Kodutöö : $a = 8$

① $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{a+2+\cos(x)} = \int_0^{2\pi} \frac{dx}{10+\cos(x)}$

Alustuseks ma otsustasin tuletada ise ilma õpikuta. Teame, et $\ln(z) = ix$.

$x = \frac{\ln(z)}{i} = -i\ln(z)$

Seega:

$\int_0^{2\pi} \frac{dz}{10+\cos(i\ln(z))} = \int_0^{2\pi} \frac{dz}{10+\cosh(\ln(z))} =$

$= \int_0^{2\pi} \frac{dz}{10+\frac{e^{\ln(z)}+e^{-\ln(z)}}{2}} = \int_0^{2\pi} \frac{dz}{10+\frac{z+\frac{1}{z}}{2}} =$

$= \int_0^{2\pi} \frac{2z}{z^2+20z+1}\,dz$, igaks juhuks uurisin õpikust ka ja selgus, et on valem:

$\cos(x) = \frac{z^2+1}{2z}$.

kontrolli tulemuseks sain sama tulemuse.

$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{10+\cos(x)} = \int_0^{2\pi} \frac{2z}{z^2+20z+1}\,dz$

Leiame nimetaja nullkohad. Funktsiooni residid isoleeritud punktides:

$f(z) = \frac{2z}{(z^2+20z+1)iz}$ residid isoleeritud punktides ühikringis $|z| < 1$.

Nullkohad on:

$c_1 = -10+3\sqrt{11}$ ja $c_2 = -10-3\sqrt{11}$.

$|c_1| < 1$, ühikringis

$|c_2| > 1$, väljas pool ühikringi.

Seega:

$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{10+\cos(x)} = 2\pi i \cdot \operatorname{Res}\left(\frac{2}{(z-c_1)(z-c_2)\cdot i}; c_1\right)$

Kõik märgid viitavad sellele, et tegemist on 1. järku poolusega. Rakendame valemit 14.4 õpikust lk. 396:

$\operatorname{Res}(f, c) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z\to c} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left[(z-c)^m \cdot f(z)\right]$

c poolus, järguga m.

$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{10+\cos(x)} = 4\pi \cdot \operatorname{Res}\left(\frac{1}{(z-c_1)(z-c_2)}; c_1\right)$

$\operatorname{Res}(\ldots) = \frac{1}{(2-1)!} \lim_{z\to c_1}\left((z-c_1)^2 \cdot \frac{1}{(z-c_1)(z-c_2)}\right)' =$

$= \lim_{z\to c_1}\left(\frac{(z-c_1)}{(z-c_2)}\right)' = \lim_{z\to c_1}\left(\frac{(c_1-c_2)}{(z-c_2)^2}\right) = \frac{1}{c_1-c_2} =$

$= \frac{1}{-10+3\sqrt{11}+10+3\sqrt{11}} = \underline{\frac{1}{6\sqrt{11}}}$.

Seega:

$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{10+\cos(x)} = 4\pi \cdot \operatorname{Res}\left(\frac{1}{(z-c_1)(z-c_2)}; c_1\right) =$

$= 4\pi \cdot \frac{1}{6\cdot\sqrt{11}} =$

Vastus:

$\underline{\int_0^{2\pi} \frac{dx}{10+\cos(x)} = \frac{2\pi}{3\cdot\sqrt{11}}}$

Kodu töö $\qquad a = 8$

(2.) $$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{(a+2+\sin(x))^2} = \int_0^{2\pi} \frac{dx}{(10+\sin(x))^2}$$

$$z = e^{ix} \Rightarrow \ln(z) = ix \Rightarrow x = \frac{\ln(z)}{i} \Rightarrow x = -i\ln(z)$$

$$\sin(x) = \sin(-i\ln(z)) = -\sin(i\cdot\ln(z)) = -i\sinh(\ln(z))$$

$$= -i \cdot \frac{e^{\ln(z)} - e^{-\ln(z)}}{2} = \frac{-i\left(z - \frac{1}{z}\right)}{2}$$

$$\sin(x) = -\frac{i\left(z-\frac{1}{z}\right)}{2}$$

$$10 + \sin(x) = 10 - \frac{i\left(z - \frac{1}{z}\right)}{2} =$$

Seega: $$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{(10+\sin(x))^2} = \int_0^{2\pi} \frac{dz}{\left(\frac{-z^2 i + 20z + i}{2z}\right)^2} =$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{4z^2}{(-z^2 i + 20z + i)^2}\,dz$$ Määratud integraali jaoks peame arvutama

funktsiooni: $$\frac{4z^2}{(-z^2 i+20z+i)^2 \cdot iz} = \frac{4z}{(-z^2 i+20z+i)^2 \cdot i}$$

residuid isoleeritud punktides ühikringis $|z| < 1$. Neideks on nimetaja nullkohad.

Antud juhul: $(-z^2 i + 20z + i)^2 = 0 \Rightarrow z_0 = 10 \pm 3\sqrt{11}$

Tähistame vastavalt:

$z_1 = 10 - 3\sqrt{11}$ ⇐ asub ühikringis, $|z|<1$

$z_2 = 10 + 3\sqrt{11}$

Määratud integraal avaldub residi abil:

$$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{(10+\sin(x))^2} = 2\pi i \cdot \mathrm{Res}\left(\frac{4z}{(z-z_1)^2 \cdot (z-z_2)^2 \cdot i}; z_1\right) =$$

$$= 8\pi \cdot \mathrm{Res}\left(\frac{z}{(z-z_1)^2 \cdot (z-z_2)^2}; z_1\right)$$

Punktis z_1 asub 2-järku poolus: valem 14.4, lk 396 õpikus:

$$\mathrm{Res}(\ldots) = \frac{1}{(2-1)!} \lim_{z\to z_1} \left((z-z_1)^2 \frac{z}{(z-z_1)^2 (z-z_2)^2}\right)' =$$

$$= \lim_{z\to z_1} \left(\frac{z}{(z-z_2)^2}\right)' = \lim_{z\to z_1} \frac{(z-z_2)^2 - (z\cdot 2\cdot(z-z_2))}{(z-z_2)^4} =$$

$$= \lim_{z\to z_1} -\frac{z+z_2}{(z-z_2)^3} = -\frac{z_1+z_2}{(z_1-z_2)^3} =$$

$$= -\frac{10-3\sqrt{11}+10+3\sqrt{11}}{(10-3\sqrt{11}-10-3\sqrt{11})^3} = \frac{5}{594\cdot\sqrt{11}}$$

Saame:
$$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{(10+\sin(x))^2} = 8\pi \cdot \mathrm{Res}\left(\frac{z}{(z-z_1)^2 \cdot (z-z_2)^2}; z_1\right) =$$

$$= \frac{8\pi \cdot 5}{594\cdot\sqrt{11}} = \frac{20\pi}{297\sqrt{11}}$$

VASTUS:

$$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{(10+\sin(x))^2} = \frac{20\pi}{297\cdot\sqrt{11}}$$

KONTROLL:

WOLFRAM: EI LEIA VASTUST!
'Computation time limit exceeded'

PARI/GP: $0.063786250848 \approx \frac{20\pi}{297\cdot\sqrt{11}}$

WOLFRAMI järgi:

$$\frac{20\pi}{297\sqrt{11}} = 0.063786250848$$

Kodutöö ülesanne 3. Urmas Pitsi

23. OKT. 2020

$$\int_0^{2\pi} e^{\cos(x)}\,dx =$$

$$= \int_0^{2\pi} e^{z/2 + \frac{1}{2z}} =$$

$$= \int_0^{2\pi} e^{z/2} \cdot e^{1/2z}$$

$$\cos(x) = \frac{z^2+1}{2z} = \frac{z}{2} + \frac{1}{2z}$$

$$e^z \overset{|z|<\infty}{=\!=} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{k!}$$

* Arvutame määratud integraali residi kaudu. Uuritaval funktsioonil on isearasus punktis $z = 0$. Vaatleme piirkonda ühikringis $|z| < 1$.
* Residi leidmiseks arendame mõlemad eksponent funktsioonid ritta.
* Leiame saadud ridade korrutise.
* Vaatleme saadud korrutise Laurenti reaks arenduse kordajat kohal C_{-1}.

Vaatame e^z reaks arendust:

$$e^{z/2} \overset{|z|<+\infty}{=\!=} 1 + \frac{z}{2} + \frac{z^2}{2^2 \cdot 2!} + \frac{z^3}{2^3 \cdot 3!} + \frac{z^4}{2^4 \cdot 4!} + \dots$$

$$e^{1/2z} \overset{|z|<+\infty}{=\!=} 1 + \frac{1}{2z} + \frac{1}{(2z)^2 \cdot 2!} + \frac{1}{(2z)^3 \cdot 3!} + \frac{1}{(2z)^4 \cdot 4!} + \dots$$

Kuna meid huvitab korrutises ainult liige C_{-1}, st need rea liikmed millel on z astendaja $= -1$, siis näeme, et meid huvitavad liikmed saame, kui rea $e^{z/2}$ k-nda liikme korrutame rea $e^{1/2z}$ (k+1)-nda liikmega.

Tulemuseks tekib meil rida:

$$e^{z/2} \cdot e^{1/2z} = \frac{1}{z} \cdot \underbrace{\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{2k+1} \cdot k!\,(k+1)!}}_{C_{-1}}$$

$$\operatorname{Res}\left(e^{z/2} \cdot e^{\frac{1}{2z}}; 0\right) = C_{-1}$$

$$\int_0^{2\pi} e^{\cos(x)}\,dx = 2\pi i \cdot \operatorname{Res}\left(e^{z/2} \cdot e^{1/2z}; 0\right) = 2\pi i \cdot C_{-1}$$

$$\int_0^{2\pi} e^{\cos(x)}\,dx = 2\pi i \cdot \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{2k+1} \cdot k!\,(k+1)!}$$