Kompleksanalüüs ja diferentsiaalvõrrandid YMX0120 TalTech

Diferentsiaalvõrrandite kodutöö

Urmas Pitsi, detsember 2020

Ülesanne 1:

1. Võrrandisüsteem, mille moodustavad m harilikku diferentsiaalvõrrandit. Iga võrrand seob sõltumatut muutujat x, otsitavaid funktsioone ja nende tuletisi. Seejuures peavad otsitavad rahuldama korraga mitut võrrandit.

Üldkuju:

$$F_i\left(x, y_1, y_1', \dots, y_1^{(n_1)}, y_2, y_2', \dots, y_m, y_m', \dots, y_m^{(n_m)}\right) = 0$$

$$(i = 1, 2, \dots, m) \qquad (1)$$

Normaalkuju:

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \\ y_2' = f_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \\ \dots \\ y_n' = f_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \end{cases} \qquad (2)$$

Lahendi olemasolu ja ühesus süsteemi (2) jaoks:

(i) Peano teoreem:

Olgu funktsioonid $f_i(x, y_1, y_2, \dots y_n)$ $(i=1,2,\dots n)$ pidevad muutujate $x, y_1, y_2, \dots, y_n$ piirkonnas D. Siis läbi piirkonna D iga punkti $(x_0, y_1^0, y_2^0, \dots, y_n^0)$ kulgeb vähemalt üks diferentsiaalvõrrandite süsteemi (2) integraalkõver.

(ii) Cauchy teoreem:

Olgu funktsioonid $f_i(x, y_1, y_2, \dots y_n)$ $(i=1,2,\dots,n)$ ja nende osatuletised $\frac{\partial f_i}{\partial y_j}$ $(i, j = 1, 2, \dots, n)$ määratud ja pidevad muutujate $x, y_1, y_2, \dots, y_n$ piirkonnas D.

Siis läbi piirkonna D iga punkti $(x_0, y_1^0, y_2^0, \dots, y_n^0)$ kulgeb parajasti üks diferentsiaalvõrrandite süsteemi (2) integraalkõver.

Ülesanne 2:

(2.) Olgu meil lineaarne diferentsiaalvõrrand:

$$Ly \equiv p_0(x)\, y^{(n)} + p_1(x)\, y^{(n-1)} + \dots + p_n(x)\, y = f(x) \quad (1)$$

ja algtingimused:

$$\sum_{j=0}^{n-1} \left[\alpha_{ij}\, y^{(j)}(a) + \beta_{ij}\, y^{(j)}(b) \right] = \gamma_i \quad (i=1,2,\dots,n) \quad (2)$$

kus α_{ij}, β_{ij}, γ_i on etteantud konstandid,

a ja b on rajapunktid, integreerimislõigu otspunktid.

Rajaülesandeks nimetatakse diferentsiaalvõrrandit (1) koos rajatingimustega (2).

Lemma 9.1. Rajaülesanne on üheselt lahenduv parajasti siis, kui funktsioonidele y_i, $(i=1,2,\dots,n)$ rakendatud rajaoperaatorite U_j, $(j=1,2,\dots,n)$ väärtustest koostatud maatriksi determinant $D = 0$.

$$D = \begin{vmatrix} U_1(y_1) & U_1(y_2) & \dots & U_1(y_n) \\ U_2(y_1) & U_2(y_2) & \dots & U_2(y_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ U_n(y_1) & U_n(y_2) & \dots & U_n(y_n) \end{vmatrix}$$

üheselt lahenduv parajasti siis, kui süsteemi determinant pole null.

NÄIDE: $f(x)$ on pidev ω-perioodiline funktsioon.

$$y'' + a^2 y = f(x) \quad , \quad y(0) - y(\omega) = 0 \,, \; y'(0) - y'(\omega) = 0$$

meil on lõik $[a, b] = [0, \omega]$

ÄÜ. on üheselt lahenduv, kui homogeensel ülesandel:

$$y'' + a^2 y = 0 \quad , \quad y(0) - y(\omega) = 0 \,, \; y'(0) - y'(\omega) = 0$$

on vaid triviaalne lahend.

Ehk kui võrrandil $y'' + a^2 y = f(x)$ on parajasti üks ω-perioodiline lahend ja kui võrrandil $y'' + a^2 y = 0$ pole mittetriviaalseid ω-perioodilisi lahendeid.

Kui $a = 2k\pi/\omega$, kus k on mingi täisarv, siis sõltuvalt ω-perioodilisest vabaliikmest $f(x)$, antud võrrandil $y'' + a^2 y = f(x)$ ω-perioodiline lahend kas puudub või on selliseid lahendeid lõpmata palju.

Ülesanne 3:

3. KODUTÖÖ ÜL. 3

$$\begin{cases} y' = z + \alpha \\ z' = y - \beta \end{cases} \qquad \alpha = \beta = 5$$

$$\begin{cases} y' = z + 5 \\ z' = y - 5 \end{cases}$$

ilmutame z ja z' suhtes

$$\begin{cases} z = y' - 5 \\ z' = y - 5 \end{cases}$$

$$y = y_h + y_*$$

1. Lahendame homogeense võrrandi.

$$y_h \Rightarrow y'' - y = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 1 = 0, \quad \lambda = \pm 1$$

$$y_h = C_1 \cdot e^{x} + C_2 e^{-x}$$

2. Leiame erilahendi y_*

$$y_h' = C_1 e^{x} + C_1' e^{x} - C_2 e^{-x} + C_2' e^{-x}$$

$$y_* = A, \quad y_*' = 0, \quad y_*'' = 0 \Rightarrow 0 - A = -5$$

$$A = 5$$

$$y_* = 5$$

3. $y = C_1 \cdot e^{x} + C_2 e^{-x} + 5 \Rightarrow y' = C_1 e^{x} - C_2 e^{-x}$

$$z = y' - 5$$

$$z = C_1 e^{x} - C_2 e^{-x} - 5$$

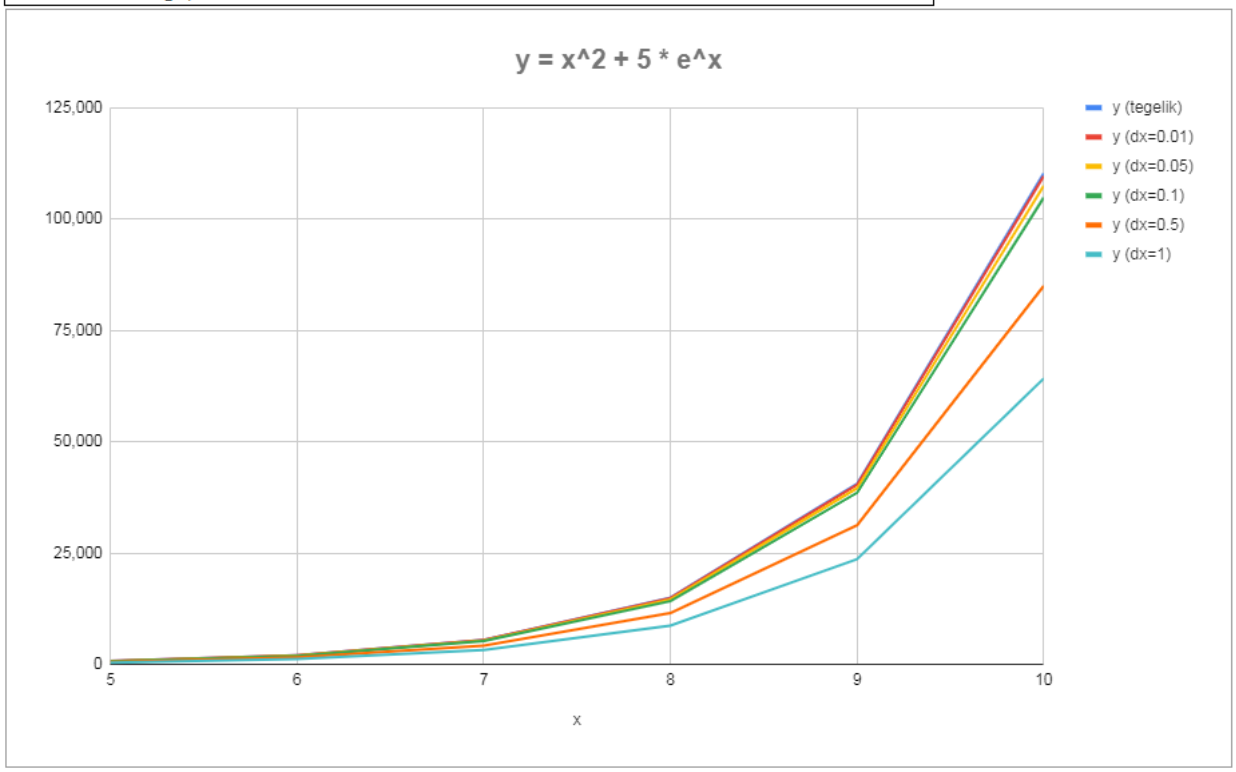
$$\boxed{\begin{aligned} y &= C_1 \cdot e^{x} + C_2 e^{-x} + 5 \\ z &= C_1 e^{x} - C_2 e^{-x} - 5 \end{aligned}}$$

VASTUS

Ülesanne 4:

Numbriline lahendus Google sheetsis:

x	y (tegelik)	y (dx=0.01)	y (dx=0.05)	y (dx=0.1)	y (dx=0.5)	y (dx=1)
0	5	5	5	5	5	5
1	15	15	14	14	12	10
2	41	41	40	39	33	26
3	109	109	107	104	86	67
4	289	288	282	275	226	173
5	767	763	749	730	596	454
6	2,053	2,043	2,003	1,954	1,589	1,206
7	5,532	5,505	5,396	5,262	4,273	3,235
8	14,969	14,894	14,599	14,235	11,549	8,732
9	40,596	40,394	39,592	38,604	31,305	23,653
10	110,232	109,683	107,502	104,817	84,980	64,187
viga, %		**0.50%**	**2.48%**	**4.91%**	**22.91%**	**41.77%**



4. Leia Cauchy ülesande ligikaudne väärtus kohal $x = \alpha + \beta$, kus $\alpha = \beta = 5$

$x = 10$. Euleri meetodil, vähemalt 10 sammu.

(VAINIKKO, ek. 1b)

$$\begin{cases} y' - 2x = y - x^2 \\ y(0) = \alpha = 5 \end{cases}$$

$$y' - y = 2x - x^2 \qquad \text{I.T.} = e^{\int -1\, dx} = e^{-x}$$

$$\underbrace{y' \cdot e^{-x} - y \cdot e^{-x}}_{(y \cdot e^{-x})'} = \underbrace{e^{-x} \cdot 2x - e^{-x} \cdot x^2}_{(e^{-x} \cdot x^2)'}$$

$$\int \cancel{\frac{d}{dx}} (y \cdot e^{-x})\, \cancel{dx} = \int \cancel{\frac{d}{dx}} (e^{-x} \cdot x^2)\, \cancel{dx}$$

$$y \cdot e^{-x} = e^{-x} \cdot x^2 + C \qquad | : e^{-x}$$

$$y = x^2 + C \cdot e^x$$

$$y(0) = 5 \Rightarrow 5 = 0^2 + C \cdot e^0 \Rightarrow C = 5$$

$$y = x^2 + 5 \cdot e^x \qquad y(0) = 5$$

$$y' = 2x + 5 \cdot e^x \qquad y'(0) = 5$$

EULERI MEETOD: Leiame $y(10) = ?$

$\Delta x = x_1 - x_0 = 1$: $x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = 2, \dots, x_{10} = 10$

$x_1 = x_0 + \Delta x$, $\quad y_1 = y_0 + \Delta x \cdot f(x_0, y_0)$,

$x_2 = x_1 + \Delta x$, $\quad y_2 = y_1 + \Delta x f(x_1, y_1)$,

.....

$x_{10} = x_9 + \Delta x$, $\quad y_{10} = y_9 + \Delta x f(x_9, y_9)$

$x_0 = 0$ $\quad y_1 = 5 + 1 \cdot 5 = 10$

$y_0 = 5$ $\quad y_2 = 10 + 1 \cdot (2 \cdot 1 + 5 \cdot e^1) = 10 + 2 + 5e = 12 + 5e$

$\Delta x = 1$ $\quad y_3 = 12 + 5e + 2 \cdot 2 + 5 \cdot e^2 = 16 + 5e + 5e^2$

$y_4 = 16 + 5e + 5e^2 + 2 \cdot 3 + 5 \cdot e^3 = 22 + 5e + 5e^2 + 5e^3$

$y_5 = 30 + 5 \sum_{i=1}^{4} e^i$

$y_6 = 40 + 5 \sum_{i=1}^{5} e^i$

$y_7 = 52 + 5 \sum_{i=1}^{6} e^i$

$y_8 = 66 + 5 \cdot \sum_{i=1}^{7} e^i$

$y_9 = 82 + 5 \sum_{i=1}^{8} e^i$

$y_{10} = 100 + 5 \sum_{i=1}^{9} e^i = 64186$

Võrdleme algfunktsiooniga e^x:

$y = x^2 + C \cdot e^x \Rightarrow y = 10^2 + 5 \cdot e^{10} = 110232$

viga on üsna suur.