具体数学中级班第三周参考答案

517

2020 年 5 月 16 日

1 Gcd and Lcm

1.1 题意

已知 $f(x) = \sum\limits_{d|x} \mu(d)d$

求 $\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n} f(gcd(i,j)) * f(lcm(i,j)) \pmod{1e9+7}$

$n \leq 10^9$

1.2 题解

首先，假如不考虑第一个条件，就是先枚举 x，用个桶记录一下 $cnt[a[b[x]]]$, 再枚举 y，对于每个 y，统计 $cnt[b[a[y]]]$ 的出现次数

然后考虑第一个条件, 我们可以设 $f(n)$ 表示 $gcd(x,y) \geq n$ 的满足条件的对数，设 $g(n)$ 表示 $gcd(x,y) = n$ 的满足条件的对数, 先求出 $f(n)$, 然后反演出 $g(n)$

此题从 $f(x)$ 本身入手分析，易知 $f(x)$ 是个积性函数

从每个质因子的角度考虑问题

假设 $i = \prod p_i^{a_i}, j = \prod p_i^{b_i}$

那么 $f(gcd(i,j)) * f(lcm(i,j)) = f(\prod p_i^{min(a_i,b_i)}) * f(\prod p_i^{max(a_i,b_i)})$

$= \prod f(p_i^{a_i}) \prod f(p_i^{b_i})$

$= f(i)f(j)$

所以 $ans = \sum\limits_{i=1}^{n} f(i) \sum\limits_{j=1}^{n} f(j)$

$= (\sum\limits_{i=1}^{n} f(i))^2$

设 $S(n) = \sum\limits_{i=1}^{n} f(i)$

$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{d|i} \mu(d)d$
$= \sum_{d=1}^{n} \mu(d)d\lfloor\frac{n}{d}\rfloor$
整除分块之后就是一个普通的杜教筛问题了

2 最小公倍数之和 V3

2.1 题意

求 $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} lcm(i,j) \pmod{10^9+7}$
$2 \le n \le 10^{10}$

2.2 题解

令 $f(n) = \sum_{i=1}^{n} lcm(i,n)$
$f(n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{i \cdot n}{gcd(i,n)}$
$= n\sum_{d|n}\sum_{i=1}^{\frac{n}{d}} i \cdot [gcd(i,\frac{n}{d}) = 1]$
$= n\sum_{d|n}\frac{n}{d} \cdot \frac{\varphi(\frac{n}{d})+[\frac{n}{d}=1]}{2}$(小于 n 与 n 互质的数的和等于 $\frac{n \cdot \varphi(n)}{2}$)
$= \frac{n+n\sum_{d|n} d \cdot \varphi(d)}{2}$
我们发现答案 $S(n) = 2\sum_{i=1}^{n} f(i) - \sum_{i=1}^{n} i$
$= \sum_{i=1}^{n} i\sum_{d|i} d \cdot \varphi(d)$
$= \sum_{i=1}^{n} i\sum_{ab=i} a\varphi(a)$
$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{ab=i} a^2b\varphi(a)$
$= \sum_{a=1}^{n} a^2\varphi(a)\sum_{b=1}^{\lfloor\frac{n}{a}\rfloor} b$
到此，我们发现右边已经可以分块了，接下去关键是要快速计算左边的部分
令 $h(i) = i^2\varphi(i)$, 那么我们需要快速计算 $H(n) = \sum_{i=1}^{n} h(i)$
我们构造 $g(i) = i^2$，计算狄利克雷卷积的前缀和
$\sum_{i=1}^{n}(h \times g)(i) = \sum_{i=1}^{n} g(i)H(\lfloor\frac{n}{i}\rfloor)$

$g(1)H(n)=\sum\limits_{i=1}^{n}(h\times g)(i)-\sum\limits_{i=2}^{n}g(i)H(\lfloor\frac{n}{i}\rfloor)$
$\sum\limits_{i=1}^{n}(h\times g)(i)=\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{d|i}d^2\varphi(d)(\frac{i}{d})^2=\sum\limits_{i=1}^{n}i^3$
所以
$H(n)=\sum\limits_{i=1}^{n}i^3-\sum\limits_{i=2}^{n}i^2H(\lfloor\frac{n}{i}\rfloor)$
可以使用杜教筛搞定
所以 $S(n)=\sum\limits_{i=1}^{n}h(i)\sum\limits_{j=1}^{\lfloor\frac{n}{i}\rfloor}j=\sum\limits_{i=1}^{n}i\sum\limits_{j=1}^{\lfloor\frac{n}{i}\rfloor}h(j)$
整除分块枚举之后，快速求 h 函数的前缀和可以用杜教筛
代码设计：先预处理 H 函数的前 $n^{\frac{2}{3}}$ 项, 然后根据 $S(n)$ 计算

3 最大公约数之和 V3

3.1 题意

求 $\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}gcd(i,j) \pmod{1e9+7}$
$2\le n\le 10^{10}$

3.2 题解

跟上一题类似
令 $f(n)=\sum\limits_{i=1}^{n}gcd(i,n)$
令 $S(n)=\sum\limits_{i=1}^{n}f(i)$
答案就等于 $2S(n)-\sum\limits_{i=1}^{n}i$
$f(n)=\sum\limits_{d|n}d\sum\limits_{i=1}^{\frac{n}{d}}[gcd(i,\frac{n}{d})==1]$
$=\sum\limits_{d|n}d\cdot\varphi(\frac{n}{d})$
$S(n)=\sum\limits_{i=1}^{n}f(i)=\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{d|i}d\cdot\varphi(\frac{i}{d})$
$=\sum\limits_{d=1}^{n}d\sum\limits_{d|i}\varphi(\frac{i}{d})$
$=\sum\limits_{d=1}^{n}d\sum\limits_{i=1}^{\frac{n}{d}}\varphi(i)$
所以就是整除分块加上快速求欧拉函数的前缀和，这个可以用杜教筛搞定

$sum(n) = n*(n+1)/2 - \sum_{i=2}^{n} sum(\lfloor \frac{n}{i} \rfloor)$

4 Lucas 的数论

4.1 题意

求 $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} f(ij) \pmod{1e9+7}$

$f(n)$ 表示 n 的约数的个数

$1 \le n \le 10^9$

4.2 题解

一个结论：

$f(nm) = \sum_{i|n}\sum_{j|m}[gcd(i,j)=1]$

考虑每个质数对答案的贡献即可证明

因此

$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} f(i,j) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{a|i}\sum_{b|j}[gcd(a,b)=1]$

$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{a|i}\sum_{b|j}\sum_{d|gcd(a,b)} \mu(d)$

$= \sum_{d=1}^{n}\sum_{d|a}\sum_{d|b}\sum_{a|p}\sum_{b|q} \mu(d)$

$= \sum_{d=1}^{n} \mu(d) \sum_{d|a}\sum_{d|b}\sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n}{a} \rfloor}\sum_{j=1}^{\lfloor \frac{n}{b} \rfloor}$

$= \sum_{d=1}^{n} \mu(d) \sum_{a=1}^{\lfloor \frac{n}{d} \rfloor}\sum_{b=1}^{\lfloor \frac{n}{d} \rfloor}\sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n}{ad} \rfloor}\sum_{j=1}^{\lfloor \frac{n}{bd} \rfloor}$

$= \sum_{d=1}^{n} \mu(d) (\sum_{x=1}^{\lfloor \frac{n}{d} \rfloor} \lfloor \frac{n}{dx} \rfloor)^2$

所以可以预处理 μ 函数的前 $n^{\frac{2}{3}}$ 前缀和, 然后整除分块套整除分块去算后面的部分，这样的复杂度就是

$O\left(\int_{1}^{\sqrt{n}} \sqrt{x} dx\right) = O(\frac{2}{3} n^{\frac{3}{4}})$

算下来一共几百万的计算量，已经可以通过此题

但是后面那部分其实可以继续优化

有 $\sqrt{n}$ 个 $\sum_{i=1}^{n_j} \lfloor \frac{n_j}{i} \rfloor$ 需要求，这个似乎比较难预处理，我们根据整除分块的一个性质转换一下

$\sum\limits_{i=1}^{n}\lfloor\frac{n}{i}\rfloor=\sum\limits_{i=1}^{n}f(i)$

所以我们可以预处理出前 $n^{\frac{2}{3}}$ 个数的因子个数的前缀和，当 $d<n^{\frac{1}{3}}$ 的时候可以采用整除分块暴力计算，复杂度为 $O\left(\int_1^{n^{\frac{1}{3}}}\sqrt{x}dx\right)=O(\frac{2}{3}n^{\frac{1}{3}})$

当 $d>n^{\frac{1}{3}}$ 的时候，$\frac{n}{d}<n^{\frac{2}{3}}$, 可以直接返回答案

所以总复杂度可以被优化到 $O(n^{\frac{2}{3}})$

这个题的复杂度计算更能体现杜教筛复杂度的本质