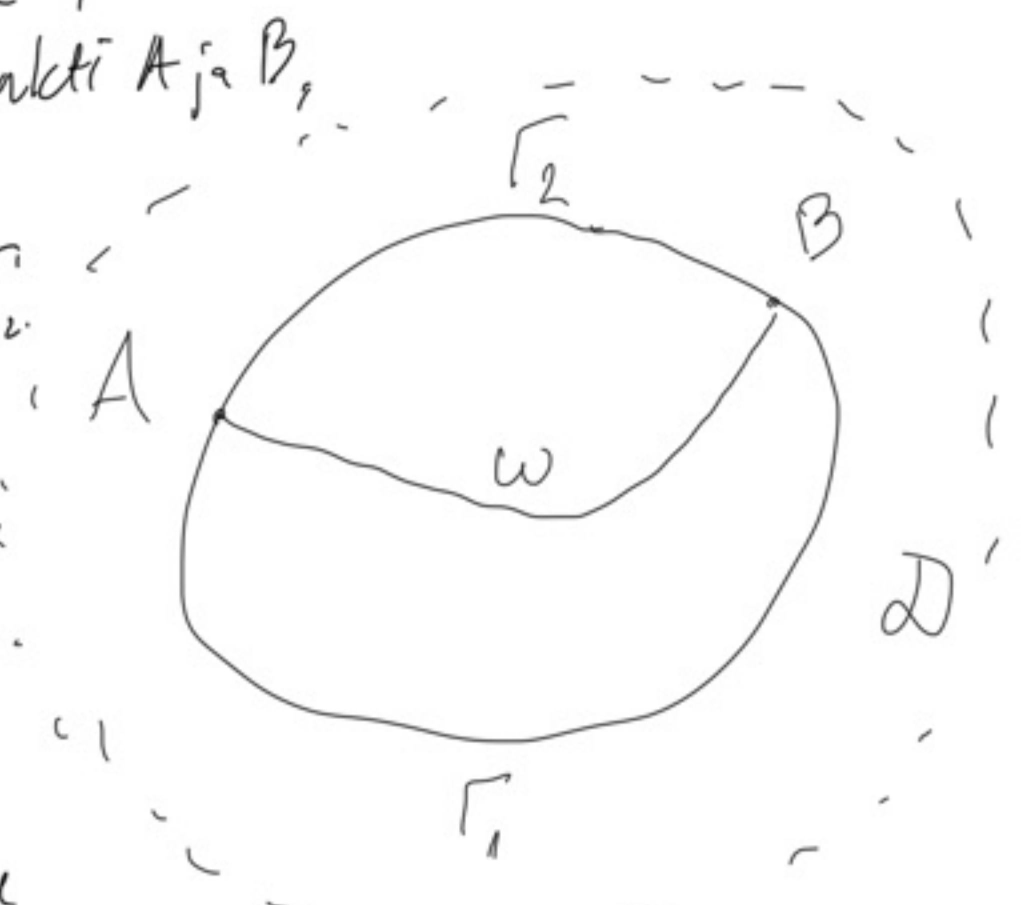
$\mathcal{D}$: ühelidus piirkond, Γ : tükiti sile kinnine joon piirkonnas $\mathcal{D}$.

$f : \mathcal{D} \to \mathbb{C}$ analüütiline funktsioon

$$\oint_{\Gamma} f(z)\,dz = 0$$

Paigutame joonele Γ kaks suvalist punkti A ja B, mis jaotavad Γ kaheks jooneks Γ_1 ja Γ_2.

$$\Gamma = \Gamma_1 \uplus \Gamma_2$$



Lemma 1.

Punktide A ja B vahel leidub alati selline lihtne sile joon w, et kehtib võrdus:

$$\oint_{\overrightarrow{\Gamma_1}\,\overleftarrow{w}} f(z)\,dz = \oint_{\overleftarrow{\Gamma_2}\,\overrightarrow{w}} f(z)\,dz \text{ , st jaotame } \oint_{\Gamma} f(z)\,dz \text{ kaheks võrdseks osaks.}$$

$\rightarrow$: vasakult paremale
$\leftarrow$: paremalt vasakule

Tähistame: $S = \oint_{\Gamma} f(z)\,dz$

$$S_1 = \oint_{\overrightarrow{\Gamma_1}\,\overleftarrow{w}} f(z)\,dz, \quad S_2 = \oint_{\overleftarrow{\Gamma_2}\,\overrightarrow{w}} f(z)\,dz$$

Tõestus:

Oletame, et valime lõigu w nii, et $S_1 \neq S_2$. Kuna $f(z)$ on piirkonnas analüütiline st pidev, siis on meil võimalik nihutada joont w lõpmatult väikeste sammudega kuni $S_1 = S_2$. ∎

Järeldus 1:

Kui leidub joon w nii, et $\oint_{\overrightarrow{\Gamma_1}\,\overleftarrow{w}} f(z)\,dz = \oint_{\overleftarrow{\Gamma_2}\,\overrightarrow{w}} f(z)\,dz$

siis: $\oint_{\Gamma} f(z)\,dz = 0$

Lemma 2.

Suvaline sile lihtne joon w punktide A ja B vahel jaotab joone Γ kaheks osaks nii, et $S_1 = S_2$.

$$\oint_{\overrightarrow{\Gamma_1}\,\overleftarrow{w}} f(z)\,dz = \oint_{\overleftarrow{\Gamma_2}\,\overrightarrow{w}} f(z)\,dz.$$

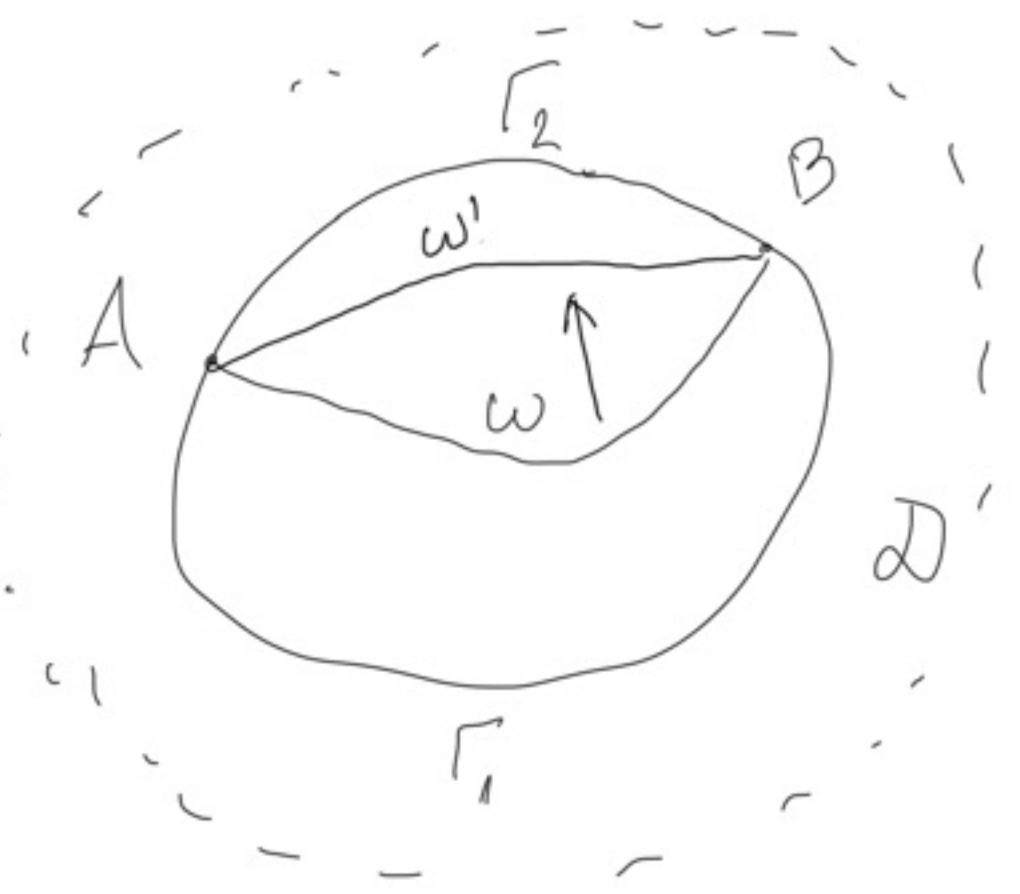
Tõestus:

Lemma 1 järgi leidub (sile lihtne) joon w, mille korral $S_1 = S_2$. Nihutame joone w uude kohta jättes otspunktid samaks. Tähistame uue joone w'.

Meil tekib uus kinnine lihtne sile joon ww'.

Joonele ww' saame rakendada Lemma 1. Millest järeldub, et

$$\oint_{ww'} f(z)\,dz = 0.$$



Saame: $S_{\Delta w} = \oint_{ww'} f(z)\,dz = 0$

Me teame, et: $S = S_1 + S_2$, kus:

$$S_1 = \oint_{\Gamma_1 \overleftarrow{w}} f(z)\,dz, \quad S_2 = \oint_{\Gamma_2 \overrightarrow{w}} f(z)\,dz$$

Samuti teame, et:

$$S_1' = S_1 + S_{\Delta w} \quad \text{ja} \quad S_2' = S_2 - S_{\Delta w}$$

Samas me nägime, et $S_{\Delta w} = 0$, järelikult:

$$S_1' = S_2'$$ ∎