具体数学中级班第四周参考答案

517

2020 年 5 月 23 日

1 平均最小公倍数

1.1 题意

设 $A(n)=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}lcm(n,i)}{n}$

求 $F(a,b)=\sum\limits_{i=a}^{b}A(i)$

$a,b\le 10^9$

1.2 题解

本质上只需要求 $S(n)=\sum\limits_{i=1}^{n}A(i)$

$\sum\limits_{i=1}^{n}lcm(i,n)=\frac{n+n\sum\limits_{d|n}d\cdot\varphi(d)}{2}$

所以 $A(n)=\frac{1+\sum\limits_{d|n}d\cdot\varphi(d)}{2}$

$S(n)=\sum\limits_{i=1}^{n}A(i)$

$=\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1+\sum\limits_{d|i}d\cdot\varphi(d)}{2}$

$=\frac{n+\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{d|i}d\cdot\varphi(d)}{2}$

$=\frac{n+\sum\limits_{d=1}^{n}d\cdot\varphi(d)\lfloor\frac{n}{d}\rfloor}{2}$

令 $f(n)=n\varphi(n)$

所以只要能快速求 $sum(n)=\sum\limits_{i=1}^{n}f(i)$ 即可，我们构造 $g(n)=n$

由 $\sum\limits_{i=1}^{n}(f \times g)(i) = \sum\limits_{i=1}^{n} g(i) sum(\lfloor \frac{n}{i} \rfloor)$

得 $g(1) sum(n) = \sum\limits_{i=1}^{n}(f \times g)(i) - \sum\limits_{i=2}^{n} g(i) sum(\lfloor \frac{n}{i} \rfloor)$

因此 $sum(n) = \sum\limits_{i=1}^{n}(f \times g)(i) - \sum\limits_{i=2}^{n} g(i) sum(\lfloor \frac{n}{i} \rfloor)$

$= \sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{d|i} f(d) g(\frac{i}{d}) - \sum\limits_{i=2}^{n} g(i) sum(\lfloor \frac{n}{i} \rfloor)$

$= \sum\limits_{i=1}^{n} i \sum\limits_{d|i} \varphi(d) - \sum\limits_{i=2}^{n} g(i) sum(\lfloor \frac{n}{i} \rfloor)$

$= \sum\limits_{i=1}^{n} i^2 - \sum\limits_{i=2}^{n} g(i) sum(\lfloor \frac{n}{i} \rfloor)$

因此，$sum(n)$ 可以使用杜教筛搞定

那么答案 $S(n) = \frac{n + sum(n) \sum\limits_{i=1}^{\lfloor \frac{n}{d} \rfloor} 1}{2}$

就可以整除分块搞定

2 DIVCNT2

2.1 题意

$\sigma_0(n)$ 表示 n 的约数的个数

求 $S(n) = \sum\limits_{i=1}^{n} \sigma_0(i^2)$

$1 \leq n \leq 10^{12}$

多组数据，数据组数小于等于 10000

2.2 题解

带着平方项似乎不太方便化简，所以我们考虑哪些因子是 n^2 有而 n 没有的

令 $n = \prod p_i^{a_i}$ (质因数幂次相乘的形式)

因此 n^2 独有的因子里一定有一个素因子的幂次 p_i^k , $k > a_i$

将所有这样的素因子的幂次都减去对应的 a_i 之后得到的因子是 n 的因子，所以我们可以根据 n 的所有因子来反向得到 n^2 的所有因子

因此我们考虑 n 的每个因子对 n^2 因子数的贡献

假设 n 的某个因子 $d = p_1^{b_1} p_2^{b_2} ... p_m^{b_m} \quad (0 < b_i \leq a_i)$

那么每个 b_i 是否要加上 a_i 一共就有 2^m 种选择

所以 $\sigma_0(n^2) = \sum\limits_{d|n} 2^{cnt(d)} = \sum\limits_{d|n} \sum\limits_{e|d} \mu^2(e) = ((\mu^2 \times I) \times I)(n)$

$cnt(d)$ 表示 d 的素因子的个数, 第二步递推是因为 $\mu(e)$ 不等于 0 的项都是那些质因子幂次为 1 的项

又因为 $((\mu^2 \times I) \times I) = \mu^2 \times (I \times I) = \mu^2 \times \sigma_0$

回到我们要求的 $S(n) = \sum\limits_{i=1}^{n} \sigma_0(i^2)$

$= \sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{d|i} \mu^2(d) \cdot \sigma_0(\frac{i}{d})$

$= \sum\limits_{i=1}^{n} \mu^2(i) \sum\limits_{j=1}^{\lfloor \frac{n}{i} \rfloor} \sigma_0(j)$

对于这两个部分，我们都需要能快速计算前缀和

1: $\sum\limits_{i=1}^{n} \mu^2(i) = \sum\limits_{i=1}^{n} |\mu(i)| = \sum\limits_{i=1}^{\sqrt{n}} \mu(i) \lfloor \frac{n}{i^2} \rfloor$

其实就是求 [1,n] 里面有多少个数没有平方因子（平方因子的意思就是某个因子是一个数的平方）

考虑使用容斥, 假设 A_i 表示 $[1, n]$ 里面有多少个数存在一个平方因子为 i 个素数的乘积的平方的倍数，答案应该为

$$n - A_1 + A_2 - A_3 ...$$

这个容斥的系数我们可以发现恰好就是 μ

2: $\sum\limits_{i=1}^{n} \sigma_0(i) = \sum\limits_{i=1}^{n} \lfloor \frac{n}{i} \rfloor$

复杂度计算类似于杜教筛，我们可以预处理出前 $n^{\frac{2}{3}}$ 项的前缀和，最终复杂度为 $O(n^{\frac{2}{3}})$

3 最小公倍数计数

3.1 题意

令 $f(n) = \sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{j=i}^{n} [lcm(i, j) = n]$

求 $\sum\limits_{i=a}^{b} f(i)$

$1 \le a \le b \le 10^{11}$

3.2 题解

先不考虑 $f(n)$ 中 $i \le j$ 的情况，令 $g(n) = \sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{j=1}^{n} [lcm(i, j) = n]$

设 $ans(n)=(\sum\limits_{i=1}^{n}g(i)+n)/2$

那么 $ans(b)-ans(a-1)$ 就是答案

因此我们需要求 $S(n)=\sum\limits_{i=1}^{n}g(i)$

$=\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}[lcm(i,j)\le n]$

$=\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}[\frac{ij}{gcd(i,j)}\le n]$

$=\sum\limits_{d=1}^{n}\sum\limits_{i=1}^{\lfloor\frac{n}{d}\rfloor}\sum\limits_{j=1}^{\lfloor\frac{n}{d}\rfloor}[ijd\le n][gcd(i,j)=1]$

$=\sum\limits_{d=1}^{n}\sum\limits_{i=1}^{\lfloor\frac{n}{d}\rfloor}\sum\limits_{j=1}^{\lfloor\frac{n}{d}\rfloor}[ijd\le n]\sum\limits_{k|gcd(i,j)}\mu(k)$

$=\sum\limits_{d=1}^{n}\sum\limits_{k=1}^{\lfloor\frac{n}{d}\rfloor}\mu(k)\sum\limits_{k|i}^{\lfloor\frac{n}{d}\rfloor}\sum\limits_{k|j}^{\lfloor\frac{n}{d}\rfloor}[ijd\le n]$

$=\sum\limits_{d=1}^{n}\sum\limits_{k=1}^{\lfloor\frac{n}{d}\rfloor}\mu(k)\sum\limits_{i=1}^{\lfloor\frac{n}{kd}\rfloor}\sum\limits_{j=1}^{\lfloor\frac{n}{kd}\rfloor}[ikjkd\le n]$

$=\sum\limits_{k=1}^{n}\mu(k)\sum\limits_{d=1}^{\lfloor\frac{n}{k}\rfloor}\sum\limits_{i=1}^{\lfloor\frac{n}{kd}\rfloor}\sum\limits_{j=1}^{\lfloor\frac{n}{kd}\rfloor}[ijd\le\frac{n}{k^2}]$

我们发现 k 超过 $\sqrt{n}$ 的话，后面其实都是 0 了

所以

$S(n)=\sum\limits_{k=1}^{\sqrt{n}}\mu(k)\sum\limits_{d=1}^{\lfloor\frac{n}{k}\rfloor}\sum\limits_{i=1}^{\lfloor\frac{n}{kd}\rfloor}\sum\limits_{j=1}^{\lfloor\frac{n}{kd}\rfloor}[ijd\le\frac{n}{k^2}]$

写的简单一点就是

$S(n)=\sum\limits_{x=1}^{\sqrt{n}}\mu(x)\sum\limits_{i}\sum\limits_{j}\sum\limits_{k}[ijk\le\frac{n}{x^2}]$

后面一部分可以设为 $h(n)=\sum\limits_{i}\sum\limits_{j}\sum\limits_{k}[ijk\le n]$

我们来研究下 $h(n)$ 的计算方法以及复杂度

我们可以设 $i\le j\le k$

先枚举 i, 需要枚举到 $n^{\frac{1}{3}}$, 再枚举 j, 枚举到 $\sqrt{\frac{n}{i}}$, 满足条件的 k 的个数可以 $O(1)$ 算, 具体细节要分是两个数相同还是三个数相同，还是三个数都不相同.

因此求 $h(n)$ 的复杂度为枚举 (i,j) 的复杂度为 $O\left(\int_0^{n^{\frac{1}{3}}}\sqrt{\frac{n}{x}}dx\right)=O(n^{\frac{2}{3}})$

整体复杂度为

$O\left(\int_1^{\sqrt{n}}(\frac{n}{x^2})^{\frac{2}{3}}dx\right)=O(n^{\frac{2}{3}})$

4 加权约数和

4.1 题意

求 $S(n)=\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}max(i,j)\sigma(ij) \pmod{1e9+7}$
$1\le n\le 1000000$
多组数据 (5 万组)

4.2 题解

首先有 $max(i,j)$ 不好搞，我们可以先容斥一下将其转换成不需要比较的形式
$max(i,j)=\sum\limits_{k=1}^{n}[k\le max(i,j)]=n-\sum\limits_{k=1}^{n}[k>i][k>j]$
于是答案变成
$ans=n\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}\sigma(ij)-\sum\limits_{k=1}^{n}\sum\limits_{i=1}^{k-1}\sum\limits_{j=1}^{k-1}\sigma(ij)$
令 $f(n)=\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}\sigma(ij)$
所以 $ans=nf(n)-\sum\limits_{i=1}^{n-1}f(i)$
虽然计算一个 $f(n)$ 的复杂度可以优化到 $O(n^{\frac{2}{3}})$. 但是每个都算的话显然不行
我们研究一下 $f(n)$ 的表达式
$f(n)=\sum\limits_{i=1}^{n}\mu(i)i(\sum\limits_{j=1}^{\lfloor\frac{n}{d}\rfloor}\sigma_1(j))^2$
令 $g(n)=\mu(n)n$
$h(n)=(\sum\limits_{i=1}^{n}\sigma_1(i))^2$
于是 $f(n)=\sum\limits_{i=1}^{n}g(i)h(\lfloor\frac{n}{i}\rfloor)$
每一个 $h(i)$ 在预处理之后都可以 $O(1)$ 使用

现在我们需要计算 f 的前缀和，我们发现，对于一个 i, $\lfloor\frac{n}{i}\rfloor$ 的值在 n 处于 $[k*i,ki+i-1]$ 区间时是相等的, 所以我们可以枚举 k 然后采用序列上差分的方法去叠加贡献，最后做一遍前缀和即可, 预处理的复杂度为调和级数的复杂度

5 约数之和

5.1 题意

令 $d(k)$ 表示 k 的所有约数的和

求 $S(n)=\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}d(ij) \pmod{1e9+7}$

$2\le n\le 10^9$

5.2 题解

此题类似于上题，有一个结论是 $d(nm)=\sum\limits_{a|n}\sum\limits_{b|m}[gcd(a,b)=1]\frac{am}{b}$

证明同理，对每个质因子单独考虑贡献

因此

$S(n)=\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}d(ij)$

$=\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}\sum\limits_{a|i}\sum\limits_{b|j}[gcd(a,b)=1]\frac{aj}{b}$

$=\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}\sum\limits_{a|i}\sum\limits_{b|j}\frac{aj}{b}\sum\limits_{d|gcd(a,b)}\mu(d)$

$=\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}\sum\limits_{d=1}^{n}\mu(d)\sum\limits_{d|a}\sum\limits_{d|b}\frac{aj}{b}$

$=\sum\limits_{d=1}^{n}\mu(d)\sum\limits_{d|a}\sum\limits_{d|b}\frac{a}{b}\sum\limits_{a|i}\sum\limits_{b|j}j$

$=\sum\limits_{d=1}^{n}\mu(d)\sum\limits_{d|a}\sum\limits_{d|b}\frac{a}{b}\lfloor\frac{n}{a}\rfloor\frac{\lfloor\frac{n}{b}\rfloor(\lfloor\frac{n}{b}\rfloor+1)}{2}b$

$=\sum\limits_{d=1}^{n}\mu(d)\sum\limits_{d|a}a\lfloor\frac{n}{a}\rfloor\sum\limits_{d|b}\frac{\lfloor\frac{n}{b}\rfloor(\lfloor\frac{n}{b}\rfloor+1)}{2}$

$=\sum\limits_{d=1}^{n}\mu(d)d\sum\limits_{a=1}^{\lfloor\frac{n}{d}\rfloor}a\lfloor\frac{n}{ad}\rfloor\sum\limits_{b=1}^{\lfloor\frac{n}{d}\rfloor}\frac{\lfloor\frac{n}{bd}\rfloor(\lfloor\frac{n}{bd}\rfloor+1)}{2}$

现在我们需要快速求后面两部分的前缀和，化简成普通形式

- $\sum\limits_{i=1}^{n}i\lfloor\frac{n}{i}\rfloor$ - $\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{\lfloor\frac{n}{i}\rfloor(\lfloor\frac{n}{i}\rfloor+1)}{2}$

第一部分其实就是所有数的约数之和 $\sum\limits_{i=1}^{n}i\lfloor\frac{n}{i}\rfloor=\sum\limits_{i=1}^{n}d(i)$

第二部分 $\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{\lfloor\frac{n}{i}\rfloor(\lfloor\frac{n}{i}\rfloor+1)}{2}=\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{\lfloor\frac{n}{i}\rfloor}j$

$=\sum\limits_{j=1}^{n}j\sum\limits_{i=1}^{\lfloor\frac{n}{j}\rfloor}1$

$=\sum\limits_{j=1}^{n}j\lfloor\frac{n}{j}\rfloor$

因此第一部分与第二部分其实是等价的

总结一下就是 $S(n)=\sum\limits_{d=1}^{n}\mu(d)d(\sum\limits_{i=1}^{\lfloor\frac{n}{d}\rfloor}i\lfloor\frac{n}{i}\rfloor)^2=\sum\limits_{i=1}^{n}f(i)h(\lfloor\frac{n}{i}\rfloor)$

$f(n)=\mu(n)n$

$h(n)=(\sum\limits_{i=1}^{n}\sigma_1(i))^2$

f 函数的前缀和套一个杜教筛即可搞定, h 函数可以通过线性筛过程预处理

6 DZY Loves Math IV

6.1 题意

求 $\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{m}\varphi(ij)$

$1\le n\le 10^5, 1\le m\le 10^9$

6.2 题解

首先观察数据范围,n 较小, m 较大, 提示我们固定 i 这一部分, 去快速算 j 这一部分

那么我们就需要快速计算 $S(n,m)=\sum\limits_{i=1}^{m}\varphi(ni)$ (n 是常数)

当 $|\mu(n)|=1$ 的时候, 我们有

令 $d=gcd(n,i)$

$\varphi(ni)=\varphi(i\frac{n}{d})d=\varphi(i)\varphi(\frac{n}{d})d$

所以我们设 $n=\prod p_i{}^{a_i}, q=\prod p_i, r=n/q$

那么 $S(n,m)=\sum\limits_{i=1}^{m}\varphi(ni)$

$=r\sum\limits_{i=1}^{m}\varphi(qi)$

$=r\sum\limits_{i=1}^{m}\varphi(i)\varphi(\frac{q}{gcd(q,i)})gcd(q,i)$

$=r\sum\limits_{i=1}^{m}\varphi(i)\varphi(\frac{q}{gcd(q,i)})\sum\limits_{d|gcd(q,i)}\varphi(d)$

$=r\sum\limits_{i=1}^{m}\varphi(i)\varphi(\frac{q}{gcd(q,i)})\sum\limits_{d|gcd(q,i)}\varphi(\frac{gcd(q,i)}{d})$

$=r\sum\limits_{i=1}^{m}\varphi(i)\sum\limits_{d|q,d|i}\varphi(\frac{q}{d})$

$=r\sum\limits_{d|q}\varphi(\frac{q}{d})\sum\limits_{d|i}\varphi(i)$

$=r\sum\limits_{d|q}\varphi(\frac{q}{d})\sum\limits_{i=1}^{\lfloor\frac{m}{d}\rfloor}\varphi(id)$

$=r\sum\limits_{d|q}\varphi(\frac{q}{d})S(d,\lfloor\frac{m}{d}\rfloor)$

当 $n=1$ 时，就是求欧拉函数前缀和，利用杜教筛即可，虽然可能会多次查询但是总体复杂度是 $O(m^{\frac{2}{3}})$ 次

$\lfloor \frac{m}{d} \rfloor$ 最多只有 $\sqrt{m}$ 种值, 因此 $S(n,m)$ 最多有 $n\sqrt{m}$ 种取值

对于每个 n 最多有 $\sqrt{n}$ 个因子，所以分解因子的复杂度最大为 $n\sqrt{n}$

因此总体复杂度为 $O(n(\sqrt{n}+\sqrt{m})+m^{\frac{2}{3}})$

注意用记忆化搜索保存已经计算过的结果