

【51nod1227】平均最小公倍数（杜教筛）

原创

zxyoi_dreamer

2019-07-07 09:20:33

84

收藏

展开

传送门

题解：

利用差分，我们要求的实际上是这个玩意：

$$Ans = \sum_{n=1}^N \frac{\sum_{i=1}^n lcm(i, n)}{n}$$

根据LCMSUM的推导我们知道：

$$\sum_{i=1}^n lcm(i, n) = \frac{n}{2} + \frac{n}{2} \sum_{d|n} d\phi(d)$$

所以这里我们知道：

$$\begin{aligned} Ans &= \sum_{n=1}^N \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sum_{d|n} d\phi(d) \right) \\ &= \frac{N}{2} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N \sum_{d|n} d\phi(d) \\ &= \frac{N}{2} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N \sum_{d=1}^{\lfloor \frac{N}{n} \rfloor} d\phi(d) \end{aligned}$$

都是很套路的转换。

构造 $f = Id \cdot \phi, g = Id$ ，就可以直接杜教筛求出 f 的前缀和了。

代码：

```
1 #include<bits/stdc++.h>
2 #define ll long long
3 #define re register
4 #define cs const
5
6 using std::cerr;
7 using std::cout;
8
9 cs int mod=1e9+7;
10 inline int add(int a,int b){return (a+=b)>=mod?a-mod:a;}
11 inline int dec(int a,int b){return (a-=b)<0?a+mod:a;}
12 inline void Inc(int &a,int b){(a+=b)>=mod&&(a-=mod);}
13 inline void Dec(int &a,int b){(a-=b)<0&&(a+=mod);}
14 inline int mul(int a,int b){ll r=(ll)a*b;return r>=mod?r%mod:r;}
15 cs int inv2=mod+1>>1,inv3=(mod+1)/3,inv6=mul(inv2,inv3);
16
17 int l,r;
18
19 cs int P=1e6+6,lim=P-6;
20 int prime[P],pcnt;
21 bool mark[P];
22 int f[P];
23
24 inline void linear_sieves(){
25     f[1]=1;
26     for(int re i=2;i<=lim;++i){
27         if(!mark[i])prime[++pcnt]=i,f[i]=i-1;
```

```

28     for(int re j=1;i*prime[j]<=lim;++j){
29         mark[i*prime[j]]=true;
30         if(i%prime[j]){f[i*prime[j]]=f[i]*(prime[j]-1);}
31         else {f[i*prime[j]]=f[i]*prime[j];break;}
32     }
33 }
34 for(int re i=1;i<=lim;++i)f[i]=add(f[i-1],mul(f[i],i));
35 }
36
37 struct Map{
38     static cs int magic=1898599;
39     int val[magic];
40     int key[magic];
41     Map(){memset(key,-1,sizeof key);}
42     cs int &operator[(cs int &k)cs{
43         int h=k%magic;
44         while((~key[h]&&(key[h]^k))h=(h+1)%magic;
45         return val[h];
46     }
47     int &operator[(cs int &k){
48         int h=k%magic;
49         while((~key[h]&&(key[h]^k))h=(h+1)%magic;
50         if((key[h]^k)){key[h]=k;}
51         return val[h];
52     }
53     bool find(cs int &k){
54         int h=k%magic;
55         while((~key[h]&&(key[h]^k))h=(h+1)%magic;
56         return key[h]==k;
57     }
58 }sumf;
59
60 inline int Sum1(int n){return mul(mul(n,n+1),inv2);}
61 inline int Sum2(int n){return mul(mul(mul(n,n+1),add(n,n)+1),inv6);}
62
63 inline int F(int n){
64     if(n<=lim)return f[n];
65     if(sumf.find(n))return sumf[n];
66     int ans=Sum2(n);
67     for(int re i=2,j;i<=n;i=j+1){
68         j=n/(n/i);
69         Dec(ans,mul(dec(Sum1(j),Sum1(i-1)),F(n/i)));
70     }
71     return sumf[n]=ans;
72 }
73
74 inline int calc(int n){
75     int ans=0;
76     for(int re i=1,j;i<=n;i=j+1){
77         j=n/(n/i);
78         Inc(ans,mul(j-i+1,F(n/i)));
79     }
80     return mul(n+ans,inv2);
81 }
82
83 signed main(){
84     scanf("%d",&l,&r);
85     linear_sieves();
86     cout<<dec(calc(r),calc(l-1));
87     return 0;
88 }

```