

具体数学中级班第五周参考答案

517

2020 年 5 月 29 日

1 已经没有什么好害怕的了

1.1 题意

给你两个长度为 n 的数组 a, b , 所有元素互不相同

你需要给这两个数组中的元素进行两两配对, 每一对元素一个来自于 a , 一个来自于 b , 配对好之后假设 a 中元素大于 b 中元素的对数为 k_1 , b 中元素大于 a 中元素的对数为 k_2 , 请问有多少的配对方法满足 $k_1 - k_2 = k$

答案对 $1e9 + 7$ 取模, $n \leq 2000, 0 \leq k \leq n$

1.2 题解

因为两两之间不同, 所以如果有 x 对 $a > b$, 必然就有 $n - x$ 对 $a < b$, 所以 $x - (n - x) = k$, 所以 $x = (n + k)/2$

显然顺序可以打乱, 那么我们可以对两个数组排序, 然后固定 a 数组, 对应着去放置 b 数组的元素

设 $dp[i][j]$ 表示前 i 对数选择 j 对 $a > b$, 其他位置随意配对的方案数

那么 $g(i) = dp[n][i] * (n - i)!$ 就可以表示一共有大于等于 i 对 $a > b$ 的方案数

设 $f(i)$ 表示恰好有 i 对 $a > b$ 的方案数

因此

$$g(i) = \sum_{j=i}^n \binom{j}{i} f(j)$$
$$f(i) = \sum_{j=i}^n (-1)^{j-i} \binom{j}{i} g(j)$$

2 集合计数

2.1 题意

一个有 N 个元素的集合有 2^N 个不同子集（包含空集），现在要在这 2^N 个集合中取出若干集合（至少一个），使得它们的交集的元素个数为 K ，求取法的方案数，答案模 1000000007

2.2 题解

令 $f(i)$ 表示恰好有 i 个交集的方案数

$g(i)$ 表示 $\geq i$ 个交集的方案数

f 和 g 满足如下关系

$$g(i) = \sum_{j=i}^{2^N} \binom{j}{i} f(j)$$

求出 g , 反演出 f 即可

$$g(i) = \binom{n}{i} 2^{2^{n-i}}$$

枚举 i 个数为交集，其他的 $(n-i)$ 个数一共有 2^{n-i} 个集合，每个集合都可以选或者不选

幂次太大，需要用到欧拉定理降幂

3 King's Colors

3.1 题意

国王有一棵树，他的孩子们喜欢 K 种颜色，希望国王能把这 K 种颜色涂到树的 N 个节点上，而且要保证相邻节点不同色，问涂色方案数。

3.2 题解

由于每个点只要和父亲不同色就行，因此，假设最多使用 i 种颜色，那么总方案数就是 $i * (i-1)^{n-1}$

我们设 $f(i)$ 表示最多使用 i 种颜色的方案数， $g(i)$ 表示恰好使用 i 种颜色的方案数

因此

$$f(i) = \sum_{j=0}^i \binom{i}{j} g(j)$$

$$f(i) = i * (i - 1)^{n-1}$$

所以我们可以愉快地使用二项式反演求出 g 了