初二数学秋季·联赛班第三讲作业答案
《二次函数的最值》

【习题 1】

【解析】(1) 当 $x=-\dfrac{b}{2a}=-\dfrac{-1}{2\times 2}=\dfrac{1}{4}$ 时，y 的最小值是 $\dfrac{4ac-b^2}{4a}=\dfrac{7}{8}$；

(2)由图像可知：当 $1\leqslant x\leqslant 2$ 时，函数 $y=2x^2-x+1$ 单调递增，

当 $x=1$ 时，y 最小，且 $y=2\times 1-1+1=2$，

当 $x=2$ 时，y 最大，且 $y=2\times 2^2-2+1=7$.

(3)由图像可知：当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时，函数 $y=2x^2-x+1$ 是先减后增，

∴当 $x=\dfrac{1}{4}$，y 最小，且 $y=\dfrac{7}{8}$.

∵ 当 $x=0$ 时，$y=2\times 0-0+1=1$ 当 $x=1$ 时，$y=2\times 1-1+1=2>1$，

∴当 $x=1$ 时，y 最大，且 $y=2$.

(4)由函数图像开口向上，且 $-2\leqslant x\leqslant 0<\dfrac{1}{4}$，故当 $x=-2$ 时，y 取最大值为 11，当 $x=0$ 时，y 取最小值为 1.

【习题 2】

【解析】因为$f(x)=-9\left(x+\frac{a}{3}\right)^2+2a$，$-\frac{1}{3}\leqslant x\leqslant\frac{1}{3}$，它的对称轴是直线$x=-\frac{a}{3}$，于是必须根据值$x=-\frac{a}{3}$是否在$-\frac{1}{3}\leqslant x\leqslant\frac{1}{3}$的范围内分三种情况讨论.

(1)$a>1$时，$f(x)\left(-\frac{1}{3}\leqslant x\leqslant\frac{1}{3}\right)$随着$x$的增加而减少，这时，$f(x)$的最大值是$f\left(-\frac{1}{3}\right)$，即$-a^2+4a-1$．由$-a^2+4a-1=-3$．

得$a=2\pm\sqrt{6}$．因$a>1$，故$a=2+\sqrt{6}$．

(2) $-1\leqslant a\leqslant 1$时，$f(x)\left(-\frac{1}{3}\leqslant x\leqslant\frac{1}{3}\right)$的最大值为$f\left(-\frac{a}{3}\right)$，即$2a$．由$2a=-3$得$a=-\frac{3}{2}$，这与$-1\leqslant a\leqslant 1$矛盾.

(3)若$-\frac{a}{3}>\frac{1}{3}$，即$a<-1$时，$f(x)\left(-\frac{1}{3}\leqslant x\leqslant\frac{1}{3}\right)$随着$x$增加而增加，这时$f(x)$的最大值是$f\left(\frac{1}{3}\right)$，即$-a^2-1$．由$-a^2-1=-3$，得$a=\pm\sqrt{2}$．

因为$a<-1$，故$a=-\sqrt{2}$．

综上所述，满足题意的a为$2+\sqrt{6}$或$-\sqrt{2}$．

【习题3】

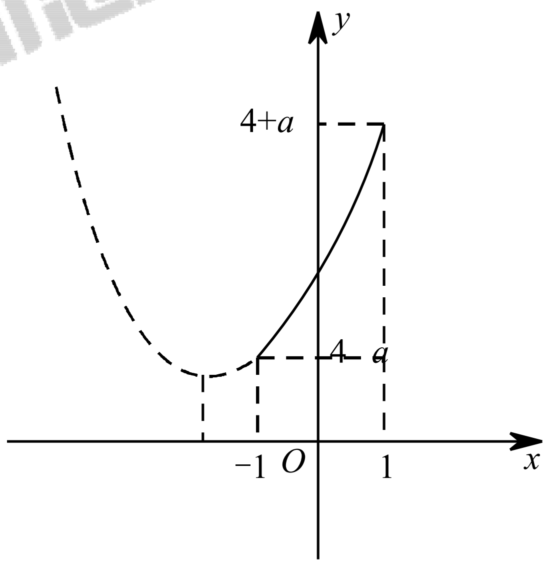
【解析】由已知有$-1\le x\le 1$，$a\ge 2$，于是函数$f(x)$是定义在区间$[-1,1]$上的二次函数，将$f(x)$配方得：

$$f(x)=\left(x+\frac{a}{2}\right)^2+3-\frac{a^2}{4}.$$

二次函数$f(x)$的对称轴方程是$x=-\frac{a}{2}$顶点坐标为$\left(-\frac{a}{2},3-\frac{a^2}{4}\right)$，图象开口向上

由$a\ge 2$可得$x=-\frac{a}{2}\le -1$，显然其顶点横坐标在区间$[-1,1]$的左侧或左端点上.

函数的最小值是$f(-1)=4-a$，最大值是$f(1)=4+a$.



【习题4】

【解析】(1) $y=x^2+ax+3-a\geqslant 0$恒成立，只需$\Delta=a^2-4(3-a)\leqslant 0$，即$a^2+4a-12\leqslant 0$，

$\therefore -6 \leqslant a \leqslant 2$.

(2) $y=\left(x+\dfrac{a}{2}\right)^2+3-a-\dfrac{a^2}{4}$. 要使 $y \geq 0$ 在 $-2 \leq x \leq 2$ 时恒成立，就是要使当 $-2 \leqslant x \leqslant 2$ 时，y 的最小值为非负.

①当 $-\dfrac{a}{2}<-2$，即 $a>4$ 时，二次函数在 $x=-2$ 时取得最小值 $7-3a$.

由 $7-3a \geqslant 0$，得 $a \leqslant \dfrac{7}{3}$，这与 $a>4$ 矛盾，此时 a 不存在.

②当 $-2 \leqslant -\dfrac{a}{2} \leqslant 2$，即 $-4 \leqslant a \leqslant 4$ 时，二次函数在 $x=-\dfrac{a}{2}$ 时取得最小值 $3-a-\dfrac{a^2}{4}$.

由 $3-a-\dfrac{a^2}{4} \geqslant 0 \Leftrightarrow a^2+4a-12 \leqslant 0 \Leftrightarrow -6 \leqslant a \leqslant 2$，

结合 $-4 \leqslant a \leqslant 4$ 可知，此时 $-4 \leqslant a \leqslant 2$.

③当 $-\dfrac{a}{2}>2$，即 $a<-4$ 时，二次函数在 $x=2$ 时取得最小值 $7+a$.

由 $7+a \geqslant 0$，得 $a \geqslant -7$，

结合 $a<-4$ 可知，此时 $-7 \leqslant a<-4$.

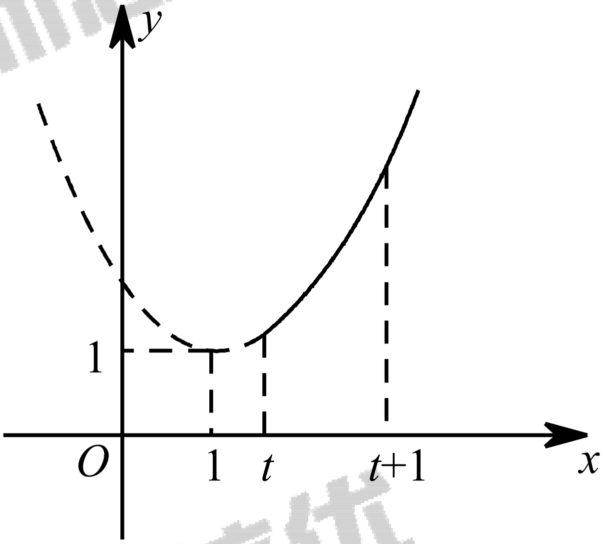
综上所述，a 的取值范围是 $-7 \leqslant a \leqslant 2$.

【习题 5】

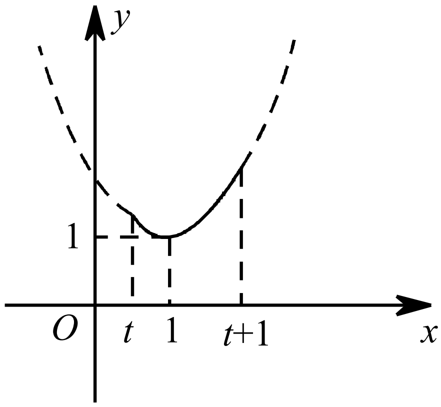
【解析】函数$f\left(x\right)=\left(x-1\right)^{2}+1$，其对称轴方程为$x=1$，顶点坐标为$\left(1,1\right)$，图象开口向上.

如图所示，若顶点横坐标在区间$\left[t,t+1\right]$左侧时，有$1<t$，此时，当$x=t$时，函数取得最小值

$f\left(x\right)_{\min}=f\left(t\right)=\left(t-1\right)^{2}+1$.

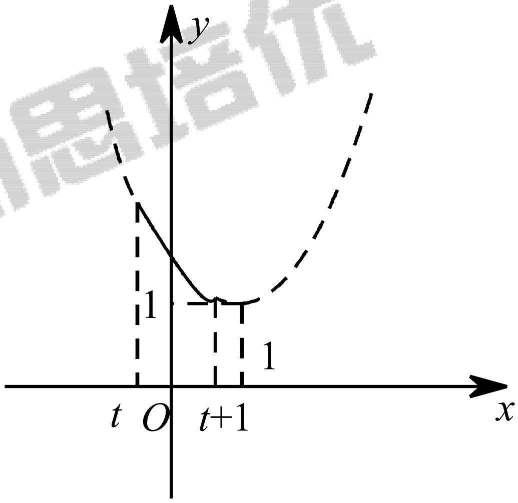


如图所示，若顶点横坐标在区间$\left[t,t+1\right]$上时，有$t\leq 1\leq t+1$，即$0\leq t\leq 1$．当$x=1$时，函数取得最小值$f\left(x\right)_{\min}=f\left(1\right)=1$.



如图所示，若顶点横坐标在区间$\left[t,t+1\right]$右侧时，有$t+1<1$，即$t<0$．当$x=t+1$时，函数取得最小值$f\left(x\right)_{\min}=f\left(t+1\right)=t^{2}+1$

综上讨论，$f\left(x\right)_{\min}=\begin{cases}\left(t-1\right)^{2}+1, & t>1\\ 1, & 0\leq t\leq 1\\ t^{2}+1 & t<0\end{cases}$



【习题 6】

【解析】解法 1：讨论对称轴$x=1$中 1 与m，$\frac{m+n}{2}$，n的位置关系.

①若$m<n\leq 1$，则$f\begin{cases}f\left(x\right)_{\max}=f\left(n\right)=3n\\ f\left(x\right)_{\min}=f\left(m\right)=3m\end{cases}$

解得$m=-4$，$n=0$

②若$\frac{m+n}{2}\leq 1<n$，则$\begin{cases}f\left(x\right)_{\max}=f\left(1\right)=3n\\ f\left(x\right)_{\min}=f\left(m\right)=3m\end{cases}$，无解

③若$m\leq 1<\frac{m+n}{2}$，则$\begin{cases}f\left(x\right)_{\max}=f\left(1\right)=3n\\ f\left(x\right)_{\min}=f\left(n\right)=3m\end{cases}$，无解

④若$1<m<n$，则$\begin{cases} f(x)_{\max}=f(m)=3n \\ f(x)_{\min}=f(n)=3m \end{cases}$，无解

综上，$m=-4$，$n=0$

解法 2：由$f(x)=-\dfrac{1}{2}(x-1)^2+\dfrac{1}{2}$，知$3n\le\dfrac{1}{2}$，$n\le\dfrac{1}{6}$，则$[m,n]\subseteq(-\infty,1]$，

又∵在$[m,n]$上当x增大时$f(x)$也增大所以$\begin{cases} f(x)_{\max}=f(n)=3n \\ f(x)_{\min}=f(m)=3m \end{cases}$

解得$m=-4$，$n=0$

【练习 1】

【解析】由题设等式，得

$$b=a^2-\frac{8}{3}a=\left(a-\frac{4}{3}\right)^2-\frac{16}{9}.$$

它的图象是以$\left(\dfrac{4}{3},-\dfrac{16}{9}\right)$为顶点，开口向上的抛物线，当$0\leqslant a\leqslant 5$时，$b$在$a=\dfrac{4}{3}$处取最小值$-\dfrac{16}{9}$，$b$在$a=5$处取最大值$25-\dfrac{40}{3}=\dfrac{35}{3}$.

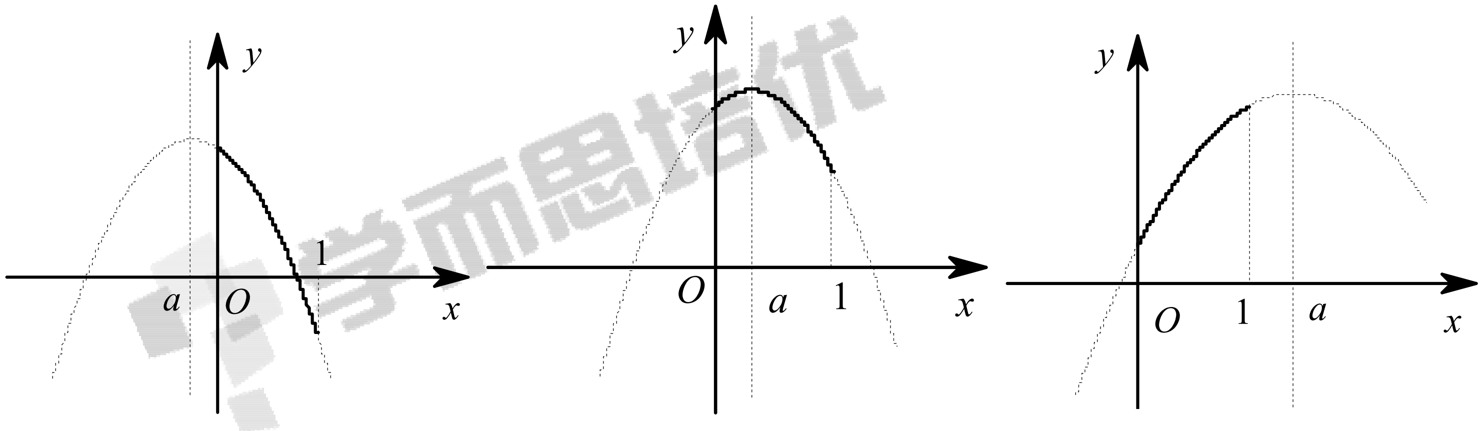
所以$-\dfrac{16}{9}\leqslant b\leqslant\dfrac{35}{3}$，

所以$b=-1$，0，1，2，…，10，11.

满足题设条件的整数b共有 13 个.

【练习 2】

【解析】按对称轴进行讨论:



当对称轴$x=a<0$时，如左图所示.

当$x=0$时，y有最大值，$y_{\max}=f(0)=1-a$，

$\therefore 1-a=2$，即$a=-1$，且满足$a<0$　　$\therefore a=-1$.

当对称轴$0\leqslant x=a\leqslant 1$时，如中图所示，

当$x=a$时，y有最大值，

$y_{\max}=f(a)=-a^2+2a^2+1-a=a^2-a+1$.

$\therefore a^2-a+1=2$．解得$a=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$（$\because 0\leqslant a\leqslant 1$，舍去）.

当对称轴$x=a>1$时，如右图所示.

当$x=1$时，y有最大值，$y_{\max}=f(1)=2a-a=2$，且满足$a>1$，$\therefore a=2$.

综上可知：$a=-1$或$a=2$.

【练习 3】

【解析】(1)二次函数的对称轴方程为$x=-a$，

当$-a<\frac{1}{2}$即$a>-\frac{1}{2}$时，$f(x)_{\max}=f(2)=4a+5$；

当$-a\geq\frac{1}{2}$即$a\leq-\frac{1}{2}$时，$f(x)_{\max}=f(-1)=2a+2$.

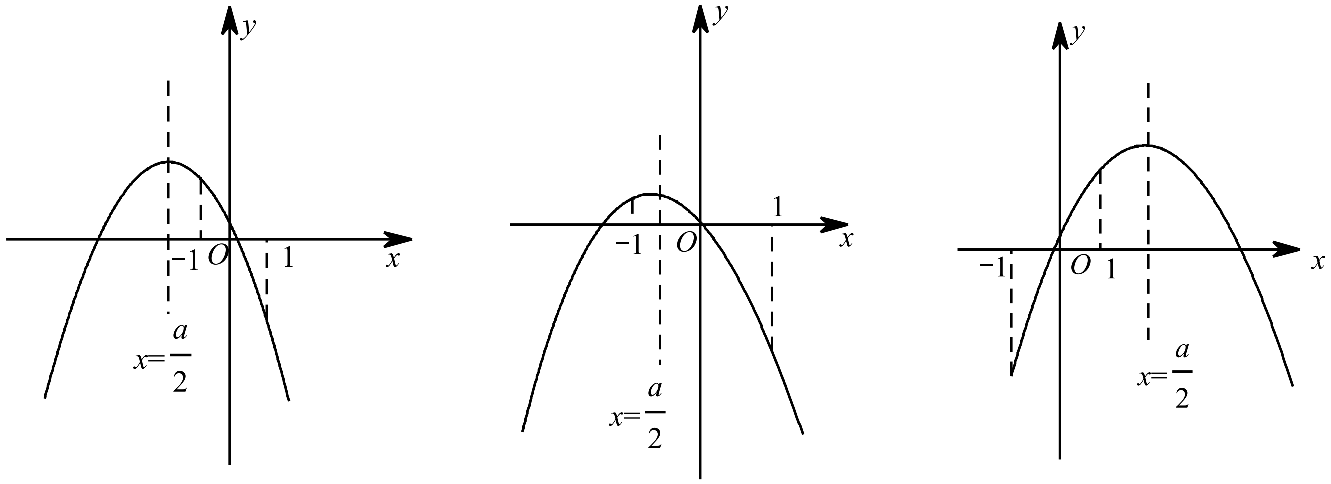
综上所述：$f(x)_{\max}=\begin{cases}-2a+2，a\leq-\frac{1}{2}\\4a+5，a>-\frac{1}{2}\end{cases}$

(2)函数$y=-\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+\frac{a^2}{4}$图象的对称轴方程为$x=\frac{a}{2}$, 应分$-1\leq\frac{a}{2}\leq1$，$\frac{a}{2}<-1$，$\frac{a}{2}>1$即$-2\leq a\leq2$，$a<-2$和$a>2$这三种情形讨化，下列三图分别为

①$a<-2$，由图可知$f(x)_{\max}=f(-1)$

②$-2\leq a\leq2$；由图可知$f(x)_{\max}=f\left(\frac{a}{2}\right)$

③$a>2$时；由图可知$f(x)_{\max}=f(1)$



$$\therefore y_{最大}=\begin{cases} f(-1),\ a<-2 \\ f\left(\frac{a}{2}\right),\ -2\le a\le 2 \\ f(1),\ a>2 \end{cases};即 y_{最大}=\begin{cases} -(a+1),\ a<-2 \\ \frac{a^2}{4},\ -2\le a\le 2 \\ a-1,\ a>2 \end{cases}$$

【练习 4】

【解析】 $f(x)=a(x+1)^2+1-a$，$x\in[-3，2]$

(1)若 $a=0$，$f(x)=1$，不符合题意.

(2)若 $a>0$，则 $f(x)_{\max}=f(2)=8a+1$

由 $8a+1=4$，得 $a=\frac{3}{8}$

(3)若 $a<0$ 时，则 $f(x)_{\max}=f(-1)=1-a$

由 $1-a=4$，得 $a=-3$

综上知 $a=\frac{3}{8}$ 或 $a=-3$

【练习 5】

【解析】 由已知可求对称轴为 $x=1$.

(1)当 $t>1$ 时，$f(x)_{\max}=f(t+1)=t^2+2$.

(2)当 $t\le 1\le t+1$，即 $0\le t\le 1$ 时，

根据对称性，若 $\frac{t+t+1}{2}\le\frac{1}{2}$ 即 $0\le t\le\frac{1}{2}$ 时，$f(x)_{\max}=f(t)=t^2-2t+3$.

若$\frac{t+t+1}{2}>\frac{1}{2}$即$\frac{1}{2}<t\leq 1$时，$f(x)_{\max}=f(t+1)=t^2+2$．

(3) 当$t+1<1$即$t<0$时，$f(x)_{\max}=f(t)=t^2-2t+3$．

综上，$f(x)_{\max}=\begin{cases} t^2+2，t>\frac{1}{2} \\ t^2-2t+3，t\leq \frac{1}{2} \end{cases}$