具体数学中级班第一周参考答案

517 老师

2020 年 5 月 2 日

1 例题 3

问题描述:

求 $\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{m} lcm(i,j)\ (n,m \le 1e7, n \le m)$

解法:

$\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{m} lcm(i,j) = \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{m} \frac{ij}{gcd(i,j)}$

$= \sum\limits_{d=1}^{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{m}[gcd(i,j)=d]\frac{ij}{d}$

$= \sum\limits_{d=1}^{n}\sum\limits_{i=1}^{\lfloor\frac{n}{d}\rfloor}\sum\limits_{j=1}^{\lfloor\frac{m}{d}\rfloor}[gcd(i,j)=1]\frac{ijd^2}{d}$

$= \sum\limits_{d=1}^{n} d \sum\limits_{i=1}^{\lfloor\frac{n}{d}\rfloor}\sum\limits_{j=1}^{\lfloor\frac{m}{d}\rfloor} ij \sum\limits_{k|i,k|j}\mu(k)$

$= \sum\limits_{d=1}^{n} d \sum\limits_{k=1}^{\lfloor\frac{n}{d}\rfloor}\mu(k)\sum\limits_{k|i}^{\lfloor\frac{n}{d}\rfloor} i \sum\limits_{k|j}^{\lfloor\frac{m}{d}\rfloor} j$

$= \sum\limits_{d=1}^{n} d \sum\limits_{k=1}^{\lfloor\frac{n}{d}\rfloor}k^2\mu(k)\sum\limits_{i=1}^{\lfloor\frac{n}{kd}\rfloor} i \sum\limits_{j=1}^{\lfloor\frac{m}{kd}\rfloor} j$

分块套分块, 复杂度为 $O(n)$

如果要多次询问, 我们需要继续优化

令 $Q = kd$, 更换标号得

$\sum\limits_{d=1}^{n} d \sum\limits_{k=1}^{\lfloor\frac{n}{d}\rfloor}k^2\mu(k)\sum\limits_{i=1}^{\lfloor\frac{n}{kd}\rfloor} i \sum\limits_{j=1}^{\lfloor\frac{m}{kd}\rfloor} j = \sum\limits_{Q=1}^{n}\sum\limits_{i=1}^{\lfloor\frac{n}{Q}\rfloor} i \sum\limits_{j=1}^{\lfloor\frac{m}{Q}\rfloor} j \sum\limits_{k|Q}\mu(k)k^2\frac{Q}{k}$

$= \sum\limits_{Q=1}^{n}\sum\limits_{i=1}^{\lfloor\frac{n}{Q}\rfloor} i \sum\limits_{j=1}^{\lfloor\frac{m}{Q}\rfloor} j \sum\limits_{k|Q}\mu(k)kQ$

令 $f(Q)=\sum\limits_{k|Q}\mu(k)kQ$, 我们发现 $f(Q)$ 是个积性函数, 于是可以利用线性筛预处理出 $f(Q)$ 函数, 然后求出前缀和, 每次询问复杂度可以优化成 $\sqrt{n}$

2 编程练习

不会做的题建议看懂之后，重新独立思考推一遍式子，整个过程要独立

2.1 A 题

令 $f(x)=2\cdot x-1$

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}f(gcd(i,j)) &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\sum_{d=1}^{n}f(d)[gcd(i,j)==d]\ (\text{枚举最大公约数})\\ &= \sum_{d=1}^{n}f(d)\sum_{i=1}^{\lfloor\frac{n}{d}\rfloor}\sum_{j=1}^{\lfloor\frac{m}{d}\rfloor}[gcd(i,j)==1]\ (\text{交换枚举顺序})\\ &= \sum_{d=1}^{n}f(d)\sum_{t=1}^{\lfloor\frac{n}{d}\rfloor}\mu(t)\lfloor\frac{n}{dt}\rfloor\lfloor\frac{m}{dt}\rfloor\\ &= \sum_{q=1}^{n}\lfloor\frac{n}{q}\rfloor\lfloor\frac{m}{q}\rfloor\sum_{t|q}\mu(t)f(\frac{q}{t})\ (\text{令 } q=dt, \text{并修改枚举的标号})\end{aligned}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}f(gcd(i,j))=\sum_{q=1}^{n}\lfloor\frac{n}{q}\rfloor\lfloor\frac{m}{q}\rfloor\sum_{t|q}\mu(t)f(\frac{q}{t})$$

令 $g(n)=\sum\limits_{t|n}\mu(t)f(\frac{q}{t})$，可以直接 nlogn 预处理

2.2 B 题

$\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{m}d(ij)=\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{m}\sum\limits_{a|i}\sum\limits_{b|j}[gcd(a,b)=1]$

$=\sum\limits_{a=1}^{n}\sum\limits_{b=1}^{m}[gcd(a,b)=1]\lfloor\frac{n}{i}\rfloor\lfloor\frac{m}{j}\rfloor$

$=\sum\limits_{p=1}^{n}\mu(p)\sum\limits_{i=1}^{\lfloor\frac{n}{p}\rfloor}\sum\limits_{j=1}^{\lfloor\frac{m}{p}\rfloor}\lfloor\frac{n}{ip}\rfloor\lfloor\frac{m}{jp}\rfloor$

$=\sum\limits_{p=1}^{n}\mu(p)f(\lfloor\frac{n}{p}\rfloor)f(\lfloor\frac{m}{p}\rfloor)$

$f(n)=\sum\limits_{i=1}^{n}\lfloor\frac{n}{i}\rfloor$

这个 $f(n)$ 的预处理参考整除分块的基本性质

2.3 C 题

假设 $a \le b$

$\sum_{x=1}^{a}\sum_{y=1}^{b}[gcd(x,y)=d] = \sum_{d=1}^{a}\sum_{x=1}^{\lfloor\frac{a}{d}\rfloor}\sum_{y=1}^{\lfloor\frac{b}{d}\rfloor}[gcd(x,y)==1]$

$=\sum_{d=1}^{a}\sum_{x=1}^{\lfloor\frac{a}{d}\rfloor}\sum_{y=1}^{\lfloor\frac{b}{d}\rfloor}\sum_{t|x,t|y}\mu(t)$

$=\sum_{d=1}^{a}\sum_{t=1}^{\lfloor\frac{a}{d}\rfloor}\mu(t)\sum_{t|x}^{\lfloor\frac{a}{d}\rfloor}\sum_{t|y}^{\lfloor\frac{b}{d}\rfloor}1$

$=\sum_{d=1}^{a}\sum_{t=1}^{\lfloor\frac{a}{d}\rfloor}\mu(t)\lfloor\frac{a}{dt}\rfloor\lfloor\frac{b}{dt}\rfloor$

整除分块即可解决, 单次询问复杂度 $\sqrt{a}$

2.4 D 题

同上题, 加点容斥就行.

令 $g(a,b,k)$ 表示上一题的答案, 令 $f(a,b,c,d,k)$ 表示这一题的答案

那么 $f(a,b,c,d,k)=g(b,d,k)-g(a-1,d,k)-g(b,c-1,k)+g(a-1,c-1,k)$

2.5 E 题

$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}gcd(i,j)^k=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\sum_{d=1}^{n}d^k[gcd(i,j)==d]$

$=\sum_{d=1}^{n}d^k\sum_{i=1}^{\lfloor\frac{n}{d}\rfloor}\sum_{j=1}^{\lfloor\frac{m}{d}\rfloor}[gcd(i,j)==1]$

$=\sum_{d=1}^{n}d^k\sum_{i=1}^{\lfloor\frac{n}{d}\rfloor}\sum_{j=1}^{\lfloor\frac{m}{d}\rfloor}\sum_{t|i,t|j}\mu(t)$

$=\sum_{d=1}^{n}d^k\sum_{t=1}^{\lfloor\frac{n}{d}\rfloor}\mu(t)\sum_{i=1}^{\lfloor\frac{n}{dt}\rfloor}\sum_{j=1}^{\lfloor\frac{m}{dt}\rfloor}1$

$=\sum_{Q=1}^{n}\sum_{d|Q}d^k\mu(\frac{Q}{d})\sum_{i=1}^{\lfloor\frac{n}{Q}\rfloor}\sum_{j=1}^{\lfloor\frac{m}{Q}\rfloor}1$

$=\sum_{Q=1}^{n}\lfloor\frac{n}{Q}\rfloor\lfloor\frac{m}{Q}\rfloor\sum_{d|Q}d^k\mu(\frac{Q}{d})$

令 $g(Q)=\sum_{d|Q}d^k\mu(\frac{Q}{d})$

显然，g 是一个两个积性函数的卷积，故 g 也是一个积性函数，我们可以用线性筛求出 g, 然后对于每次询问，利用整除分块即可搞定

下面简单讲一下 g 函数的预处理过程

假设 $g(n)=\sum\limits_{d|n}d^k\mu(\frac{n}{d})=\prod\limits_{p_i}g(p_i^{t_i})$

因为 $g(p_i^{t_i})=(p_i^{t_i-1})^k\cdot\mu(p_i)+(p_i^{t_i})^k\cdot\mu(1)=p_i^{t_ik}-p_i^{(t_i-1)k}=p_i^{k(t_i-1)}(p_i^k-1)$

所以 $g(n)=\prod\limits_{p_i}p_i^{k(t_i-1)}(p_i^k-1)$

在线性筛的过程中，如果发现 i 不是 p[j] 的倍数，那么直接利用积性函数的特点,$g(i\times p[j])=g(i)\times g(p[j])$ 即可

如果 i 是 p[j] 的倍数，那么说明 i 里面本来就有 p[j] 这个质因子，加入 p[j] 后相当于给某个质因子的幂次增加了 1，根据上面的 $g(n)$ 的式子，相当于最终结果乘上 $p[j]^k$ 倍