

【第1讲】《代数大揭秘》

【例1】计算： $4\sqrt{3+2\sqrt{2}} - \sqrt{41+24\sqrt{2}} = ( )$

- (A)  $\sqrt{2}-1$  (B) 1 (C)  $\sqrt{2}$  (D) 2.

【例2】满足等式  $(2-m)^{m^2-m-2} = 1$  的所有实数  $m$  的和为 ( )

- (A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 6

【例3】已知实数  $x, y, z$  满足  $x+y=4, |z+1|=xy+2y-9$ , 则  $x+2y+3z = \underline{\hspace{2cm}}$ .

【例4】若  $\begin{cases} a^4+9=2b(2c+b) \\ b^4+9=2c(2a+c) \\ c^4+9=2a(2b+a) \end{cases}$ , 则  $a-b+c$  的值为 ( )

- A. 0 B.  $\pm 1$  C.  $\pm\sqrt{3}$  D.  $\pm 3$

【例5】求值  $\frac{(a-2b)^3 + (2b-3c)^3 + (3c-a)^3}{(a-2b)(2b-3c)(3c-a)} = \underline{\hspace{2cm}}$ .

【例6】设实数  $a, b, c$  满足:  $a+b+c=3, a^2+b^2+c^2=4$ , 则

$$\frac{a^2+b^2}{2-c} + \frac{b^2+c^2}{2-a} + \frac{c^2+a^2}{2-b} = ( )$$

- A. 0. B. 3. C. 6. D. 9.

【例7】已知实数  $a, b, c$  满足  $a+b+c=1, \frac{1}{a+b-c} + \frac{1}{b+c-a} + \frac{1}{c+a-b} = 1$ , 则  $abc = \underline{\hspace{2cm}}$ .

【例8】已知实数  $a, b, c, d$  满足  $2a^2+3c^2=2b^2+3d^2=(ad-bc)^2=6$  求  $(a^2+b^2)(c^2+d^2)$  的值.

【例9】已知实数  $x, y$  满足关系式  $xy-x-y=1$ , 则  $x^2+y^2$  的最小值为 ( )

- A.  $3-2\sqrt{2}$ . B.  $6-4\sqrt{2}$ . C. 1. D.  $6+4\sqrt{2}$ .

【例10】已知实数  $x, y$  满足关系式  $x^2+xy+y^2=3$ , 则  $(x-y)^2$  的最大值为 ( )

- A. 3 B. 6 C. 9 D. 12

【例11】已知非负实数  $x, y, z$  满足  $x+y+z=1$ , 则  $t=2xy+yz+2zx$  的最大值为 ( )

- A.  $\frac{4}{7}$  B.  $\frac{5}{9}$  C.  $\frac{9}{16}$  D.  $\frac{12}{25}$

【例 12】如果实数  $x, y, z$  满足  $x^2 + y^2 + z^2 - (xy + yz + zx) = 8$  用  $A$  表示  $|x - y|, |y - z|, |z - x|$  的最大值, 则  $A$  的最大值为\_\_\_\_\_.

【例 13】4. 在圆周上按序摆放和为 15 的五个互不相等的正整数  $a, b, c, d, e$ , 使得  $ab + bc + cd + de + ea$  最小, 则这个最小值为\_\_\_\_\_.

【例 14】使得不等式  $\frac{9}{17} < \frac{n}{n+k} < \frac{8}{15}$  对唯一的整数  $k$  成立的最大正整数  $n$  为\_\_\_\_\_.

【例 15】设  $a, b$  是一元二次方程  $x^2 - x - 1 = 0$  的两根, 则  $3a^3 + 4b + \frac{2}{a^2}$  的值为\_\_\_\_\_.

【例 16】已知实数  $a, b$  满足  $a^2 - 3a + 1 = 0, b^2 - 3b + 1 = 0$ , 且  $a \neq b$ , 则  $a^2b + ab^2$  的值为( )  
A. -3                                      B. 3                                      C. 9                                      D. -9

【例 17】设实数  $a, b$  满足  $a^2(b^2 + 1) + b(b + 2a) = 40, a(b + 1) + b = 8$ , 求  $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$  的值.

【例 18】已知  $t$  是一元二次方程  $x^2 + x - 1 = 0$  的一个根, 若正整数  $a, b, m$  使得等式  $(at + m)(bt + m) = 31m$  成立, 求  $ab$  的值.

【例 19】关于  $x$  的方程  $\sqrt{x^2 - m} + 2\sqrt{x^2 - 1} = x$  有且仅有一个实数根, 求实数  $m$  的取值范围.

【例 20】已知抛物线  $y = ax^2 + bx + c$  的图象过  $A(2, 0), B(0, 2), C(4, 2)$  三点.

(1) 求实数  $a, b, c$  的值;

(2) 已知  $E$  点坐标为  $(4, 0)$ , 将抛物线沿直线  $AB$  移动, 其顶点  $P$  保持在直线  $AB$  上, 与直线  $AB$  的另一个交点为  $Q$ , 求  $PE + CQ$  的最小值.