2015年全国初中数学联合竞赛试题参考答案及评分标准

说明：评阅试卷时，请依据本评分标准.第一试，选择题和填空题只设7分和0分两档；第二试各题，请按照本评分标准规定的评分档次给分.如果考生的解答方法和本解答不同，只要思路合理，步骤正确，在评卷时请参照本评分标准划分的档次，给予相应的分数.

第一试(A)

一、选择题：（本题满分42分，每小题7分）

1. 设实数a,b,c满足：$a+b+c=3$，$a^2+b^2+c^2=4$，则$\dfrac{a^2+b^2}{2-c}+\dfrac{b^2+c^2}{2-a}+\dfrac{c^2+a^2}{2-b}=$ （　　）

A. 0　　B. 3　　C. 6　　D. 9

【答】 D.

$\because a+b+c=3$，$a^2+b^2+c^2=4$，

$$\therefore \frac{a^2+b^2}{2-c}+\frac{b^2+c^2}{2-a}+\frac{c^2+a^2}{2-b}=\frac{4-c^2}{2-c}+\frac{4-a^2}{2-a}+\frac{4-b^2}{2-b}=(2+c)+(2+a)+(2+b)$$

$=6+(a+b+c)=9$.

2. 若抛物线$y=x^2+bx+c$与x轴只有一个公共点，且过点$A(m,n)$，$B(m-8,n)$，则$n=$（　　）

A. 8.　　B. 12.　　C. 16.　　D.24.

【答】C.

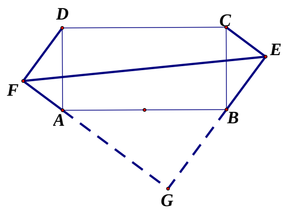
依题意，有$n=m^2+bm+c=(m-8)^2+b(m-8)+c$，于是可得$b=8-2m$.

$\because$抛物线$y=x^2+bx+c$与x轴只有一个公共点，$\therefore b^2-4c=0$，$\therefore c=\dfrac{1}{4}b^2=(4-m)^2$.

因此$n=m^2+bm+c=m^2+(8-2m)m+(4-m)^2=16$.

3. 矩形$ABCD$中，$AD=5$，$AB=10$，E、F分别为矩形外的两点，$BE=DF=4$，$AF=CE=3$，则$EF=$ （　　）

A. $4\sqrt{15}$.　　B.15.　　C. $\sqrt{221}$.　　D. $10\sqrt{2}$.



【答】C.

易知$\angle AFD=\angle BEC=90°$，$\triangle BEC\cong\triangle DFA$. $\therefore\angle DAF=\angle BCE$.

延长FA，EB交于点G.

$\because\angle GAB=90°-\angle DAF=\angle ADF$，$\angle GBA=90°-\angle CBE=\angle BCE=\angle DAF$，

$\therefore\triangle BGA\backsim\triangle AFD$，且$\angle AGB=90°$，$\therefore AG=8$，$BG=6$，

$\therefore GF=11$，$GE=10$，$\therefore EF=\sqrt{GE^2+GF^2}=\sqrt{221}$.

4. 已知O为坐标原点，位于第一象限的点A在反比例函数$y=\dfrac{1}{x}(x>0)$的图象上，位于第二象限的点B在反比例函数$y=-\dfrac{4}{x}(x<0)$的图象上，且$OA\perp OB$，则$\tan\angle ABO$的值为 （　　）

A. $\frac{1}{2}$.　　　　B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$.　　　　C.1.　　　　D.2.

【答】A.

过点 A、B 分别作 $AC\perp x$ 轴，$BD\perp x$ 轴，垂足为 C、D. 由 $OA\perp OB$ 得 $\angle AOB=90°$，于是可得 $\triangle AOC\backsim\triangle OBD$，所以 $\tan\angle ABO=\frac{OA}{OB}=\sqrt{\frac{S_{\Delta AOC}}{S_{\Delta OBD}}}=\sqrt{\frac{OC\cdot AC}{OD\cdot BD}}=\sqrt{\frac{|x_A\cdot y_A|}{|x_B\cdot y_B|}}=\sqrt{\frac{1}{|-4|}}=\frac{1}{2}$.

5. 已知实数 x,y 满足关系式 $xy-x-y=1$，则 x^2+y^2 的最小值为　　　　（　　）

A. $3-2\sqrt{2}$.　　　B. $6-4\sqrt{2}$.　　　C.1.　　　D. $6+4\sqrt{2}$.

【答】B.

设 $x+y=t$，则由题设条件可知 $xy=x+y+1=t+1$，所以 x,y 是关于 m 的一元二次方程 $m^2-tm+t+1=0$ 的两个实数根，于是有：$\Delta=t^2-4(t+1)\geq 0$，解得 $t\geq 2+2\sqrt{2}$ 或 $t\leq 2-2\sqrt{2}$.

又因为 $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=t^2-2(t+1)=(t-1)^2—3$，所以，当 $t=2-2\sqrt{2}$（即 $x=y=1-\sqrt{2}$）时，x^2+y^2 取得最小值，最小值为 $(2-2\sqrt{2}-1)^2-3=6-4\sqrt{2}$.

6. 设 n 是小于 100 的正整数且使 $5n^2+3n-5$ 是 15 的倍数，则符合条件的所有正整数 n 的和是（　　）

A.285.　　　B.350.　　　C.540.　　　D.635.

【答】D.

$\because 5n^2+3n-5$ 是 15 的倍数，$\therefore 5\mid(5n^2+3n-5)$，$\therefore 5\mid 3n$，$\therefore 5\mid n$，设 $n=5m$（m 是正整数），

则 $5n^2+3n-5=125m^2+15m-5=120m^2+15m+5(m^2-1)$.

$\because 5n^2+3n-5$ 是 15 的倍数，$\therefore m^2-1$ 是 3 的倍数，$\therefore m=3k+1$ 或 $m=3k+2$，其中 k 是非负整数.

$\therefore n=5(3k+1)=15k+5$ 或 $n=5(3k+2)=15k+10$，其中 k 是非负整数.

$\therefore$ 符合条件的所有正整数 n 的和是（5＋20＋35＋50＋65＋80＋95）＋（10＋25＋40＋55＋70＋85）＝635.

二、填空题：（本题满分 28 分，每小题 7 分）

1. 设 a,b 是一元二次方程 $x^2-x-1=0$ 的两根，则 $3a^3+4b+\frac{2}{a^2}$ 的值为________.

【答】11.

$\because a,b$ 是一元二次方程 $x^2-x-1=0$ 的两根，$\therefore ab=-1$，$a+b=1$，$a^2=a+1$，$b^2=b+1$，

$\therefore 3a^3+4b+\frac{2}{a^2}=3a^3+4b+2b^2=3a(a+1)+4b+2(b+1)=3a^2+3a+6b+2$

$=3(a+1)+3a+6b+2=6(a+b)+5=11$.

2. 从三边长均为整数且周长为 24 的三角形中任取一个，它是直角三角形的概率为________.

【答】$\frac{1}{12}$.

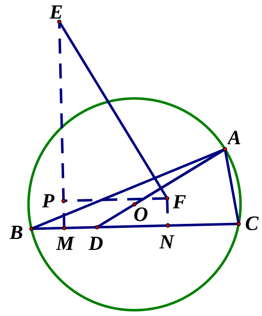
设三角形的三边长为 a,b,c（$a\ge b\ge c$），则 $3a\ge a+b+c=24$，$2a<a+(b+c)=24$，所以 $8\le a<12$，故 a 的可能取值为 8，9，10 或 11，满足题意的数组（a,b,c）可以为：

（8，8，8），（9，9，6），（9，8，7），（10，10，4），（10，9，5），（10，8，6），
（10，7，7），（11，11，2），（11，10，3），（11，9，4），（11，8，5），（11，7，6），

共 12 组，其中，只有一组是直角三角形的三边长，所以，所求概率为 $\frac{1}{12}$.

3. 已知锐角△ABC 的外心为 O，AO 交 BC 于 D，E、F 分别为△ABD、△ACD 的外心，若 $AB>AC$，$EF=BC$，则 $\angle C-\angle B=$___________.

【答】$60°$.



作 $EM\perp BC$ 于点 M，$FN\perp BC$ 于点 N，$FP\perp EM$ 于点 P.

$\because$ E、F 分别为△ABD、△ACD 的外心，$\therefore$ M、N 分别为 BD、CD 的中点. 又 $EF=BC$，$\therefore PF=MN=\frac{1}{2}BC=\frac{1}{2}EF$，$\therefore \angle PEF=30°$.

又 $EF\perp AD$，$EM\perp BC$，$\therefore \angle ADC=\angle PEF=30°$.

又 $\angle ADC=\angle B+\angle BAD=\angle B+\frac{1}{2}(180°-2\angle C)=90°+\angle B-\angle C$，

$\therefore \angle C-\angle B=90°-\angle ADC=60°$.

4. 将数字 1，2，3，……，34，35，36 填在 6×6 的方格中，每个方格填一个数字，要求每行数字从左到右是从小到大的顺序，则第三列所填 6 个数字的和的最小值为______.

【答】63.

设第三列所填 6 个数字按从小到大的顺序排列后依次为 A，B，C，D，E，F.

因为 A 所在行前面需要填两个比 A 小的数字，所以 A 不小于 3；因为 B 所在行前面需要填两个比 B 小的数字，且 A 及 A 所在行前面两个数字都比 B 小，所以 B 不小于 6.

同理可知：C 不小于 9，D 不小于 12，E 不小于 15，F 不小于 18.

因此，第三列所填 6 个数字之和 $A+B+C+D+E+F\ge 3+6+9+12+15+18=63$.

如图即为使得第三列所填 6 个数字之和取得最小值的一种填法（后三列的数字填法不唯一）.

1	2	3	19	20	21
4	5	6	25	27	29
7	8	9	22	23	24
10	11	12	26	28	30
13	14	15	31	34	35
16	17	18	32	33	36

第一试(B)

一、选择题：（本题满分 42 分，每小题 7 分）

1. 设实数 a,b,c 满足：$a+b+c=3$，$a^2+b^2+c^2=4$，则 $\frac{a^2+b^2}{2-c}+\frac{b^2+c^2}{2-a}+\frac{c^2+a^2}{2-b}=$ （　　）

A.12.　　　　B.9.　　　　C.6.　　　　D.3.

【答】B.　**解答与（A）卷第 1 题相同.**

2．题目和解答与（A）卷第 2 题相同.

3．题目和解答与（A）卷第 3 题相同.

4．已知实数 x, y 满足关系式 $x^2+xy+y^2=3$，则 $(x-y)^2$ 的最大值为　　　　（　　）

A. 3.　　　　B. 6.　　　　C.9.　　　　D. 12.

【答】D.

设 $x-y=t$，则 $x=y+t$，代入题设等式得 $(y+t)^2+(y+t)y+y^2=3$，整理得 $3y^2+3ty+t^2-3=0$.

由判别式 $\Delta=(3t)^2-12(t^2-3)\geq 0$ 得 $-2\sqrt{3}\leq t\leq 2\sqrt{3}$，故 $(x-y)^2=t^2\leq 12$.

5．题目和解答与（A）卷第 4 题相同.

6．设 n 是小于 100 的正整数且使 $2n^2-3n-2$ 是 6 的倍数，则符合条件的所有正整数 n 的和是（　　）

A.784.　　　　B.850.　　　　C.1536.　　　　D.1634.

【答】D.

$\because$ $2n^2-3n-2$ 是 6 的倍数，$\therefore 2\,|\,(2n^2-3n-2)$，$\therefore 2\,|\,3n$，$\therefore 2\,|\,n$，设 $n=2m$（m 是正整数），

则 $2n^2-3n-2=8m^2-6m-2=6m^2-6m+2(m^2-1)$.

$\because$ $2n^2-3n-2$ 是 6 的倍数，$\therefore$ m^2-1 是 3 的倍数，$\therefore$ $m=3k+1$ 或 $m=3k+2$，其中 k 是非负整数.

$\therefore$ $n=2(3k+1)=6k+2$ 或 $n=2(3k+2)=6k+4$，其中 k 是非负整数.

$\therefore$符合条件的所有正整数 n 的和是（2＋8＋14＋…＋86＋92＋98）＋（4＋10＋16＋…＋82＋88＋94）＝1634.

二、填空题：（本题满分 28 分，每小题 7 分）

1．题目和解答与（A）卷第 1 题相同.

2．三边长均为整数且周长为 24 的三角形的个数为________.

【答】12.

设三角形的三边长为 a,b,c（$a\geq b\geq c$），则 $3a\geq a+b+c=24$，$2a<a+(b+c)=24$，所以 $8\leq a<12$，故 a 的可能取值为 8，9，10 或 11，满足题意的数组（a,b,c）可以为：

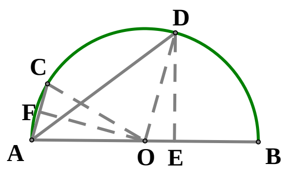
（8，8，8），（9，9，6），（9，8，7），（10，10，4），（10，9，5），（10，8，6），

（10，7，7），（11，11，2），（11，10，3），（11，9，4），（11，8，5），（11，7，6），

共 12 组，所以，三边长均为整数且周长为 24 的三角形的个数为 12.

3．C、D 两点在以 AB 为直径的半圆周上，AD 平分 $\angle BAC$，$AB=20$，$AD=4\sqrt{15}$，则 AC 的长为_______.

【答】4.



连接 OD，OC，作 $DE\perp AB$ 于 E，$OF\perp AC$ 于 F.

$\because$ AD 平分 $\angle BAC$，$\therefore \angle DOB=2\angle BAD=\angle OAC$.

又 $OA=OD$，$\therefore \triangle AOF\cong\triangle ODE$，$\therefore OE=AF$，$\therefore AC=2OF=2OE$.

设 $AC=2x$，则 $OE=AF=x$. 在 Rt$\triangle ODE$ 中，由勾股定理得 $DE=\sqrt{OD^2-OE^2}=\sqrt{100-x^2}$.

在 Rt$\triangle ADE$ 中，$AD^2=DE^2+AE^2$，即 $(4\sqrt{15})^2=(100-x^2)+(10+x)^2$，解得 $x=2$.

$\therefore AC=2x=4$.

4. 在圆周上按序摆放和为 15 的五个互不相等的正整数 a，b，c，d，e，使得 $ab+bc+cd+de+ea$ 最小，则这个最小值为____________.

【答】 37.

和为 15 的五个互不相等的正整数只能是 1，2，3，4，5.

注意到五个数在圆周上是按序摆放的，且考虑的是和式 $ab+bc+cd+de+ea$，不妨设 $a=5$.

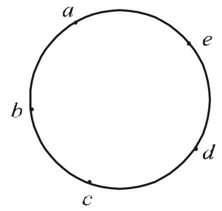


图 1

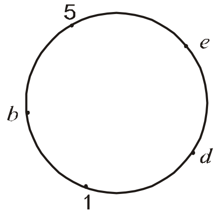


图 2

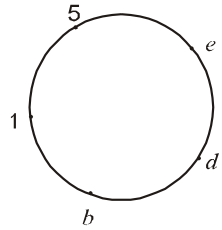


图 3

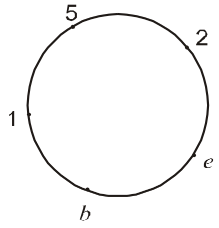


图 4

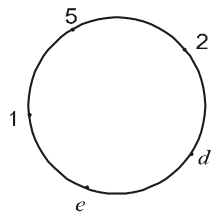


图 5

如果 1 和 5 的位置不相邻，不妨设 $c=1$（如图 2），此时的和式为 $P_1=5b+b+d+ed+5e$；交换 1 和 b 的位置后，得到如图 3 的摆法，此时的和式为 $P_2=5+b+bd+ed+5e$. 因为 $P_1-P_2=5b+d-5-bd=(5-d)(b-1)>0$，所以 $P_1>P_2$. 因此，交换 1 和 b 的位置使得 1 和 5 相邻（如图 3）以后，和式的值会变小.

如图 3，如果 $d=2$，此时的和式为 $P_3=5+b+2b+2e+5e$；交换 e 和 2 的位置以后，得到如图 4 的摆法，此时的和式为 $P_4=5+b+be+2e+10$. 因为 $P_3-P_4=\ =2b+5e-be-10=(5-b)(e-2)>0$，所以 $P_3>P_4$，因此，交换 e 和 2 的位置使得 2 和 5 相邻以后和式的值会变小.

如果 $b=2$，此时的和式为 $P_5=5+2+2d+ed+5e$；交换 e 和 2 的位置以后，得到如图 5 的摆法，此时的和式为 $P_6=5+e+ed+2d+10$. 因为 $P_5-P_6=2+5e-e-10=4(e-2)>0$，所以 $P_5>P_6$，因此，交换 e 和 2 的位置使得 2 和 5 相邻以后和式的值会变小.

综上可知：1 和 2 摆在 5 的两边（如图 5）时，和式的值会变小。

当 $d=3$，$e=4$ 时，和式的值为 $P_7=5+4+12+6+10=37$；当 $d=4$，$e=3$ 时，和式的值为 $P_8=5+3+12+8+10=38$.

因此，所求最小值为 37.

第二试 （A）

一、（本题满分 20 分） 关于 x 的方程 $\sqrt{x^2-m}+2\sqrt{x^2-1}=x$ 有且仅有一个实数根，求实数 m 的取值范围.

解 将所给方程记为方程①，显然有 $x^2\ge m$ 且 $x\ge 1$.

若 $m<0$，则 $\sqrt{x^2-m}+2\sqrt{x^2-1}>x$，此时方程①无解，不符合题意，故 $m\ge 0$. ……………**5 分**

方程①变形得 $2\sqrt{x^2-1}=x-\sqrt{x^2-m}$，两边平方后整理得 $2x^2+m-4=-2x\sqrt{x^2-m}$，再平方，整理得 $8(2-m)x^2=(m-4)^2$.

显然，应该有 $0\le m<2$，并且此时方程①只可能有解 $x=\dfrac{4-m}{\sqrt{8(2-m)}}$. ……………………**15 分**

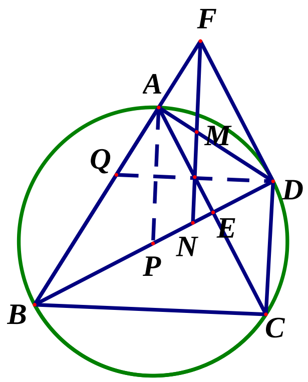
将 $x=\dfrac{4-m}{\sqrt{8(2-m)}}$ 代入方程①，得 $\sqrt{\dfrac{(m-4)^2}{8(2-m)}-m}+2\sqrt{\dfrac{(m-4)^2}{8(2-m)}-1}=\dfrac{4-m}{\sqrt{8(2-m)}}$，化简整理得 $|3m-4|=4-3m$，于是有 $0\le m\le\dfrac{4}{3}$，此时方程①有唯一解 $x=\dfrac{4-m}{\sqrt{8(2-m)}}$.

综上所述，所求实数 m 的取值范围为 $0\le m\le\dfrac{4}{3}$. ……………………**20 分**

二、（本题满分 25 分）如图，圆内接四边形 $ABCD$ 的对角线 AC、BD 交于点 E，且 $AC\perp BD$，$AB=AC$. 过点 D 作 $DF\perp BD$，交 BA 的延长线于点 F，$\angle BFD$ 的平分线分别交 AD、BD 于点 M、N.

（1）证明：$\angle BAD=3\angle DAC$；

（2）如果 $\dfrac{BF-DF}{BD}=\dfrac{CD}{AC}$，证明：$MN=MD$.



证明 （1）在 BE 上取一点 P，使得 $\angle BAP=\angle DAC$，则 $\triangle BAP\cong\triangle CAD$，$\therefore AP=AD$.

又 $AE\perp PD$，$\therefore\triangle ADE\cong\triangle APE$，$\therefore\angle PAE=\angle DAE$，$\therefore\angle PAE=\angle BAP=\angle DAC$，$\therefore\angle BAD=3\angle DAC$. ……………………**10 分**

（2）设 $\angle DAC=\alpha$，则 $\angle BAC=2\alpha$，$\angle BAD=3\alpha$，$\angle NDM=90^\circ-\alpha$.

在 FB 上截取 $FQ=FD$，连接 QD，则 $BQ=BF-FQ=BF-FD$.

又 $\dfrac{BF-DF}{BD}=\dfrac{CD}{AC}$，$\therefore\dfrac{BQ}{BD}=\dfrac{CD}{AC}$，又 $\angle QBD=\angle DCA$，$\therefore\triangle QBD\backsim\triangle DCA$，$\therefore\angle QDB=\angle DAC$. 又 $\because\angle DBC=\angle DAC$，$\therefore\angle QDB=\angle DBC$，

$\therefore QD\,//\,BC$，$\therefore\angle FQD=\angle ABC$.

又 $AB=AC$，$\angle BAC=2\alpha$，$\therefore\angle ABC=90^\circ-\alpha$，$\therefore\angle FQD=90^\circ-\alpha$，又 $FQ=FD$，$\therefore\angle BFD=2\alpha$.

$\because FN$ 平分 $\angle BFD$，$\therefore\angle AFM=\alpha$，$\therefore\angle NMD=\angle AMF=\angle BAD-\angle AFM=3\alpha-\alpha=2\alpha$.

$\therefore\angle MND=180^\circ-\angle NMD-\angle NDM=90^\circ-\alpha=\angle MDN$，$\therefore MN=MD$. ……………………**25 分**

三、（本题满分 25 分）设正整数 m,n 满足：关于 x 的方程 $(x+m)(x+n)=x+m+n$ 至少有一个正整数解，证明：$2(m^2+n^2)<5mn$.

解 方程即

$$x^2+(m+n-1)x+mn-m-n=0 \qquad ①$$

方程①的判别式

$\Delta=(m+n-1)^2-4(mn-m-n)=(m+n)^2-4mn+2(m+n)+1=(m-n)^2+2(m+n)+1$.

……………………5 分

不妨设 $m\ge n$，由题设可知，整系数方程①至少有一个正整数解，所以 Δ 应为完全平方数.

注意到 $\Delta=(m-n)^2+2(m+n)+1=(m-n+1)^2+4n>(m-n+1)^2$，

$\Delta=(m-n)^2+2(m+n)+1=(m-n+3)^2-(4m-8n+8)$，

若 $4m-8n+8>0$，即 $m>2n-2$，则 $\Delta<(m-n+3)^2$，从而有 $(m-n+1)^2<\Delta<(m-n+3)^2$，故只可能 $\Delta=(m-n+2)^2$，即 $(m-n)^2+2(m+n)+1=(m-n+2)^2$，整理得 $m=3n-\dfrac{3}{2}$，这与 m,n 均为正整数矛盾.

因此 $m\le 2n-2$，从而可得 $m<2n$，所以 $\dfrac{m}{n}<2$. ……………………20 分

又因为 $\dfrac{m}{n}>1>\dfrac{1}{2}$，所以有 $(\dfrac{m}{n}-\dfrac{1}{2})(\dfrac{m}{n}-2)<0$，整理即得 $2(m^2+n^2)<5mn$.

……………………25 分

第二试 （B）

一、（**本题满分 20 分**）若正数 a,b 满足 $ab=1$，求 $M=\dfrac{1}{1+a}+\dfrac{1}{1+2b}$ 的最小值.

解 因为 $ab=1$，所以 $b=\dfrac{1}{a}$，所以

$$M=\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+2b}=\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+\frac{2}{a}}=\frac{1}{1+a}+\frac{a}{2+a}=1+\frac{1}{1+a}-\frac{2}{2+a}=1-\frac{a}{a^2+3a+2}.$$

……………………5 分

设 $N=\dfrac{a^2+3a+2}{a}$，则 $N=a+\dfrac{2}{a}+3=(\sqrt{a}-\sqrt{\dfrac{2}{a}})^2+3+2\sqrt{2}\ge 3+2\sqrt{2}$，当 $a=\sqrt{2}$ 时取得等号.

……………………10 分

所以，$0<\dfrac{1}{N}\le\dfrac{1}{3+2\sqrt{2}}=3-2\sqrt{2}$，$M=1-\dfrac{1}{N}\ge 1-(3-2\sqrt{2})=2\sqrt{2}-2$.

因此，当 $a=\sqrt{2}$，$b=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 时，$M=\dfrac{1}{1+a}+\dfrac{1}{1+2b}$ 取得最小值 $2\sqrt{2}-2$.……………………20 分

二、（**本题满分 25 分**）如图，圆内接四边形 $ABCD$ 的对角线 AC、BD 交于点 E，且 $AC\perp BD$，$AB=AC=BD$. 过点 D 作 $DF\perp BD$，交 BA 的延长线于点 F，$\angle BFD$ 的平分线分别交 AD、BD 于点 M、N.

（1）证明：$\angle BAD=3\angle DAC$；

（2）如果 $MN=MD$，证明：$BF=CD+DF$.

证明 （1）在 BE 上取一点 P，使得 $\angle BAP=\angle DAC$，则 $\triangle BAP\cong\triangle CAD$，$\therefore AP=AD$.

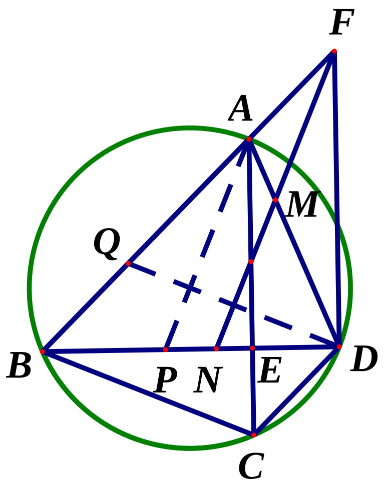
又 $AE \perp PD$，$\therefore \triangle ADE \cong \triangle APE$，$\therefore \angle PAE = \angle DAE$，$\therefore \angle PAE = \angle BAP = \angle DAC$，$\therefore \angle BAD = 3\angle DAC$． ························10 分

（2）设 $\angle DAC = \alpha$，则 $\angle BAC = 2\alpha$，$\angle BAD = 3\alpha$．$\because AC \perp BD$，$\therefore \angle NDM = 90° - \alpha$．$\because MN = MD$，$\therefore \angle MND = \angle MDN = 90° - \alpha$，

$\therefore \angle NMD = 180° - \angle MND - \angle NDM = 2\alpha$，$\therefore \angle AMF = 2\alpha$，

$\therefore \angle AFM = \angle BAD - \angle AMF = 3\alpha - 2\alpha = \alpha$．

$\because FN$ 平分 $\angle BFD$，$\therefore \angle BFD = 2\angle AFM = 2\alpha$．



在 FB 上截取 $FQ = FD$，连接 QD，则 $\angle FQD = 90° - \alpha$．

又$\because AB = AC$，$\angle BAC = 2\alpha$，$\therefore \angle ABC = 90° - \alpha$，

$\therefore \angle FQD = \angle ABC$，$\therefore QD // BC$，$\therefore \angle QDB = \angle DBC$．

又$\because \angle DBC = \angle DAC$，$\therefore \angle QDB = \angle DAC$．

又$\because DB = AC$，$\angle QBD = \angle DCA$，$\therefore \triangle QBD \cong \triangle DCA$，$\therefore BQ = CD$．

$\therefore BF = BQ + FQ = CD + DF$． ························25 分

三、（本题满分 25 分） 若关于 x 的方程 $x^2 - 34x + 34k - 1 = 0$ 至少有一个正整数根，求满足条件的正整数 k 的值．

解 设方程的两个根为 x_1，x_2，且 x_1 为正整数，则 $x_1 + x_2 = 34$，$x_1x_2 = 34k - 1$．

由 $x_1 + x_2 = 34$ 知 $x_2 = 34 - x_1$，$\therefore x_2$ 也是整数．由 k 为正整数及 $x_1x_2 = 34k - 1$ 可知 $x_2 > 0$，$\therefore x_2$ 是正整数． ························5 分

注意到 $(x_1+1)(x_2+1) = x_1x_2 + x_1 + x_2 + 1 = 34(k+1)$，$\therefore 17 \mid (x_1+1)(x_2+1)$，$\therefore 17 \mid (x_1+1)$ 或 $17 \mid (x_2+1)$． ························10 分

若 $17 \mid (x_1+1)$，则由 $x_1 + 1 \le x_1 + x_2 = 34$ 知：$x_1 + 1 = 17$ 或 $x_1 + 1 = 34$．

当 $x_1 + 1 = 17$ 时，$x_1 = 16$，$x_2 = 18$，此时 $34k - 1 = 16 \times 18$，k 无整数解；

当 $x_1 + 1 = 34$ 时，$x_1 = 33$，$x_2 = 1$，此时 $34k - 1 = 33 \times 1$，解得 $k = 1$．

若 $17 \mid (x_2+1)$，同样可得 $k = 1$．

所以，满足条件的正整数 $k = 1$． ························25 分