第一课作业

第一课知识梳理

1.线性筛积性函数

2.莫比乌斯函数及反演

3.迪利克雷卷积（证明莫比乌斯反演）

4.整除分块

例题解答（附代码）

例题二类似题目：P3455 [POI2007]ZAP-Queries

题目链接

例题二：求$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}[gcd(i,j)=1]\ (n,m<=1e7,n<=m)$

题目分析：

=1的判断可以用莫比乌斯函数性质一替代，后将其转化为整除分块

答案=$\sum_{d=1}^{n}\mu(d)*(n/d)*(m/d)$

后两个是整除 预处理莫比乌斯函数前缀和以及整除分块即可（可作为莫比乌斯反演及整除分块的模板题）

类似题目AC代码：

```
#include<bits/stdc++.h>
using namespace std;
int read(){
    char s;
    int x=0,f=1;
    s=getchar();
    while(s<'0'||s>'9'){
        if(s=='-')f=-1;
        s=getchar();
    }
    while(s>='0'&&s<='9'){
        x*=10;
        x+=s-'0';
        s=getchar();
    }
    return f*x;
}
int T;
const int N=5e4+5;
int mu[N],S[N];//莫比乌斯函数 前缀和
bool flag[N];
int pn,p[N];
```

```
void init(){//预处理莫比乌斯函数及其前缀和
    pn=0,mu[1]=1;
    //flag=0是质数
    for(int i=2;i<N;i++){
        if(!flag[i])p[pn++]=i,mu[i]=-1;
        for(int j=0;j<pn,i*p[j]<N;j++){
            flag[i*p[j]]=1;
            if(i%p[j]==0){
                mu[i*p[j]]=0;
                break;
            }
            else{
                mu[i*p[j]]=-mu[i];
            }
        }
    } //预处理mu
    S[1]=1;
    for(int i=2;i<N;i++){
        S[i]=S[i-1]+mu[i];
    }
    return;
}
long long solve(int n,int m){
    long long ans=0;
    if(n>m)swap(n,m);
    for(int l=1,r;l<=n;l=r+1){
        r=min(n/(n/l),m/(m/l));
        ans+=(long long)(S[r]-S[l-1])*(n/l)*(m/l);
    }
    return ans;
}
int main(){
    T=read();
    init();
    while(T--){
        int a,b,d;
        a=read(),b=read(),d=read();
        long long ans=solve(a/d,b/d);
        printf("%lld\n",ans);
    }
}
```

思考题目：求$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} gcd(i,j)=1\ (n,m<=1e7,n<=m)$（不同点：直接计算gcd）

解答：$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} gcd(i,j)$

$$=\sum_{d=1}^{n}\sum_{d|i}^{n}\sum_{d|j}^{m}[gcd(i,j)==d]d$$

$$=\sum_{d=1}^{n}\sum_{i=1}^{n/d}\sum_{j=1}^{m/d}[gcd(i,j)==1]*d$$

$$=\sum_{d=1}^{n} d\sum_{i=1}^{n/d}\sum_{j=1}^{m/d}\sum_{k|gcd(i,j)} *\mu(k)$$

$$=\sum_{d=1}^{n} d\sum_{k=1}^{n/d}\mu(k)\sum_{k|i}^{n/d}\sum_{k|j}^{m/d} 1$$

$$=\sum_{d=1}^{n} d\sum_{k=1}^{n/d}\mu(k)*n/kd*m/kd$$

第三题及其类似题目:

例题三：求$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}lcm(i,j)$

类似题目：P3911 最小公倍数之和

题目链接

类似题目解答：其实这题和例三差不多，多了个技巧

由于所有的A都<=50000，所以可以用$c[i]$表示i这个数字出现了几次

那么所求就变成了$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}lcm(i,j)*c_i*c_j$

$=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{i*j*c_i*c_j}{gcd(i,j)}$

$=\sum_{d=1}^{n}\sum_{d|i}^{n}\sum_{d|j}^{n}[gcd(i,j)=d]*\frac{i*j*c_i*c_j}{d}$

$=\sum_{d=1}^{n}\sum_{i=1}^{n/d}\sum_{j=1}^{n/d}[gcd(i,j)=1]i*j*c_{id}*c_{jd}*d$这步关键是ij÷d之后它们的下标得*d 非常容易忘记（也就是c_{id}）

$=\sum_{d=1}^{n}\sum_{i=1}^{n/d}\sum_{j=1}^{n/d}\sum_{k|gcd(i,j)}\mu(k)*d*i*j*c_{id}*c_{jd}$

$=\sum_{d=1}^{n}\sum_{k=1}^{n/d}\sum_{i=1}^{n/kd}\sum_{j=1}^{n/kd}\mu(k)*d*i*j*k^2*c_{idk}*c_{jdk}$

把各项还原至原有位置

$=\sum_{d=1}^{n}*(\sum_{i=1}^{n/d}i*c_{id})^2*\sum_{k|d}\mu(k)*k$

由于ij完全一样，就可以弄成平方

然后预处理$\mu(k)*k$即可

下附AC代码:

```
#include<bits/stdc++.h>
using namespace std;
int read(){
    char s;
    int x=0,f=1;
    s=getchar();
    while(s<'0'||s>'9'){
        if(s=='-')f=-1;
        s=getchar();
    }
    while(s>='0'&&s<='9'){
        x*=10;
        x+=s-'0';
        s=getchar();
    }
    return x*f;
}
const int N=50010;
int n;
int c[N];
int mu[N];
bool flag[N];
int p[N],pn;
long long g[N];
void init(){
```

```
    mu[1]=1;
    for(int i=2;i<N;i++){//预处理mu函数
        if(!flag[i]){
            p[pn++]=i;
            mu[i]=-1;
        }
        for(int j=0;j<pn,p[j]*i<N;j++){
            flag[i*p[j]]=1;
            if(i%p[j]==0){
                mu[i*p[j]]=0;
                break;
            }
            else{
                mu[i*p[j]]=-mu[i];
            }
        }
    }
    for(int i=1;i<N;i++){
        for(int j=i;j<N;j+=i){
            g[j]+=(long long)mu[i]*i;
        }
    }
}
int main(){
    n=read();
    for(int i=1;i<=n;i++){
        int x=read();
        c[x]+=1;
    }
    init();
    long long ans=0;
    for(int t=1;t<=50000;t++){
        long long cur=0;
        for(int i=1;i<=50000/t;i++){
            cur+=(i*c[i*t]);
        }
        ans+=(long long)t*cur*cur*g[t];
    }
    printf("%lld\n",ans);
}
```

作业：

1.反向证明莫比乌斯反演，即如果$g(n)=\sum_{d|n}f(d)\mu(d)$那么$f(n)=\sum_{d|n}g(d)$

$\sum_{d|n}g(d)=\sum_{d|n}\sum_{k|d}f(d/k)\mu(k)$

$=\sum_{d|n}\sum_{k|d}f(k)\mu(d/k)$

$=\sum_{k|n}f(k)\sum_{d|(n/k)}\mu(d/k)$

当且仅当n=k时$\sum_{d|(n/k)}\mu(d/k)$=1

此时=f(n)

得证

2.证明迪利克雷卷积的交换律、结合律、分配律和积性函数不变

交换律、结合律、分配律显而易见

积性函数不变：若积性函数$f(x)g(x)$则他们的迪利克雷卷积$f*g(x)$也是积性函数

即 对于互质的两个正整数pq，满足$f*g(p)\times f*g(q)=f*g(pq)$

$f*g(pq)=\sum_{x|pq}f(x)*g(pq/x)$

由于pq互质，所以可以看成从pq的质因数分解中各取一部分a、b相乘，这两部分没有交集即ab也互质

$\sum_{x|pq}f(x)*g(pq/x)=\sum_{a|p}\sum_{b|q}f(pq/ab)*g(ab)$

由于p/a和q/b互质并且fg均为积性函数，所以得到

$$=\sum_{a|p}\sum_{b|q}f(p/a)*f(q/b)*g(a)*g(b)$$

$$=\sum_{a|p}f(p/a)g(a)\sum_{b|q}f(q/b)g(b)$$

$$=f*g(p)\times f*g(q)$$

得证

例题二思考题（上面已经给出的解答这里汇总一下）

思考题目：求$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}gcd(i,j)=1\ (n,m<=1e7,n<=m)$（不同点：直接计算gcd）

解答：$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}gcd(i,j)$

$=\sum_{d=1}^{n}\sum_{d|i}^{n}\sum_{d|j}^{m}[gcd(i,j)==d]d$

$=\sum_{d=1}^{n}\sum_{i=1}^{n/d}\sum_{j=1}^{m/d}[gcd(i,j)==1]*d$

$=\sum_{d=1}^{n}d\sum_{i=1}^{n/d}\sum_{j=1}^{m/d}\sum_{k|gcd(i,j)}*\mu(k)$

$=\sum_{d=1}^{n}d\sum_{k=1}^{n/d}\mu(k)\sum_{k|i}^{n/d}\sum_{k|j}^{m/d}1$

$=\sum_{d=1}^{n}d\sum_{k=1}^{n/d}\mu(k)*n/kd*m/kd$