

УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ

МАСТЕР РАД

---

Потпуно дигитални RF предајник  
заснован на паралелним и  
апроксимативним сигма-делта  
модулаторима

---

Аутор:

Александар ВУКОВИЋ

Професор:

доц. др Душан ГРУЛИЋ

*Рад је приложен ради добијања звања  
мастери инж. електротехнике и рачунарства*



Електротехнички факултет  
Катедра за Електронику

27. август 2021

# Сажетак

Потпуно дигитални предајник који користи сигма делта модулацију за формирање сигнала на RF учестаности предајника не садржи аналогне блокове који имају улогу мешања сигнала или дигитално/аналогну конверзију. Тиме највећи проблем настаје у омогућавању да сигма-делта модулација ради на високим учестаностима и не деградира реконструисани сигнал. Рад је подељен на четири поглавља и закључак. У првом поглављу - уводу сажето је описан предмет и циљ овог рада уз осврт на тренутне потребе тржишта и индустрије, као и методологија и начин на који се тај циљ и потребе могу остварити. У другом поглављу дат је предлог архитектуре и опис рада сигма-делта модулатора. У трећем поглављу је приказано коришћење квадратурне и паралелне модулације које омогућавају ниже учестаности одабирања. Четврто поглавље се односи на распоређивање излаза паралелно везаних вишебитних модулатора у јединствени 1-битни сигнал. У закључку је кратак опис на који начин су остварена побољшања код потпуно дигиталне архитектуре која су показана у овом раду, као и могућности за даљи софтверски опис система и хардверску имплементацију.

Кључне речи:

*All-digital transceivers, delta-sigma modulation (DSM)*

# Садржај

<b>Листа скраћеница</b>	<b>iii</b>
<b>1 Увод</b>	<b>1</b>
1.1 Предмет рада . . . . .	1
1.2 Мотивација за рад . . . . .	1
1.3 Примењена методологија . . . . .	2
1.4 Релевантна литература . . . . .	2
<b>2 Сигма-делта модулација</b>	<b>3</b>
2.1 Архитектура предајника . . . . .	3
2.2 Обликовање шума . . . . .	4
2.3 Опис сигма-делта модулатора . . . . .	5
2.3.1 Квалитативни опис сигма-делта модулатора . . . . .	5
2.3.2 Утицај реда модулатора, $OSR$ -а и обликовања шума на $SQNR$ . . . . .	7
2.4 Поређење класичних СД конвертора . . . . .	8
<b>3 Паралелни модулатори и квадратурна модулација</b>	<b>11</b>
3.1 Квадратурна модулација . . . . .	11
3.2 Реконструкција сигнала квадратурне модулације . . . . .	13
3.2.1 Извођење за Q грану . . . . .	15
3.3 Паралелни сигма-делта модулатори . . . . .	16
3.3.1 Временски-унакрсни СД модулатор за $M=2$ . . . . .	18
<b>4 Апроксимативна метода</b>	<b>21</b>
4.1 Реконструкција једнобитног из вишебитног сигнала . . . . .	21
4.2 Look-up табеле . . . . .	22
<b>5 Закључак</b>	<b>27</b>

# Листа скраћеница

<b>АД</b>	Аналогно-дигитални конвертор
<b>ДА</b>	Дигитално-аналогни конвертор
<b>ДСМ</b>	Делта-сигма модулатор
<b>СДМ</b>	Сигма-делта и делта-сигма модулатор се користе као синоними
<b>FPGA</b>	Field Programmable Gate Array
<b>CMOS</b>	Complementary metal-oxide-semiconductor
<b>PSD</b>	Power Spectral Density
$f_s$	sampling frequency, учестаност одабирања
$f_{clk}$	clock frequency, учестаност такта, радна учестаност
<b>LUT</b>	Look-up Table
<b>ENOB</b>	Effective Number of bits
<b>FFT</b>	Fast Fourier Transform
<b>RF</b>	Radio Frequency
<b>MASH</b>	Multi Stage Noise Shaping
<b>IBN</b>	In-Band Noise
<b>DC</b>	Direct Current

# Поглавље 1

## Увод

### 1.1 Предмет рада

Предмет рада је примена сигма-делта модулације на потпуно дигиталне *RF* примопредајнике интегрисане на једном *FPGA - field-programmable gate array* чипу. Употреба потпуно дигиталних примопредајника је управо омогућена сигма-делта модулаторима јер су компатибилни са напредним *CMOS* технологијама. Квалитативни опис од важности код комуникационих система *SNR* на излазу СД модулатора зависи од односа учестаности надодабирања самим тиме и радне учестаности такта, која је ограничена код дигиталних кола и *FPGA*. Овај рад настоји да превазиђе ограничење радне учестаности паралелизацијом и апроксимативном редукцијом броја битова.

### 1.2 Мотивација за рад

Бежична мобилна комуникација се непрестано развија што је подстакнуто растом броја прикључака и корисника као и повећаним захтевима корисника за протоком због употребе мултимедија и видео сервиса. Овај раст се толико брзо дешава да, иако се стандарди праве унапред од стране академских кругова и индустрије предвиђајући ове захтеве, стари стандарди у комуникацији не застаревају, чиме агилност примопредајника добија на значају. Са напредовањем технологије дигитална кола су захвалнија за скалирање и генерално могу бити употребљива за различите односе цене и перформанси израде чипова и праве пут ка још флексибилнијим и агилнијим имплементацијама коришћењем *SDR-a*.

Развојем технологије процеса израде дигиталних кола, и пријемник и предајник за радио учестаности (*RF*) се могу у целости имплементирати коришћењем дигиталних података од *baseband-a* до *RF* степена без коришћења конвенционалног А/Д конвертора, Д/А конвертора или аналогних мешача. То омогућава да излазни сигнал дигиталног дела предајника иде или директно на антену или на појачавач снаге, а улазни сигнал пријемника

### 1.3 Примењена методологија

Методологија се састоји из истраживања примене одавно познатих начина за побољшање квалитативних описа А/Д конвертора заснованих на сигмаделта модулацији за предајничку архитектуру. Ово је омогућено напретком технологије *CMOS* процеса, тако што примопредајничке структуре могу радити на доволно великим учестаностима чиме флексибилност потпуно дигиталних архитектура долази до изражaja и покрива више различитих стандарда. Ови од раније познати начини подразумевају паралелне структуре модулатора и апроксимацију модулатора у отвореној спрези.

За симулацију и поређење прототипа СД модулатора и архитектура потпуно дигиталног предајника користи се програмски језик *python* и пакет *python-deltasigma* од *ggventurini* (преведени *toolbox MATLAB* софтверског алатка).

### 1.4 Релевантна литература

Опис потпуно дигиталних архитектура примопредајника који на излазу дају једнобитни стрим података, њихова примена као и измерени резултати су приказани у раду [1], који је уједно и угледан рад за генерални приступ потпуно дигиталном примопредајнику. Распоређивање квадратурних сигнала као и генерална идеја о примени модулатора је узета из рада [1]. Начин редукције броја битова сигнала који одговара сигма-делта модулацији је угледан на начин из рада [5]. Алтернативна архитектура која садржи каскадно везане модулаторе и кодно мултиплексирање Адамаровом матрицом (Hadamard) са редукцијом броја битова је приказана у раду [6] и представља различити приступ истом проблему.

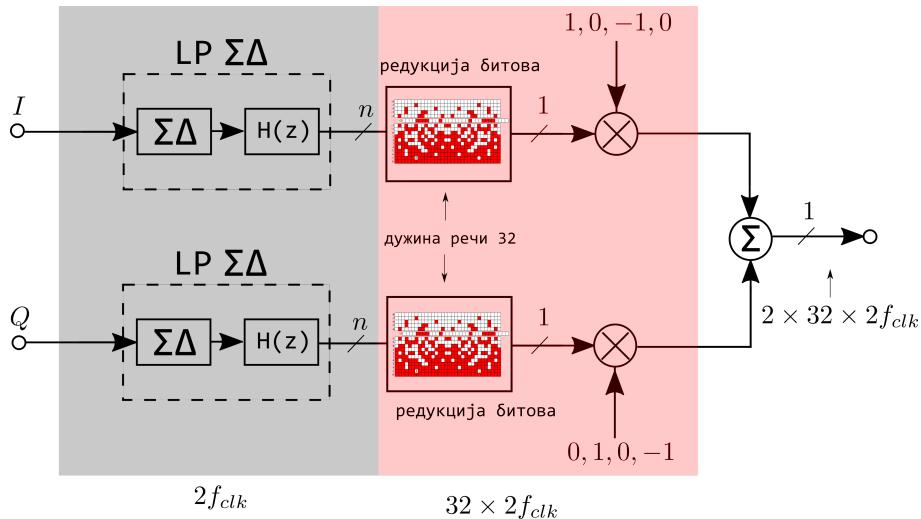
## Поглавље 2

# Сигма-делта модулација

### 2.1 Архитектура предајника

Предлог архитектуре коришћене у потпуно дигиталном предајнику користи '*baseband*' комплексне сигнале у квадратури ( $I$   $Q$  сигнали). Ниједан протокол или стандард није разматран, а дигитална обрада у '*baseband*'-у се може вршити као и у конвенционалним предајничким архитектурама, за било коју специфичну употребу.

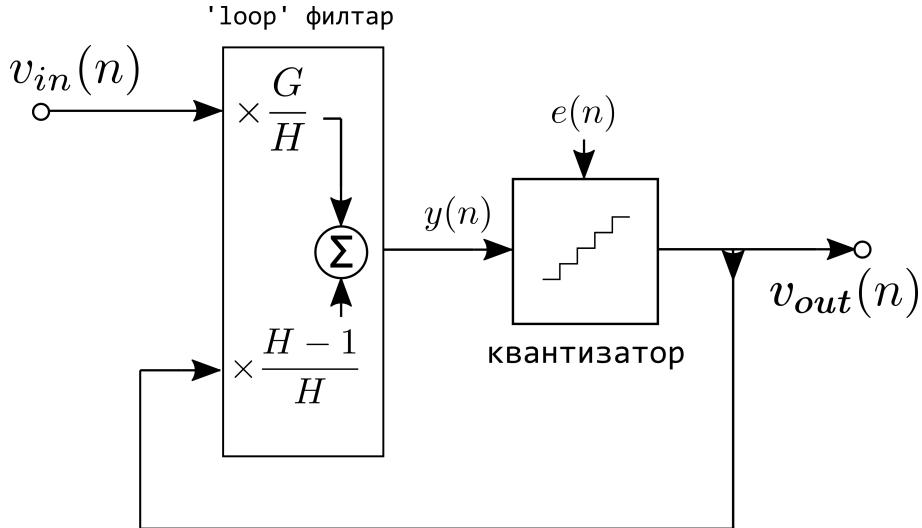
Излаз сигма-делта модулатора не мора бити бинарни сигнал, већ може бити и вишебитни па се апроксимативном методом претвара у једнобитни, и ово се назива сигма-делта модулацијом у отвореној спрези. Коришћењем квадратурне модулације могу се користити нископропусни ('*low-pass*') сигма-делта конвертори, уместо пропусника опсега ('*bandpass*').



Сл. 2.1: Предлог архитектуре предајника

На сл. 2.2 је приказан најједноставнији СДМ са само једним квантизатором и идеалном повратном спрегом која нема кашићење.

$$v_{out} = Gv_{in} + He \quad (2.1)$$



Сл. 2.2: Блок дијаграм СДМ-а са једним квантизатором

Овако дефинисана повратна спрега и филтар могу се потпуно одвојено посматрати и дефинисати преносном карактеристиком сигнала (*STF*) и шума (*NTF*). ДСМ 'loop' филтар дефинише резолуцију и квалитет сигнала предајника изражен као *SNR*.

## 2.2 Обликовање шума

Било који систем са повратном спрегом се понаша као филтар пропусник ниских учестаности. Повратна спрена СДМ-а се може посматрати тако да се примењује само на грешку, која се филтрира. Повратна спрена се представља:

$$y[n] = v_{in}[n] + e[n - 1], \quad (2.2)$$

$y[n]$  је излазни сигнал пре квантизације.

$$e[n] = v_{out}[n] - y[n], \quad (2.3)$$

Могуће је мењати пресечну учестаност филтра мењајем коефицијента  $b$  који множи грешку претходног одбира:

$$y[n] = v_{in}[n] + be[n - 1], \quad (2.4)$$

Филтрирање шума би требало увек да садржи одговарајућу количину дитера унутар самог процеса како би се избегле детерминистичке и корелисане грешке самог сигнала. Ако се не користи дитер онда се обликовање (*shaping*) користи на дисторзији, померајући енергију дисторзије на друге фреквенцијске опсеге, али остаје и даље дисторзија. Додавањем дитера

добија се једначина 2.5. Дитер је обично бели шум који је раван у фреквенцијском домену.

$$y[n] = v_{in}[n] + be[n - 1] + dither, \quad (2.5)$$

Грешка квантизације постаје шум и поступак се назива *noise shaping*.

## 2.3 Опис сигма-делта модулатора

Однос надодабирања (*OSR* [без јединице]) је број којим се означава на колико пута већој учестаности од Никвистове се врши сигма-делта модулација. Конвертори који раде на учестаностима које су много више од Никвистове учесатности се називају *oversampling* конвертори. Потреба за *oversampling* конверторима настаје ради побољшавања *SNR*-а. Када је у питању сигма-делта модулатор првог реда

Ред модулатора (L) је уједно и ред 'loop' филтра. Само модулатори првог и другог реда су безусловно стабилни. Виши ред СДМ-а дозвољава боље потискивање шума за исти *OSR*. Ипак, боље потискивање *in-band* шума повећава шум у суседним опсезима. Код филтра битна је и оптимизација нула преносне карактеристике шума. Ширењем броја нула преко опсега од интереса, шум у корисном опсегу се смањује. Повећањем реда модулатора ублажавају се захтеви за великим односом учестаности надодабирања у односу на Никвистову учестаност (*OSR*), али се ствара сложеније коло које додатно компликује испитивање стабилности система и повећава захтеве за ресурсима на *FPGA*.

Каскадно везани (*MASH*) модулатори користе безусловну стабилност модулатора првог и другог реда. Каскадирањем класичних СД модулатора задржавају се њихове повољне особине што се тиче стабилности, а добијају се модулатори вишег реда.

### 2.3.1 Квалитативни опис сигма-делта модулатора

За правилно разумевање сигма-делта конвертора и њихово поређење неопходно је успоставити различите мере које описују понашање сигма-делта конвертора.

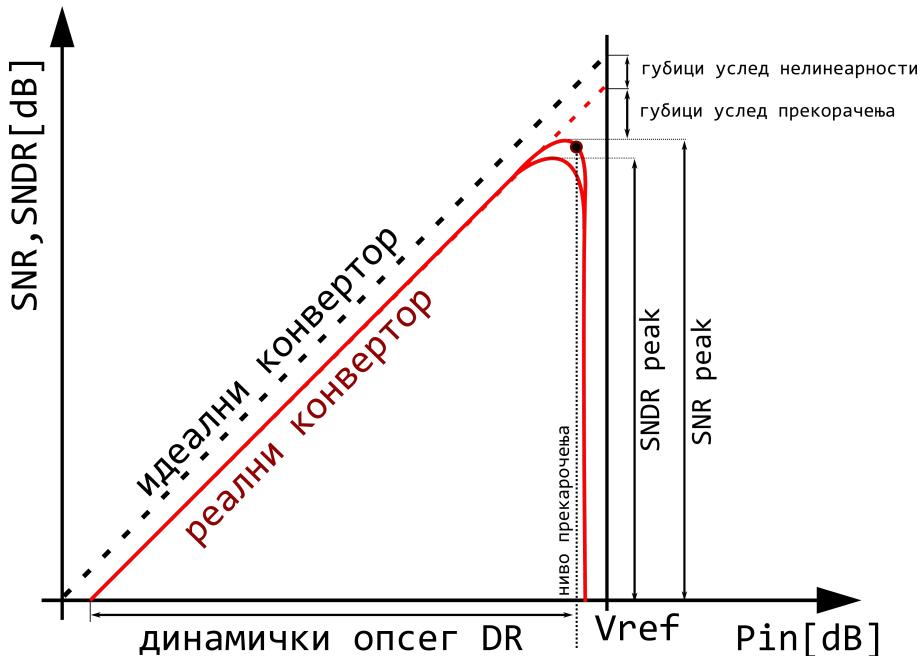
Однос снаге сигнала и шума (*SNR* - *Signal to Noise Ratio*) се изражава за одређену улазну амплитуду. Између различитих улазних амплитуда максимални *SNR* се дефинише као *SNR\_p* - *peak signal - to noise ratio*). Однос сигнала и квантационог шума *SQNR* - *Signal to Quantization Noise Ratio* је квалитативна мера која представља однос између максималне номиналне снаге сигнала и квантационе грешке. Ова мера се односи на системе који садрже квантизаторе. Однос сигнала који садржи и више хармонике и шума се представља помоћу *SNDR* - *Signal to Noise and Distortion Ratio* (у литератури познато и као *SINAD*). Мерење и представљање дисторзије је

битно код великих улазних сигналса, јер је индикатор за који улазни сигнал модулатор улази у прекорачење.

$$SQNR_{[dB]} = 10 \log_{10} \frac{P_{signal}}{P_{noise}} \quad (2.6)$$

Ниво превременог прекорачења (*OL*) је дефинисан као релативна улазна амплитуда када *SNR* опадне од свог максимума за 6 dB.

Динамички опсег (*DR* [dB]) се може апроксимативно израчунати помоћу нивоа улазног сигнала за који квантизатор улази у прекорачење и прага осетљивости.



Сл. 2.3: Очекивани *SNR* уопштеног модела сигма-делта модулатора

На сл. 2.3 може се видети очекивани *SNR* идеалног и реалног конвертора за различите амплитуде улазног сигнала.

Стабилност модулатора се може доказати ако се стања променљивих унутар система има такву особину да све наредне вредности тих стања остају унутар тако дефинисаног сета. Проверавање сета за ову особину позитивне инваријантности је релативно лако, лоцирање сета није. Иако симулације могу дати кредитабилност претпоставци да су сигма-делта модулатори реда вишег од 2 стабилни (поготову са вишебитним излазом), ниједан број симулација то не може доказати, већ се мора показати математички. [7].

Ефективни број битова (*ENOB* - Effective Number of Bits) је корисна мера због популарности коришћења сигма-делта модулатора у АД и ДА конверторима. Једном ефективном биту одговара 6 dB побољшања *SNR*-а.

### 2.3.2 Утицај реда модулатора, $OSR$ -а и обликовања шума на $SQNR$

У систему без обликовања шума  $NTF = 1$ , квантациони шум у опсегу од значаја (*in-band noise*) се израчунава:

$$IBN_{1wosh} = \frac{\Delta^2}{24\pi} \int_{-\frac{\pi}{OSR}}^{\frac{\pi}{OSR}} |1|^2 d\omega = \frac{\Delta^2}{12 \cdot OSR} \quad (2.7)$$

Квантациони шум у опсегу од значаја за преносну карактеристику шума  $NTF = (1 - z^{-1})^L$

$$IBN_L = \frac{\Delta^2}{24\pi} \int_{-\frac{\pi}{OSR}}^{\frac{\pi}{OSR}} |(1 - e^{-j\omega})^L|^2 d\omega = \frac{\Delta^2}{12\pi} \int_0^{\frac{\pi}{OSR}} 2^{2L} \sin^2(\frac{\omega}{2}) d\omega, \quad (2.8)$$

апроксимацијом за доволно велико  $OSR$ .

$$IBN_L \approx \frac{\Delta^2}{12\pi} \int_0^{\frac{\pi}{OSR}} \omega^{2L} d\omega = \frac{\Delta^2}{12\pi(2L+1)} \left(\frac{\pi}{OSR}\right)^{2L+1}. \quad (2.9)$$

Модулатор првог реда се добија за  $L = 1$ .

$$IBN_1 = \frac{\Delta^2}{36\pi} \left(\frac{\pi^3}{OSR^3}\right). \quad (2.10)$$

Претпостављајући бели квантациони шум, на основу тога што шум зависи од одабирања функцијом  $f(OSR^{-3})$  може се добити израз за модулатор првог реда:

$$SQNR_{peak} = \frac{9M^2OSR^3}{2\pi^2}. \quad (2.11)$$

где је  $M$  означава број нивоа ( $M=1$ , једнобитни сигнал).

За модулатор другог реда  $L = 2$

$$IBN_2 = \frac{\Delta^2}{60\pi} \left(\frac{\pi^5}{OSR^5}\right). \quad (2.12)$$

А  $SQNR$  модулатора другог реда:

$$SQNR_{peak} = \frac{15M^2(OSR)^5}{2\pi^4}. \quad (2.13)$$

Формуле за израчунавање  $SQNR_{peak}$  су узете из књиге [9].

Поређењем 2.7 и 2.10 може се видети допринос технике обликовања шума квалитету сигнала. Повећањем учестаности надодабирања два пута модулатора са повратном спрегом  $NTF$ -а добија се 9 dB  $SNR$ , а без ње само 3 dB.

За довољно велико  $OSR$  и једнобитни модулатор важи

$$SQNR_{[dB]} = 3.01 \cdot \log_2(OSR) \cdot (2L + 1) - 9.36L - 2.76 \quad (2.14)$$

## 2.4 Поређење класичних СД конвертора

Један од предлога за побољшање  $SNR$ -а је коришћење вишебитног уместо једнобитног модулатора. Учестаност тест сигнала је једнака трећини Никвистове учестаности. Као  $OSR$  је изабран 32, а ред модулатора је 2.

На основу 2.14 и датог описа модулатора може се израчунати:

$$SQNR_{[dB]} = 3.01 \cdot \log_2(OSR) \cdot (2L + 1) - 9.36L - 2.76 \quad (2.15)$$

$$= 3.01 \cdot \log_2(32) \cdot (2 \cdot 2 + 1) - 9.36 \cdot 2 - 2.76 = 53.77 \text{ dB}. \quad (2.16)$$

А преко формуле 2.13 се добија за  $M = 1$ :

$$SQNR_{peak[dB]} = 10 \log_{10} \frac{15M^2(OSR)^5}{2\pi^4} = 10 \log_{10} \frac{15 \cdot 1^2 \cdot (32)^5}{2\pi^4} = 64.12 \text{ dB} \quad (2.17)$$

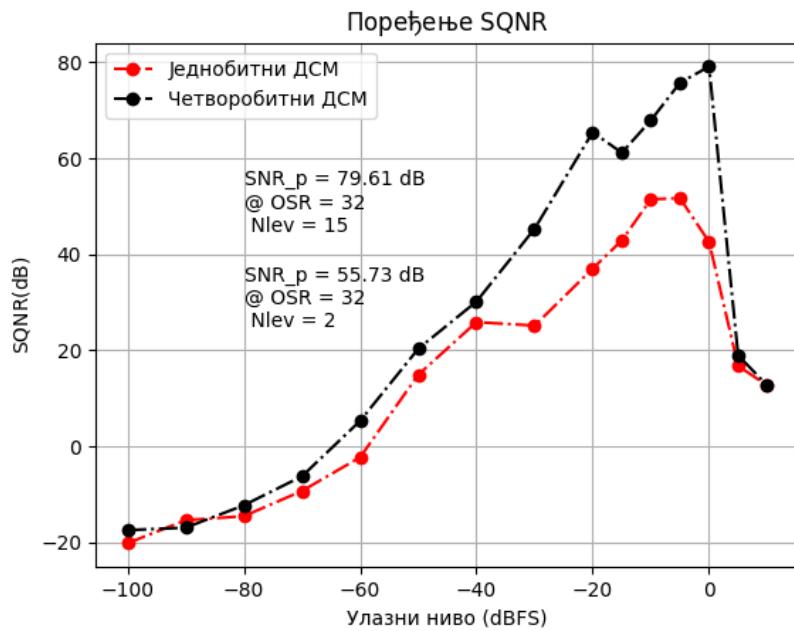
а за  $M = 14$   $SQNR$  је једнак:

$$SQNR_{peak[dB]} = 10 \log_{10} \frac{14 \cdot 15^2 \cdot (32)^5}{2\pi^4} = 87.04 \text{ dB} \quad (2.18)$$

Утицај промене броја битова на излазу модулатора на  $SNR_p$  је приказан на сл. 2.4, као и зависност од амплитуде улазног сигнала.

Сл. 2.5 приказује поређење спектра добијеног вишебитним и једнобитним модулатором, за различит број нивоа 15 и 2.

Прецизност СД конвертора се може побољшати повећањем броја битова квантизатора. Потискивање шума у опсегу од значаја се може појачати повећањем реда нископропусног филтра. Ипак повећањем реда филтра може доћи и до погоршања перформанси, јер проблеми око стабилности приморавају преносне карактеристике шума да буду мање агресивне у потискивању квантизационог шума [10]. То значи да побољшање  $SNR$ -а које се



Сл. 2.4: Поређење  $SQNR$ -а четворобитног и једнобитног модулатора



Сл. 2.5: Поређење спектра

дебије повећањем реда филтра се може изгубити померањем нула преносне карактеристике неопходном за критеријум стабилности.

Број нивоа квантизатора је представљен:

$$N_{bits} = \log_2(N_{levels}), \quad (2.19)$$

и утицај броја битова на шум, се може искористити из описа за АД конверзију.

$$SNR = 6.02 \times N_{bits} + 1.76. \quad (2.20)$$

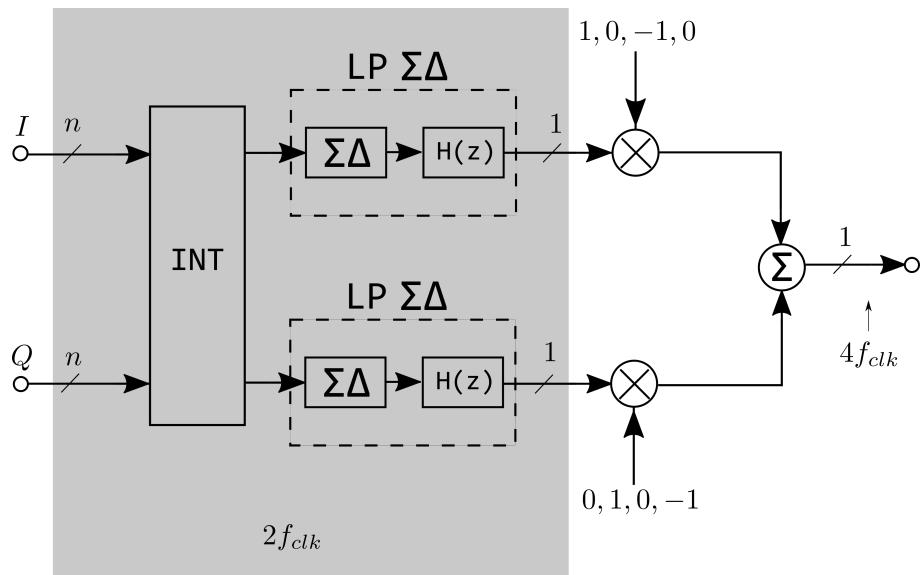
Апроксимативни аналитички израз за шум унутар опсега у овом раду се изводи из претпоставке да квантизатор има густину снаге од трећине опсега од интереса, што значи да је и израчунавање  $SNR$ -а такође апроксимативно, али је довољно добро за поређење.

## Поглавље 3

# Паралелни модулатори и квадратурна модулација

### 3.1 Квадратурна модулација

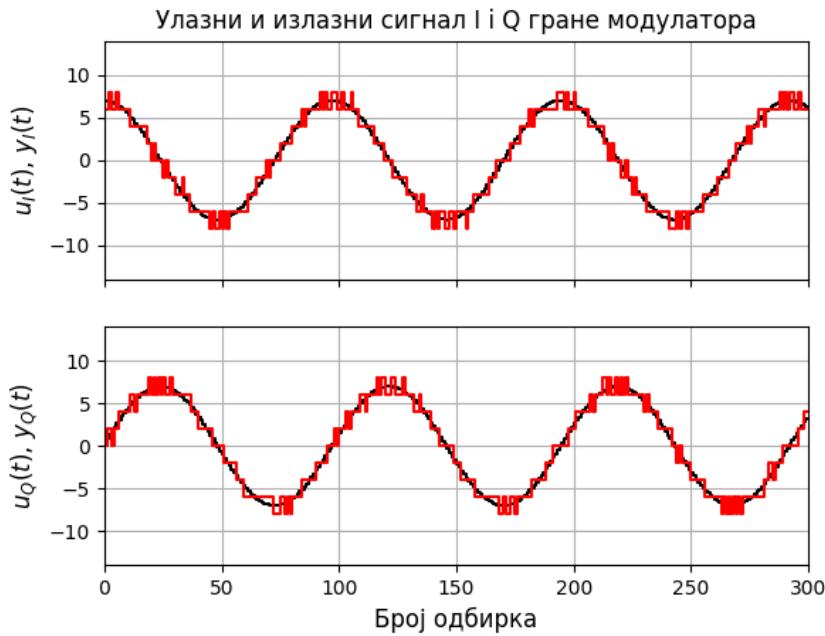
Квадратурна модулација се састоји из примене истих сигма-делта модулатора на  $I$  и  $Q$  грану, а потом временског распоређивања тих  $I$  и  $Q$  као и њихових комплемената у само једну излазну грану. Ово распоређивање апконвертује сигнал на РФ учестаности.



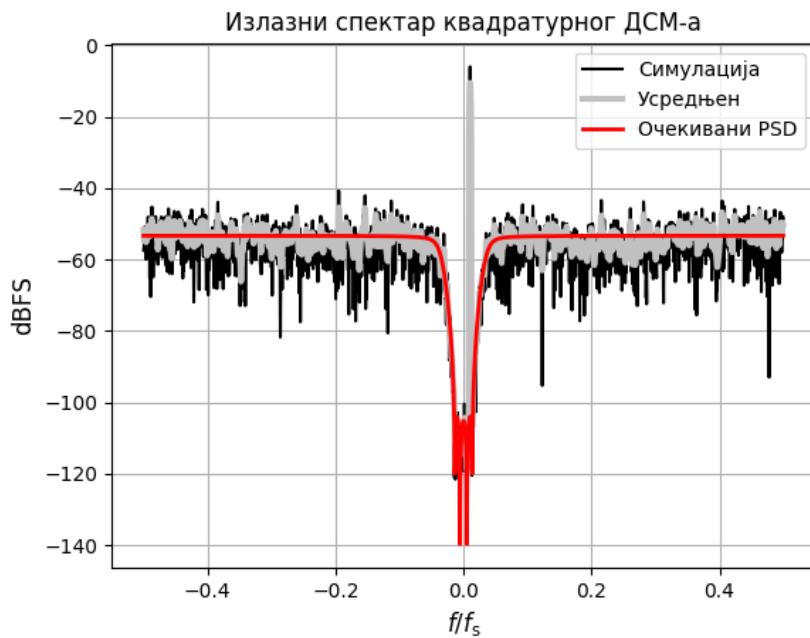
Сл. 3.1: Блок дијаграм квадратурног модулатора

Основни прототип квадратурне модулације која користи бинарне модулаторе (једнобитне) је приказан на сл. 3.1. Овај блок дијаграм садржи још и интерполяционски филтар које смањује број битова и временско мултиплексирање и распоређивање података које је приказано помоћу два множача и сабирача.

На сл. 3.2 приказани су улазни и излазни сигнали  $I$  и  $Q$  грана квадратурног модулатора које користи сигма-делта конверторе. Из претходне симулације у времену, спектар је израчунат директном  $FFT$ -ом над сигналом у времену који је прошао кроз Ханову прозорску функцију. Симулирани спектар

Сл. 3.2: Улазни и излазни сигнал  $I/Q$  модулатора

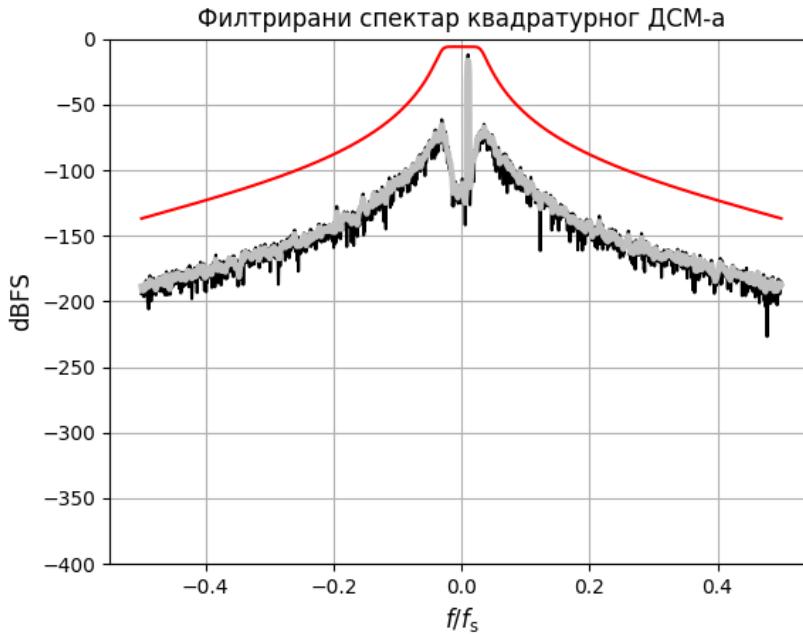
се пореди са очекиваним који је добијен евалуирајући преносну карактеристику у фреквенцијском домену.



Сл. 3.3: Спектар излазног квадратурног сигнала

На сл. 3.3 је приказан спектар и за позитивне и за негативне учестаности наспрам очекиваног  $PSD$  (спектра густине снаге). Спектар кад би прошао

кроз нископропусно филтрирање аналогним Бутервортом 5-ог реда би изгледао као на сл. 3.4. Апроксимативна метода распоређивања битова у времену је примењена на нефилтрираном сигналу, јер имплементација неког оваквог филтра није доволно разматрана као хардверска имплементација.



Сл. 3.4: Спектар излазног квадратурног сигнала

Распоређивање квадратурних сигнала се извршава помоћу матрице 3.1, где индекси означавају који је то одбирац комплексног сигнала по реду. У матрицама су распоређена само прва 2 одбираца, остали одбираци следе истим редоследом.

$$word_1 = [I_0 \ Q_0 \ \overline{I}_0 \ \overline{Q}_0 \ I_1 \ Q_1 \ \overline{I}_1 \ \overline{Q}_1], \quad (3.1)$$

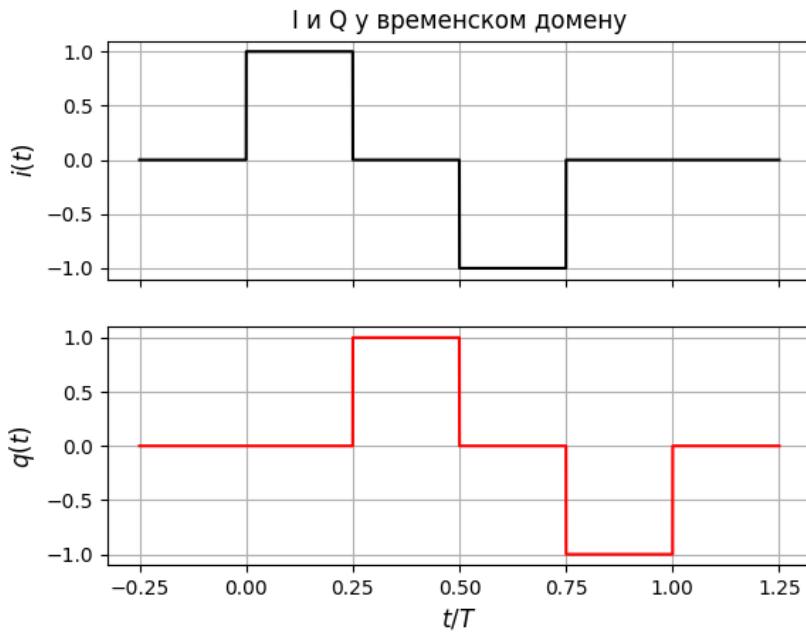
Могуће је користити и матрицу из једначине 3.2 за распоређивање које одговара *RFRZ* реконструкцији, али резултати нису приказани и разматрани.

$$word_2 = [I_0 \ \overline{I}_0 \ Q_0 \ \overline{Q}_0 \ I_1 \ \overline{I}_1 \ Q_1 \ \overline{Q}_1]. \quad (3.2)$$

## 3.2 Реконструкција сигнала квадратурне модулације

Коло за реконструкцију сигнала је генерисано помоћу 3.1 чиме је добијена временска представа кола (приказана на сл. 3.5) на основу које се реконструише сигнал.

$$g_{IMOD}(t) = h(t) - h(t - T/4) - h(t - T/2) + h(t - 3T/4) \quad (3.3)$$



Сл. 3.5: Квадратурна модулација приказана у временском домену

$$G_{IMOD}(s) = \frac{1 - e^{-sT/4} - e^{-sT/2} + e^{-s3T/4}}{sT} \quad (3.4)$$

Како би се поједноставио именилац нека је  $e^{-sT/4} = x$ ,

$$x^0 - x^1 - x^2 + x^3 = (1 - x^2)(1 - x) = (1 + x)(1 - x)^2 \quad (3.5)$$

тако се добија да је

$$G_{IMOD}(s) = \frac{(1 - e^{-sT/4})^2(1 + e^{-sT/4})}{sT} \quad (3.6)$$

Заменом  $s = j\omega = 2j\pi f$

$$G_{IMOD}(j\omega) = \frac{(1 - e^{-2j\pi fT/4})^2(1 + e^{-2j\pi fT/4})}{2j\pi fT} \quad (3.7)$$

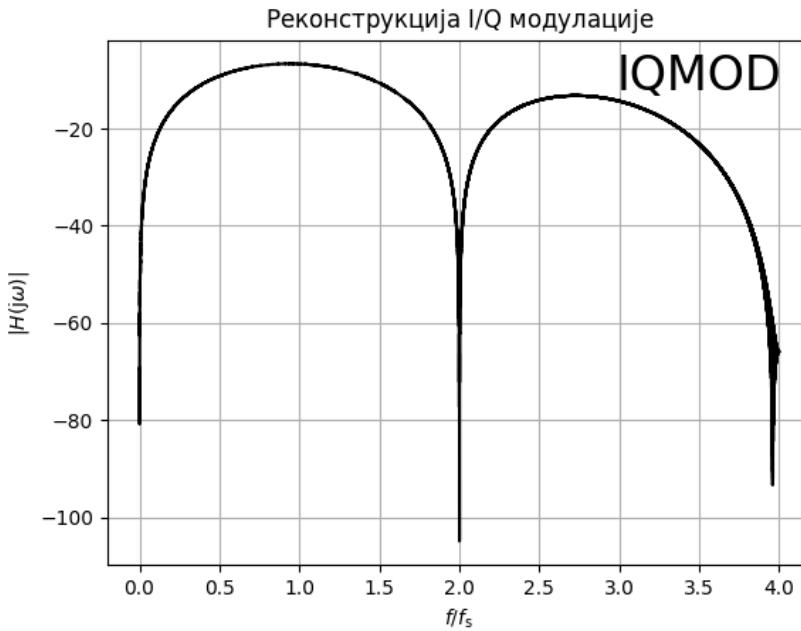
$$G_{IMOD}(j\omega) = \frac{(1 - e^{-2j\pi fT/4})^2(1 + e^{-2j\pi fT/4})}{2j\pi fT} \quad (3.8)$$

$$= -\frac{j}{2} \frac{(\sin(\pi fT/4))^2}{\pi fT/4} \cos(\pi fT/4) e^{-3j\pi fT/4} \quad (3.9)$$

$$= -\frac{1}{4} \operatorname{sinc}(fT/4) \sin(\pi fT/2) e^{-j(3\pi fT/4 - \pi/2)} \quad (3.10)$$

Апсолутна вредност амплитуде преносне карактеристике нормализованог кола за реконструкцију приказана је на сл. 3.5. Нормализовани запис за I грану:

$$G_{IMODnorm}(j\omega) = \text{sinc}(fT/4)\sin(\pi fT/2)e^{-j(3\pi fT/4 - \pi/2)} \quad (3.11)$$



Сл. 3.6: Коло за реконструкцију распоређених квадратурних сигнала

### 3.2.1 Извођење за Q грану

Извођење за Q грану:

$$g_{QMOD}(t) = h(t - T/4) - h(t - T/2) - h(t - 3T/4) + h(t - T) \quad (3.12)$$

је слично извођењу за I грану.

$$G_{QMOD}(s) = \frac{e^{-sT/4} - e^{-sT/2} - e^{-s3T/4} + e^{-sT}}{sT} \quad (3.13)$$

$$= e^{-sT/4} \frac{(1 - e^{-sT/4})(1 + e^{-sT/4})}{sT} \quad (3.14)$$

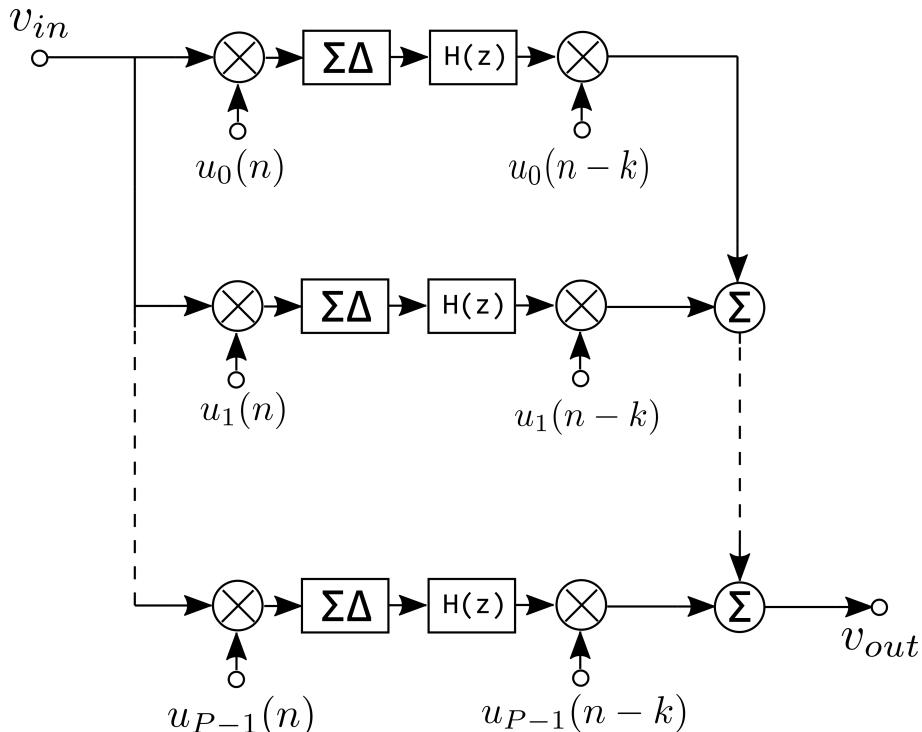
$$= e^{-sT/4} G_{IMOD}(s) \quad (3.15)$$

и коришћењем претходног извођења 3.10 добија се нормализован запис са истом амплитудском карактеристиком фазно померен за  $\pi/2$ :

$$G_{QMODnorm}(j\omega) = \text{sinc}(fT/4)\sin(\pi fT/2)e^{-j(3\pi fT/4 - \pi/2)}e^{-j(\pi/2)fT} \quad (3.16)$$

### 3.3 Паралелни сигма-делта модулатори

Паралелни сигма-делта модулатори се сastoјe од  $P$  конвенционалних (класичних) модулатора. Основна предност паралелних модулатора је да могу да раде на  $P$  пута већој учестаности одабирања од појединачних модулатора. Концептуални блок дијаграм паралелних ДСМ је приказан на сл. 3.7.



Сл. 3.7: Концептуални блок дијаграм паралелног сигма-делта модулатора

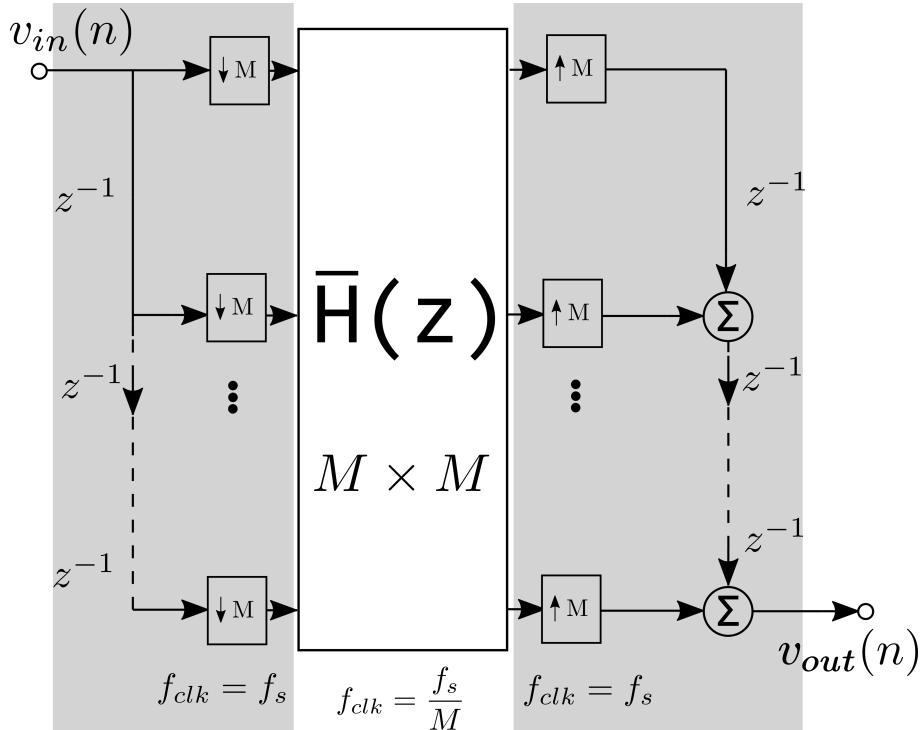
Постоје три основна приступа мултиплексирању излазних сигнала модулатора:

- Мултиплексирање у фреквенцијском домену,
- Мултиплексирање у временском домену,
- Кодно мултиплексирање.

Мултиплексирање у фреквенцијском домену подразумева коришћење сигма-делта модулатора различитих пропусних опсега како би већи опсег могао бити подељен и покрiven.

Мултиплексирање у временском домену приказано на сл. 3.8 на улазу десимацијом смањује учестаност тако да се секвенца паралелно користи у

паралелном СД модулатору, смањујући учестаност такта самог модулатора. На излазу се поново подиже учестаност експанзијом (интерполацијом). Овим се омогућава да паралелни систем ради на  $M$  пута мањој учестаности него што би било потребно за радну учестаност конвенционалног система (где је  $M$  број паралелних СДМ-ова).



Сл. 3.8: Мултплексирање у временском домену

Преносна функција  $H_{M \times M}$  приказана на сл. 3.8 се може изразити као:

$$\bar{H}(z) = \begin{bmatrix} E_0(z) & E_1(z) & \dots & E_{M-1}(z) \\ z^{-1}E_{M-1}(z) & E_0(z) & \dots & E_{M-2}(z) \\ z^{-1}E_{M-2}(z) & z^{-1}E_{M-1}(z) & \dots & E_{M-3}(z) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ z^{-1}E_1(z) & z^{-1}E_2(z) & \dots & E_0(z) \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

Веза између  $H(z)$  и  $E_l(z)$  се може изразити:

$$e_l(n) = h(Mn + l), 0 \leq l \leq M - 1 \quad (3.18)$$

Из ове једначине се може видети да еквивалентни блок ради на  $M$  пута нижој учестаности.

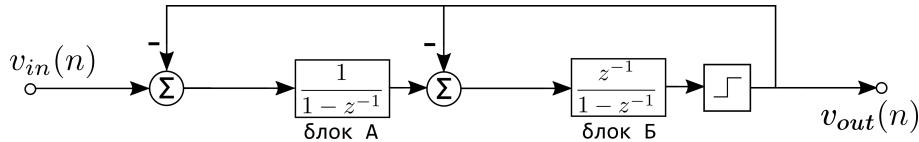
$$H(z) = \sum_{l=0}^{M-1} z^{-1} E_l(z^M) \quad (3.19)$$

### 3.3.1 Временски-унакрсни СД модулатор за $M=2$

Извођење за  $M = 2$  добија се помоћу матрице 3.20 и везе између преносних функција блокова конвенционалног модулатора и преносних карактеристика између различитих унакрсних улаза и излаза. На сл. 3.11 је приказан најједноставнији паралелни СДМ. Овако унакрсно повезани СД модулатори се не могу упростити на конвенционалне модулаторе приказане на сл. 2.2 тако да се морају разматрати заједно, али раде на двоструко нижој учестаности од еквивалентне.

$$\bar{H}(z) = \begin{bmatrix} E_0(z) & E_1(z) \\ z^{-1}E_1(z) & E_0(z) \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

$$H_1(z) = H_2(z) = \sum_{l=0}^1 z^{-1} E_l(z^2) = E_0(z^2) + z^{-1} E_1(z^2) \quad (3.21)$$



Сл. 3.9: Прототип класичног по коме се прави паралелени СД модулатор

Из прототипа класичног модулатора са сл. 3.9 се може узети преносна карактеристика блокова А и Б, по којима се прави паралелни модулатор:

$$H_A(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}} \quad (3.22)$$

$$H_B(z) = \frac{z^{-1}}{1 - z^{-1}} \quad (3.23)$$

Када се изједначе формуле са преносним карактеристикама блокова А и Б:

$$E_0(z^2) + z^{-1} E_1(z^2) = \frac{1}{1 - z^{-1}} = \frac{1}{1 - z^{-2}} + z^{-1} \frac{1}{1 - z^{-2}} = H_A(z) \quad (3.24)$$

$$= \frac{z^{-1}}{1 - z^{-1}} = z^{-2} \frac{1}{1 - z^{-2}} + z^{-1} \frac{1}{1 - z^{-2}} = H_B(z) \quad (3.25)$$

Помоћу овако изведених  $E_0(z^2)$  и  $E_1(z^2)$  за блокове А и Б се могу добити  $\bar{H}_1(z)$  и  $\bar{H}_2(z)$ :

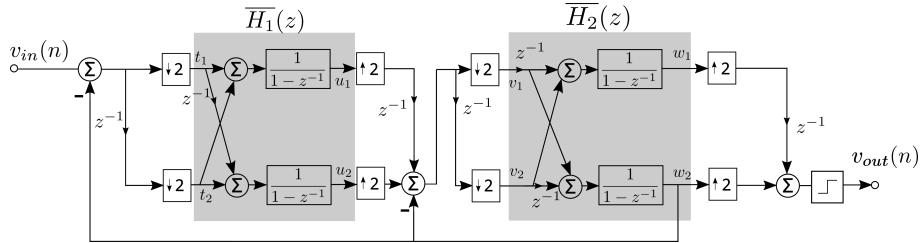
$$\overline{H_1}(z) = \begin{bmatrix} \frac{1}{1-z^{-1}} & \frac{1}{1-z^{-1}} \\ z^{-1} \frac{1}{1-z^{-1}} & \frac{1}{1-z^{-1}} \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

$$\overline{H_2}(z) = \begin{bmatrix} z^{-1} \frac{1}{1-z^{-1}} & \frac{1}{1-z^{-1}} \\ z^{-1} \frac{1}{1-z^{-1}} & z^{-1} \frac{1}{1-z^{-1}} \end{bmatrix} \quad (3.27)$$

Матрице повезују стања унутар временски-унакрсно везана два сигма-делта модулатора:

$$U = \overline{H_1}(z) \cdot T \quad (3.28)$$

$$W = \overline{H_2}(z) \cdot V \quad (3.29)$$



Сл. 3.10: Временски-унакрсно везана два сигма-делта модулатора са међустањима

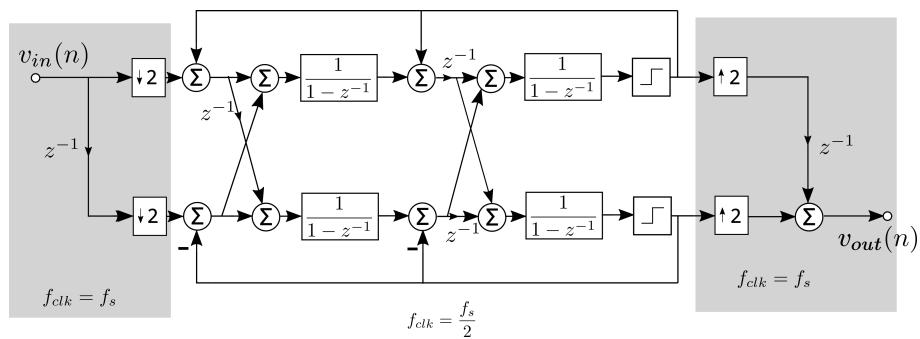
где су  $T$ ,  $U$ ,  $V$  и  $W$  међустања дефинисана на сл. 3.10.

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{1-z^{-1}} & \frac{1}{1-z^{-1}} \\ z^{-1} \frac{1}{1-z^{-1}} & \frac{1}{1-z^{-1}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{bmatrix} \quad (3.30)$$

$$\begin{bmatrix} W_1 \\ W_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z^{-1} \frac{1}{1-z^{-1}} & \frac{1}{1-z^{-1}} \\ z^{-1} \frac{1}{1-z^{-1}} & z^{-1} \frac{1}{1-z^{-1}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} \quad (3.31)$$

Лоше стране коришћења временски-унакрсних сигма-делта модулатора су комплексност која драстично расте са повећањем реда филтра и повећањем броја паралелних модулатора као и повећање захтева за ресурсима унутар *FPGA*.

Кодно мултиплексирање је техника којом се више временских сигнала комбинује у један низ података у једном фреквенцијском опсегу.



Сл. 3.11: Временски-унакрсно везана два сигма-делта модулатора

## Поглавље 4

# Апроксимативна метода

### 4.1 Реконструкција једнобитног из вишебитног сигнала

Другачији приступ сигма-делта модулацији је генерирање једнобитног се-ријског сигнала системом без повратне спреге, чиме се заобилази проблем стабилности система вишег реда са повратном спрегом. А излаз система је ограничен захваљујући матрици која претвара вишебитни податак у низ једнобитних помоћу матрице. Ова метода је апроксимативна.

Како би овај систем у отвореној вези уносио што мању дисторзију у односу на конвенционални СДМ у затвореној спрези, неопходно је да испуњава следеће захтеве:

- средња вредност сваке излазне секвенце мора имати исту вредност као и одбирај који се квантизује,
- амплитудска трансформација код сваке секвенце се подудара,
- фазни одзив сваке секвенце се подудара.

Ограничена дужина излазне речи *look-up* табеле смањује број степени слобода код бинарне излазне речи, тако да у генералном случају подудараше амплитудске трансформације није могуће. Умањивање дисторзије која настаје услед фазног одзива се огледа у симетричности сваке секвенце, а ограничење не утиче на средњу вредност секвенце све док је дужина излазне секвенце довољно велика. Уз симетричност неопходно је да половина излазне речи садржи довољан број битова како би њихова средња вредност била различита за сваки могући улазни вишебитни податак.

Учестаност излазног једнобитног сигнала се може извести као:

$$f_{s3} = OSR * Q * L * f_{s1}, \quad (4.1)$$

где је  $L$  дужина речи излаза *Look-up* табеле,  $Q$  је број који потиче од квадратурне модулације  $Q = 4$ . Учестаност  $f_{s3}$  представља еквивалентну учестаност излазног сигнала, а учестаност  $f_{s1}$  се односи на излазни сигнал сигма-делта модулатора (тј. његовог квантизатора).

## 4.2 Look-up табеле

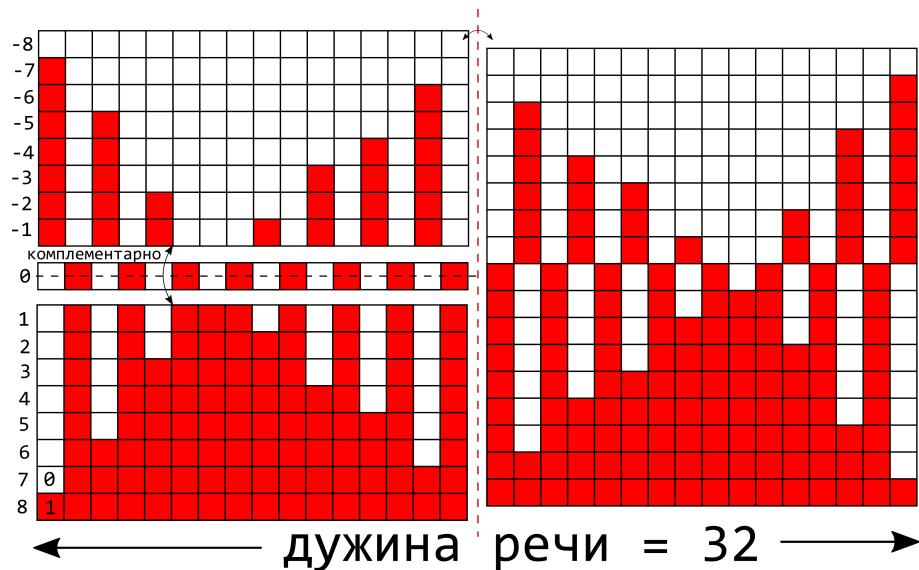
Неки од оптималних конвертора  $N$ -битне вредности у низ једнобитних су преузети из рада [5] и приказани као *Look-up* табеле излазне речи дужине  $L = 32$ . Две различите матрице су приказане са првих 16 битова излазне речи 4.1 и 4.3, а осталих 16 битова је симетрично у односу на њих тако да нису приказани у овом математичком запису. Слике 4.2 и 4.4 служе као визуелни приказ матрица *LUT*-а као и симетрија и антисиметрија унутар њих, које постоје због претходно поменутих захтева. Јединице су приказане црвеном, а нуле белом бојом.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-8
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-7
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	-6
1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	-5
1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	-4
1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	1	0	-3
1	0	1	0	1	0	0	0	0	0	1	0	1	0	1	0	-2
1	0	1	0	1	0	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	-1
0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0
0	1	0	1	0	1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	1	1
0	1	0	1	0	1	1	1	1	0	1	0	1	0	1	1	2
0	1	0	1	1	1	1	1	1	0	1	0	1	0	1	1	3
0	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	0	1	1	4
0	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	5
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	6
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	7
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	8

Сл. 4.1: Предњих 16 битова излазне речи *LUT* 1

Поређење спектара добијених редукцијом броја битова помоћу ових матрица је приказано на сл 4.5 и 4.6. Ови спектри имају *DC* компоненту, јер *LUT* табеле праве поворку нула и јединица (*DC* компонента није предвиђена у реконструкцији јер је комплемент представљен као -1, а не 0).

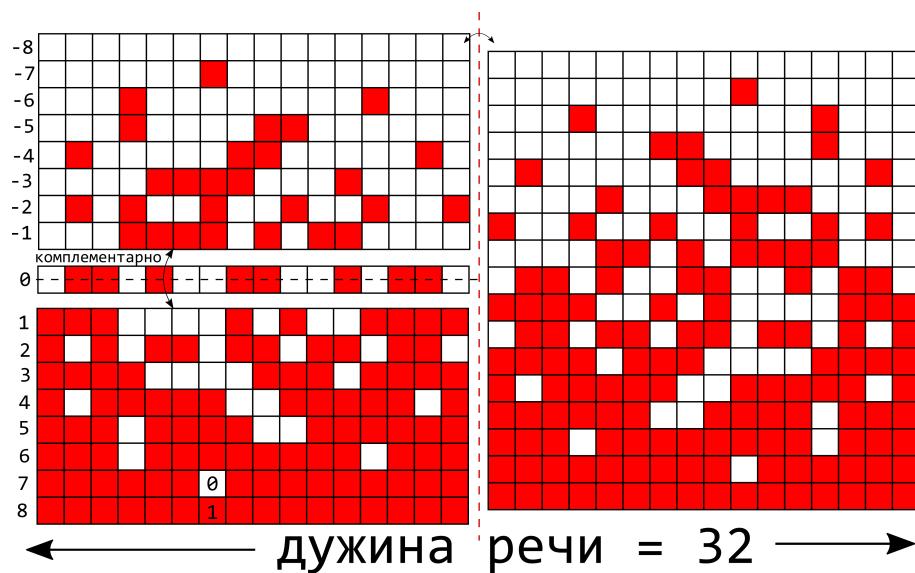
Увећани спектар око апконвертованог сигнала и израчунати *SNR* за обе матрице су приказани на сл 4.7, 4.8. Квалитивни опис *SNR* је добијен на исти начин као и код класичног модулатора, само је тест сигнал сада апконвертован и налази око учестаности  $f_s$ . Добијени спектри распоређених квадратурних сигнала и израчунати *SNR* за ове две различите табеле се поклапају.



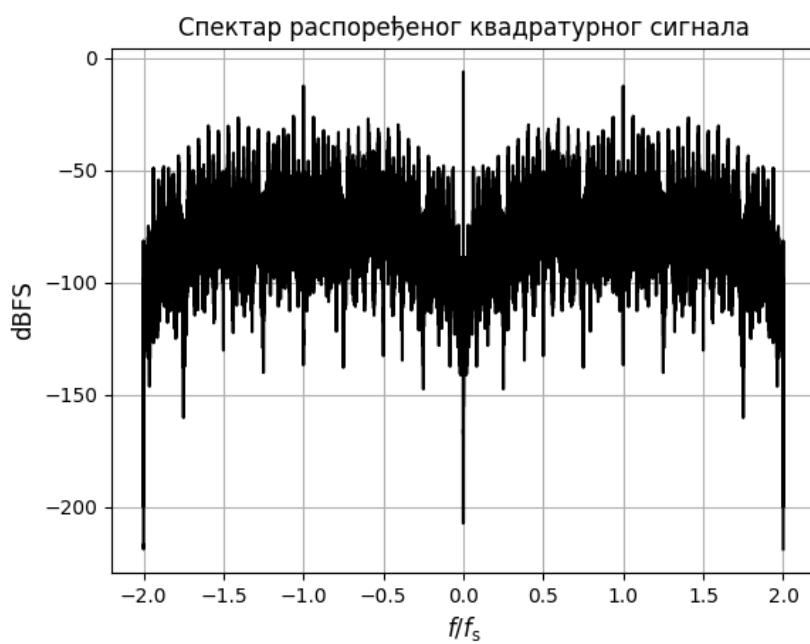
Сл. 4.2: Визуелни приказ  $LUT$  1 за конверзију вишебитног у једнобитни сигнал

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-8
0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-7
0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	-6
0	0	0	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	-5
0	1	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	1	0	-4
0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0	-3
0	1	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	-2
0	0	0	1	1	1	1	0	1	0	1	1	0	0	0	0	-1
0	1	1	0	1	0	0	1	1	0	0	1	0	1	1	0	0
1	1	1	0	0	0	0	1	0	1	0	0	1	1	1	1	1
1	0	1	0	1	1	0	1	1	0	1	1	0	1	1	0	2
1	1	1	1	0	0	0	1	1	1	0	1	1	1	1	1	3
1	0	1	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1	1	0	1	4
1	1	1	0	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1	1	1	5
1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	6
1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	7
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	8

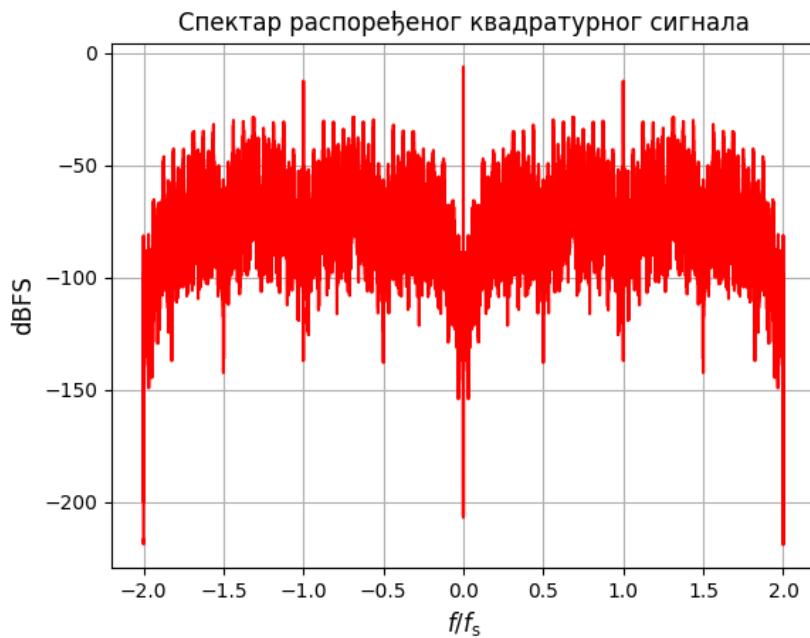
Сл. 4.3: Предњих 16 битова излазне речи  $LUT$  2



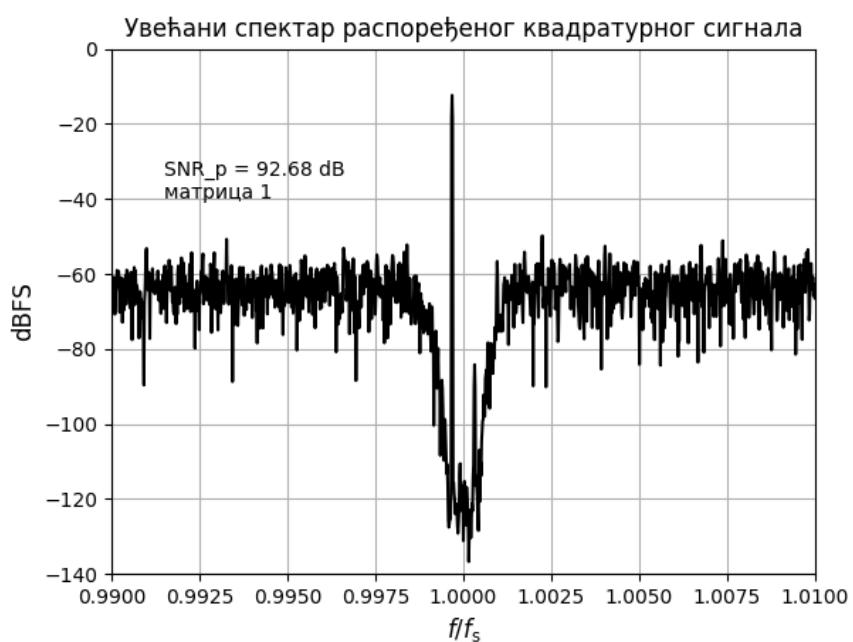
Сл. 4.4: Визуелни приказ  $LUT$  2 за конверзију вишебитног у једнобитни сигнал



Сл. 4.5: Спектар излазног сигнала добијеног апроксимативном методом  $LUT$  1



Сл. 4.6: Спектар излазног сигнала добијеног апроксимативном методом LUT 2



Сл. 4.7: Увећани спектар излазног сигнала добијеног апроксимативном методом LUT 1



Сл. 4.8: Увећани спектар излазног сигнала добијеног апроксимативном методом LUT 2

## Поглавље 5

### Закључак

Примена сигма-делта модулације пружа флексибилност и побољшање код генерисања сигнала високе учестаности кроз примену паралелних и апроксимативних модулатора у потпуну дигиталном предајнику. Помоћу квалитативних показатеља деградације сигнала показано је поређење између паралелних и апроксимативних модулатора, као и то да могу генерисати *RF* сигнале на значајно вишем учестаностима у поређењу са класичним модулатором. Примена апроксимативних модулатора у отвореној спрези иако смањује квалитет сигнала омогућава сигма-делта модулаторима да имају вишебитне квантizаторе. Предност вишебитних конвертора над једнобитним се огледа у линеарности великих улазних сигналса, стабилности система и што могу радити на вишој радној учестаности. За претварање вишебитних сигналса у једнобитне секвенце коришћене су излазне речи представљене у две различите *look-up* табеле. Тако добијени сигналси су поређени преко спектра излаза квадратурне модулације који показује како излазни сигнал дигиталног дела предајника изгледа а из спектра се изводи и квалитативна мера овако генерисаног сигнала.

# Литература и радови

- [1] R. F. Cordeiro и др. „Agile All-Digital RF Transceiver Implemented in FPGA”. У: *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques* 65.11 (2017.), стр. 4229–4240. DOI: [10.1109/TMTT.2017.2689739](https://doi.org/10.1109/TMTT.2017.2689739). URL: <https://ieeexplore.ieee.org/document/7898863>.
- [2] M. Ebrahimi, M. Helaoui и F. Ghannouchi. „Time-Interleaved Delta-Sigma Modulator for Wideband Digital GHz Transmitters Design and SDR Applications”. У: *Progress in Electromagnetics Research B* 34 (2011.), стр. 263–281. URL: <https://www.jpier.org/PIERB/view/11071205/>.
- [3] Antoine Frappe и др. „An All-Digital RF Signal Generator Using High-Speed Delta-Sigma Modulators”. У: *IEEE Journal of Solid-State Circuits* 44.10 (2009.), стр. 2722–2732. DOI: [10.1109/JSSC.2009.2028406](https://doi.org/10.1109/JSSC.2009.2028406).
- [4] Maurits Ortmanns Friedel Gerfers. *Continuous-Time Sigma-Delta A/D Conversion, Fundamentals, Performance Limits and Robust Implementations*. 1. издање. Св. 21. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2006. ISBN: 978-3-540-28473-4. DOI: [10.1007/3-540-28473-7](https://doi.org/10.1007/3-540-28473-7).
- [5] Malcolm Hawksford. „Multi-level to 1 bit Transformations for Applications in Digital-to-analogue Converters using Oversampling and Noise Shaping”. У: нов. 1988. URL: [https://www.researchgate.net/publication/269101186\\_MULTI-LEVEL\\_TO\\_1\\_BIT\\_TRANSFORMATIONS\\_FOR\\_APPLICATIONS\\_IN\\_DIGITAL\\_TO\\_ANALOGUE\\_CONVERTERS\\_USING\\_OVERSAMPLING\\_AND\\_NOISE\\_SHAPING](https://www.researchgate.net/publication/269101186_MULTI-LEVEL_TO_1_BIT_TRANSFORMATIONS_FOR_APPLICATIONS_IN_DIGITAL_TO_ANALOGUE_CONVERTERS_USING_OVERSAMPLING_AND_NOISE_SHAPING).
- [6] Haolin Li и др. „A 21-GS/s Single-Bit Second-Order Delta–Sigma Modulator for FPGAs”. У: *IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs* 66.3 (2019.), стр. 482–486. DOI: [10.1109/TCSII.2018.2855962](https://doi.org/10.1109/TCSII.2018.2855962). URL: <https://ieeexplore.ieee.org/document/8421247>.
- [7] R. Schreier, M.V. Goodson и Bo Zhang. „An algorithm for computing convex positively invariant sets for delta-sigma modulators”. У: *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications* 44.1 (1997.), стр. 38–44. DOI: [10.1109/81.558440](https://doi.org/10.1109/81.558440).
- [8] Richard Schreier, Shanthi Pavan и Gabor Temes. „The Delta-Sigma Toolbox”. У: мар. 2017., стр. 499–537. ISBN: 9781119258278. DOI: [10.1002/9781119258308.app2](https://doi.org/10.1002/9781119258308.app2).
- [9] Richard Schreier; Gabor C. Temes. *Understanding Delta-Sigma Data Converters*. 1. издање. Wiley-IEEE Press, 2005. 464 стр. ISBN: 9780470546772.
- [10] Willy M. C. Sansen Yves Geerts Michiel Steyaert. *Design of Multi-Bit Delta-Sigma A/D Converters*. 1. издање. Св. 686. Springer US, 2002. 226 стр. ISBN: 978-0-306-48015-7. DOI: [10.1007/b101919](https://doi.org/10.1007/b101919). URL: <https://www.springer.com/gp/book/9781402070785>.