初二数学秋季·联赛班第五讲作业答案

《三角函数》

【习题 1】

【解析】$-\dfrac{5}{3}\pi$，$\dfrac{1}{3}\pi$.

【习题 2】

【解析】(1)5，$\dfrac{3}{5}$，$\dfrac{4}{5}$，$\dfrac{3}{4}$，$\dfrac{4}{5}$，$\dfrac{3}{5}$，$\dfrac{4}{3}$；(2)B；(3)C；(4)B；(5)$46°$.

【习题 3】

【解析】(1)解法一：$\because \cos 53° = \sin 37°$，

且$\sin 37° < \sin 53°$，

$\therefore \sin 53° > \cos 53°$.

解法二：$\because \sin 53° = \cos 37°$，且$\cos 37° > \cos 53°$，

$\therefore \sin 53° > \cos 53°$.

(2)解法一：根据三角比定义：$\sin A = \dfrac{a}{c}$，$\tan A = \dfrac{a}{b}$

$\because b < c$，$\therefore \dfrac{a}{c} < \dfrac{a}{b}$，即$\sin A < \tan A$.

解法二：$\tan A = \dfrac{\sin A}{\cos A}$，$\therefore \sin A - \tan A = \sin A \cdot \left(1 - \dfrac{1}{\cos A}\right)$

$\because \angle A$是锐角，$\therefore 0 < \sin A < 1$，$0 < \cos A < 1$，$\therefore \dfrac{1}{\cos A} > 1$，

$\therefore 1-\dfrac{1}{\cos A}<0$

$\therefore \sin A\cdot\left(1-\dfrac{1}{\cos A}\right)<0$，即$\sin A-\tan A<0$，

$\therefore \sin A<\tan A$.

【习题 4】

【解析】(1)

$$\frac{2\sin 30^\circ}{4\cos 60^\circ-1}+\frac{1}{\sin 45^\circ\cdot\cos 30^\circ}-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\cos 45^\circ+\tan 15^\circ\cdot\tan 75$$

$$=\frac{2\times\frac{1}{2}}{4\times\frac{1}{2}-1}+\frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}}-\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}+1$$

$$=1+\frac{2\sqrt{6}}{3}-\frac{\sqrt{6}}{4}+1=2+\frac{5\sqrt{6}}{12}.$$

(2)

$$2\sin 30^\circ-3\tan 45^\circ\cot 45^\circ+4\cos 60^\circ=2\times\frac{1}{2}-3+4\times\frac{1}{2}=0.$$

【习题 5】

【解析】(1) 原式

$$=\cos^2 89^\circ+\cos^2 88^\circ+\cdots+\cos^2 46^\circ+\sin^2 45^\circ+\sin^2 46^\circ+\cdots+\sin^2 88^\circ+\sin^2 89^\circ$$
$$=\left(\cos^2 89^\circ+\sin^2 89^\circ\right)+\left(\cos^2 88^\circ+\sin^2 88^\circ\right)+\cdots+\left(\cos^2 46^\circ+\sin^2 46^\circ\right)+\sin^2 45^\circ$$

$=1+1+\cdots+1+\dfrac{1}{2}=44\dfrac{1}{2}$.

(2)$\because \sin\alpha-\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$,

$\therefore$

$(\sin\alpha-\cos\alpha)^2=\sin^2\alpha+\cos^2\alpha-2\sin\alpha\cos\alpha=1-2\sin\alpha\cos\alpha=\dfrac{1}{2}$,

$\therefore 2\sin\alpha\cos\alpha=\dfrac{1}{2}$, $\because \alpha$为锐角，$\therefore \sin\alpha+\cos\alpha>0$

$\therefore$

$\sin\alpha+\cos\alpha=\sqrt{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2}=\sqrt{1+2\sin\alpha\cos\alpha}=\sqrt{1+\dfrac{1}{2}}=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$.

(3)原式

$=\sqrt{\tan^2 50^\circ+\cot^2 50^\circ+2\tan 50^\circ\cot 50^\circ}=\sqrt{(\tan 50^\circ+\cot 50^\circ)^2}=\tan 50^\circ+\cot 50^\circ$.

(4)

$\tan^2\alpha+\cot^2\alpha=(\tan\alpha+\cot\alpha)^2-2\tan\alpha\cot\alpha=9-2=7$.

【习题6】

【解析】(1)原式$=\dfrac{\cos^2\alpha(\sin\alpha+\cos\alpha)}{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}+\dfrac{\sin^2\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}$

$=\dfrac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}=\cos\alpha+\sin\alpha$.

(2)原式$=\sin^2\theta\cdot\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}+\cos^2\theta\cdot\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}+2\sin\theta\cos\theta-\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}$

$=\dfrac{\sin^4\theta+\cos^4\theta+2\sin^2\theta\cos^2\theta-\cos^2\theta}{\cos\theta\sin\theta}$

$$=\frac{\left(\sin^2\theta+\cos^2\theta\right)^2-\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}=\frac{1-\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}=\frac{\sin^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}$$

$=\tan\theta$.

【习题 7】

【解析】(1)①$\frac{1}{2}$;

②$\cos 225°=\cos(180°+45°)=-\cos 45°=-\frac{\sqrt{2}}{2}$;

③$\sin\frac{25\pi}{6}=\sin\left(\frac{\pi}{6}+4\pi\right)=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$;

④$\sin\left(-\frac{17\pi}{3}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{3}-3\times 2\pi\right)=\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

(2)A

$$\sin\frac{4\pi}{3}\cdot\cos\frac{25\pi}{6}\cdot\tan\frac{5\pi}{4}=\sin\left(\frac{\pi}{3}+\pi\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{6}+4\pi\right)\cdot\tan\left(\frac{\pi}{4}+\pi\right)$$

$$=-\sin\frac{\pi}{3}\cdot\cos\frac{\pi}{6}\cdot\tan\frac{\pi}{4}=-\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times 1=-\frac{3}{4},$$

【习题 8】

【解析】 $\dfrac{\cos(\pi-\alpha)\cot\left(\frac{3}{2}\pi+\alpha\right)\cot(-\pi-\alpha)}{\sin\left(-\frac{3}{2}\pi+\alpha\right)\cot(\pi+\alpha)\tan(-\pi-\alpha)}=\dfrac{-\cos\alpha\tan\alpha\cot\alpha}{-\cos\alpha\cot\alpha\tan\alpha}=1$.

【习题9】

【解析】因为

$$\cos\left(\frac{5\pi}{6}+\alpha\right)=\cos\left[\pi-\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)\right]=-\cos\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)=-\frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$\sin^2\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)=\sin^2\left[-\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)\right]=1-\cos^2\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)=1-\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2=\frac{2}{3}.$$

所以$\cos\left(\frac{5\pi}{6}+\alpha\right)-\sin^2\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{3}-\frac{2}{3}=-\frac{2+\sqrt{3}}{3}$.

【练习1】

【解析】(1) ×；(2) √；(3) √；(4) ×；(5) √.

【练习2】

【解析】在$\mathrm{Rt}\triangle ABC$中，由正切定义可知

$\tan A=\frac{BC}{AC}=\frac{5}{12}$，设$BC=5k$，$AC=12k$，

则$AB=\sqrt{AC^2+BC^2}=\sqrt{(5k)^2+(12k)^2}=13k$.

$\therefore \sin B=\frac{AC}{AB}=\frac{12k}{13k}=\frac{12}{13}$，$\cos B=\frac{BC}{AB}=\frac{5k}{13k}=\frac{5}{13}$，

$\tan B=\frac{AC}{BC}=\frac{12k}{5k}=\frac{12}{5}$，$\cot B=\frac{BC}{AC}=\frac{5k}{12k}=\frac{5}{12}$.

【练习3】

【解析】(1)$\because \tan\alpha\cot\alpha=1$，$\tan\alpha=\cot(90^\circ-\alpha)$

$\therefore \tan 1^\circ \tan 89^\circ = \tan 1^\circ \cot 1^\circ = 1$,

$\tan 2^\circ \tan 88^\circ = \tan 2^\circ \cot 2^\circ = 1$,

$\tan 44^\circ \tan 46^\circ = \tan 44^\circ \cot 44^\circ = 1$

而 $\tan 45^\circ = 1$,

$\therefore \tan 1^\circ \cdot \tan 2^\circ \cdot \tan 3^\circ \cdot \cdots \cdot \tan 89^\circ = 1$.

(2) $\because \tan A - \cot A = 2$， $\tan A \cot A = 1$,

$\therefore$

$$(\tan A - \cot A)^2 = \tan^2 A + \cot^2 A - 2\tan A \cot A = \tan^2 A + \cot^2 A - 2 = 4.$$

$\therefore \tan^2 A + \cot^2 A = 4 + 2 = 6$.

(3) $\because \tan\alpha \cot\alpha = 1$,

又 $\tan 40^\circ = \cot(90^\circ - 40^\circ) = \cot 50^\circ < \cot 40^\circ$,

$\therefore \sqrt{\tan^2 40^\circ + \cot^2 40^\circ - 2}$

$= \sqrt{\tan^2 40^\circ + \cot^2 40^\circ - 2\tan 40^\circ \cot 40^\circ}$

$= \sqrt{(\cot 40^\circ - \tan 40^\circ)^2} = \cot 40^\circ - \tan 40^\circ$.

【练习 4】

【解析】 原式

$$= 3\left(\sin^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha + \cos^2\alpha\right)^2 + 6\left(\sin^2\alpha - 2\sin\alpha\cos\alpha + \cos^2\alpha\right)$$

$$4\left(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha\right)\left(\sin^2\alpha - \sin^2\alpha\cos^2\alpha + \cos^4\alpha\right)$$

$$= 3(1 + 2\sin\alpha\cos\alpha)^2 + 6(1 - 2\sin\alpha\cos\alpha) + 4\left[\left(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha\right)^2 - 3\sin^2\alpha\cos^2\alpha\right]$$

$$= 3\left(1 + 4\sin\alpha\cos\alpha + 4\sin^2\alpha\cos^2\alpha\right) + 6(1 - 2\sin\alpha\cos\alpha) + 4\left(1 - 3\sin^2\alpha\cos^2\alpha\right)$$

$= 13$.

【练习5】

【解析】 $\sin\alpha=\dfrac{12}{13}$

【练习6】

【解析】∵$\sin\alpha+\cos\alpha=\sqrt{2}$，两边平方得：

$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha+2\sin\alpha\bullet\cos\alpha=2$

又∵$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$，∴$\sin\alpha\cdot\cos\alpha=\dfrac{1}{2}$.

∴$\dfrac{1}{\sin\alpha}+\dfrac{1}{\cos\alpha}=\dfrac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}=2\sqrt{2}$，$\dfrac{1}{\sin\alpha}\cdot\dfrac{1}{\cos\alpha}=2$

∴以$\dfrac{1}{\sin\alpha}$和$\dfrac{1}{\cos\alpha}$为两根的一元二次方程为：

$x^2-2\sqrt{2}x+2=0$

【练习7】

【解析】①×②可得，$\sin^2\alpha-\cos^2\alpha=ab$④，

由③，④可知，$\sin\alpha=ab+b^2$.

①+②可得，$2\sin\alpha=a+b\Rightarrow\sin\alpha=\dfrac{1}{2}(a+b)$，从而

$\cos\alpha=\dfrac{1}{2}(a-b)$，

从而有$ab+b^2=\dfrac{1}{2}(a+b)\Rightarrow(2b-1)(a+b)=0$.

若$a+b=0$，则$\sin\alpha=0$，$\cos\alpha=\dfrac{1}{2}(a-b)=-b$，故

$b^2=1\Rightarrow b=\pm1$，此时$a=\mp1$；

若$2b-1=0\Rightarrow b=\frac{1}{2}$，则由

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2+\left(\frac{a-b}{2}\right)^2=1\Rightarrow a^2+b^2=2$$，故$a=\pm\frac{\sqrt{7}}{2}$，

综上所述，$\begin{cases}a=1\\b=-1\end{cases}$，$\begin{cases}a=-1\\b=1\end{cases}$，$\begin{cases}a=\frac{\sqrt{7}}{2}\\b=\frac{1}{2}\end{cases}$，$\begin{cases}a=-\frac{\sqrt{7}}{2}\\b=\frac{1}{2}\end{cases}$.

【练习 8】

【解析】(1)原式

$$=\frac{\sin\alpha+\sin\alpha\cdot(-\cos\alpha)}{-\cos\alpha-(-\cos\alpha)\cdot\cos\alpha}==\frac{\sin\alpha(1-\cos\alpha)}{-\cos\alpha(1-\cos\alpha)}=-\tan\alpha,$$

而$\cos\alpha=\frac{2}{3}$，α是第四象限角，$\therefore\tan\alpha=-\frac{\sqrt{5}}{2}$，

$\therefore$原式$=\frac{\sqrt{5}}{2}$.

(2)A

$$\sqrt{1-2\sin(\pi+2)\cos(\pi+2)}=\sqrt{1-2(-\sin 2)(-\cos 2)}=\sqrt{(\sin 2-\cos 2)^2}=|\sin 2-\cos 2|$$

又 $\frac{\pi}{2}<2<\frac{3\pi}{4}$ ， $\therefore$ $\sin 2>0$，$\cos 2<0$ ， $\therefore$ 原 式 $=\sin 2-\cos 2$.

【练习 9】

【解析】因为 $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\frac{3}{5}$，$\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\ \pi\right)$，所以 $\sin\alpha=\frac{3}{5}$，$\cos\alpha=-\frac{4}{5}$.

所以 $\sin\left(\frac{5\pi}{2}+\alpha\right)=\cos\alpha=-\frac{4}{5}$.