具体数学中级班第六周参考答案

517

2020 年 6 月 6 日

1 bzoj 2987

求满足 $ax + by \le c$ 的非负整数解的数量

那么就是求 $y = (c - ax)/b$ 这条线下方满足条件的点的数量

$ans = \sum\limits_{x=0}^{\lfloor\frac{c}{a}\rfloor} \lfloor\frac{c-ax}{b}\rfloor + 1$

根据对称性，x 可以变成 $c/a - x$

所以

$$ans = \sum_{x=0}^{\lfloor\frac{c}{a}\rfloor} \lfloor\frac{c - a * (\frac{c}{a} - x)}{b}\rfloor = \sum_{x=0}^{\lfloor\frac{c}{a}\rfloor} \lfloor\frac{c\%a + ax}{b}\rfloor$$

2 bzoj 2187

3 A - Mod, Xor and Everything

3.1 题意

给你一个整数 n, 你需要计算 $n\%1$ xor $n\%2$ xor ... xor (n % n)

$n \le 10^{12}$

3.2 题解

跟位运算相关的题一般是每一位单独考虑

第 k 位的答案是 $\sum\limits_{i=1}^{n} \lfloor\frac{n\%i}{2^k}\rfloor \pmod 2$

$\sum\limits_{i=1}^{n} \lfloor\frac{n-\lfloor\frac{n}{i}\rfloor i}{2^k}\rfloor \pmod 2$

这个形式我们发现可以在整除分块的同时利用类欧几里得

4 B - Sum

4.1 题意

给定正整数 n, R，求 $\sum\limits_{i=1}^{n}(-1)^{\lfloor\sqrt{i\times R\times i}\rfloor}$

T 组数据，$T \le 10^4, R \le 10^4, n \le 10^9$

4.2 题解

等价于求 $\sum\limits_{i=1}^{n}(-1)^{\lfloor i\sqrt{R}\rfloor}$

设 $r = \sqrt{R}$, $\lfloor ir\rfloor$ 为奇数时为-1，偶数时为 1

引入这样一个式子：$\lfloor x\rfloor - 2\lfloor\frac{x}{2}\rfloor$

当 $\lfloor x\rfloor$ 为奇数的时候，这个式子为 1，偶数的时候为 0

那么原式就可以改造成

$ans = \sum\limits_{i=1}^{n}(1-2(\lfloor ir\rfloor - 2\lfloor\frac{ir}{2}\rfloor)) = n - 2\sum\limits_{i=1}^{n}\lfloor ir\rfloor + 4\sum\limits_{i=1}^{n}\lfloor\frac{ir}{2}\rfloor$

如果 r 是个整数，那么直接就可以计算，下面集中讨论当 r 是浮点数时候的情况

问题转换为求 $f(k,n) = \sum\limits_{i=1}^{n}\lfloor ki\rfloor$ (k 为浮点数)

当 $k \ge 1$，我们可以将整数部分与浮点部分分离得到 $f(k,n) = f(k-\lfloor k\rfloor, n) + \lfloor k\rfloor n(n+1)/2$

当 $k < 1$, $f(k,n) = \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{m}[j \le ki]$, $m = \lfloor kn\rfloor$

因为 j/k 肯定是个浮点数，所以

$$f(k,n) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}[i > \lfloor\frac{j}{k}\rfloor]$$

$$f(k,n) = \sum_{j=1}^{m}(n - \lfloor\frac{j}{k}\rfloor)$$

$$f(k,n) = nm - f(\frac{1}{k}, m)$$

这个 k 如果使用浮点数容易挂精度，我们使用 $k = \frac{ar+b}{c}$ 的形式来表示，即 (a,b,c) 三元组的形式

取 k 的小数部分可以表示为：$\frac{ar+b}{c} - x = \frac{ar+b-xc}{c}$ $(x = \lfloor\frac{ar+b}{c}\rfloor)$

取 k 的倒数可以表示为：$\frac{c}{ar+b} = \frac{c(ar-b)}{(ar+b)(ar-b)} = \frac{arc-bc}{a^2R-b^2}$