A题题解

不好意思,题面可能不是很清晰.大体上是:给一串不相同的数字分成两组,把他们任意排列得到两个整数A,B输出A,B绝对值的最小值

- 题目规模为 N<=10,所以很容易想到枚举.
- 反向考虑,其实等价于将N的数全排列然后从中拆分
  next_permutation();
- 拆分的话,要使两个数差绝对值最小,一定是从中间拆分的,所以每一个排列只用检查一次

注意的点

- N为10的情况其实是唯一的,0123456789,所以怕TLE的话可以特判一下
- WA的相关数据

  Test2

  2
  2
  0 1
  2
  2 3

  Correct Answer: 1 1

  Test5:

  6

  5
  1 2 4 5 7
  5
  1 3 5 7 9
  7
  2 3 4 5 7 8 0

6

1 3 5 7 2 8

4

1 5 9 3

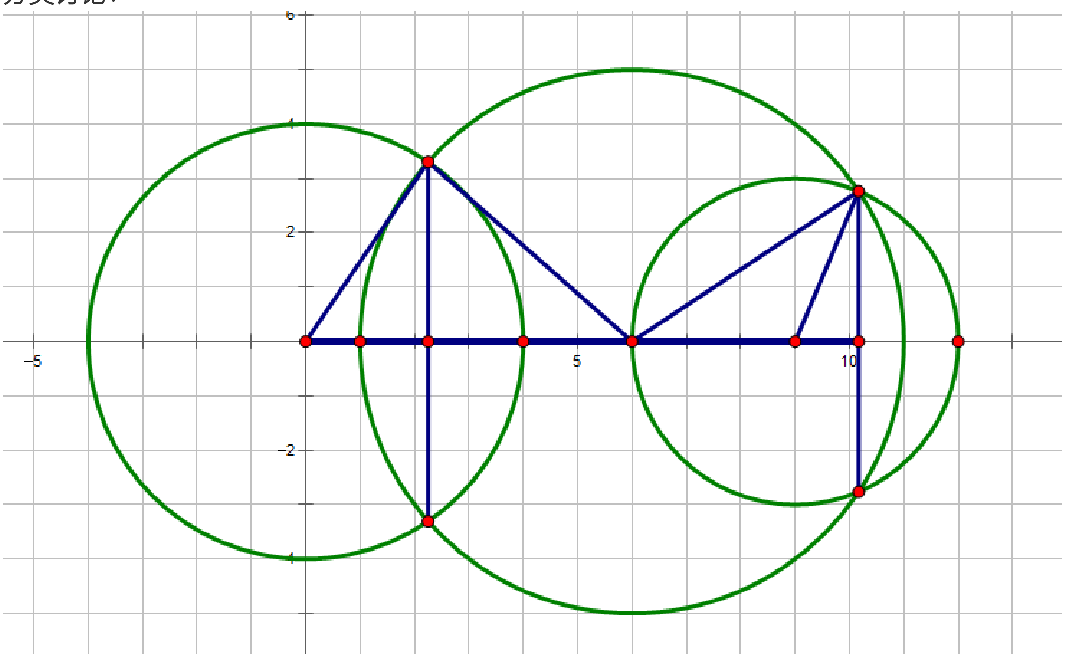
8

1 3 7 9 0 2 4 6

Correct Answer:49   38   1159   28   12   36

B Ball

- 当两球相离时，$ans = V_1 + V_2$
- 当两球内含时，$ans = max\{V_1, V_2\}$
- 当两球不完全重合时
  - 两球交的体积公式：$V = \pi \cdot (r_1 + r_2 - d)^2 \cdot (d^2 + 2d(r_1 + r_2) - 3(r_1^2 + r_2^2) + 6r_1r_2)/12d$，其中$d$为两球心的距离
  - 分类讨论：



- $cornercase$
  - $r_1 = r_2 = 0$
  - $d = 0$
- 不能用x_1, y_1等作为变量，否则会CE

C. Classic-Reverse

chinakevin, 20th July, Zhejiang University

Solution

- 结论1：至多进行一次操作2
- 证明：略
- 结论2：所有的简单环均可以通过若干次非树边形成的环进行异或得到
- 证明：略
- 结论3：对于任意图，如果存在方案，一定可以在m+1步内完成
- 证明：结论1+结论2

Solution

- 高斯消元解异或方程组
- 时间复杂度：O(Tm^3/w)
- 不能通过！

Solution

- 结论4：我们称所有颜色为1的边形成的子图为目标子图，对于一张图，若目标子图中所有节点度数均为偶数，则总可以通过m-n+1次操作得到一组解
- 证明：略
- 结论5：存在方案等价于操作2后，每个点都连接了偶数条不能通行的边
- 证明：结论4

Solution

- 做法：每个点对应了一个长度为n的01向量，现在我们需要选出若干向量，使得他们的异或和等于初始状态下，每个点不能通行的边的奇偶性组成的01向量
- 怎么做？
- 线性基或压位的高斯消元！

Solution

- 时间复杂度：O(Tn^3/w)
- 细节优化：
  - 读入优化
  - 线性基的不同写法
  - w=64
- Q & A？

D. Defense system

（~~被min_25筛爆艹了~~）

关于题面

- 红魔馆日常爆炸
- 不动的大图书馆NB，居然藏有解析数论的书
- 世界名画《芙兰朵露在地下室》

```
> > Where are Flandre Scarlet?
>
> **Where is (not are)?
> She is staying in the baseroom.
*basement (not baseroom)
```

（两个英语菜鸡的对话）

- 关于题目本身
- 我去年七月集训出过一道n^(1/3)求f(n)的题，但是只有一个人做了出来，所以我决定给出f(n)的公式。
- 感兴趣的可以观看这个视频（3Blue1Brown）：https://www.bilibili.com/video/BV1kx411q7kK
- 感谢杨沛霖给出两处关键的步骤，以及验题人张静圳对本题做出的贡献。
- 需要注意到X(n)为**完全积性函数**
- 这道题只用了莫比乌斯反演，连杜教筛都没有用到
- 我不会min_25筛和洲阁筛，但我看到他们代码有p[i]*p[i]<=w[j]。
- （~~min_25筛鲨疯了~~）

- $\sum_{i=1}^{n} f^2(i) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j|i} X(j) \sum_{k|i} X(k)$
- $= \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} X(jk) \left\lfloor \frac{n}{lcm(j,k)} \right\rfloor$
- $= \sum_{d=1}^{n} \sum_{d|j} \sum_{d|k} X(jk) \left\lfloor \frac{nd}{jk} \right\rfloor [\gcd(j,k) == d]$
- $= \sum_{d=1}^{n} X^2(d) \sum_{j=1}^{\left\lfloor \frac{n}{d} \right\rfloor} \sum_{k=1}^{\left\lfloor \frac{n}{d} \right\rfloor} X(jk) \left\lfloor \frac{\left\lfloor \frac{n}{d} \right\rfloor}{jk} \right\rfloor [\gcd(j,k) == 1]$
- $= \sum_{d=1}^{n} X^2(d) \sum_{p=1}^{\left\lfloor \frac{n}{d} \right\rfloor} X(p) \left\lfloor \frac{n}{pd} \right\rfloor \sum_{j|p} \gcd\left(j, \frac{p}{j}\right) == 1$
- $= \sum_{T=1\ \&\&\ T\ is\ odd}^{n} \left\lfloor \frac{n}{T} \right\rfloor \sum_{p|T} X(p) g(p)$
- 这里$g(p) = \sum_{j|p} \gcd\left(j, \frac{p}{j}\right) == 1$， $h(T) = \sum_{p|T} X(p) g(p)$
- 可以知道$g(p) = \sum_{d|p} \mu^2(d)$， $h(2T) = h(T)$

- 原式= $\sum_{T=1\ \&\&\ T\ is\ odd}^{n}\left[\frac{n}{T}\right]\sum_{p|T}X(p)g(p)$
- $\quad\quad = \sum_{T=1}^{n}\left[\frac{n}{T}\right]h(T)-\sum_{T=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\left[\frac{\left[\frac{n}{2}\right]}{T}\right]h(T)$
- 数论分块，需要求 h(T) 前缀和
- $\sum_{i=1}^{n}h(i)=\sum_{d=1}^{n}X(d)g(d)\left[\frac{n}{d}\right]$
- 继续数论分块，需要求X(d)*g(d)的前缀和
- $\sum_{i=1}^{n}X(i)g(i)=\sum_{d=1}^{n}\mu^{2}(d)X(d)\sum_{i=1}^{\left[\frac{n}{d}\right]}X(i)$
- 继续数论分块，需要求mu(d)*mu(d)*X(d)的前缀和
- $\sum_{d=1}^{n}\mu^{2}(d)X(d)=\sum_{t=1}^{\sqrt{n}}\mu(t)X(t^{2})\sum_{k=1}^{\left[\frac{n}{t^{2}}\right]}X(k)$

- 需要求前缀和的自变量取值只有n/n，n/(n-1)，…，n/2，n/1这O(sqrt(n))种情况
- 对于小于n^(2/3)的自变量采取线性筛，大于n^(2/3)单点sqrt(n)暴力求（类似于杜教筛的复杂度分析）
- 时间复杂度为O（n^(2/3)）

E Epah

- 题意：1e5完全二叉树上，点权为[0..ai]内随机实数，求形成堆的概率 mod 998244353
- 设连续型随机变量X_i为以i为根的子树构成一个堆时，i的权值
- 当i为叶子时，X_i服从均匀分布，则X_i的概率密度函数为$f_i(x) = \begin{cases} \frac{1}{a_i}, & 0 \le x \le a_i; \\ 0, & others. \end{cases}$，分布函数为$F_i(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ \frac{x}{a_i}, & 0 \le x \le a_i; \\ 1, & x > b. \end{cases}$
- 若i不为叶子，则$f_i(x) = \frac{1}{a_i} \prod_{j \in son_i} (F_j(b_j) - F_j(x))$，其中$b_i$为以$i$为根的子树中$a_i$的最小值，$F_i(x) = \int_{-\infty}^{x} f_i(t) \, \mathrm{d}t$
- $ans = F_1(b_1) - F_1(0)$
- FFT加速多项式乘法
- $O(nlog^2n)$

$Sol1$：DP

定义选了m条边，形成k个连通块的方案数为$F_{m,k}$

定义选了m条边，形成一定不两两相连的k个连通块的方案数是$G_{m,k}$

定义第一类斯特林数是$S_1(n,m)$

定义第二类斯特林数是$S_2(n,m)$

$G_{m,k}=\sum_{j\geq k}S_2(j,k)F_{m,j}$

斯特林反演后

$F_{m,k}=\sum_{j\geq k}S_1(j,k)(-1)^{(j-k)}G_{m,j}$

令$k=1$

$F_{m,1}=\sum_{j\geq 1}(j-1)!(-1)^{(j-1)}G_{m,j}$

设$H_{i,j,m}$表示DP了i个点，分成j块，当前共有m条边可以用的方案数

$G_{m,j}=\sum_{k\geq m}H_{n,j,k}C_{k,m}$

将$(j-1)!(-1)^{(j-1)}$的附加贡献在DP过程中算上，尝试缩去中间j的那一维

时间复杂度$O(n^4)$

$Sol2$：多项式

$g(n,k)$：n 个点 k 条边的无标号简单图的个数

$$g(n,k)=\binom{\binom{n}{2}}{k}$$

$$G(n)=\sum_{k\geq 0}g(n,k)x^k=\sum_{k\geq 0}\binom{\binom{n}{2}}{k}x^k=(x+1)^{n(n-1)/2}$$

$f(n,k)$：n 个点 k 条边的无标号简单连通图的个数

$$F(n)=\sum_{k\geq 0}f(n,k)x^k$$

边界：$F(1)=G(1)$

转移：$F(n)=G(n)-\sum_{i=1}^{n-1}\binom{n-1}{i-1}F(i)G(n-i)$

将等式两边进行 DFT，得 $DFT(F(n))=DFT(G(n))-\sum_{i=1}^{n-1}\binom{n-1}{i-1}DFT(F(i))\cdot DFT(G(n-i))$，其中 $\cdot$ 是点乘。

计算 $DFT(G(k))$：设 m 为大于 $\binom{n}{2}$ 的 2 的次幂，$DFT(G(k))=[G(k)|_{x=w_m^0},G(k)|_{x=w_m^1},\ldots,G(k)|_{x=w_m^{m-1}}]$，计算 $DFT(G(k)),k=1..n$ 的复杂度为 $O(n\cdot m\cdot\log n)=O(n^3\log n)$。

计算 $DFT(F(k))$：考虑暴力计算，复杂度为 $O(n\cdot n\cdot m)=O(n^4)$，如果使用 FFT(FFT和IFFT) 计算卷积，复杂度优化为 $O(n^3\log n)$。

计算 $IDFT(DFT(F(n)))$：考虑暴力计算，复杂度为 $O(m^2)=O(n^4)$，如果使用 IFFT 计算，复杂度优化为 $O(m\log m)=O(n^2\log n)$。

如果暴力点，总复杂度为 $O(n^4)$，如果使用双重 FFT，复杂度降为 $O(n^3 \log n)$。

题意

求 61 个点的无标号欧拉图个数。

分析

- **OEIS上有前 60 项**
- **Burnside引理**

  > **理论** 编辑
  >
  > 设 G 是一个有限群，作用在集合 X 上。对每个 g 属于 G 令 X^g 表示 X 中在 g 作用下的不动元素。伯恩赛德引理断言轨道数（记作 $|X/G|$）由如下公式给出：[2]
  >
  > $$|X/G| = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}|X^g|.$$
  >
  > 从而轨道数（是一个自然数或无穷）等于被 G 中一个元素保持不动的点个数的平均值（故同样是自然数或无穷）。

  证明略。

  简单理解：

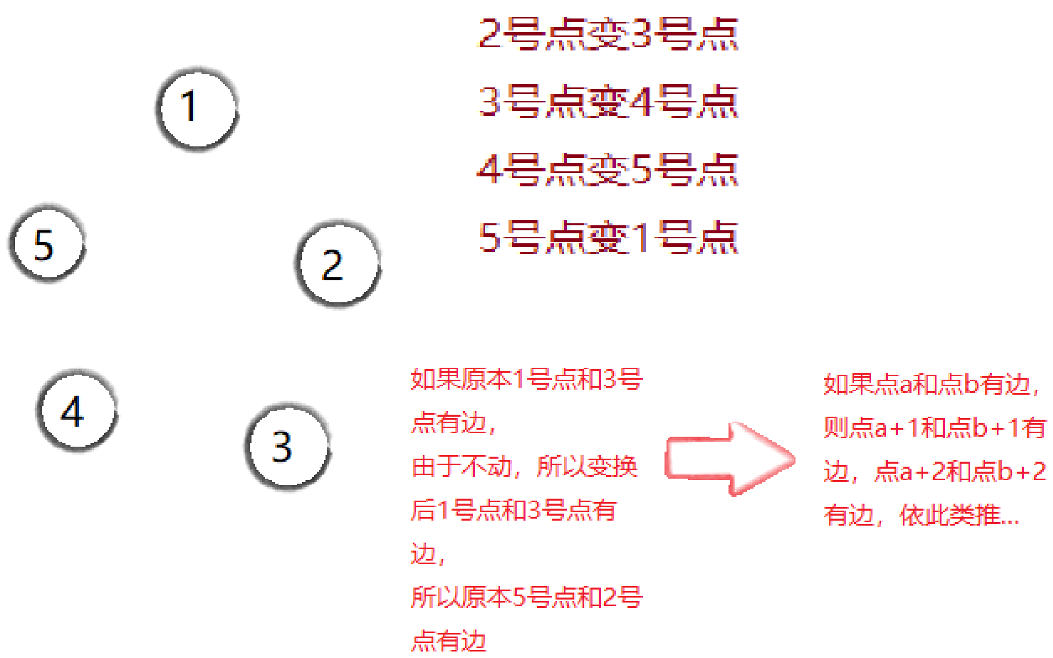
  - 有若干种方案，有若干个作用在方案上的置换，若方案A在某个置换作用下变为方案B，则A、B等价。
  - 在某种置换下，如果方案A仍然变为方案A，则称其为不动点。
  - 等价类个数为每种置换下不动点个数的平均数。
- **无标号一般图计数**

  BZOJ 1488.

  方案：带标号的图　置换：点标号的 $n!$ 种变换方法。

  对于一种点标号的变换，考虑有多少个图A变为图A。

  将变换划分为若干个轮换。



  - 大小为 x 的轮换内的边。$|a-b|=k$ 的边要么同时存在，要么同时不存在。k 可取 $1,2,\dots,\lfloor\frac{x}{2}\rfloor$，有 $\lfloor x/2\rfloor$ 次选择一组边的机会。

- 考虑大小为 x、大小为 y 的轮换之间的边。一共可以连 xy 条边。若 x 中的点 a 与 y 中的点 b 有边，每次将两个点沿着轮换跳一步并连边，连完 $[x,y]$ 条边之后，重新回到点 a 和点 b，这些边同时存在或者不存在。有 $xy/[x,y]=\gcd(x,y)$ 次选择一组边的机会。

枚举所有置换直接 TLE，只需枚举所有轮换大小构成的多重集合（分拆数的复杂度），计算方案数，并乘上满足条件的置换个数。设分拆为 c_1 个 a_1，c_2 个 a_2，...，c_m 个 a_m 组成，则满足分拆的置换个数为

$$\binom{n}{a_1,\ldots,a_1,a_2,\ldots,a_2,\ldots,a_m,..,a_m}/\prod c_i!$$

- **无标号欧拉森林个数**

  欧拉森林：每个点的度数为偶数。

  照葫芦画瓢。

  - 同一轮换内的边：对大小为 $2s+1$ 的轮换，有 s 种边可以连，一种边的连接会形成一个环，对点的度数的奇偶性不造成影响；对大小为 $2s$ 的循环节，有 $s-1$ 种边对点的度数的奇偶性不造成影响，一种边对循环节内所有点的奇偶性造成影响。这启发我们把一个循环节看做一个大点，对于 $2s+1$ 的情况，有一次机会按它一下，把它的奇偶性改变。
  - 两个轮换之间的边：大小分别为 a、b 的两个循环节，有 (a,b) 种连边方案，每种连边方案总共连 $ab/(a,b)$ 条边，对 a 中的每个点连 $n_1=a/(a,b)$ 条，$n_2=b/(a,b)$ 条。若 n_1,n_2 都是偶数，则不造成影响。若 n_1 为奇数，n_2 为偶数，相当于拥有了一次改变 a 奇偶性的机会。若 n_1 为偶数，n_2 为奇数，相当于拥有了一次改变 b 奇偶性的机会。若 n_1 为奇数，n_2 为奇数，则在 a,b 之间连上一条边，表示有一次机会将二者的奇偶性一同改变。

  综上，我们可以建出一张图，点权最初全是 0 。对每个点，有 $d[i]$ 次机会使其异或 1 ，对于一条边 e ，有 $n[e]$ 次机会使两边异或 1 。问有多少种方案使得最终所有点的点权为 0 。

  我们分连通块来考虑，然后累乘。设总共可以进行 p 次点操作，q 次边操作。这是一个经典问题：存在边操作能使点操作成立，当且仅当点操作的次数为偶数。可以直接构造 DFS 树，利用树形 DP 来证明可行性。至于必要性，因为每次边操作之后所有点的和的奇偶性不变。总之，就是在 p 次操作中选择偶数次的方案，乘上 2^q 。对于前者，等于 $2^{(p-1)}$ ，因为考虑前 $p-1$ 次操作任意，最后一次操作有且仅有一种方式对应。（考虑 $p=0$ 的 corner case）

- **无标号欧拉图个数**

  设 n 个点的无标号欧拉森林个数为 $g(n)$，对应的普通生成函数为 $G(x)$ ，n 个点的无标号欧拉图个数为 $f(n)$。

  对于 k 个点的若干个某种欧拉图，生成函数为：

$$1+x^k+x^{2k}+x^{3k}+\ldots=\frac{1}{1-x^k}$$

  对于 k 个点的若干个若干种欧拉图，生成函数为：

$$\frac{1}{1-x^k}\frac{1}{1-x^k}\cdots\frac{1}{1-x^k}=\frac{1}{(1-x^k)^{f(k)}}$$

  对于任意个点的若干个若干种欧拉图，即欧拉森林的生成函数为：

$$G(x)=\prod_{k\geq 1}\frac{1}{(1-x^k)^{f(k)}}$$

  两边同时取 ln，得

$$\begin{aligned}\ln G(x)&=\sum_{k\geq 1}-f(k)\ln(1-x^k)\\&=\sum_{i\geq 1}f(i)\sum_{j\geq 1}\frac{x^{ij}}{j}\\&=\sum_{t\geq 1}x^t\sum_{ij=t}\frac{f(i)}{j}\end{aligned}$$

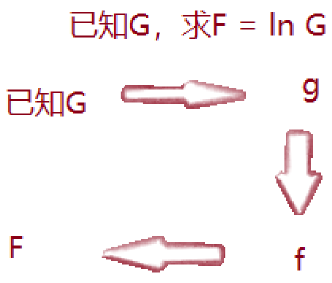
进行多项式求ln，然后用类似筛法的方法推出所有 f 的值。

$$f(1)=A(1),\ f(t)=A(t)-\sum_{i|t,i<t}\frac{f(i)}{j}$$

- **多项式求 ln，多项式求 exp 的简易 $O(n^2)$ 写法**

f(n)：n个点的带标号、具有某种性质的连通图个数
F(x)：f 的指数生成函数
g(n)：n个点的带标号、具有某种性质的图的个数
G(n)：g的指数生成函数

关系1：f 和 g 的 O(n^2) 互推
关系2：e ^ F = G，F = ln G



虚假的带标号连通图问题