Solution

517coding

2020

1 佩可莉姆

问题转化为，记 $f(x)$ 为 x 的各位数字之和，n 的约数里有多少数 d 满足 $\lfloor\frac{d}{2}\rfloor = f(x)$ 。

观察发现，当 d 很大时 $f(d)$ 和 $\lfloor\frac{d}{2}\rfloor$ 不处于同一数量级，进一步可以验证得到 $f(d) = \lfloor\frac{d}{2}\rfloor$ 当且仅当 $d = 17$ 或 $d = 18$ 所以只需要判断 17 和 18 是否为 n 的约数即可。

2 凯露

定义 $f(i,j)$ 为是否有在 i 的子树内的特殊节点到 i 的距离为 j。

那么转移如下：$f(i,j) = \text{or}_{u\in\text{child}(i)} f(u, j-1)$。

定义 $g(i,j)$ 为是否有在 i 的子树外的特殊节点到 i 的距离为 j。

那么转移如下：$g(i,j) = g(fa_i, j-1)$ or $(\text{or}_{u\in\text{child}(fa_i),u\neq i} f(u, j-2))$。

若用 bitset 维护 f 和 g，转移如下：

$f(i) = \text{or}_{u\in\text{child}(i)} f(u) << 1$。

$g(i) = (g(fa_i) << 1)$ or $(\text{or}_{u\in\text{child}(fa_i),u\neq i} f(u) << 2)$。

那么以 i 号点为起点的答案为 bitcount($f(i)$ or $g(i)$)。

可以使用树上 dp 求解 f 和 g。注意求 g 的时候，我们需要求出 fa_i 的所有子节点除掉 i 的 f 值的 or，可以通过维护 fa_i 的所有子节点的 f 值的前缀 or 与后缀 or 解决。

注意到空间只允许我们开三个 50000×50000 的 bitset，我们需要存的 bitset 有 f、g 和前缀 or，后缀 or 可以通过从后往前扫描，只开一个 50000 的 bitset 解决。

复杂的 $\mathrm{O}(\frac{n^2}{\omega})$。

3 可可萝

序列的区间 GCD 有一个经典性质：固定右端点，随着左端点往左移动，不同的 GCD 至多只有 $O(\log a_i)$ 个。第一部分就是要提取出这些内容（右端点固定，左端点在 $[l,r]$ 内时，GCD 为某值），可以在 $O(n\log a_i)$ 内解决。

具体地，考虑右端点不断往右的同时维护关键的左端点（引起 GCD 的变化），用经典的辗转相除法更新 GCD 并合并 GCD 相同的关键点。这样做实际上是 $O(n\log a_i)$ 的，发现维护的数每除以 2，至多贡献 $O(1)$ 的时间复杂度。在整个过程中，每个数都贡献了 $O(\log a_i)$ 的复杂度，总的时间复杂度就是只有一个 log。

接下来一起处理 GCD 相同的区间。观察到随着右端点往右移动，左端点的合法区间 $[l,r]$ 的两端始终是单调不降的，这也保证了最优解是单调不降的。我们维护两个指针，一个始终小于 l，一个始终不超过 r。最优解 $f(i)$ 直接等于 $f(r)+1$ 就可以了。方案数只需

要根据 $<l$ 和 $\in [l,r]$ 讨论，维护前缀和即可（利用最优解单调不降的性质，维护最优解相等的一段的前缀和）。

总时间复杂度 $O(n\log a_i)$。