# 2016年全国初中数学联合竞赛（初三年级）试题

## 参考答案及评分标准

说明：评阅试卷时，请依据本评分标准.
第一试，选择题和填空题只设 7 分和 0 分两档；
第二试各题，请按照本评分标准规定的评分档次给分.如果考生的解答方法和本解答不同，只要思路合理，步骤正确，在评卷时请参照本评分标准划分的档次，给予相应的分数.

## 第一试(C)

一、选择题（本题满分42分，每小题7分）

1．已知实数$a,b$满足$a^2-3a+1=0,b^2-3b+1=0$，且$a\neq b$，则$a^2b+ab^2$的值为（　　）

A. $-3$　　B. 3　　C. 9　　D. $-9$

【答案】B。

$a,b$是关于$x$的方程$x^2-3x+1=0$的两个不同实根。$\therefore a^2b+ab^2=ab\left(a+3\right)=1\times3=3$。

2．将一枚六个面点数分别为1，2，3，4，5，6的质地均匀的正方体骰子先后投掷两次，记第一次掷出的点数为$a$，第二次掷出的点数为$b$，则使得一元二次方程$x^2-ax+b^2=0$有相等的实数解的概率为（　　）

A. $\frac{1}{6}$　　B. $\frac{1}{9}$　　C. $\frac{1}{12}$　　D. $\frac{1}{18}$

【答案】C。

$\Delta=a^2-4b^2=\left(a-2b\right)\left(a+2b\right)=0$，$\therefore a=2b$。$p=\frac{3}{36}=\frac{1}{12}$。

3．定义$n!=1\times2\times\cdots\times\left(n-1\right)\times n$，则$\frac{2014^2\times2015-2016}{2015!}+\frac{2016^2\times2017-2018}{2017!}=$（　　）

A. $\frac{1}{2011!}+\frac{1}{2012!}-\frac{1}{2016!}-\frac{1}{2017!}$　　B. $\frac{1}{2012!}+\frac{1}{2013!}-\frac{1}{2016!}-\frac{1}{2017!}$

C. $\frac{1}{2013!}+\frac{1}{2014!}-\frac{1}{2016!}-\frac{1}{2017!}$　　D. $\frac{1}{2014!}+\frac{1}{2015!}-\frac{1}{2016!}-\frac{1}{2017!}$

【答案】B。

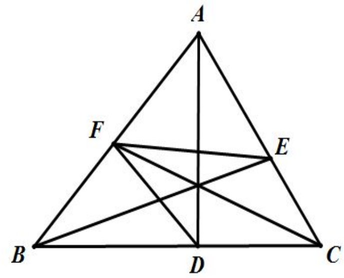
$$\frac{2014^2\times2015-2016}{2015!}+\frac{2016^2\times2017-2018}{2017!}=\frac{2014^2\times2015}{2015!}-\frac{2016}{2015!}+\frac{2016^2\times2017}{2017!}-\frac{2018}{2017!}$$
$$=\frac{2014}{2013!}-\frac{2016}{2015!}+\frac{2016}{2015!}-\frac{2018}{2017!}=\frac{2004}{2013!}-\frac{2018}{2017!}=\frac{2013+1}{2013!}-\frac{2017+1}{2017!}$$
$$=\frac{1}{2012!}+\frac{1}{2013!}-\frac{1}{2016!}-\frac{1}{2017!}.$$

4.如图，在锐角$\Delta ABC$中，$AD$、$BE$、$CF$为$\Delta ABC$的三条高线，

若$S_{\Delta AEF}:S_{\Delta ABC}=3:4$，则$\angle BDF=$　　　　　　　　　　（　　）

A. $30^{\circ}$　　　B. $45^{\circ}$　　　C. $60^{\circ}$　　　D. $90^{\circ}$

【答案】A。




$\Delta AEF\sim\Delta ABC$，

由$S_{\Delta AEF}:S_{\Delta ABC}=3:4$，

∴相似比$=\dfrac{AE}{AB}=\cos\angle BAC=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，

∴$\angle BAC=30^{\circ}$。

又$\Delta BDF\sim\Delta BAC$，∴$\angle BDF=\angle BAC=30^{\circ}$。

5． 记$[x]$为不超过$x$的最大整数，$\{x\}=x-[x]$。若实数$a$、$b(b\neq 0)$满足$a=b[\frac{a}{b}]-b\{\frac{a}{b}\}$，则下面命题不正确的是　　　　　　　　　　（　　）

A. 若$b$是整数，则$a$是整数　　　　B. 若$a$是非零整数，则$b$是整数

C. 若$b$是有理数，则$a$是有理数　　D. 若$a$是非零有理数，则$b$是有理数

【答案】B。

$$a=b\cdot\frac{a}{b}=b\left(\left[\frac{a}{b}\right]+\left\{\frac{a}{b}\right\}\right)=b\left[\frac{a}{b}\right]-b\left\{\frac{a}{b}\right\}$$

∴$b\cdot\left\{\dfrac{a}{b}\right\}=0$　，　∴$\left\{\dfrac{a}{b}\right\}$为整数，故选B。

6．若$\begin{cases}a^4+9=2b(2c+b)\\ b^4+9=2c(2a+c)\\ c^4+9=2a(2b+a)\end{cases}$，则$a-b+c$的值为　　　　　　（　　）

A. 0　　　B. $\pm 1$　　　C. $\pm\sqrt{3}$　　　D. $\pm 3$

【答案】C。

$$\left.\begin{aligned}a^4+9=4bc+2b^2\\ b^4+9=4ca+2c^2\\ c^4+9=4ab+2a^2\end{aligned}\right\}\Rightarrow a^4+9+b^4+9+c^4+9-2a^2-2b^2-2c^2-4bc-4ca=0$$

$$\Rightarrow\left(a^2-3\right)^2+\left(b^2-3\right)^2+\left(c^2-3\right)^2+2\left[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right]=0$$

∴$a=b=c=\pm\sqrt{3}$。故选C。

## 二、填空题（本题满分 28 分，每小题 7 分）

7．已知反比例函数 $y=-\dfrac{2015}{x}$。若 $A(-\sqrt{6},a),B(-\sqrt{3},b),C(\sqrt{2},c)$ 三点都在该函数的图象上，则实数 $a,b,c$ 的大小关系为_________。

【答案】$c<a<b$。

8．求值 $\dfrac{(a-2b)^3+(2b-3c)^3+(3c-a)^3}{(a-2b)(2b-3c)(3c-a)}=$_________。

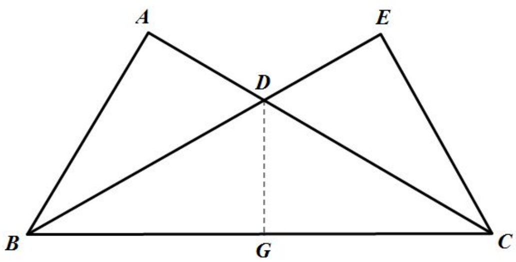
【答案】3.

$$\frac{(a-2b)^3+(2b-3c)^3+(3c-a)^3}{(a-2b)(2b-3c)(3c-a)}=\frac{(a-2b)^3+(2b-3c)^3-3(a-2b)(2b-3c)(3c-a)}{(a-2b)(2b-3c)(3c-a)}+3=3$$

利用 $x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$。

9. 如图，在 $\Delta ABC$ 中，$\angle ABC=59^\circ,\angle ACB=30.5^\circ$，延长 $\angle ABC$ 的内角平分线 $BD$ 至 $E$，使得 $DE=DA$，则 $\angle E$ 的度数为_________。

【答案】89. 5°．




证明：在 $BC$ 上取一点 $G$，使得 $AB=BG$。

$\because$ $BE$ 平分 $\angle ABC$，

$\therefore$ $\angle ABE=\angle EBC=\dfrac{1}{2}\angle ABC=29.5^\circ$。

又 $BD=BD$,

故 $\Delta ABD\cong\Delta GBD$。

$\angle BAC=180^\circ-\angle ABC-\angle ACB=180^\circ-59^\circ-30.5^\circ=90.5^\circ$,

$\therefore$ $\angle BGD=\angle BAC=90.5^\circ$,

$\angle BDA=\angle BDG=180^\circ-29.5^\circ-90.5^\circ=60^\circ$,

$\therefore\angle GDC=180^\circ-60^\circ-60^\circ=60^\circ=\angle EDC$,

又 $DG=AD=DE,DC=DC$,

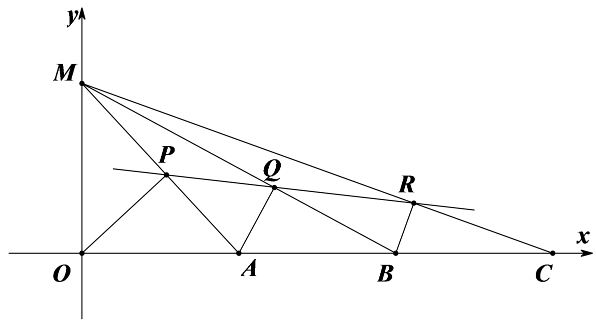
所以 $\Delta DGC\cong\Delta DEC$。

$\therefore$ $\angle DCE=\angle DCG=30.5^\circ$

$\therefore$ $\angle CED=180^\circ-60^\circ-30.5^\circ=89.5^\circ$。

10.如图， 已知 $A(1,0),B(2,0),C(3,0),M\left(0,m\right)\left(m>0\right)$ 为平面直角坐标系 $xOy$ 上的四点，满足 $OP\perp AM,AQ\perp BM,BR\perp CM$ 。若 $P,Q,R$ 三点共线，则 $m=$_________。

【答案】$\dfrac{\sqrt{30}}{5}$。




设 $\angle OAM=\alpha$，$\angle OCM=\gamma$，$0^{\circ}<\alpha$、$\beta$、$\gamma<90^{\circ}$，

且 $\sin\alpha=\dfrac{m}{\sqrt{1+m^2}},\cos\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{1+m^2}}$，

$\sin\beta=\dfrac{m}{\sqrt{4+m^2}},\cos\beta=\dfrac{2}{\sqrt{4+m^2}}$，

$\sin\gamma=\dfrac{m}{\sqrt{9+m^2}},\cos\gamma=\dfrac{3}{\sqrt{9+m^2}}$。

在 $Rt\Delta OPA$ 中可知，$PP_1=\sin\alpha\cos\alpha,OP_1=\sin\alpha\sin\alpha$，则 $P$（$\sin^2\alpha,\sin\alpha\cos\alpha$）；

在 $Rt\Delta AQB$ 中可知，$QQ_1=\sin\beta\cos\beta,AR_1=\sin\beta\sin\beta$，则 $Q$（$1+\sin^2\beta,\sin\beta\cos\beta$）；

在 $Rt\Delta BRC$ 中可知，$RR_1=\sin\gamma\cos\gamma,BR_1=\sin\gamma\sin\gamma$，则 $R$（$2+\sin^2\gamma,\sin\gamma\cos\gamma$）。

又 $P,Q,R$ 三点共线，故

$$\frac{\sin\beta\cos\beta-\sin\alpha\cos\alpha}{1+\sin^2\beta-\sin^2\alpha}=\frac{\sin\gamma\cos\gamma-\sin\alpha\cos\alpha}{2+\sin^2\gamma-\sin^2\alpha}$$

$$\Leftrightarrow\frac{\dfrac{2m}{4+m^2}+\dfrac{m}{1+m^2}}{1+\dfrac{m^2}{4+m^2}-\dfrac{m^2}{1+m^2}}=\frac{\dfrac{3m}{9+m^2}-\dfrac{m}{1+m^2}}{2+\dfrac{m^2}{9+m^2}-\dfrac{m^2}{1+m^2}}$$

$$\Leftrightarrow\frac{m^2-2}{4+2m^2+m^4}=\frac{m^2-3}{9+6m^2+m^4}$$ （因为 $m>0$）

$$\Leftrightarrow 5m^4-m^2-6=0\Leftrightarrow\left(m^2+1\right)\left(5m^2-6\right)=0\Leftrightarrow m^2=\frac{6}{5}。$$

又因为 $m>0$，所以 $m=\dfrac{\sqrt{30}}{5}$。

# 第二试（C）

## 一、（本题满分 20 分）

已知抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 的图象过 $A(2,0)$，$B(0,2)$，$C(4,2)$ 三点。

（1）求实数 $a,b,c$ 的值；

（2）已知 $E$ 点坐标为（4, 0），将抛物线沿直线 $AB$ 移动，其顶点 $P$ 保持在直线 $AB$ 上，与直线 $AB$ 的另一个交点为 $Q$，求 $PE+CQ$ 的最小值。

**解：**（1）$y=\frac{1}{2}x^2-2x+2$，$\therefore a=\frac{1}{2},b=-2,c=2$。…………………………………（10）

（2）直线 $AB:y=-x+2$，若记顶点 $P$ 坐标为 $(t,2-t)$

$$PE+CQ=\sqrt{(t-4)^2+(2-t)^2}+\sqrt{(t-6)^2+(2-t)^2}=\sqrt{2t^2-12t+20}+\sqrt{2t^2-16t+40}$$

$$=\sqrt{2}\left(\sqrt{t^2-6t+10}+\sqrt{t^2-8t+20}\right)$$ ……………………………………………………（15）

$$=\sqrt{2}\left(\sqrt{(t-3)^2+1^2}+\sqrt{(t-4)^2+2^2}\right)\ge\sqrt{2}\cdot\sqrt{10}\ge2\sqrt{5}$$。……………………………（20）

（2）**解法 2**：显然，抛物线与直线 $AB$ 相交弦长 $AB=2\sqrt{2}$。

取线段 $BC$ 的中点 $D(2,2)$，延长 $CE$ 与 $BA$ 延长线相交于 $F$。

则 $\Delta BCF$ 为等腰直角三角形，且 $CE=EF$。

所以 $DE//BF$，且 $DE=\frac{1}{2}BF=AB=PQ$。

所以四边形 $PQDE$ 为平行四边形，即 $DQ//PE$，且 $DQ=PE$。……………………………（15）

作点 $C$ 关于直线 $AB$ 的对称点 $G$，其坐标为（0, -2）。

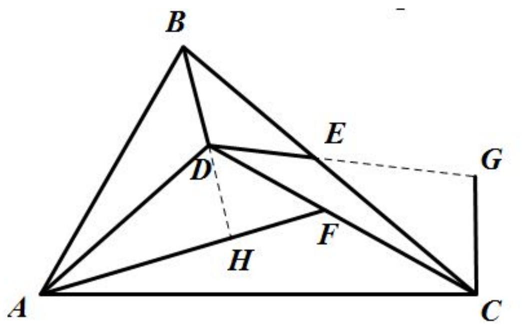
所以 $PE+CQ$ 的最小值就是线段 $DG$ 的长度，即为 $2\sqrt{5}$。…………………………（20）

## 二、（本题满分 25 分）

如图，在 $\Delta ABC$ 中，$AB=8,AC=10$，$D$ 为 $\Delta ABC$ 内一点，满足 $\angle ADC=90^\circ$，$\angle ABD=\angle ACD$。设 $E$ 是 $BC$ 的中点，求 $DE$ 的长。

**解** 在$CD$上取点$F$，使$\angle CAF=\angle BAD$，

则$\Delta ABD\sim\Delta ACF$。若记$BD=x,DA=y$，




则$AF=\dfrac{5}{4}y,CF=\dfrac{5}{4}x$，则$DF=\dfrac{3}{4}y$ 。……（5）

延长$DE$至$G$使$ED=EG$，延长$BD$交$AF$于$H$，

易知$BH\perp AF$。

则$\angle DCG=\angle FDH=\angle DAH$。

$\therefore\cos\angle DCG=\dfrac{4}{5}$。 ………………（10）

由余弦定理$DG^2=CD^2+CG^2-2CD\cdot CG\cdot\cos\angle DCG$

$$=\left(\frac{3}{4}y+\frac{5}{4}x\right)^2+x^2-2\cdot\left(\frac{3}{4}y+\frac{5}{4}x\right)\cdot x\cdot\frac{4}{5}=\frac{9}{16}x^2+\frac{9}{16}y^2+\frac{27}{40}xy=\frac{9}{16}\left(x^2+y^2+\frac{6}{5}xy\right)。$$

…………………………………………………………………………………………（15）

又$DA^2+DC^2=AC^2\Rightarrow y^2+\left(\dfrac{3}{4}y+\dfrac{5}{4}x\right)^2=\dfrac{25}{16}y^2+\dfrac{25}{16}x^2+\dfrac{15}{8}xy=\dfrac{25}{16}\left(x^2+y^2+\dfrac{6}{5}xy\right)=100$

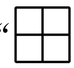
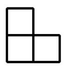
$\therefore x^2+y^2+\dfrac{6}{5}xy=64$。 ……………………………………………………（20）

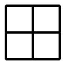
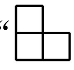
$\therefore DG^2=\dfrac{9}{16}\left(x^2+y^2+\dfrac{6}{5}xy\right)=\dfrac{9}{16}\times 64=36$，

$\therefore DG=6$，

$\therefore DE=\dfrac{1}{2}DG=3$。 ……………………………………………………………（25）

三、（本题满分 25 分）

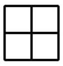
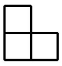
已知$7\times 7$的方格表恰好被$x$个“”，$y$个“”（包含旋转）覆盖，求$x,y$的值。

**解**：一方面，$7\times 7$的方格中的 49 个小方格恰好被$x$个“”及$y$个“”覆盖。

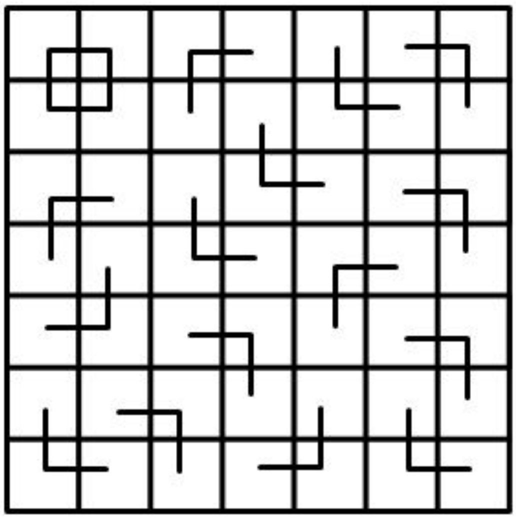
则 $4x+3y=49$，…………………………………………………………………（5）

所以$(x,y)=(1,15)$或$(4,11)$或$(7,7)$或$(10,3)$。

…………………………………………（10）

另一方面，将位于奇数行，奇数列的方格染成红色，则共有$4\times4=16$个红色方格，且每一个“”恰好覆盖一个红色方格，每一个“”至多覆盖一个红色方格，所以

$x+y\geq16$。………………………………（15）



这样　$49=4x+3y=x+3\left(x+y\right)\geq x+3\times16$

即　$x\leq1$。………………………………（20）

又当$\left(x,y\right)=\left(1,15\right)$时，按如下方式恰好满足题意。

得上所述，$\begin{cases}x=1\\y=15\end{cases}$。……………（25）