

T1

问你在一个 $m \times n$ 的点阵中，有多少条直线，恰好经过 k 个点，且斜率 $k > 0$

(1) $O(N^5)$

$O(n^2)$ 枚举斜率 $k = b / a$ ，其中 $\gcd(a, b) = 1$

$O(n^2)$ 枚举直线的左下角 (i, j)

$O(n)$ 检查是否恰好经过 k 个点

(2) $O(N^4)$

以左下角的点为原点 $(0, 0)$ 建系，边界为 $n-1$ 和 $m-1$ 。

和 n^5 中的一样枚举 a, b, x, y 。(x 为原来的 i , y 为原来的 j)

若直线恰好经过 k 个点，则应满足以下条件：

1. 点 $(x-a, y-b)$ 不合法。(保证 (x, y) 为直线的最左下角)

$$x-a < 0 \text{ or } y-b < 0$$

$$\text{即: } x \leq a-1 \text{ or } y \leq b-1$$

2. 点 $(x+(k-1)*a, y+(k-1)*b)$ 在合法范围内。(保证至少经过 k 个点)

$$x+(k-1)*a \leq n-1 \text{ and } y+(k-1)*b \leq m-1$$

$$\text{即: } x \leq n-(k-1)*a-1 \text{ and } y \leq m-(k-1)*b-1$$

3. 点 $(x+k*a, y+k*b)$ 不合法。(保证最多经过 k 个点)

$$x+k*a \geq n \text{ or } y+k*b \geq m$$

$$\text{即: } x \geq n-k*a \text{ or } y \geq m-k*b$$

这便将 $O(n)$ 检查经过点的个数变成了 $O(1)$

(3) $O(N^2 \log N)$ **std** 做法

在 n^4 的做法中，得出了在确定斜率 $k = b / a$ 的情况下，合法的左下角 (x, y) 应该满足的条件：

1. $x \leq a-1$ or $y \leq b-1$
2. $x \leq n - (k-1) * a - 1$ and $y \leq m - (k-1) * b - 1$
3. $x \geq n - k * a$ or $y \geq m - k * b$

令： $x_1 = a-1, y_1 = b-1$
 $x_2 = n - (k-1) * a - 1, y_2 = m - (k-1) * b - 1$
 $x_3 = n - k * a, y_3 = m - k * b$

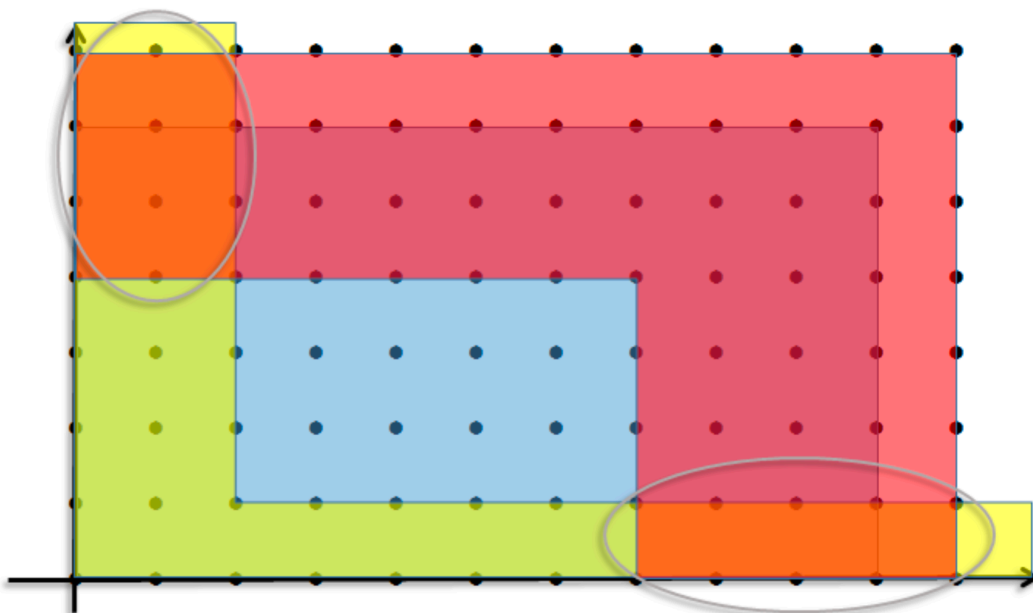
即： $x \leq x_1$ or $y \leq y_1$
 $x \leq x_2$ and $y \leq y_2$
 $x \geq x_3$ or $y \geq y_3$

在坐标系中，这三个条件限定出了一些合法的部分，我们要求的就是在这部分中的

格点个数（包括边界）。

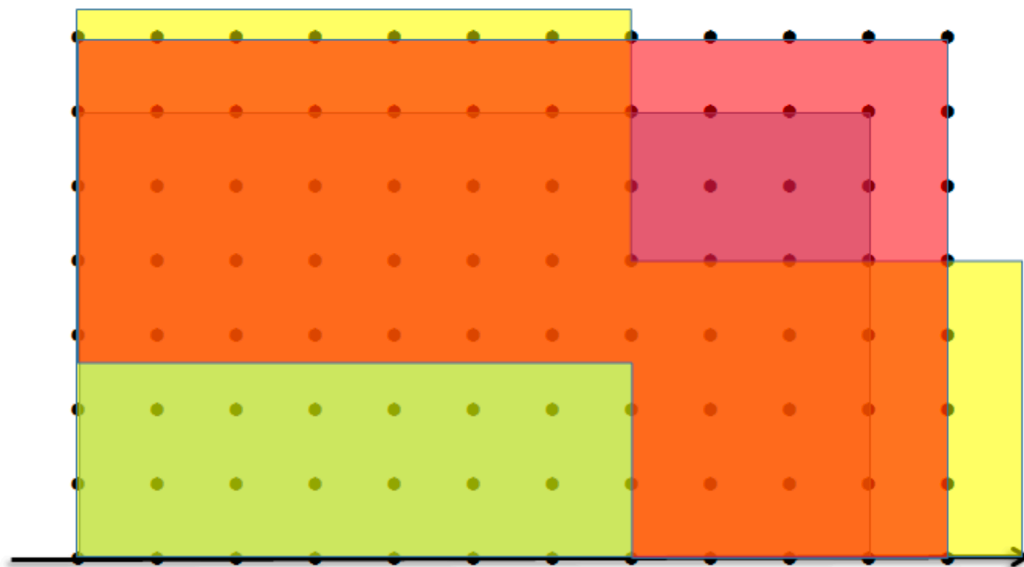
如图，要求的为画圈的部分。（黄、蓝、红分别代表限定条件 1、2、3）

（情况一）



情况 (2)

整个橙色的部分为所求。



推个公式分情况求个数就好啦。这样就不用枚举左下角 (x, y) 了。

枚举斜率 $O(n^2)$ * 判断 $\gcd(a, b) == 1$ $O(\log n)$

总复杂度 $O(n^2 \cdot \log n)$

T2

最短路+TSP问题

预处理两两之间的最短路，然后对特殊点进行一次状压dp

T3

给你一棵树。根节点为 1。

n 个点，每个点的点权为 $w[i]$ 。每条边花费时间 len 。

对于每一条边，父节点到子节点方向需要花费时间 len ，从子节点到父节点不花费时间。

对于每个点，花费 = 到达它的时刻 * 点权。

问你遍历所有点的最小总花费。

(1) $O((son!)^N)$ son 为节点的儿子数 (估值)

dfs 整棵树，对于每一个节点，枚举去他的儿子们的顺序。

复杂度 = $O(son!) * \prod O(son \text{ 的 } son) = \dots = O((son!)^n)$

(好像是这么推的吧……)

(2) $O(N \log N)$ **std** 做法

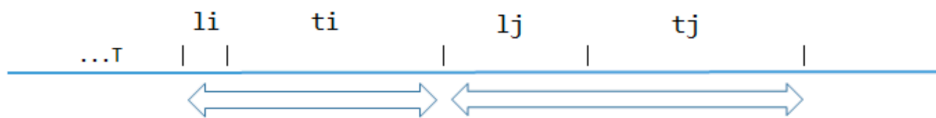
对于每个节点，无非就是确定一个最优的，遍历儿子们的子树的顺序。

第一遍 dfs 处理这样几个值：

$t[i]$ ：表示从节点 i 开始，遍历完 i 的子树所需的时间

$sum[i]$ ：表示节点 i 的子树的点权 ($w[i]$) 之和

假设已经确定了一个遍历子树们的顺序 (如图)。



那么对于顺序相邻的两个子树 i 和 j 来说，交换它们两个的顺序，并不会影响到其他子树（因为遍历 i 和 j 的时间总和是一定的）。

假设 i 在 j 之前，结果更优，则有：花费（ i 在 j 之前） < 花费（ j 在 i 之前）

设 c_i 表示在 0 时刻，从 i 出发遍历它的子树的花费。

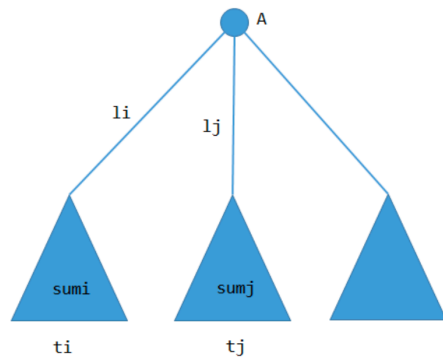
实际花费（ i 在 j 之前） = $c_i + l_i * \text{sum}_i + c_j + (l_i + t_i + l_j) * \text{sum}_j$

实际花费（ j 在 i 之前） = $c_j + l_j * \text{sum}_j + c_i + (l_j + t_j + l_i) * \text{sum}_i$

代入：花费（ i 在 j 之前） < 花费（ j 在 i 之前）

整理得：

$$(t_i + l_i) * \text{sum}_j < (t_j + l_j) * \text{sum}_i$$



所以对于每个节点，按照上式给儿子们排个序就好啦。（贪心）

总复杂度 = $\sum O(\text{cnt_son} * \log(\text{cnt_son})) = O(N \log N)$