**数列**

1、数列中与之间的关系：

注意通项能否合并。

2、等差数列：

⑴定义：如果一个数列从第2项起，每一项与它的前一项的差等于同一个常数，即－=d ，（n≥2，n∈N），

那么这个数列就叫做等差数列。

⑵等差中项：若三数成等差数列

⑶通项公式：

或

⑷前项和公式：



⑸常用性质：

①若，则；

②下标为等差数列的项，仍组成等差数列；

③数列（为常数）仍为等差数列；

④若、是等差数列，则、 (、是非零常数)、、，…也成等差数列。

⑤单调性：的公差为，则：

ⅰ）为递增数列；

ⅱ）为递减数列；

ⅲ）为常数列；

⑥数列{}为等差数列（p,q是常数）

⑦若等差数列的前项和，则、、… 是等差数列。

3、等比数列

⑴定义：如果一个数列从第2项起，每一项与它的前一项的比等于同一个常数，那么这个数列就叫做等比数列。

⑵等比中项：若三数成等比数列（同号）。**反之不一定成立。**

⑶通项公式：

⑷前项和公式：

⑸常用性质

①若，则；

②为等比数列，公比为(下标成等差数列,则对应的项成等比数列)

③数列（为不等于零的常数）仍是公比为的等比数列；正项等比数列；则是公差为的**等差**数列；

④若是等比数列，则 

是等比数列，公比依次是

⑤单调性：

为递增数列；为递减数列；

为常数列；

为摆动数列；

⑥既是等差数列又是等比数列的数列是常数列。

⑦若等比数列的前项和，则、、… 是等比数列.

**4、非等差、等比数列通项公式的求法**

**类型Ⅰ 观察法：**已知数列前若干项，求该数列的通项时，一般对所给的项观察分析，寻找规律，从而根据规律写出此数列的一个通项。

**类型Ⅱ 公式法：**若已知数列的前项和与的关系，求数列的通项可用公式 构造两式作差求解。

用此公式时要注意结论有两种可能，一种是“一分为二”，即分段式；另一种是“合二为一”，即和合为一个表达，（要先分和两种情况分别进行运算，然后验证能否统一）。

**类型Ⅲ 累加法：**

**形如型的递推数列**（其中是关于的函数）可构造： 

将上述个式子两边分别相加，可得：

①若是关于的一次函数，累加后可转化为等差数列求和;

② 若是关于的指数函数，累加后可转化为等比数列求和;

③若是关于的二次函数，累加后可分组求和;

④若是关于的分式函数，累加后可裂项求和.

**类型Ⅳ 累乘法：**

**形如型的递推数列**（其中是关于的函数）可构造：

将上述个式子两边分别相乘，可得：

有时若不能直接用，可变形成这种形式，然后用这种方法求解。

**类型Ⅴ 构造数列法：**

**㈠形如（其中均为常数且）型的递推式：**

（1）若时，数列{}为等差数列;

（2）若时，数列{}为等比数列;

（**3）若且****时，数列{}为线性递推数列，其通项可通过待定系数法构造等比数列来求.**方法有如下两种：

***法一：***设,展开移项整理得,与题设比较系数（待定系数法）得,即构成以为首项，以为公比的等比数列.再利用等比数列的通项公式求出的通项整理可得

***法二：***由****得****两式相减并整理得即构成以为首项，以为公比的等比数列.求出的通项再转化为**类型Ⅲ（累加法）**便可求出

**㈡形如型的递推式：**

**⑴当为一次函数类型（即等差数列）时：**

***法一：***设，通过待定系数法确定的值，转化成以为首项，以为公比的等比数列，再利用等比数列的通项公式求出的通项整理可得

***法二：***当的公差为时，由递推式得：**，**两式相减得：，令得：转化为**类型Ⅴ㈠**求出 **，**再用**类型Ⅲ（累加法）**便可求出

**⑵当为指数函数类型（即等比数列）时：**

***法一：***设，通过待定系数法确定的值，转化成以为首项，以为公比的等比数列，再利用等比数列的通项公式求出的通项整理可得

***法二：***当的公比为时，由递推式得：**——①，，**两边同时乘以得**——②**，由①②两式相减得，即，在转化为**类型Ⅴ㈠**便可求出

***法三：***递推公式为（其中p，q均为常数）或（其中p，q, r均为常数）时，要先在原递推公式两边同时除以，得：，**引入辅助数列**（其中），得：再应用**类型Ⅴ㈠**的方法解决。

**⑶当为任意数列时，可用通法：**

在****两边同时除以可得到，令，则，在转化为**类型Ⅲ（累加法）**，求出之后得.

**类型Ⅵ 对数变换法：**

**形如型的递推式：**

在原递推式两边取对数得，令得：，化归为型，求出之后得（注意：底数不一定要取10，可根据题意选择）。

**类型Ⅶ 倒数变换法：**

**形如**（为常数且）**的递推式：**两边同除于，转化为形式，化归为型求出的表达式，再求；

**还有形如的递推式，**也可采用取倒数方法转化成形式，化归为型求出的表达式，再求.

**类型Ⅷ 形如型的递推式：**

用待定系数法，化为特殊数列的形式求解。方法为：设，比较系数得，可解得，于是是公比为的等比数列，这样就化归为型。

*总之，求数列通项公式可根据数列特点采用以上不同方法求解，对不能转化为以上方法求解的数列，可用归纳、猜想、证明方法求出数列通项公式*

**5、非等差、等比数列前项和公式的求法**

**⑴错位相减法**

①若数列为等差数列，数列为等比数列，则数列的求和就要采用此法.

②将数列的每一项分别乘以的公比，然后在错位相减，进而可得到数列的前****项和.

*此法是在推导等比数列的前项和公式时所用的方法.*

**⑵裂项相消法**

一般地，当数列的通项 时，往往可将变成两项的差，采用裂项相消法求和.

可用待定系数法进行裂项：

设，通分整理后与原式相比较，根据对应项系数相等得，从而可得



常见的拆项公式有：

①

②

③

④

⑤

**⑶分组法求和**

有一类数列，既不是等差数列，也不是等比数列，若将这类数列适当拆开，可分为几个等差、等比或常见的数列，然后分别求和，再将其合并即可.一般分两步：①找通向项公式②由通项公式确定如何分组.

**⑷倒序相加法**

如果一个数列，与首末两项等距的两项之和等于首末两项之和，则可用把正着写与倒着写的两个和式相加，就得到了一个常数列的和，这种求和方法称为倒序相加法。特征：

⑸记住常见数列的前项和：

①

②

③