Algoritmi avansaţi

Laborator 3 (săpt. 5 şi 6)

Problema 1. (0.1 * punctajul din aplicaţie)

Poziția unui punct față de cercul circumscris unui triunghi

Descriere

Implementați un algoritm care să determine poziția relativă a unui punct P față de cercul circumscris unui triunghi ΔABC. Puteți folosi criteriul numeric descris în cursul 3.

Date de intrare

Programul va citi trei perechi de numere întregi $x_A\, y_A$, $x_B\, y_B$ și $x_C\, y_C$, pe linii distincte, reprezentând coordonatele vârfurilor triunghiului ΔABC, parcurse în sens trigonometric.
Pe următorul rând se află un număr natural m, reprezentând numărul de puncte ale căror poziții relative trebuie determinate, și apoi m perechi de numere întregi separate prin spațiu $x_j\, y_j$, pe linii distincte, reprezentând coordonatele punctului $P_j(x_j, y_j)$.

Date de ieșire

Programul va afișa m rânduri, pe fiecare aflându-se una dintre următoarele valori:
• `INSIDE`, dacă punctul se află în interiorul cercului circumscris triunghiului ΔABC;
• `BOUNDARY`, dacă punctul se află pe cercul circumscris triunghiului ΔABC;
• `OUTSIDE`, dacă punctul se află în exteriorul cercului circumscris triunghiului ΔABC.

Restricții și precizări

• $1 \leq m \leq 10^6$
• $-10^9 \leq x, y \leq 10^9$

Exemple

Input
```
-2 4
-3 0
0 -2
3
1 2
3 3
6 -1
```
Output
```
INSIDE
BOUNDARY
OUTSIDE
```

Explicație

Exemplul de mai sus corespunde următoarei situații:

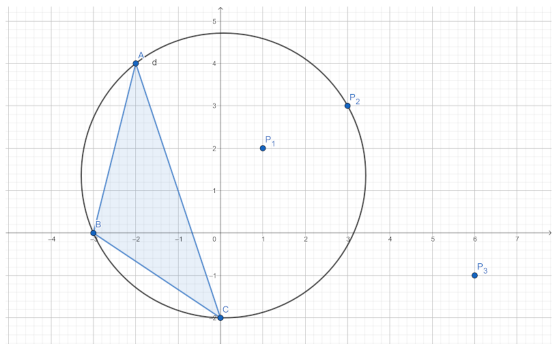


Figura 1: Reprezentare grafică a triunghiului ABC, a cercului circumscris și a punctelor care trebuie verificate

Problema 2. (0.1 * punctajul din aplicaţie)

Muchii ilegale

Descriere

Implementați un algoritm care să verifice dacă o muchie a unei triangulări este legală. Puteți folosi folosi problema 1, bazată pe criteriul geometric/numeric descris în cursul 3.

Date de intrare

Programul va citi de la tastatură patru perechi de numere întregi separate prin spațiu $x_i\, y_i$, pe linii distincte, reprezentând coordonatele vârfului $P_i(x_i, y_i)$ al patrulaterului. Vârfurile sunt date în sens trigonometric, iar patrulaterul este convex.

Date de ieșire

Programul va afișa pe ecran două rânduri, pe primul aflându-se șirul de caractere `AC:`, urmat de un spațiu și apoi cuvântul `LEGAL` sau `ILLEGAL`; iar pe al doilea, șirul de caractere `BD:`, urmat de un spațiu și apoi cuvântul `LEGAL` sau `ILLEGAL`. Primul rând indică dacă muchia AC este legală, iar al doilea rând indică dacă muchia BD este legală.

Restricții și precizări

- $-10^6 \leq x, y \leq 10^6$

Exemplu

Input

```
-2 4
-3 0
0 -2
1 2
```

Output

```
AC: ILLEGAL
BD: LEGAL
```

Explicație

Coordonatele de mai sus corespund următorului poligon:

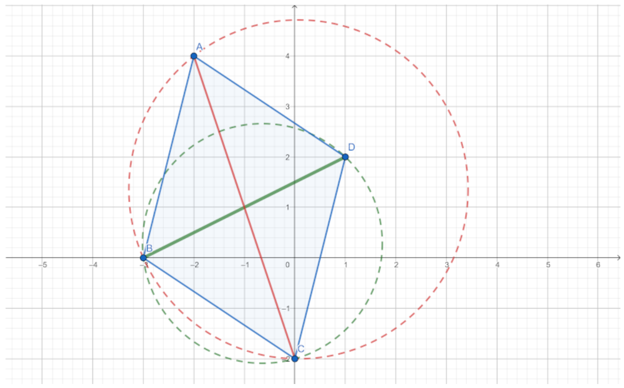


Figura 2: Reprezentarea grafică a datelor din exemplu

Folosind criteriul geometric observăm că:
• Punctul D este în interiorul cercului circumscris triunghiului ΔABC, deci muchia AC este ilegală.
• Punctul A este în exteriorul cercului circumscris triunghiului ΔBCD, deci muchia BD este legală.

Problema 3. (0.4 * punctajul din aplicaţie)

Intersecții de semiplane orizontale și verticale

Descriere

Orice dreaptă din $\mathbb{R}^2$ împarte planul în două jumătăți, numite semiplane. Fiindcă o dreaptă în plan este definită de o ecuație de forma $ax + by + c = 0$ (cu $a \neq 0$ sau $b \neq 0$), cele două semiplane corespunzătoare acesteia pot fi descrise ca mulțimile de puncte (x, y) pentru care $ax + by + c \geq 0$, respectiv $ax + by + c \leq 0$. Pentru aceste semiplane, dreapta care le determină se numește **dreaptă suport**.

Pentru această problemă, va trebui să determinați natura intersecției a n semiplane. Oricare din aceste semiplane este **orizontal** (paralel cu axa Ox) sau **vertical** (paralel cu axa Oy).

Date de intrare

Se vor citi de la tastatură un număr natural n, reprezentând numărul de semiplane care trebuie intersectate, și apoi n triplete de numere întregi a_i b_i c_i, separate prin câte un spațiu, reprezentând coeficienții care definesc inecuația semiplanului i, **inecuație de forma** $a_i x + b_i y + c_i \leq 0$.

Toate semiplanele citite vor fi fie orizontale, fie verticale (acest lucru nu mai trebuie verificat).

Date de ieșire

Se va afișa pe ecran unul dintre următoarele șiruri de caractere:
• `VOID`, dacă intersecția celor n semiplane este **vidă**.

- `BOUNDED`, dacă intersecția celor n semiplane este **nevidă** și **mărginită**.
- `UNBOUNDED`, dacă intersecția celor n semiplane este **nevidă** și **nemărginită**.

Restricții și precizări

- $1 \leq n \leq 10^5$

$-10^6 \leq a_i, b_i, c_i \leq 10^6$

Exemple

Exemplul 1

Input

```
3
1 0 -1
-1 0 2
0 1 3
```

Output

```
VOID
```

Explicație

Sunt trei semiplane, care au inecuațiile $x-1 \leq 0$, $-x+2 \leq 0$, respectiv $y+3 \leq 0$. Inecuațiile pot fi rescrise $x \leq 1$, $x \geq 2$, $y \leq -3$.

Deoarece nu există niciun punct în $\mathbb{R}^2$ care să aibă abscisa mai mică sau egală cu 1 și mai mare sau egală cu 2 în același timp, intersecția este vidă.

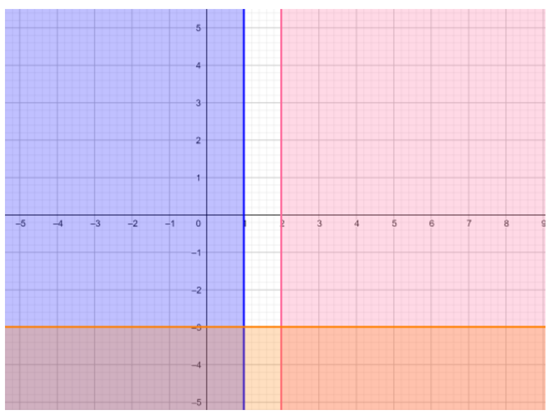


Figura 3: Semiplanele au intersecția vidă.

Exemplul 2

Input

```
4
-1 0 -1
1 0 -2
0 1 3
0 -2 -8
```

Output

```
BOUNDED
```

Explicație

Sunt patru semiplane, care au inecuațiile $-x+1 \leq 0$, $x-2 \leq 0$, $y+3 \leq 0$, respectiv $-2y-8 \leq 0$. Inecuațiile pot fi rescrise $x \geq 1$, $x \leq 2$, $y \leq -3$, $y \geq -4$. Punctele care întrunesc condiția $1 \leq x \leq 2$ sunt cele din fâșia verticală dintre dreptele $x = 1$ și $x = 2$. Punctele care întrunesc condiția $-4 \leq y \leq -3$ sunt cele din fâșia orizontală dintre dreptele $y = -4$ și $y = -3$. Intersecția lor este dreptunghiul determinat de punctele $(1, -4), (2, -4), (2, -3), (1, -3)$, deci este o mulțime nevidă și mărginită.

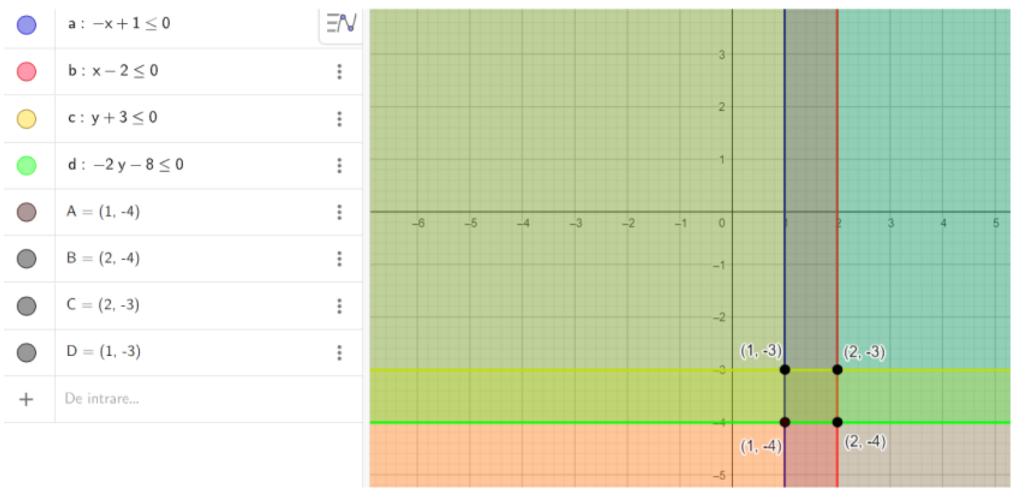


Figura 4: Semiplanele au intersecția nevidă, mărginită.

Exemplul 3

Input

```
3
-1 0 1
1 0 -2
0 1 3
```

Output

```
UNBOUNDED
```

Explicație

Sunt trei semiplane, care au inecuațiile $-x+1 \leq 0$, $x-2 \leq 0$, respectiv $y+3 \leq 0$. Inecuațiile pot fi rescrise $x \geq 1$, $x \leq 2$, $y \leq -3$.

Punctele care întrunesc condiția $1 \leq x \leq 2$ sunt cele din fâșia verticală dintre dreptele $x = 1$ și $x = 2$. Condiția $y \leq -3$ ne obligă să le luăm pe cele care au ordonata mai mică sau egală cu -3. Prin urmare, intersecția este nevidă și nemărginită.

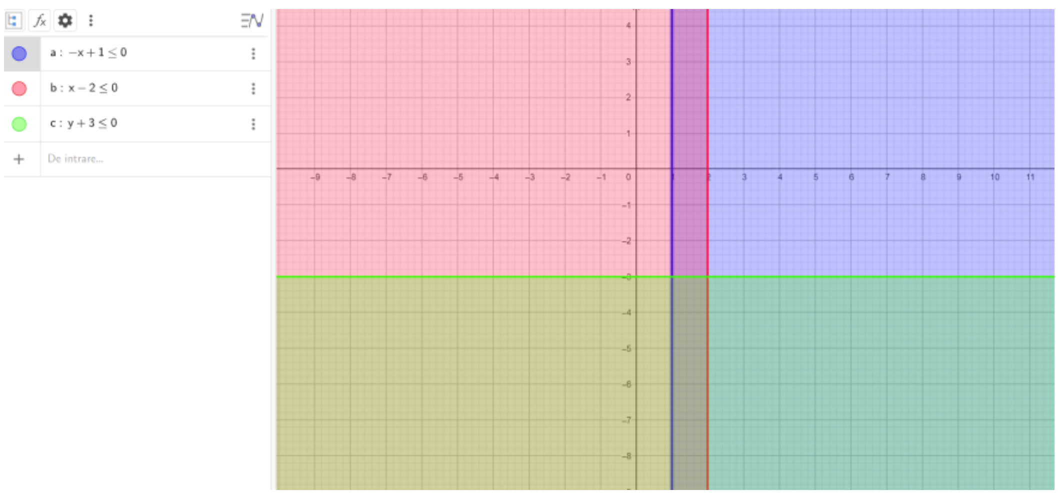


Figura 5: Semiplanele au intersecția nevidă, nemărginită.

Problema 4. (0.4 * punctajul din aplicaţie)

Poziția unui punct față de semiplane orizontale și verticale

Descriere

Se dau m puncte Q_j și n semiplane din $\mathbb{R}^2$, oricare dintre ele **orizontal** (paralel cu axa Ox) sau **vertical** (paralel cu axa Oy), toate fiind definite prin inecuații de forma $a_i x + b_i y + c_i \leq 0$.

Spunem că un dreptunghi este **interesant** dacă este determinat de unele dintre semiplanele date (nu neapărat toate semiplanele!). Mai precis, vârfurile sale sunt exact intersecții ale dreptelor suport ale unora dintre semiplane, laturile dreptunghiului sunt incluse în dreptele suport corespunzătoare, iar interiorul dreptunghiului este inclus în fiecare din semiplanele respective (altfel spus, dreptunghiul și interiorul său sunt **exact** intersecția semiplanelor respective).

În figura de mai jos sunt două dreptunghiuri interesante: $A_1A_2A_4A_3$, determinat de semiplanele a, b, c, d și $A_1A_2A_6A_5$, determinat de semiplanele a, b, c, e. Dreptunghiul $A_3A_4A_6A_5$ **nu** este interesant. Chiar dacă vârfurile sale sunt date de intersecțiile semiplanelor a, b, d, e și laturile sale sunt incluse în dreptele suport ale acestora, interiorul său **nu** este inclus în intersecția semiplanelor respective.

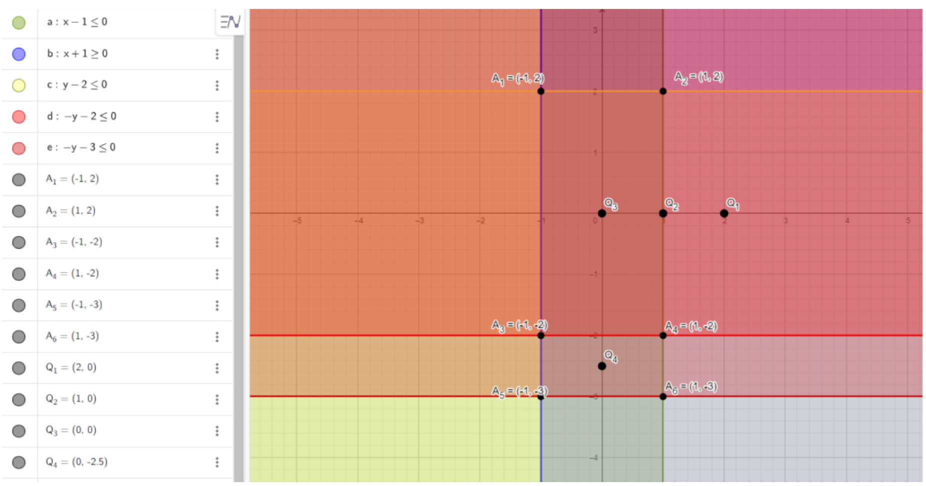


Figura 6: Reprezentarea grafică a exemplului.

Se cere să determinați pentru fiecare punct dacă se află în **interiorul** unui dreptunghi **interesant** (iar în cazul afirmativ, să spuneți care este aria minimă a unui dreptunghi interesant care îl conține).

Astfel, în figura de mai sus, sunt considerate punctele $Q_1 = (2, 0)$, $Q_2 = (1, 0)$, $Q_3 = (0, 0)$, $Q_4 = (0, -2.5)$:

- Q_1 nu este situat în interiorul niciunui dreptunghi interesant.
- Q_2 este pe laturile unor dreptunghi interesante, dar nu este în interiorul niciunuia dintre acestea.
- Q_3 este situat în interiorul dreptunghiurilor interesante $A_1A_2A_4A_3$ și $A_1A_2A_6A_5$. Dintre acestea, $A_1A_2A_4A_3$ are aria minimă, egală cu 8.
- Q_4 este situat în interiorul dreptunghiului interesant $A_1A_2A_6A_5$, de arie 10.

Recomandarea este să atacați această problemă după ce ați rezolvat-o cu succes pe cea precedentă.

Date de intrare

Se va citi de pe primul rând n, numărul de semiplane care trebuie intersectate, și apoi n triplete de numere întregi a_i b_i c_i, separate prin câte un spațiu, pe linii distincte, reprezentând coeficienții care definesc inecuația semiplanului i: $a_i x + b_i y + c_i \leq 0$. Toate semiplanele citite vor fi fie orizontale, fie verticale (acest lucru nu mai trebuie verificat).

De pe următorul rând se va citi m, numărul de puncte pentru care trebuie să determinați dacă se află în interiorul vreunui dreptunghi interesant sau nu. Pe următoarele m rânduri se vor afla perechi de numere reale x_{Q_j} y_{Q_j}, separate printr-un spațiu, reprezentând coordonatele punctului $Q_j(x_{Q_j}, y_{Q_j})$.

Date de ieșire

Pentru fiecare punct Q_j cu $j = \overline{1, m}$, programul va afișa unul dintre următoarele șiruri de caractere:
• `NO`, dacă nu există niciun dreptunghi interesant sau dacă există dreptunghiuri interesante, dar punctul Q_j **nu** se află **în interiorul** niciunui astfel de dreptunghi.
• `YES`, dacă există cel puțin un dreptunghi interesant care să îl conțină pe Q_j **în interior**.
În cazul în care răspunsul de pe o linie este `YES`, pe următoarea linie trebuie afișat un număr întreg A_j, reprezentând valoarea minimă a ariilor dreptunghiurilor interesante care îl conțin pe punctul Q_j **în interior**.

Aria dreptunghiurilor interesante poate fi un numar real. Aceasta se va afișa cu o precizie de 6 zecimale.

Restricții și precizări

• $1 \leq n \leq 10\,000$
• $1 \leq m \leq 1000$
• $-10^6 \leq a_i, b_i, c_i \leq 10^6$
• $-10^6 \leq x_{Q_j}, y_{Q_j} \leq 10^6$

Exemple

Exemplul 1

Input

```
3
-1 0 1
1 0 -2
0 1 3
1
1.5 -4
```

Output

```
NO
```

Explicație

Cele trei semiplane au inecuațiile $-x + 1 \leq 0$, $x - 2 \leq 0$, respectiv $y + 3 \leq 0$. Inecuațiile pot fi rescrise $x \geq 1$, $x \leq 2$, $y \leq -3$.
Punctele care întrunesc condiția $1 \leq x \leq 2$ sunt cele din fâșia verticală dintre dreptele $x = 1$ și $x = 2$. Condiția $y \leq -3$ ne obligă să le luăm pe cele care au ordonata mai mică sau egală cu -3.

Intersecția oricăror semiplane din cele date este o mulțime nemărginită. Așadar, nu există niciun dreptunghi interesant, deci se va afișa `NO`.

Exemplul 2

Input

```
4
-1 0 1
1 0 -2
0 1 3
0 -2 -8
3
0 0
1 -3.5
1.25 -3.5
```

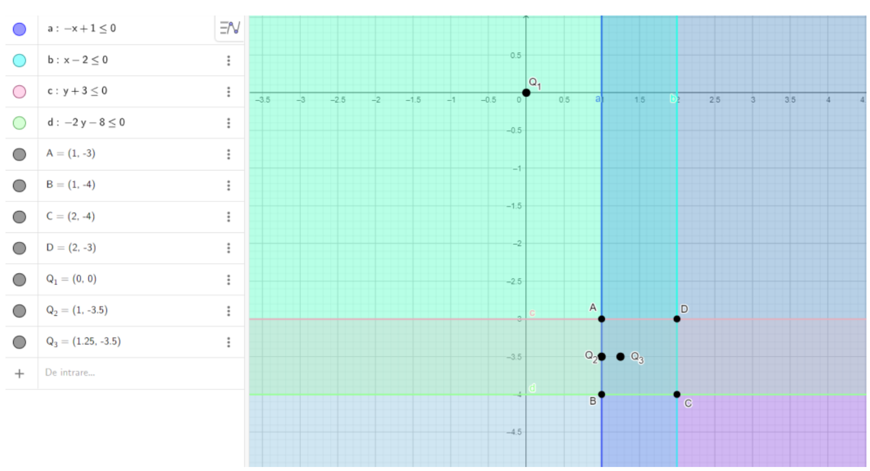
Output

```
NO
NO
YES
1
```

Explicație

Cele patru semiplane au inecuațiile $-x + 1 \leq 0$, $x - 2 \leq 0$, $y + 3 \leq 0$, respectiv $-2y - 8 \leq 0$. Inecuațiile pot fi rescrise $x \geq 1$, $x \leq 2$, $y \leq -3$, $y \geq -4$.
Punctele care întrunesc condiția $1 \leq x \leq 2$ sunt cele din fâșia verticală dintre dreptele $x = 1$ și $x = 2$. Punctele care întrunesc condiția $-4 \leq y \leq -3$ sunt cele din fâșia orizontală dintre dreptele $y = -4$ și $y = -3$.
Intersecția lor este dreptunghiul determinat de punctele $A = (1, -3), B = (1, -4), C = (2, -4), D = (2, -3)$, acesta este singurul dreptunghi interesant pentru datele de intrare considerate.

- Punctul Q_1 **nu** este situat în interiorul acestui dreptunghi, iar pentru el se va afișa `NO`.
- Punctul Q_2 este situat pe laturile acestui dreptunghi, nu în interiorul lui, deci se va afișa `NO`.
- Punctul Q_3 este conținut în interiorul dreptunghiului, deci se va afișa `YES`, iar pe rândul următor se va afișa aria dreptunghiului, care este 1.



Exemplul 3

Input

```
11
-1 0 -1
0 -3 -6
0 2 -6
1 0 -3
0 1 -2
2 0 -10
0 -1 -3
-4 0 0
-1 0 1
0 -1 -1
1 0 -4
1
2 1
```

Output

```
YES
6
```

Explicație

Inecuațiile semiplanelor sunt: $x \geq -1$, $y \geq -2$, $y \leq 3$, $x \leq 3$, $y \leq 2$, $x \leq 5$, $y \geq -3$, $x \geq 0$, $x \geq 1$, $y \geq -1$, $x \leq 4$.

Există mai multe dreptunghiuri interesante care îl conțin pe Q_1, iar valoarea minimă a ariilor acestora este 6.

Problema 5. (Suplimentar)

Puncte de intersecţie

Descriere

Se dă o mulțime de n segmente în planul $\mathbb{R}^2$. Se presupune că fiecare segment al mulțimii este orizontal sau vertical. Vi se cere să determinați numărul total de puncte de intersecție dintre segmentele orizontale și cele verticale.

Date de intrare

Se va citi de la tastatură un număr natural n, reprezentând numărul de segmente. Urmează, pe n rânduri distincte, coordonatele extremităților segmentelor. Astfel, al i-lea dintre aceste rânduri va conține patru numere întregi $x_{i,1}$ $y_{i,1}$ $x_{i,2}$ $y_{i,2}$, separate prin câte un spațiu, reprezentând coordonatele extremităților segmentului s_i (așadar, segmentul s_i este determinat de punctele $P_{i,1} = (x_{i,1}, y_{i,1})$ și $P_{i,2} = (x_{i,2}, y_{i,2})$).

Date de ieșire

Programul va afișa pe ecran numărul total de puncte de intersecție dintre segmentele orizontale și cele verticale.

Restricții și precizări

- $1 \leq n \leq 10^5$.
- $-10^6 \leq x_{i,1} \leq x_{i,2} \leq 10^6$.
- $-10^6 \leq y_{i,1} \leq y_{i,2} \leq 10^6$.
- $(x_{i,1}\ y_{i,1}) \neq (x_{i,2}\ y_{i,2})$.

• Segmentele au doar puncte de intersecție **interioare**, deci niciunul dintre capetele segmentelor nu este punct de intersecție

Exemplu

Input

```
6
4 -4 4 8
2 -1 7 -1
-5 6 0 6
-2 -3 -2 5
2 -5 9 -5
-3 2 6 2
```

Output

```
3
```

Explicație

Coordonatele de mai sus corespund următoarei figuri, în care sunt în total trei puncte de intersecție (marcate cu roșu) între segmentele orizontale și cele verticale:

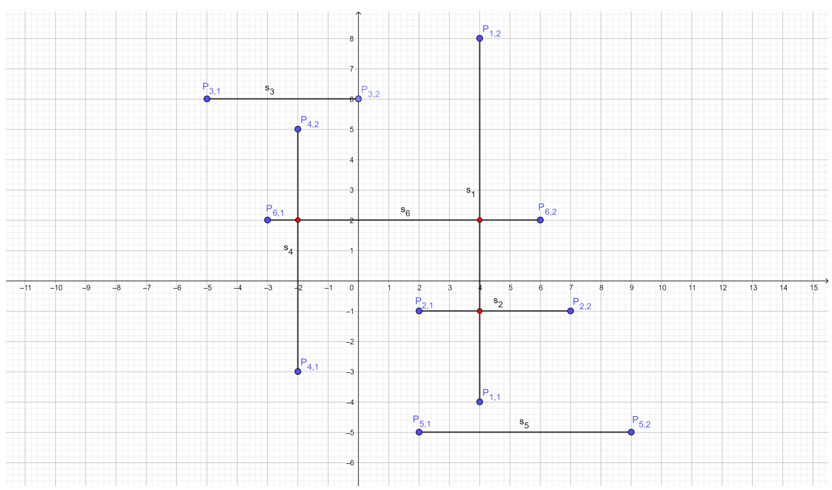


Figura 7: Reprezentarea grafică a datelor din exemplu