot O$ 的半径）

代入可求得 $OP=3r$ $AC=\dfrac{2}{3}r$

在 $Rt\Delta POB$ 中，由勾股定理可求得 $PB=\sqrt{OP^2-OB^2}=2\sqrt{2}r$

所以 $\dfrac{PB}{AC}=\dfrac{2\sqrt{2}r}{\dfrac{2}{3}r}=3\sqrt{2}$

三、（本题满足 25 分）已知 t 是一元二次方程 $x^2+x-1=0$ 的一个根，若正整数 a,b,m 使得等式 $(at+m)(bt+m)=31m$ 成立，求 ab 的值

解：因为 t 是一元二次方程 $x^2+x-1=0$ 的一个根，显然 t 是无理数，且 $t^2=1-t$

等式 $(at+m)(bt+m)=31m$

即 $abt^2+m(a+b)t+m^2=31m$，即 $ab(1-t)+m(a+b)t+m^2=31m$

即 $\left[m(a+b)-ab\right]t+\left(ab+m^2-31m\right)=0$

因为 a,b,m 是正整数，t 是无理数，所以 $\begin{cases}m(a+b)-ab=0\\ab+m^2-31m=0\end{cases}$

于是可得 $\begin{cases}a+b=31-m\\ab=31m-m^2\end{cases}$

因此，a,b 是关于 x 的一元二次方程 $x^2+(m-31)x+31m-m^2=0$ ①的两个整数根

方程①的判别式 $\Delta=(m-31)^2-4\left(31m-m^2\right)=(31-m)(31-5m)\geq 0$

又因为 a,b 是正整数，所以 $a+b=31-m>0$，从而可得 $0<m\leq\frac{31}{5}$

又因为判别式 Δ 是一个完全平方数，验证可知，只有 $m=6$ 符合要求

把 $m=6$ 代入可得 $ab=31m-m^2=150$

第二试（B）

一、（本题满分 20 分）已知 $t=\sqrt{2}-1$，若正整数 a,b,m 使得等式 $(at+m)(bt+m)=17m$ 成立，求 ab 的值

解：因为 $t=\sqrt{2}-1$，所以 $t^2=3-2\sqrt{2}$

等式 $(at+m)(bt+m)=17m$，即 $abt^2+m(a+b)t+m^2=17m$

即 $ab\left(3-2\sqrt{2}\right)+m(a+b)\left(\sqrt{2}-1\right)+m^2=17m$

整理得 $\left[m(a+b)-2ab\right].\sqrt{2}+\left[3ab-m(a+b)+m^2-17m\right]=0$

因为 a,b,m 是正整数，所以 $\begin{cases}m(a+b)-2ab=0\\3ab-m(a+n)+m^2-17m=0\end{cases}$

于是可得 $\begin{cases}a+b=2(17-m)\\ab=17m-m^2\end{cases}$

因此，a,b 是关于 x 的一元二次方程 $x^2+2(m-17)c+17m-m^2=0$ ①的两个整数根

方程①的判别式 $\Delta=4(m-17)^2-4(17m-m^2)=4(17-m)(17-2m)\ge 0$

又因为 a,b,m 是正整数，所以 $a+b=2(17-m)>0$，从而可得 $0<m\le\frac{17}{2}$

又因为判别式 Δ 是一个完全平方数，验证可知，只有 $m=8$ 符合要求

把 $m=8$ 代入可得 $ab=17m-m^2=72$

二、（本题满分 25 分）在 ΔABC 中，$AB>AC$，O,I 分别是 ΔABC 的外心和内心，且满足 $AB-AC=2OI$，求证：（1）$OI//BC$；（2）$S_{\Delta AOC}-S_{\Delta AOB}=2S_{\Delta AOI}$

证明：（1）作 $OM\perp BC$ 于 M，$IN\perp BC$ 于 N

设 $BC=a$，$AC=b$，$AB=c$

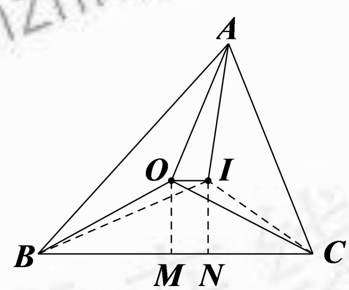
易求得 $CM=\frac{1}{2}a$，$CN=\frac{1}{2}(a+b-c)$

所以 $MN=CM-CN=\frac{1}{2}(c-b)=OI$

又 MN 恰好是两条平行线 OM,IN 之间的垂线段

所以 OI 也是两条平行线 OM,IN 之间的垂线段

所以 $OI//MN$，所以 $OI//BC$



（2）由（1）知 $OMNI$ 是矩形，连接 BI,CI

设 $OM=IN=r$（即为 ΔABC 的内切圆半径）

则 $S_{\Delta AOC}-S_{\Delta AOB}=(S_{\Delta AOI}+S_{\Delta COI}+S_{\Delta ABC})-(S_{\Delta AIB}-S_{\Delta AOI}-S_{\Delta BCI})$

$$=2S_{\Delta AOI}+S_{\Delta BOI}+S_{\Delta COI}+S_{\Delta AIC}-S_{\Delta AIB}$$

$$=2S_{\Delta AOI}+\frac{1}{2}.OI\cdot r+\frac{1}{2}\cdot OI\cdot r+\frac{1}{2}\cdot AC\cdot r-\frac{1}{2}\cdot AB\cdot r$$

$$=2S_{\Delta AOI}+r\cdot\left(OI+\frac{1}{2}b-\frac{1}{2}c\right)=2S_{\Delta AOI}$$

三、（本题满分 25 分）若正数 a,b,c 满足 $\left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)+\left(\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}\right)+\left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\right)=3$，

求代数式$\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}+\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}+\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$的值

解：由于a,b,c具有轮换对称性，不妨设$0<a\le b\le c$

（1）若$c>a+b$，则$c-a>b>0$，$c-b>a>0$

从而可得：$\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=1+\frac{(c-b)^2-a^2}{2bc}>1$，$\frac{c^2+a^2-b^2}{2ac}=1+\frac{(c-a)^2-b^2}{2ac}>1$

$\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{(a+b)^2-c^2}{2ab}-1<-1$

所以$\left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)^2+\left(\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}\right)^2+\left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\right)^2>3$，与已知条件矛盾

（2）若$c<a+b$，则$0\le c-a<b$，$0\le c-b<a$

从而可得：$0<\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=1+\frac{(c-b)^2-a^2}{2bc}<1$，

$0<\frac{c^2+a^2-b^2}{2ac}=1+\frac{(c-a)^2-b^2}{2ac}<1$，

$\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{(a+b)^2-c^2}{2ab}-1>-1$，$\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=1+\frac{(a-b)^2-c^2}{2ab}<1$

所以$\left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)^2+\left(\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}\right)^2+\left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\right)^2<3$，与已知条件矛盾

综合（1）、（2）可知：一定有$c=a+b$

于是可得$\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=1$，$\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}=1$，$\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=-1$

所以$\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}+\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}+\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=1$