

Elektrotehnički fakultet Univerziteta u Beogradu



Decimation filters with minimum number of additions per output sample

Projekat iz Obrade signala 2

Uroš Savurdić 9/2017
Maja Milenković 307/2016

Prof. dr Jelena Čertić
Doc. dr Miloš Bjelić

1. Sadržaj

1. Sadržaj	1
2. Uvod	2
3. Decimacija	3
4. CIC filter	3
5. Kaskada CIC filtera	4
6. Uopšteni oblik kaskade CIC filtera	5
7. Postavka problema	6
8. Predložena metoda	7
9. Zaključak	8
10. Literatura	9

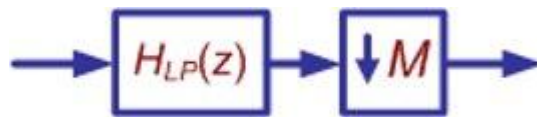
2. Uvod

U ovom radu je predložen način za projektovanje filtara za decimaciju uz minimalan broj sabiranja po izlaznom odbirku (*Additions Per Output Sample - APOS*). Prikazana je problematika dizajniranja višestepenih filtara za decimaciju uz ostvarivanje minimalnog broja *APOS*-a. Razmatrani su višestepeni filtri sačinjeni od CIC (*Cascaded Integrator-Comb*) filtara, a da bi se ostvario minimalan broj sabiranja po izlaznom odbirku, filtarske strukture koje sadrže maksimalan broj stage-eva (koje dozvoljava određeni faktor decimacije) su optimizovane.

3. Decimacija

Decimacija je postupak kojim se frekvencija odabiranja smanjuje M puta. Kako bismo izbegli preklapanje u spektru, ulazni signal se filtrira filtrom propusnikom niskih učestanosti, granične frekvencije:

$$\omega_{LP} \leq \frac{\pi}{M}$$



Slika 1. Postupak decimacije

4. CIC filter

CIC (*Cascaded Integrator-Comb*) filteri predstavljaju efikasnu filtarsku strukturu za decimaciju i interpolaciju (postupak u kojem se frekvencija odabiranja povećava L puta). Funkcija prenosa CIC filtra je data formulom:

$$H_{CIC}(z) = \left(\frac{1}{R} \cdot \frac{1 - z^{-R}}{1 - z^{-1}} \right)^K$$

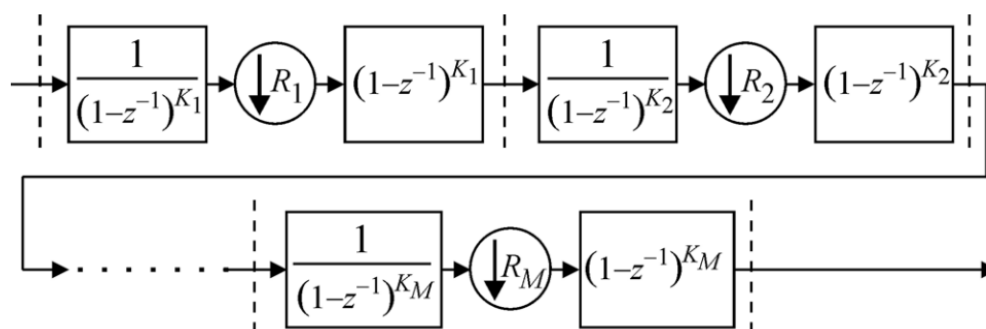
Formula (1)

U ovoj formuli, R predstavlja faktor decimacije, a K red filtra. Njegova uobičajena implementacija podrazumeva K integratora, jedan pododabirač i K comb-ova. Na računsku kompleksnost CIC filtra najviše utiču integratori - potreban je veliki broj sabiranja da bi se dobio jedan izlazni odabirak. Jasno je da se ovaj broj može smanjiti ukoliko se smanji uticaj upravo tih komponenti koje i utiču na krajnji veliki broj sabiranja. Takav pristup je prikazan pri korišćenju kaskade CIC filtara.

5. Kaskada CIC filtara

Kaskadni CIC filtri se često koriste u sistemima za decimaciju i obradu signala koja zahteva visoke brzine. Međutim, oni imaju širok spektar šuma u opsegu visokih učestanosti, što zahteva dodatne kompenzacione filtre da bi se poboljšao kvalitet obrade. Iako korišćenje kompenzacionih filtara povećava ukupan broj APOS-a, broj APOS-a u ovakvom filtru je dovoljno nizak da svakako osigura visoku efikasnost ovako projektovanog filtra.

Naredna slika ilustruje slučaj CIC filtara u kaskadi:



Slika 2. Višestepeni CIC filter koji sadrži M filtara u kaskadi reda K_m , i faktora decimacije R_m , $m=1,2,\dots,M$

Na **slici 2** se može videti kaskadna veza M CIC filtara. Svaki od njih je opisan sa vrednostima R_m (faktor decimacije) i K_m (red filtra), gde je $m=1,2,\dots,M$ i važi

$$R = \prod_{m=1}^M R_m, \text{ gde su } R_m \text{ delioci broja } R.$$

Funkcija prenosa ovakvog sistema je:

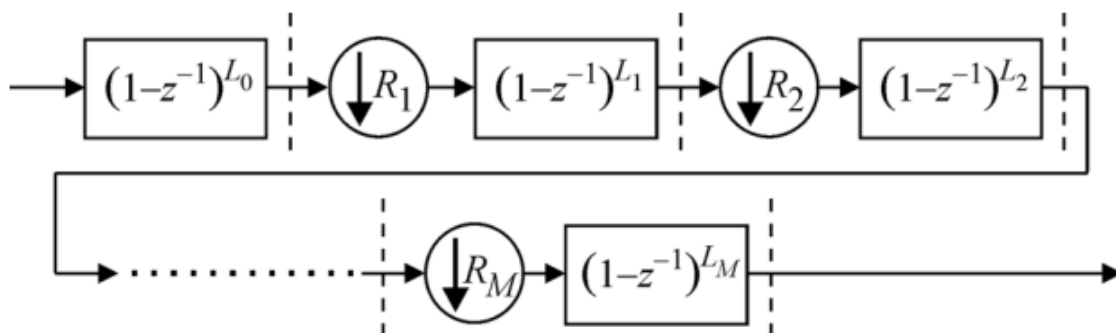
$$H(z) = \prod_{m=1}^M \left(\frac{1}{R_m} \frac{1 - z^{-(R_1 \cdot R_2 \cdot \dots \cdot R_m)}}{1 - z^{-(R_0 \cdot R_1 \cdot \dots \cdot R_{m-1})}} \right)^{K_m}$$

Formula (2)

Očigledno je da ovakav sistem predstavlja veliku kompleksnost za projektovanje i da uzima dosta resursa zbog velikog broja operacija.

6. Uopšteni oblik kaskade CIC filtara

U kaskadi, integrator i *comb* (češljasti filter) koji vrše obradu na istoj frekvenciji odabiranja se potiru. Na slici 2, integratori i *comb*-ovi koji se međusobno potiru se nalaze između pododabirača. Nakon njihovog „skraćivanja“ dobijamo strukturu kao na slici 3.



Slika 3. Višestepeni CIC filter prikazan u uopštenijem obliku

Funkcija prenosa u k-tom CIC filteru je oblika:

$$H_k(z) = (1 - z^{-1})^{L_k}, \quad k = 0, 1, \dots, M \quad (3)$$

gde važi:

$$L_k = \begin{cases} -K_1 & \text{for } k = 0 \\ K_k - K_{k+1} & \text{for } 0 < k < M \\ K_M & \text{for } k = M \end{cases} \quad (4)$$

Očigledno je da filteraska struktura sa slike 3 obezbeđuje manji broj sabiranja po izlaznom odbirku od filteraske strukture sa slike 2. Ovaj broj se dobija formulom:

$$A(K_1, \dots, K_M, R_1, \dots, R_M) = K_1 R + \sum_{m=1}^{M-1} |K_m - K_{m+1}| \prod_{k=m+1}^M R_k + K_M \quad (5)$$

Jasno je, iz ove formule, da broj APOS-a zavisi i od rasporeda pododabirača, integratora i *comb*-ova. Stoga, postavlja se pitanje koji tačno raspored za zadati

faktor decimacije R i željeni γ_d bi obezbedio najmanji broj APOS-a. Očekivani mali broj APOS-a se dobija ukoliko se što veći broj pododabirača postavi što ranije u kaskadi. Da bi se ovo obezbedilo, razmatraju se višestepene filtarske strukture sa maksimalnim brojem pododabirača. Njihovi faktori decimacije su određeni rastavljanjem ukupnog faktora decimacije R na proste činioce.

7. Postavka problema

Uzimajući u obzir vrednosti R i γ_d , problem optimizacije se definiše na sledeći način:

- Potrebno je svesti broj operacija $A(K_1, \dots, K_M, R_1, \dots, R_M)$ na minimum
- Uzimajući u obzir ograničenje:

$$\max_{\omega \in \Omega} |H(e^{j\omega})| \leq \frac{1}{\gamma_d} \quad (6a)$$

- $R = \prod_{m=1}^M R_m \quad (6b)$

gde su R_1, R_2, \dots, R_M prosti delioci broja R

- Red svakog filtra u kaskadi treba da zadovoljava:

$$K_m \leq K_{\max}, \quad m = 1, 2, \dots, M \quad (6c)$$

Gde je K_{\max} maksimalni red filtra. Iako nije u cilju postizanje vrednosti K_{\max} ni u jednom segmentu, ona se postavlja kako limitirala pretragu kroz varijable K_m , $m=1, 2, \dots, M$.

- Uzima se ω_p kao granična širina propusnog opsega, pa važi:
 $(2n\pi/R - \omega_p) \leq \omega \leq (2n\pi/R + \omega_p)$, $n = 1, 2, \dots, (R - 1)/2$, za neparno R , slično je i za parno.

8. Predložena metoda

Da bi se problem svođenja broja operacija $A(K_1, \dots, K_M, R_1, \dots, R_M)$ na minimum rešio globalno, potrebno je posmatrati sve kombinacije odgovarajućih vrednosti K_m i R_m . Da bi se to uradilo, formiraju se liste **P** i **C**. Lista **P** predstavlja sve moguće rasporede faktora decimacije duž kaskade, a lista **C** predstavlja redove pojedinačnih filtara iz kaskade koji zadovoljavaju $K_m \leq K_{\max}$, $m=1,2,\dots,M$. Onda, svaki element iz **P** se kombinuje sa svim elementima iz **C** da bi se formirale strukture čije su funkcije prenosa razmatrane u (6a). Ove strukture sortiramo prema broju APOS-a. Kod bi trebalo da ispituje ove kombinacije, počevši od najjednostavnijih struktura, i da staje kada dođe do strukture koja obezbeđuje minimalan broj APOS-a koja zadovoljava jednačinu iz (6a). Ako više od jedne strukture ima isti minimalni broj APOS-a i zadovoljava (6a), bira se ona sa najvećim folding-band slabljenjem. U narednim redovima prikazan je algoritam koji izvršava ovu metodu.

Algoritam: globalna pretraga filtarske strukture sa minimalnim brojem APOS-a:

1. Zadati vrednosti za R , γ_d , ω_p i K_{\max}
2. Izračunati proste delioce faktora decimacije R , $\mathbf{R}_{\text{prime}} = \{r_1, r_2, \dots, r_M\}$
3. Generisati listu **P** koja sadrži sve različite permutacije elemenata liste $\mathbf{R}_{\text{prime}}$
4. Generisati listu **C** koja sadrži sve M-torke iz $\{0, 1, \dots, K_{\max}\}$
5. Generisati ω_q , $q=1,2,\dots,Q$
6. Inicijalizovati $N_p = \text{lenght}(\mathbf{P})$, $N_c = \text{lenght}(\mathbf{C})$, $\delta_{\text{opt}} = 1/\gamma_d$ i $A_{\text{opt}} = \infty$
7. for $p=1$ to N_p
 Generisati listu APOS-a, **A**, za filtre iz **C** i $\mathbf{P}\{p\}$, korišćenjem formule (5)
 Sortirati liste **C** i liste **A** u rastućem redosledu po **A**
 for $c=1$ to N_c
 if $\mathbf{A}\{c\} > A_{\text{opt}}$, then break, end if
 for filters in $\mathbf{C}\{c\}$ i $\mathbf{P}\{p\}$ izračunati
 $\delta = \max \{|H(\exp(j\omega_1))|, |H(\exp(j\omega_2))|, \dots, |H(\exp(j\omega_Q))|\}$
 if $\delta \leq \delta_{\text{opt}}$ then
 $\delta_{\text{opt}} = \delta$, $A_{\text{opt}} = \mathbf{A}\{c\}$
 $[K_1, K_2, \dots, K_M] = \mathbf{C}\{c\}$, $[R_1, R_2, \dots, R_M] = \mathbf{P}\{p\}$
 end if
 end for
end for
8. Izračunati L_k , $k=0,1,\dots,M$, iz K_m , $m=1,2,\dots,M$, koristeći (4)
9. Vratiti vrednosti L_k , $k=0,1,\dots,M$ i R_m , $m=1,2,\dots,M$

9. Zaključak

Opisan je metod za projektovanje filtarskih sistema sa najmanjim brojem sabiranja po izlaznom odbirku. Metoda podržava bilo koju promenu opsega učestanosti, faktora dekimacije ili učestanosti granice propusnog opsega. Optimalne strukture se postižu korišćenjem pododabirača koji su raspoređeni duž sekcije integratora, što omogućava manji broj APOS-a u odnosu na one dobijene klasičnim višestepenim strukturama. Predstavljena metoda je brza, omogućavajući uopšten dizajn računarski efikasnih višestepenih filtara CIC za nekoliko sekundi.

10. Literatura

- A. Dudarin, M. Vučić, G. Molnar: Decimation filters with minimum number of additions per output sample, 2022.
- J. Čertić: Predavanja, Obrada signala 1, 2020.
- J. Čertić: Predavanja, Obrada signala 2, 2020.
- M. Bjelić: Vežbe, Obrada signala 1, 2020.
- <https://www.mathworks.com/help/matlab/>