

具体数学中级班第四周参考答案

517

2020 年 5 月 20 日

1 平均最小公倍数

1.1 题意

$$\text{设 } A(n) = \frac{\sum_{i=1}^n \text{lcm}(n, i)}{n}$$

$$\text{求 } F(a, b) = \sum_{i=a}^b A(i)$$

$$a, b \leq 10^9$$

1.2 题解

本质上只要求 $S(n) = \sum_{i=1}^n A(i)$

$$\sum_{i=1}^n \text{lcm}(i, n) = \frac{n + n \sum_{d|n} d \cdot \varphi(d)}{2}$$

$$\text{所以 } A(n) = \frac{1 + \sum_{d|n} d \cdot \varphi(d)}{2}$$

$$S(n) = \sum_{i=1}^n A(i)$$

$$= \sum_{i=1}^n \frac{1 + \sum_{d|i} d \cdot \varphi(d)}{2}$$

$$= \frac{n + \sum_{i=1}^n \sum_{d|i} d \cdot \varphi(d)}{2}$$

$$= \frac{n + \sum_{d=1}^n d \cdot \varphi(d) \lfloor \frac{n}{d} \rfloor}{2}$$

$$\text{令 } f(n) = n \varphi(n)$$

所以只要能快速求 $\text{sum}(n) = \sum_{i=1}^n f(i)$ 即可，我们构造 $g(n) = n$

$$\begin{aligned}
& \text{由 } \sum_{i=1}^n (f \times g)(i) = \sum_{i=1}^n g(i) \text{sum}(\lfloor \frac{n}{i} \rfloor) \\
& \text{得 } g(1) \text{sum}(n) = \sum_{i=1}^n (f \times g)(i) - \sum_{i=2}^n g(i) \text{sum}(\lfloor \frac{n}{i} \rfloor) \\
& \text{因此 } \text{sum}(n) = \sum_{i=1}^n (f \times g)(i) - \sum_{i=2}^n g(i) \text{sum}(\lfloor \frac{n}{i} \rfloor) \\
& = \sum_{i=1}^n \sum_{d|i} f(d) g(\frac{i}{d}) - \sum_{i=2}^n g(i) \text{sum}(\lfloor \frac{n}{i} \rfloor) \\
& = \sum_{i=1}^n i \sum_{d|i} \varphi(d) - \sum_{i=2}^n g(i) \text{sum}(\lfloor \frac{n}{i} \rfloor) \\
& = \sum_{i=1}^n i^2 - \sum_{i=2}^n g(i) \text{sum}(\lfloor \frac{n}{i} \rfloor)
\end{aligned}$$

因此, $\text{sum}(n)$ 可以使用杜教筛搞定

$$\text{那么答案 } S(n) = \frac{n + \text{sum}(n) \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n}{d} \rfloor} 1}{2}$$

就可以整除分块搞定

2 DIVCNT2

2.1 题意

$\sigma_0(n)$ 表示 n 的约数的个数

$$\text{求 } S(n) = \sum_{i=1}^n \sigma_0(i^2)$$

$$1 \leq n \leq 10^{12}$$

多组数据, 数据组数小于等于 10000

2.2 题解

带着平方项似乎不太方便化简, 所以我们考虑哪些因子是 n^2 有而 n 没有的

令 $n = \prod p_i^{a_i}$ (质因数幂次相乘的形式)

因此 n^2 独有的因子里一定有一个素因子的幂次 p_i^k , $k > a_i$

将所有这样的素因子的幂次都减去对应的 a_i 之后得到的因子是 n 的因子, 所以我们可以根据 n 的所有因子来反向得到 n^2 的所有因子

因此我们考虑 n 的每个因子对 n^2 因子数的贡献

假设 n 的某个因子 $d = p_1^{b_1} p_2^{b_2} \dots p_m^{b_m}$ ($0 < b_i \leq a_i$)

那么每个 b_i 是否要加上 a_i 一共就有 2^m 种选择

$$\text{所以 } \sigma_0(n^2) = \sum_{d|n} 2^{\text{cnt}(d)} = \sum_{d|n} \sum_{e|d} \mu^2(e) = ((\mu^2 \times I) \times I)(n)$$

$\text{cnt}(d)$ 表示 d 的素因子的个数, 第二步递推是因为 $\mu(e)$ 不等于 0 的项都是那些质因子幂次为 1 的项

$$\text{又因为 } ((\mu^2 \times I) \times I) = \mu^2 \times (I \times I) = \mu^2 \times \sigma_0$$

$$\text{回到我们要求的 } S(n) = \sum_{i=1}^n \sigma_0(i^2)$$

$$= \sum_{i=1}^n \sum_{d|i} \mu^2(d) \cdot \sigma_0\left(\frac{i}{d}\right)$$

$$= \sum_{i=1}^n \mu^2(i) \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{n}{i} \rfloor} \sigma_0(j)$$

对于这两个部分, 我们都需要能快速计算前缀和

$$1: \sum_{i=1}^n \mu^2(i) = \sum_{i=1}^n |\mu(i)| = \sum_{i=1}^{\sqrt{n}} \mu(i) \lfloor \frac{n}{i^2} \rfloor$$

其实就是求 $[1, n]$ 里面有多少个数没有平方因子 (平方因子的意思就是某个因子是一个数的平方)

考虑使用容斥, 假设 A_i 表示 $[1, n]$ 里面有多少个数的平方因子为 i 个素数的乘积的平方, 答案应该为

$$n - A_1 + A_2 - A_3 \dots$$

这个容斥的系数我们可以发现恰好就是 μ

$$2: \sum_{i=1}^n \sigma_0(i) = \sum_{i=1}^n \lfloor \frac{n}{i} \rfloor$$

复杂度计算类似于杜教筛, 我们可以预处理出前 $n^{\frac{2}{3}}$ 项的前缀和, 最终复杂度为 $O(n^{\frac{2}{3}})$

3 最小公倍数计数

3.1 题意

$$\text{令 } f(n) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=i}^n [\text{lcm}(i, j) = n]$$

$$\text{求 } \sum_{i=a}^b f(i)$$

$$1 \leq a \leq b \leq 10^{11}$$

3.2 题解

$$\text{先不考虑 } f(n) \text{ 中 } i \leq j \text{ 的情况, 令 } g(n) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n [\text{lcm}(i, j) = n]$$

设 $ans(n) = (\sum_{i=1}^n g(i) + n)/2$

那么 $ans(b) - ans(a-1)$ 就是答案

因此我们需要求 $S(n) = \sum_{i=1}^n g(i)$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n [lcm(i, j) \leq n] \\
 &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n [\frac{ij}{gcd(i, j)} \leq n] \\
 &= \sum_{d=1}^n \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n}{d} \rfloor} \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{n}{d} \rfloor} [ijd \leq n] [gcd(i, j) = 1] \\
 &= \sum_{d=1}^n \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n}{d} \rfloor} \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{n}{d} \rfloor} [ijd \leq n] \sum_{k|gcd(i, j)} \mu(k) \\
 &= \sum_{d=1}^n \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n}{d} \rfloor} \mu(k) \sum_{k|i}^{\lfloor \frac{n}{d} \rfloor} \sum_{k|j}^{\lfloor \frac{n}{d} \rfloor} [ijd \leq n] \\
 &= \sum_{d=1}^n \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n}{d} \rfloor} \mu(k) \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n}{kd} \rfloor} \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{n}{kd} \rfloor} [ikjkd \leq n] \\
 &= \sum_{k=1}^n \mu(k) \sum_{d=1}^{\lfloor \frac{n}{k} \rfloor} \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n}{kd} \rfloor} \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{n}{kd} \rfloor} [ijd \leq \frac{n}{k^2}]
 \end{aligned}$$

我们发现 k 超过 \sqrt{n} 的话, 后面其实都是 0 了

所以

$$S(n) = \sum_{k=1}^{\sqrt{n}} \mu(k) \sum_{d=1}^{\lfloor \frac{n}{k} \rfloor} \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n}{kd} \rfloor} \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{n}{kd} \rfloor} [ijd \leq \frac{n}{k^2}]$$

写的简单一点就是

$$S(n) = \sum_{x=1}^{\sqrt{n}} \mu(x) \sum_i \sum_j \sum_k [ijk \leq \frac{n}{x^2}]$$

后面一部分可以设为 $h(n) = \sum_i \sum_j \sum_k [ijk \leq n]$

我们来研究下 $h(n)$ 的计算方法以及复杂度

我们可以设 $i \leq j \leq k$

先枚举 i , 需要枚举到 $n^{\frac{1}{3}}$, 再枚举 j , 枚举到 $\sqrt{\frac{n}{i}}$, 满足条件的 k 的个数可以 $O(1)$ 算, 具体细节要分是两个数相同还是三个数相同, 还是三个数都不相同.

因此求 $h(n)$ 的复杂度为枚举 (i, j) 的复杂度为 $O\left(\int_0^{n^{\frac{1}{3}}} \sqrt{\frac{n}{x}} dx\right) = O(n^{\frac{2}{3}})$

整体复杂度为

$$O\left(\int_1^{\sqrt{n}} \left(\frac{n}{x^2}\right)^{\frac{2}{3}} dx\right) = O(n^{\frac{2}{3}})$$

4 加权约数和

4.1 题意

求 $S(n) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \max(i, j) \sigma(ij) \pmod{1e9 + 7}$
 $1 \leq n \leq 1000000$
 多组数据 (5 万组)

4.2 题解

首先有 $\max(i, j)$ 不好搞, 我们可以先容斥一下将其转换成不需要比较的形式

$$\max(i, j) = \sum_{k=1}^n [k \leq \max(i, j)] = n - \sum_{k=1}^n [k > i][k > j]$$

于是答案变成

$$ans = n \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sigma(ij) - \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j=1}^{k-1} \sigma(ij)$$

$$\text{令 } f(n) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sigma(ij)$$

$$\text{所以 } ans = nf(n) - \sum_{i=1}^{n-1} f(i)$$

虽然计算一个 $f(n)$ 的复杂度可以优化到 $O(n^{\frac{2}{3}})$. 但是每个都算的话显然不行
 我们研究一下 $f(n)$ 的表达式

$$f(n) = \sum_{i=1}^n \mu(i) i \left(\sum_{j=1}^{\lfloor \frac{n}{i} \rfloor} \sigma_1(j) \right)^2$$

$$\text{令 } g(n) = \mu(n)n$$

$$h(n) = \left(\sum_{i=1}^n \sigma_1(i) \right)^2$$

$$\text{于是 } f(n) = \sum_{i=1}^n g(i) h(\lfloor \frac{n}{i} \rfloor)$$

每一个 $h(i)$ 在预处理之后都可以 $O(1)$ 使用

现在我们需要计算 f 的前缀和, 我们发现, 对于一个 i , $\lfloor \frac{n}{i} \rfloor$ 的值在 n 处于 $[k * i, ki + i - 1]$ 区间时是相等的, 所以我们可以枚举 k 然后采用序列上差分的方法去叠加贡献, 最后做一遍前缀和即可, 预处理的复杂度为调和级数的复杂度

5 约数之和

5.1 题意

令 $d(k)$ 表示 k 的所有约数的和

$$\text{求 } S(n) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n d(ij) \pmod{1e9+7}$$

$$2 \leq n \leq 10^9$$

5.2 题解

此题类似于上题，有一个结论是 $d(nm) = \sum_{a|n} \sum_{b|m} [gcd(a,b)=1] \frac{am}{b}$

证明同理，对每个质因子单独考虑贡献

因此

$$\begin{aligned} S(n) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n d(ij) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{a|i} \sum_{b|j} [gcd(a,b)=1] \frac{aj}{b} \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{a|i} \sum_{b|j} \frac{aj}{b} \sum_{d|gcd(a,b)} \mu(d) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{d=1}^n \mu(d) \sum_{d|a} \sum_{d|b} \frac{aj}{b} \\ &= \sum_{d=1}^n \mu(d) \sum_{d|a} \sum_{d|b} \frac{a}{b} \sum_{a|i} \sum_{b|j} j \\ &= \sum_{d=1}^n \mu(d) \sum_{d|a} \sum_{d|b} \frac{a}{b} \lfloor \frac{n}{a} \rfloor \frac{\lfloor \frac{n}{b} \rfloor (\lfloor \frac{n}{b} \rfloor + 1)}{2} b \\ &= \sum_{d=1}^n \mu(d) \sum_{d|a} a \lfloor \frac{n}{a} \rfloor \sum_{d|b} \frac{\lfloor \frac{n}{b} \rfloor (\lfloor \frac{n}{b} \rfloor + 1)}{2} \\ &= \sum_{d=1}^n \mu(d) d \sum_{a=1}^{\lfloor \frac{n}{d} \rfloor} a \lfloor \frac{n}{ad} \rfloor \sum_{b=1}^{\lfloor \frac{n}{d} \rfloor} \frac{\lfloor \frac{n}{bd} \rfloor (\lfloor \frac{n}{bd} \rfloor + 1)}{2} \end{aligned}$$

现在我们需要快速求后面两部分的前缀和，化简成普通形式

$$- \sum_{i=1}^n i \lfloor \frac{n}{i} \rfloor - \sum_{i=1}^n \frac{\lfloor \frac{n}{i} \rfloor (\lfloor \frac{n}{i} \rfloor + 1)}{2}$$

第一部分其实就是所有数的约数之和 $\sum_{i=1}^n i \lfloor \frac{n}{i} \rfloor = \sum_{i=1}^n d(i)$

$$\begin{aligned} \text{第二部分} \quad & \sum_{i=1}^n \frac{\lfloor \frac{n}{i} \rfloor (\lfloor \frac{n}{i} \rfloor + 1)}{2} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{n}{i} \rfloor} j \\ &= \sum_{j=1}^n j \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n}{j} \rfloor} 1 \\ &= \sum_{j=1}^n j \lfloor \frac{n}{j} \rfloor \end{aligned}$$

因此第一部分与第二部分其实是等价的

$$\text{总结一下就是 } S(n) = \sum_{d=1}^n \mu(d) d \left(\sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n}{d} \rfloor} i \lfloor \frac{n}{i} \rfloor \right)^2 = \sum_{i=1}^n f(i) h(\lfloor \frac{n}{i} \rfloor)$$

$$f(n) = \mu(n)n$$

$$h(n) = \left(\sum_{i=1}^n \sigma_1(i)\right)^2$$

f 函数的前缀和套一个杜教筛即可搞定, h 函数可以通过线性筛过程预处理

6 DZY Loves Math IV

6.1 题意

$$\text{求 } \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \varphi(ij)$$

$$1 \leq n \leq 10^5, 1 \leq m \leq 10^9$$

6.2 题解

首先观察数据范围, n 较小, m 较大, 提示我们固定 i 这一部分, 去快速算 j 这一部分

那么我们就需要快速计算 $S(n, m) = \sum_{i=1}^m \varphi(ni)$ (n 是常数)

当 $|\mu(n)| = 1$ 的时候, 我们有

$$\text{令 } d = \gcd(n, i)$$

$$\varphi(ni) = \varphi(i \frac{n}{d})d = \varphi(i)\varphi(\frac{n}{d})d$$

所以我们设 $n = \prod p_i^{a_i}, q = \prod p_i, r = n/q$

$$\text{那么 } S(n, m) = \sum_{i=1}^m \varphi(ni)$$

$$= r \sum_{i=1}^m \varphi(qi)$$

$$= r \sum_{i=1}^m \varphi(i) \varphi(\frac{q}{\gcd(q, i)}) \gcd(q, i)$$

$$= r \sum_{i=1}^m \varphi(i) \varphi(\frac{q}{\gcd(q, i)}) \sum_{d|\gcd(q, i)} \varphi(d)$$

$$= r \sum_{i=1}^m \varphi(i) \varphi(\frac{q}{\gcd(q, i)}) \sum_{d|\gcd(q, i)} \varphi(\frac{\gcd(q, i)}{d})$$

$$= r \sum_{i=1}^m \varphi(i) \sum_{d|q, d|i} \varphi(\frac{q}{d})$$

$$= r \sum_{d|q} \varphi(\frac{q}{d}) \sum_{d|i} \varphi(i)$$

$$= r \sum_{d|q} \varphi(\frac{q}{d}) \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{m}{d} \rfloor} \varphi(id)$$

$$= r \sum_{d|q} \varphi(\frac{q}{d}) S(d, \lfloor \frac{m}{d} \rfloor)$$

当 $n = 1$ 时，就是求欧拉函数前缀和，利用杜教筛即可，虽然可能会多次查询但是总体复杂度是 $O(m^{\frac{2}{3}})$ 次

$\lfloor \frac{m}{d} \rfloor$ 最多只有 \sqrt{m} 种值，因此 $S(n, m)$ 最多有 $n\sqrt{m}$ 种取值

对于每个 n 最多有 \sqrt{n} 个因子，所以分解因子的复杂度最大为 $n\sqrt{n}$

因此总体复杂度为 $O(n(\sqrt{n} + \sqrt{m}) + m^{\frac{2}{3}})$

注意用记忆化搜索保存已经计算过的结果