类欧几里得

吴一岐

2020 年 6 月 2 日

1 描述

我们通过三个式子的化简来体会类欧几里得算法的精髓

1. $f(n,a,b,c)=\sum\limits_{i=0}^{n}\lfloor\frac{ai+b}{c}\rfloor$

2. $g(n,a,b,c)=\sum\limits_{i=0}^{n}i\lfloor\frac{ai+b}{c}\rfloor$

3. $h(n,a,b,c)=\sum\limits_{i=0}^{n}\lfloor\frac{ai+b}{c}\rfloor^2$

2 f 函数

$f(n,a,b,c)=\sum\limits_{i=0}^{n}\lfloor\frac{ai+b}{c}\rfloor$

f 函数的定义相当于是计算一个区域内整点的数量，即满足方程 $y=(ax+b)/c$ 这条直线下方的整点数量。

若 $a\geq c$ 或 $b\geq c$

那么有

$f(n,a,b,c)=\sum\limits_{i=0}^{n}\frac{(\lfloor\frac{a}{c}\rfloor c+a\%c)i+\lfloor\frac{b}{c}\rfloor c+b\%c}{c}$

上面的式子中我们发现两个整数部分可以单独脱离出来

$$f(n,a,b,c)=\sum_{i=0}^{n}\lfloor\frac{a}{c}\rfloor i+\sum_{i=0}^{n}\lfloor\frac{b}{c}\rfloor+f(n,a\%c,b\%c,c)$$

$$f(n,a,b,c)=\frac{(n+1)n}{2}\lfloor\frac{a}{c}\rfloor+(n+1)\lfloor\frac{b}{c}\rfloor+f(n,a\%c,b\%c,c)$$

我们发现问题已经可以递归解决

若 $a<c$ 且 $b<c$

那么令常数 $m=\lfloor\frac{an+b}{c}\rfloor$

$f(n,a,b,c)=\sum\limits_{i=0}^{n}\lfloor\frac{ai+b}{c}\rfloor=\sum\limits_{i=0}^{n}\sum\limits_{j=1}^{m}[j\leq\lfloor\frac{ai+b}{c}\rfloor]$

这个式子的几何意义：一条直线与 $x=0,x=n$ 两条垂直的直线构成的一个直角梯形里面的整点的数量（x 轴上方的点）

式子的计算方法是先枚举一条竖线，再求竖线上整点的数量

我们转换成枚举横线

$f(n,a,b,c)=\sum\limits_{i=0}^{n}\sum\limits_{j=0}^{m-1}[j+1\leq\lfloor\frac{ai+b}{c}\rfloor]$

$f(n,a,b,c)=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m-1}[jc+c-b\le ai]$
$f(n,a,b,c)=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m-1}[jc+c-b-1<ai]$
$f(n,a,b,c)=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m-1}[\lfloor\frac{jc+c-b-1}{a}\rfloor<i]$
$f(n,a,b,c)=\sum_{j=0}^{m-1}(n-\lfloor\frac{jc+c-b-1}{a}\rfloor)$
$f(n,a,b,c)=nm-f(m-1,c,c-b-1,a)$
之后递归处理即可

3 g 函数

$g(n,a,b,c)=\sum_{i=0}^{n}i\lfloor\frac{ai+b}{c}\rfloor$
当 $a\ge c$ 或 $b\ge c$ 的时候，跟 f 函数的化简类似我们可以得到
$g(n,a,b,c)=\frac{n*(n+1)(2n+1)}{6}\lfloor\frac{a}{c}\rfloor+\frac{n*(n+1)}{2}\lfloor\frac{b}{c}\rfloor+g(n,a\%c,b\%c,c)$
当 $a<c$ 而且 $b<c$
$g(n,a,b,c)=\sum_{i=0}^{n}i\sum_{j=1}^{m}[j\le\lfloor\frac{ai+b}{c}\rfloor]$
$g(n,a,b,c)=\sum_{i=0}^{n}i\sum_{j=0}^{m-1}[\lfloor\frac{jc+c-b-1}{a}\rfloor<i]$
令 $t=\lfloor\frac{jc+c-b-1}{a}\rfloor$
那么
$g(n,a,b,c)=\sum_{j=0}^{m-1}\sum_{i=0}^{n}[i>t]i$
后面部分是一个连续的数列
$g(n,a,b,c)=\sum_{j=0}^{m-1}\frac{1}{2}(t+1+n)(n-t)$
$g(n,a,b,c)=\sum_{j=0}^{m-1}\frac{1}{2}(n^2+n-t^2-t)$
$g(n,a,b,c)=\frac{1}{2}(mn(n+1)-\sum_{j=0}^{m-1}t^2-\sum_{j=0}^{m-1}t)$
$g(n,a,b,c)=\frac{1}{2}(mn(n+1)-h(m-1,c,c-b-1,a)-f(m-1,c,c-b-1,a))$

4 h 函数

$h(n,a,b,c)=\sum_{i=0}^{n}\lfloor\frac{ai+b}{c}\rfloor^2$

当 $a>c$ 或者 $b>c$ 变成带余除法的形式然后化简得到

$h(n,a,b,c)=\lfloor\frac{a}{c}\rfloor^2\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\lfloor\frac{b}{c}\rfloor^2(n+1)+\lfloor\frac{a}{c}\rfloor\lfloor\frac{b}{c}\rfloor n(n+1)+h(n,a\%c,b\%c,c)+2\lfloor\frac{b}{c}\rfloor f(n,a\%c,b\%c,c)+2\lfloor\frac{a}{c}\rfloor g(n,a\%c,b\%c,c)$

当 $a<c$ 且 $b<c$

令 $m=\lfloor\frac{an+b}{c}\rfloor, t=\lfloor\frac{jc+c-b-1}{a}\rfloor$

$h(n,a,b,c)=\sum\limits_{i=0}^{n}((2\sum\limits_{j=1}^{\lfloor\frac{ai+b}{c}\rfloor}j)-\lfloor\frac{ai+b}{c}\rfloor)$

$=(2\sum\limits_{i=0}^{n}\sum\limits_{j=1}^{\lfloor\frac{ai+b}{c}\rfloor}j)-f(n,a,b,c)$

接着我们化简

$\sum\limits_{i=0}^{n}\sum\limits_{j=1}^{\lfloor\frac{ai+b}{c}\rfloor}j$

$=\sum\limits_{i=0}^{n}\sum\limits_{j=0}^{\lfloor\frac{ai+b}{c}\rfloor-1}(j+1)$

$=\sum\limits_{j=0}^{m-1}(j+1)\sum\limits_{i=0}^{n}[j<\lfloor\frac{ai+b}{c}\rfloor]$

$=\sum\limits_{j=0}^{m-1}(j+1)\sum\limits_{i=0}^{n}[i>t]$

$=\sum\limits_{j=0}^{m-1}(j+1)(n-t)$

$=\frac{1}{2}nm(m+1)-\sum\limits_{j=0}^{m-1}(j+1)\lfloor\frac{jc+c-b-1}{a}\rfloor$

$=\frac{1}{2}nm(m+1)-g(m-1,c,c-b-1,a)-f(n,c,c-b-1,a)$

$h(n,a,b,c)=nm(m+1)-2g(m-1,c,c-b-1,a)-2f(m-1,c,c-b-1,a)-f(n,a,b,c)$

5 总结

现在，我们发现其实 g 和 h 函数的求解是三个函数交错递归的

实现的时候如果是暴力递归计算会重复计算，由于 f,g,h 三个函数在两种条件下递归之后的参数是一样的，所以可以一起计算，回溯的时候再计算当前参数下对应的 f,g,h 函数值

代码实现留给大家自己尝试