

# C

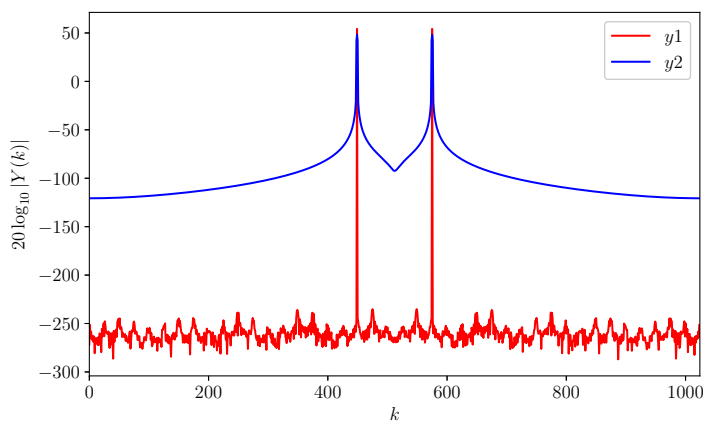
## Prozorske funkcije

U okviru ovog odeljka se razmatraju osobine prozorskih funkcija uz komentare o oblastima primene. Cilj ovog odeljka je nije sveobuhvatno izlaganje o prozorskim funkcijama, koje se može naći u literaturi [44, 13, 68, 69], već detalja koji su od praktičnog značaja.

Prozorske funkcije se koriste za projektovanje filtara i analizu spektra, i veoma često na pogrešan način. Primer iz Uvoda za programski paket Octave koji ilustruje pogrešnu primenu prozorske funkcije je:

```
n = 1024; % broj tacaka
f0 = 63; % sinusoida ima ucestanost 63. DFT bina
y1 = sin(2*pi*f0*(0:n-1)/n);
plot(fftshift(20*log10(abs(fft(y1)))),'r');
h = hanning(n);
y2 = y1 .* h.';
hold on;
plot(fftshift(20*log10(abs(fft(y2)))),'b');
```

Rezultat izvršavanja datog koda je prikazan na slici C.1.



Slika C.1: Spektri signala pre  $y_1$  i posle  $y_2$  primene prozorske funkcije.

Odbirci sinusoide u nizu  $y_1$  su generisani tako da ne dolazi do curenja spektra, i spektar sadrži samo dva odbirka koji su veći od numeričke greške, što se i vidi na slici C.1. Pošto u spektru  $y_1$  ne dolazi do curenja spektra, množenjem sa odbircima prozorske funkcije, u datom primeru Hanove, dobija se niz  $y_2$  čiji spektar bi trebalo takode da sadrži samo dve spektralne komponente. Usled širine glavnog luka Hanove funkcije od tri DFT bina očekivano je da spektar  $y_2$  sadrži ukupno šest odbiraka većih od numeričke greške. Međutim, iz spektra  $y_2$  jasno se može videti da dolazi do curenja spektra - množenje signala prozorskom funkcijom *dovodi* do curenja spektra umesto da ga potiskuje!

Iz navedenog primera se nedvosmisleno vidi da je curenje spektra prouzrokovano primenom prozorske funkcije. Curenje spektra se javlja zbog toga što funkcija `hanning(n)` vraća  $n$  odbiraka prozorske funkcije koji su simetrični  $h(i) = h(n - 1 - i)$ . Simetrična prozorska funkcija se koristi pri projektovanju filtera i u tom slučaju se dobijaju očekivani rezultati. Međutim, ukoliko se odbirci simetrične prozorske funkcije koriste u analizi spektra DFT-om dolazi do (ne)očekivanog curenja spektra.

Do curenja spektra dolazi zbog toga što se analizom signala dužine  $N$  odbiraka DFT-om implicitno podrazumeva da je signal periodičan, odnosno da se odbirci signala ponavljaju. Implicitna periodičnost signala  $h[n]$ ,  $n = 0, \dots, N - 1$  pri izračunavanju DFT-a rezultuje signalom

$$\dots, h[N - 1], h[0], h[1], h[2], \dots, h[N - 3], h[N - 2], h[N - 1], h[0], h[1], \dots \quad (\text{C.1})$$

i korišćenjem svojstva simetrične prozorske funkcije  $h[i] = h[N - 1 - i]$  imamo:

$$\dots, \textcolor{red}{h[0]}, h[0], h[1], h[2], \dots, h[2], h[1], \textcolor{red}{h[0]}, h[0], h[1], \dots \quad (\text{C.2})$$

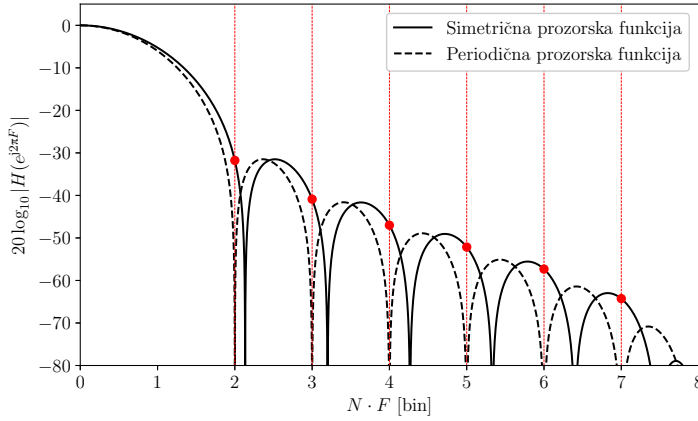
Iz (C.2) se vidi da se periodičnim produžavanjem simetrične prozorske funkcije odbirak  $h[0]$  ponavlja dva puta uzastopno.

Ponavljanje odbirka  $h[0]$  se izbegava tako što se izračunaju odbirci prozorske funkcije dužine  $N + 1$ , i zatim se poslednji odbirak odbaci. U tom slučaju se pri periodičnom nastavljanju odbiraka dobija signal u kojem se ne ponavljaju odbirci - periodična prozorska funkcija. Iz navedenih razloga funkcije za generisanje odbiraka prozorskih funkcija imaju *dva* argumenta: broj odbiraka  $N$  i tip prozorske funkcije - simetrična ili periodična. Pozivanjem funkcije sa samo jednim argumentom se usvaja podrazumevana vrednost drugog argumenta, koja je u većini programskih paketa takva da se generišu odbirci simetrične prozorske funkcije. Podrazumevana vrednost drugog argumenta je greška u kodu iz primera, koja se može ispraviti izmenom `h = hanning(n)` u `h = hanning(n, 'periodic')`. Ispravkom se spektar oba signala poklapa sa teorijskim očekivanjima.

Curenje spektra usled korišćenja simetrične prozorske funkcije se može razumeti iz frekvencijskog odziva. Na slici C.2 su prikazani frekvencijski odzivi dobijeni izvršavanjem funkcije `freqz` nad odbircima periodične i simetrične Hanove prozorske funkcije sa  $N = 16$  odbiraka. Frekvencijski odziv periodične prozorske funkcije ima nule na centralnim učestanostima DFT binova, kao što je i očekivano. Signal koji je tačno na učestanosti DFT bina je u potpunosti potisnut i njegova energija se ne preliva u druge binove.

Odziv simetrične prozorske funkcije nema nule na centralnim učestanostima DFT binova, što je označeno crvenim markerima na slici. Signal koji je tačno na učestanosti

DFT bina ima nenulti odziv u svim ostalim binovima i dolazi do preliivanja energije u sve ostale binove - dolazi do curenja spektra.



Slika C.2: Frekvencijski odziv simetrične i periodične prozorske funkcije.

Prozorske funkcije se mogu grubo podeliti u dve grupe: generalizovane kosinusne prozorske funkcije (GKPF) i ostale. U grupu GKPF spadaju mnoge prozorske funkcije koje se često koriste, npr. Hanova, Hemingova, Blekmanova, Nutalove i sve flet-top prozorske funkcije. Mnoge osobine GKPF se mogu odrediti iz koeficijenata, i zbog velikog značaja njihove osobine će biti detaljno proučene.

## C.1 Generalizovana kosinusna prozorska funkcija

Generalizovana kosinusna prozorska funkcija u vremenskom domenu je oblika:

$$w_z(t) = \begin{cases} \sum_{m=0}^M a_m \cos(2\pi m t) & , |t| \leq \frac{1}{2} \\ 0 & , \text{inače} \end{cases} \quad (\text{C.3})$$

Prozorska funkcija u obliku (C.3) je nulte faze i nije kauzalna. Kauzalna prozorska funkcija se može dobiti pomeranjem u vremenu

$$w(t) = w_z\left(t - \frac{1}{2}\right). \quad (\text{C.4})$$

Primenom trigonometrijskog identiteta

$$\cos\left(2\pi m \left(x - \frac{1}{2}\right)\right) = \cos(\pi m) \cos(2\pi m x) + \sin(\pi m) \sin(2\pi m x), \quad (\text{C.5})$$

koji za  $m \in \mathbb{Z}$ , kada važi  $\sin(\pi m) = 0$  i  $\cos(\pi m) = (-1)^m$ , postaje:

$$\cos\left(2\pi m \left(x - \frac{1}{2}\right)\right) = (-1)^m \cos(2\pi m x), \quad (\text{C.6})$$

dobijamo izraz za kauzalnu GKPF:

$$w(t) = \begin{cases} \sum_{m=0}^M (-1)^m a_m \cos(2\pi m t) & , 0 \leq t \leq 1 \\ 0 & , \text{inače} \end{cases} . \quad (\text{C.7})$$

Poređenjem (C.3) i (C.7) se vidi da je razlika samo u članu  $(-1)^m$ .

Odbirci GKPF se dobijaju odabiranjem (C.7) na intervalu  $[0, 1]$  za periodičnu, ili  $[0, 1]$  za simetričnu prozorsku funkciju:

$$w[n] = \sum_{m=0}^M (-1)^m a_m \cos\left(\frac{2\pi m n}{N}\right), \quad (\text{C.8})$$

gde je  $0 \leq n \leq N$  za simetričnu, odnosno  $0 \leq n < N$  za periodičnu, prozorsku funkciju i podrazumeva se da je  $w[n] = 0$  za  $n < 0$  i  $n > N$ .

Frekvencijski odziv prozorske funkcije  $W(e^{j\Omega})$  se može izraziti kao [44]

$$W(e^{j\Omega}) = a_0 W_R(e^{j\Omega}) + \sum_{m=1}^M \frac{(-1)^m a_m}{2} \left[ W_R(e^{j(\Omega - \frac{2\pi m}{N})}) + W_R(e^{j(\Omega + \frac{2\pi m}{N})}) \right], \quad (\text{C.9})$$

gde je  $W_R(e^{j\Omega})$  frekvencijski odziv pravougaone prozorske funkcije. Iz prethodnog izraza sledi da je frekvencijski odziv GKPF linearna kombinacija skaliranih i pomerenih frekvencijskih odziva pravougaone prozorske funkcije. Imajući u vidu da je širina DFT bina  $2\pi/N$ , sledi da frekvencijski pomeraj od  $\pm 2\pi m/N$  odgovara pomeraju od  $\pm m$  DFT binova.

Korišćenjem (C.9) odbirci spektra signala  $x_W[n] = x[n]w[n]$  se mogu izračunati iz odbiraka spektra  $X[k]$  signala pre primene prozorske funkcije:

$$X_W[k] = a_0 X[k] + \sum_{m=1}^M \frac{(-1)^m a_m}{2} [X[k+m] + X[k-m]]. \quad (\text{C.10})$$

Osobina (C.10) GKPF je od praktičnog značaja pošto se prozorska funkcija može primeniti *posle* izračunavanja DFT-a. U primenama gde je od interesa samo mali broj odbiraka spektra, npr. u mernim instrumentima, osobina (C.10) se može iskoristiti za značajno efikasnije izračunavanje po pitanju broja operacija i potrebnih resursa.

Pretpostavimo da je od interesa samo jedan odbirak spektra i da je zahtevana velika tačnost amplitude, odnosno da je potrebno koristiti flat top prozorsku funkciju. Željeni odbirak spektra se može izračunati množenjem odbiraka signala sa odbircima flat-top prozorske funkcije i izračunavanjem DFT-a korišćenjem FFT-a. Ovakvim pristupom se izračunava željeni odbirak spektra, ali i ostali odbirci čija vrednost nije od interesa.

Zahvaljujući osobini (C.10) moguće je izračunati vrednost odbirka spektra signala posle primene prozorske funkcije iz  $2M+1$  odbiraka spektra signala i koeficijenata GKPF  $a_m$ . Broj koeficijenata svih prozorskih funkcija od praktičnog interesa je mali, uglavnom manji od pet, i za izračunavanje vrednosti odbirka spektra je u većini slučajeva potrebno manje od devet odbiraka spektra signala pre primene prozorske funkcije.

Gercelovim algoritmom, koji je prikazan u dodatku D, se može izračunati proizvoljni odbirak spektra u  $O(N)$  operacija. Kada je potrebno izračunati mali broj odbiraka spektra, okvirno manji od  $\log_2 N$ , broj potrebnih računskih operacija je manji u poređenju sa FFT-om. Za razliku od FFT-a gde je potrebno sačekati da vrednosti svih odbiraka budu pohranjene u memoriji da bi se započelo sa izračunavanjima, Gercelovim algoritmom se vrši izračunavanje u hodu. Vrednost pristiglog odbirka se koristi za ažuriranje međurezultata i više nije potrebna, odnosno memorija za čuvanje vrednosti odbiraka nije potrebna. Pored toga, vrednost odbirka spektra u Gercelovom algoritmu je dostupna odmah nakon pristizanja poslednjeg odbirka signala.

## C.2 Frekvencijski odziv prozorske funkcije

Frekvencijski odziv prozorske funkcije dužine  $N$  odbiraka se može izračunati direktno iz  $z$  transformacije

$$W(z) = \sum_{n=0}^{N-1} w[n]z^{-n} \quad (\text{C.11})$$

zamenom  $z \rightarrow e^{j\Omega}$  odnosno  $z \rightarrow e^{j2\pi F}$

$$|W(e^{j\Omega})| = \left| \sum_{n=0}^{N-1} w[n]e^{-jn\Omega} \right|. \quad (\text{C.12})$$

Izračunavanje (C.12) u  $M > N$  tačaka je složenosti  $O(MN)$  i može se izvršiti u  $O(M \log_2 M)$  računskih operacija FFT-om kada su učestanosti ekvidistantne.

U slučaju GKPF oblika (C.8) frekvencijska karakteristika  $W(F_b)$  se može izračunati direktno iz koeficijenata  $a_m$  [70]:

$$W(F_b) = \begin{cases} a_0 & , F_b = 0 \\ \frac{a_m}{2} & , |F_b| = m, m \leq M \\ \frac{F_b \sin(\pi F_b)}{\pi} \sum_{m=0}^M \frac{(-1)^m a_m}{F_b^2 - m^2} & , \text{inače} \end{cases}, \quad (\text{C.13})$$

gde je  $F_b$  učestanost normalizovana na širinu DFT bina:

$$F_b = NF. \quad (\text{C.14})$$

Broj računskih operacija pri izračunavanju frekvencijskog odziva na jednoj učestanosti zavisi samo od broja koeficijenata  $a_m$ . Izraz (C.13) je frekvencijska karakteristika GKPF nulte faze i po modulu je jednaka frekvencijskoj karakteristici kauzalne verzije prozorske funkcije.

Primenom prozorske funkcije na odbirke ulaznog signala se menja amplituda odbiraka spektra. Vrednost  $k$ -tog odbirka spektra za ulazni signal kompleksne sinusoide učestanosti  $k$ -tog DFT bina  $x(n) = e^{j2\pi kn/N}$  iznosi:

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} e^{j2\pi kn/N} e^{-j2\pi kn/N} = N. \quad (\text{C.15})$$

Primenom prozorske funkcije  $w(n)$  dobija se signal  $\hat{x}(n) = w(n)e^{j2\pi kn/N}$ , čiji  $k$ -ti odbirak spektra ima vrednost:

$$\hat{X}[k] = \sum_{n=0}^{N-1} \left( w[n] e^{j2\pi kn/N} \right) e^{-j2\pi kn/N} = N \left( \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} w[n] \right) = NG_c. \quad (\text{C.16})$$

Amplituda  $k$ -tog odbirka spektra signala posle primene prozorske funkcije  $\hat{X}[k]$  je za faktor

$$G_c = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} w[n], \quad (\text{C.17})$$

različita od amplitude odbirka pre primene prozorske funkcije. Faktor  $G_c$  se naziva koherentno pojačanje prozorske funkcije. U slučaju GKPF iz (C.13) direktno sledi da je koherentno pojačanje  $G_c = a_0$ . Pošto primena prozorske funkcije menja vrednosti odbiraka spektra potrebno je izvršiti korekciju amplituda odbiraka spektra množenjem sa  $G_c^{-1}$  kako bi se dobile prave vrednosti.

Različite prozorske funkcije imaju različita koherentna pojačanja, i za svrhe poređenja se frekvencijski odziv prozorske funkcije normalizuje

$$|\overline{W}(e^{j\Omega})| = \left| \frac{W(e^{j\Omega})}{G_c} \right|. \quad (\text{C.18})$$

da bi u svim slučajevima važno  $|\overline{W}(e^{j0})| = 1$ .

### C.3 Opadanje bočnih lukova

Asimptotsko ponašanje amplitudskog odziva, odnosno opadanje bočnih lukova, je važna karakteristika prozorskih funkcija. Bočni lukovi prozorske funkcije opadaju sa  $6 \cdot n$  dB/oct kod funkcije koja ima oblik  $F_b^{-n}$  za  $F_b \gg 1$ . Brzina opadanja bočnih lukova prozorske funkcije se može odrediti primenom Rimanove leme i teoreme izvedene iz nje [71]. Teorema izvedena iz Rimanove leme pokazuje da ako prvih  $n$  izvoda funkcije  $h(t)$  postoje, i vrednosti izvoda i funkcije su konačne na intervalu  $(-\infty, +\infty)$ , onda  $|H(j\omega)|$  teži nuli kao  $\omega^{-(n+1)}$  za  $|\omega| \rightarrow \infty$ :

$$|H(j\omega)| = O(\omega^{-(n+1)}) \text{ za } |\omega| \rightarrow \infty. \quad (\text{C.19})$$

Na osnovu rezultata (C.19) brzina opadanja bočnih lukova se može odrediti ispitivanjem izvoda prozorske funkcije.

Brzina opadanja bočnih lukova GKPF se može odrediti i direktno iz koeficijenata  $a_m$ . Izraz (C.13) se za  $F_b \neq 0$  i  $F_b \neq m$  može preurediti u oblik

$$W(F_b) = \frac{\sin(\pi F_b)}{\pi F_b} \sum_{m=0}^M \frac{(-1)^m a_m}{1 - (m/F_b)^2} \quad (\text{C.20})$$

Član  $(1 - (m/F_b)^2)^{-1}$  se može razviti u red na sledeći način. Počev od

$$(1 - u) \sum_{n=0}^N u^n = \sum_{n=0}^N u^n - \sum_{n=1}^{N+1} u^n = 1 - u^{N+1}, \quad (\text{C.21})$$

i deljenjem obe strane (C.21) sa  $1 - u$  dobijamo izraz:

$$\sum_{n=0}^N u^n = \frac{1 - u^{N+1}}{1 - u}, \quad (\text{C.22})$$

koji za  $|u| < 1$  ima graničnu vrednost:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N u^n = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1 - u^{N+1}}{1 - u} = \frac{1}{1 - u}. \quad (\text{C.23})$$

Zamenom  $u \rightarrow x^2$  dobijamo

$$\frac{1}{1 - x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n} = 1 + x^2 + x^4 + \dots \quad (\text{C.24})$$

Upotrebom rezultata (C.24) u (C.20) konačno dobijamo:

$$\begin{aligned} W(F_b) &= \frac{\sin(\pi F_b)}{\pi F_b} \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^m a_m \left( \frac{m}{F_b} \right)^{2n} \\ &= \frac{\sin(\pi F_b)}{\pi F_b} \sum_{n=0}^{\infty} F_b^{-2n} \sum_{m=0}^M (-1)^m m^{2n} a_m \end{aligned} \quad (\text{C.25})$$

Pri razvoju u red uvedeno je ograničenje  $|u| < 1$ , koje u slučaju razmatrane funkcije iznosi  $|F_b| > M$ . Uslov  $|F_b| > M$  znači da izraz za frekvencijsku karakteristiku (C.25) ne važi u prvih  $M$  binova. U svim slučajevima od interesa broj koeficijenata  $M + 1$  GKPF je mali, tako da uslov  $|F_b| > M$  ne predstavlja ograničenje pri određivanju asimptotskog ponašanja frekvencijske karakteristike.

Asimptotsko ponašanje (C.25) je određeno proizvodom člana  $\sin(\pi F_b)/(\pi F_b)$  koji opada sa  $F_b^{-1}$ , odnosno 6 dB/oct, i dvostruke sume:

$$\sum_{n=0}^{\infty} F_b^{-2n} \sum_{m=0}^M (-1)^m m^{2n} a_m = c_0 + c_1 F_b^{-2} + c_2 F_b^{-4} + \dots, \quad (\text{C.26})$$

gde su koeficijenti  $c_i$

$$c_i = \sum_{m=0}^M (-1)^m m^{2i} a_m. \quad (\text{C.27})$$

U opštem slučaju  $c_i \neq 0$  suma (C.26) ima vrednost  $c_0 + O(F_b^{-2})$  za  $F_b \gg 1$ . Asimptotsko opadanje (C.25) je tada u potpunosti određeno članom  $\sin(\pi F_b)/(\pi F_b)$  i iznosi 6 dB/oct. U slučaju kada je

$$c_0 = \sum_{m=0}^M (-1)^m a_m = 0 \quad (\text{C.28})$$

vrednost sume je  $c_1 F_b^{-2} + O(F_b^{-4})$ , i amplitudska karakteristika (C.25) asimptotski opada se  $F_b^{-3}$ . Dalje poboljšanje asimptotskog opadanja na  $F_b^{-(2p+1)}$ , odnosno  $(2p+1) \cdot 6$  dB/oct, se može postići izborom koeficijenata  $a_m$  tako da važi  $c_i = 0$ ,  $0 \leq i < p$ . Sistem jednačina  $c_i = 0$ ,  $0 \leq i < p$ , po koeficijentima  $a_m$  je neodređen za  $p \leq M$ , odnosno ima beskonačno mnogo rešenja, ima trivijalno rešenje  $a_m = 0$  za  $p = M+1$  i nema rešenja za  $p > M+1$ .

Iz prethodne analize se može zaključiti da asimptotsko opadanje lukova GKPF sa  $M+1$  koeficijenata može biti najviše  $(2M+1) \cdot 6$  dB/oct. Opadanje bočnih lukova se poboljšava sa povećanjem broja jednačina  $p$  za koje je  $c_i = 0$ ,  $0 \leq i < p$ , ali se time smanjuje broj stepena slobode u izboru koeficijenata  $a_m$ . Posledica manjeg broja stepena slobode je povećana amplituda najvećeg bočnog luka, što se može videti iz tabele C.3 Nutalovih prozorskih funkcija, u kojoj je prikazano poređenje prozorskih funkcija sa istim brojem koeficijenata i različitim asimptotskim ponašanjem. Za zadato asimptotsko opadanje lukova od  $6 \cdot n$  dB/oct amplituda najvećeg bočnog luka se može smanjiti povećanjem broja koeficijenata, ali se time povećava i širina glavnog luka. Kompromis između amplitude najvećeg bočnog luka, brzine asimptotskog opadanja i širine glavnog luka se mora uzeti u obzir pri izboru prozorske funkcije za određenu primenu.

## C.4 Ekvivalentni propusni opseg šuma (ENBW)

Ekvivalentni propusni opseg šuma (ENBW) A.6 prozorske funkcije se može izračunati iz frekvencijske karakteristike:

$$ENBW = \frac{\int_{-1/2}^{1/2} |W(e^{j2\pi F})|^2 dF}{|W(e^{j0})|^2} \quad (C.29)$$

Primenom Parsevalove teoreme

$$\int_{-1/2}^{1/2} |W(e^{j2\pi F})|^2 dF = \sum_{n=0}^N |w(n)|^2 \quad (C.30)$$

vrednost integrala se može izračunati iz odbiraka prozorske funkcije  $w(n)$ . Amplituda frekvencijskog odziva prozorske funkcije na učestanosti  $\Omega$  direktno sledi iz  $z$  transformacije zamenom  $z \rightarrow e^{j2\pi F}$ :

$$|W(e^{j2\pi F})| = \left| \sum_{n=0}^N w[n] e^{-j2\pi n F} \right|, \quad (C.31)$$

odakle je amplituda frekvencijskog odziva na  $F = 0$ :

$$|W(e^{j0})| = \left| \sum_{n=0}^N w[n] \right| \quad (C.32)$$



Zamenom (C.30) i (C.32) u (C.29) dobija se izraz za izračunavanje ENBW iz odbiraka prozorske funkcije  $w(n)$ :

$$ENBW = \frac{\sum_{n=0}^N |w[n]|^2}{\left| \sum_{n=0}^N w[n] \right|^2} \quad (\text{C.33})$$

Pored (C.33) gde je ekvivalentni propusni opseg učestanosti izražen u digitalnoj učestanosti  $F$ , često se koristi i ENBW normalizovan na širinu DFT bina:

$$NENBW = \frac{ENBW}{N^{-1}} = N \frac{\sum_{n=0}^N |w[n]|^2}{\left| \sum_{n=0}^N w[n] \right|^2} \quad [\text{bin}]. \quad (\text{C.34})$$

U slučaju GKPF ekvivalentni propusni opseg šuma se može izračunati direktno iz koeficijenata  $a_m$ . Iz (C.13) sledi:

$$|W(0)| = |a_0|, \quad (\text{C.35})$$

čime je određen imenilac (C.29). Brojilac (C.29) se može odrediti integracijom (C.13), gde se takođe može primeniti Parsevalova teorema:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |W(F_b)|^2 dF_b = \int_{-\infty}^{+\infty} |w(t)|^2 dt = \int_{-1/2}^{+1/2} \left| \sum_{m=0}^M a_m \cos(2\pi mt) \right|^2 dt. \quad (\text{C.36})$$

Granice integracije u vremenskom domenu su svedene na  $[-1/2, 1/2]$  pošto je  $w(t) = 0$  za  $|t| > 1/2$ . Kvadrat sume u integralu se može preurediti u:

$$\left| \sum_{m=0}^M a_m \cos(2\pi mt) \right|^2 = \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^M a_m a_n \cos(2\pi mt) \cos(2\pi nt). \quad (\text{C.37})$$

Zamenom (C.37) u (C.36) i promenom redosleda integrala i sume imamo:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |W(F_b)|^2 dF_b = \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^M a_m a_n \int_{-1/2}^{+1/2} \cos(2\pi mt) \cos(2\pi nt) dt. \quad (\text{C.38})$$

Vrednost integrala u dvostrukoj sumi u funkciji  $m$  i  $n$  iznosi

$$\int_{-1/2}^{+1/2} \cos(2\pi mt) \cos(2\pi nt) dt = \begin{cases} 1 & , m = n = 0 \\ \frac{1}{2} & , m = n \neq 0 \\ 0 & , m \neq n \end{cases} \quad (\text{C.39})$$

Iz (C.39) sledi da su članovi dvostruke sume nenulti samo za  $m = n$ , odakle je vrednost integrala:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |W(F_b)|^2 dF_b = a_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{m=1}^M a_m^2, \quad (\text{C.40})$$

odakle direktno sledi

$$NENBW = \frac{a_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{m=1}^M a_m^2}{a_0^2} = 1 + \frac{1}{2} \sum_{m=1}^M \left( \frac{a_m}{a_0} \right)^2 \quad [\text{bin}] \quad (\text{C.41})$$

Izraz (C.41) je normalizovani propusni opseg šuma pošto je frekvencijska karakteristika GKPF (C.13) izražena u normalizovanoj učestanosti  $F_b$ .

## C.5 Neizvesnot amplitude (Scalloping loss)

Frekvencijska karakteristika glavnog luka prozorske funkcije unosi grešku u određivanju snage signala pošto učestanost ulaznog signala u opštem slučaju nije poznata. Očitana snaga signala u DFT binu je jednaka snazi ulaznog signala samo kada je učestanost signala jednaka centralnoj učestanosti bina. U slučaju kada signal nije na centralnoj učestanosti DFT bina očitana snaga signala će zavisiti od frekvencijskog odziva na učestanosti ulaznog signala. Važno je naglasiti da u oba slučaja ukupna snaga signala ostaje ista, samo se koncentriše u jednom binu kada je učestanost ulaznog signala jednaka centralnoj učestanosti DFT bina, ili se preraspoređuje u više binova.

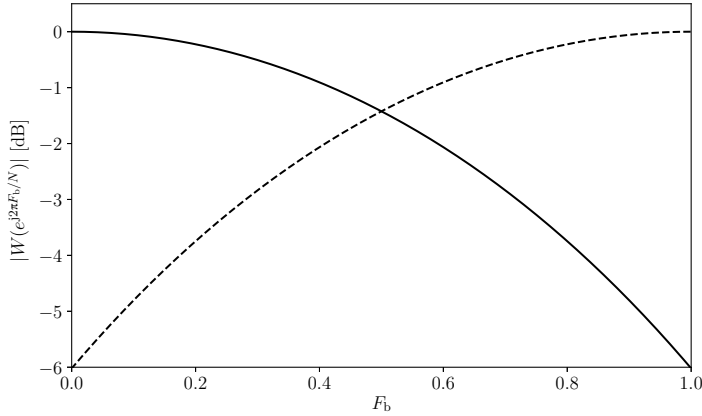
Na slici C.3 je prikazana frekvencijska karakteristika glavnog luka Hanove prozorske funkcije u dva susedna bina. Očitana snaga signala je jednaka snazi ulaznog signala samo kada je njegova učestanost tačno na centralnoj učestanosti DFT bina, i može biti do  $\approx -1.4$  dB manja kada je učestanost ulaznog signala između centralnih učestanosti susednih binova.

Pošto učestanost ulaznog signala nije poznata, nije poznato ni koliko je frekvencijski odziv prozorske funkcije promenio očitanu snagu signala, ali je moguće odrediti maksimalnu grešku. Najveća greška određivanja amplitude, pod pretpostavkom da frekvencijski odziv glavnog luka prozorske funkcije monoton opada, je na učestanosti između dva DFT bina i iznosi:

$$SL = \frac{W(e^{j\pi/N})}{W(e^{j0})}, \quad (\text{C.42})$$

što je ujedno i neizvesnost amplitude (engl. scalloping loss).

Flat-top prozorske funkcije su projektovane sa ciljem da se neizvesnost amplitude svede na zanemarljivu vrednost, i koriste se u primenama gde je tačnost određivanja amplitude od primarnog značaja. Nedostatak flat-top prozorskih se ogleda u tome što imaju veću širinu glavnog luka od ostalih prozorskih funkcija. Veća širina glavnog luka smanjuje frekvencijsku rezoluciju, ali i odnos signal/šum pošto je i ekvivalentni propusni opseg šuma  $ENBW$  veći.



Slika C.3: Neizvesnost amplitude Hanove prozorske funkcije.

## C.6 Postupak projektovanja GKPF

U opštem slučaju koeficijenti GKPF se određuju optimizacionim metodama po zadatim kriterijumima. Međutim, za neke formulacije kriterijuma moguće je odrediti koeficijente prozorskih funkcija analitičkim metodama.

U odeljku C.3 pokazano je da bočni lukovi GKPF sa  $M + 1$  koeficijenata opadaju sa  $(2p + 1) \cdot 6$  dB/oct ako važi  $c_i = 0$  za  $i < p \leq M$ , gde je  $c_i$  dat u (C.27) i ponovljen radi preglednosti:

$$c_i = \sum_{m=0}^M (-1)^m m^{2i} a_m.$$

Za  $p = M + 1$  sistem jednačina  $c_i = 0$  ima trivijalno rešenje  $a_m = 0$ , dok za  $p = M$  ima beskonačno mnogo rešenja. Uvođenjem uslova normalizacije koeficijenata

$$\sum_{m=0}^M a_m = 1 \quad (\text{C.43})$$

se dobija sistem jednačina koji ima jedinstveno rešenje. Rešenje sistema jednačina  $c_i = 0$ ,  $i < M$ , i  $\sum_{m=0}^M a_m = 1$  su koeficijenti GKPF sa maksimalnom brzinom opadanja bočnih lukova za zadati broj koeficijenata  $M + 1$ .

### Primer C.1: GKPF sa maksimalnom brzinom opadanja bočnih lukova

Maksimalna brzina opadanja bočnih lukova GKPF sa  $M + 1$  koeficijenata je  $(2M + 1) \cdot 6$  dB/oct. Bočni lukovi GKPF sa dva koeficijenta mogu opadati sa najviše 18 dB/oct, i mogu se jednoznačno odrediti iz uslova za brzinu opadanja bočnih lukova (C.27) i uslova normalizacije koeficijenata:

$$\begin{aligned} a_0 - a_1 &= 0 \quad (\text{iz } c_0 = 0) \\ a_0 + a_1 &= 1 \quad (\text{normalizacija}) \end{aligned}$$

Rešenje ovog sistema jednačina je  $a_0 = a_1 = 1/2$ , odnosno Hanova prozorska funkcija.

Ukoliko se broj koeficijenata poveća na 3, maksimalna brzina opadanja je 30 dB/oct, i koeficijenti se jednoznačno mogu odrediti iz sistema jednačina:

$$\begin{aligned} a_0 - a_1 + a_2 &= 0 & (\text{iz } c_0 = 0) \\ -a_1 + 4a_2 &= 0 & (\text{iz } c_1 = 0) \\ a_0 + a_1 + a_2 &= 1 & (\text{normalizacija}) \end{aligned}$$

Rešenje ovog sistema jednačina je  $a_0 = 3/8$ ,  $a_1 = 1/2$  i  $a_2 = 1/8$ , odnosno Nutal 3 prozorska funkcija.

Sa četiri koeficijenta maksimalna brzina opadanja je 42 dB/oct i dobija se sistem jednačina

$$\begin{aligned} a_0 - a_1 + a_2 - a_3 &= 0 & (\text{iz } c_0 = 0) \\ -a_1 + 4a_2 - 9a_3 &= 0 & (\text{iz } c_1 = 0) \\ -a_1 + 16a_2 - 81a_3 &= 0 & (\text{iz } c_2 = 0) \\ a_0 + a_1 + a_2 + a_3 &= 1 & (\text{normalizacija}) \end{aligned}$$

koji ima rešenje  $a_0 = 5/16$ ,  $a_1 = 15/32$ ,  $a_2 = 3/16$  i  $a_3 = 1/32$ , odnosno Nutal 4 prozorska funkcija.

Zanimljivo je primetiti da se koeficijenti Nutal 3 i 4 prozorskih funkcija mogu veoma jednostavno realizovati. Imenici svih koeficijenata su stepeni dvojke i mogu se realizovati ožičenim pomeračima, odnosno bez upotrebe logičkih kola. Brojioci različiti od jedinice se mogu realizovati ožičenim pomeračima i jednim sabiračem primenom Butovog algoritma

$$3 = 2^2 - 1, \quad 5 = 2^2 + 1, \quad 15 = 2^4 - 1. \quad (\text{C.44})$$

Jednostavna realizacija koeficijenata čini osobinu (C.9), da se odbirci spektra signala uobličenog GPFK mogu izračunati iz odbiraka DFT-a, korisnom u sistemima sa limitiranim resursima.

Pored uslova  $c_i = 0$  kojima se povećava brzina opadanja bočnih lukova, moguće je postaviti i druge uslove za koje se postiže željena osobina prozorske funkcije. Iz odziva GKPF na normalizovanoj učestanosti  $F_b \notin \mathbb{Z}$

$$W(F_b) = \frac{F_b \sin(\pi F_b)}{\pi} \sum_{m=0}^M \frac{(-1)^m a_m}{F_b^2 - m^2}$$

sledi da se nula u amplitudskom odzivu može postaviti na normalizovanoj učestanosti  $F_z \notin \mathbb{Z}$  ako važi

$$\sum_{m=0}^M \frac{(-1)^m a_m}{F_z^2 - m^2} = 0. \quad (\text{C.45})$$

Uslov (C.45) se može upotrebiti za smanjivanje amplitude najvećeg bočnog luka, ili za potiskivanje smetnje (spura) na poznatoj učestanosti.

#### Primer C.2: GKPF sa nulama u amplitudskom odzivu

Sistem jednačina za GKPF sa dva koeficijenta i nulom  $F_z$  je

$$\begin{aligned}\frac{a_0}{F_z^2} - \frac{a_1}{F_z^2 - 1} &= 0 \quad (\text{iz (C.45)}) \\ a_0 + a_1 &= 1 \quad (\text{normalizacija})\end{aligned}$$

Rešenje sistema jednačina je

$$a_0 = \frac{F_z^2}{2F_z^2 - 1}, \quad a_1 = \frac{F_z^2 - 1}{2F_z^2 - 1}.$$

Prvi bočni luk GKPF sa dva koeficijenta je u intervalu  $F_b = (2, 3)$ , i postavljanjem nule na sredini drugog bina  $F_z = 5/2$  dobijaju se vrednosti

$$a_0 = \frac{25}{46}, \quad a_1 = \frac{21}{46},$$

odnosno Hemingova prozorska funkcija.

Sistem jednačina za GKPF sa tri koeficijenta i dve nule  $F_{z1,2}$  je

$$\begin{aligned}\frac{a_0}{F_{z1}^2} - \frac{a_1}{F_{z1}^2 - 1} + \frac{a_2}{F_{z1}^2 - 4} &= 0 \quad (\text{iz (C.45)}) \\ \frac{a_0}{F_{z2}^2} - \frac{a_1}{F_{z2}^2 - 1} + \frac{a_2}{F_{z2}^2 - 4} &= 0 \quad (\text{iz (C.45)}) \\ a_0 + a_1 + a_2 &= 1 \quad (\text{normalizacija})\end{aligned}$$

Rešenja sistema jednačina je

$$\begin{aligned}a_0 &= \frac{3F_{z1}^2 F_{z2}^2}{20 - 8F_{z2}^2 + 8F_{z1}^2(F_{z2}^2 - 1)} \\ a_1 &= \frac{1}{2} - \frac{3}{10 - 4F_{z2}^2 + 4F_{z1}^2(F_{z2}^2 - 1)} \\ a_2 &= \frac{(F_{z1}^2 - 4)(F_{z2}^2 - 4)}{20 - 8F_{z2}^2 + 8F_{z1}^2(F_{z2}^2 - 1)}\end{aligned}$$

Za pozicije nula  $F_{z1} = 7/2$ ,  $F_{z1} = 9/2$  rešenje je

$$a_0 = \frac{3969}{9304}, \quad a_1 = \frac{1155}{2326}, \quad a_2 = \frac{715}{9304},$$

koji su jednaki koeficijentima egzaktna Blekmanove prozorske funkcije sa tri člana.

Brzina opadanja bočnih lukova u oba slučaja je 6 dB/oct zbog toga što su stepeni slobode iskorišćeni za realizaciju nula u amplitudskom odzivu i uslovi  $c_i = 0$  nisu zadovoljeni.

Do sada su razmatrani uslovi za brzinu opadanja bočnih lukova i nulu u frekvencijskom odzivu, koji uobličavaju amplitudsku karakteristiku prozorske funkcije van glavnog luka. Uobličavanje amplitudske karakteristike u glavnom luku se najčešće koristi za projektovanje prozorskih funkcija koje imaju malu neizvesnost amplitude (scalping loss).

Mala neizvesnost amplitude u glavnom luku  $F_b = [-0.5, 0.5]$  se može postići uslovom da je amplituda frekvencijskog odziva na učestanosti  $F_u$  bliskoj  $F_b = 0.5$  jednaka odzivu u centru bina [72]:

$$W(F_u) = W(0) = a_0 \quad (\text{C.46})$$

Ako je  $W(F_u) = W(0)$  po Roleovoj teoremi postoji  $F_c \in (0, F_u)$  za koje je  $W'(F_c) = 0$ . Kako  $W(F_b)$  nije konstantno na intervalu  $(0, F_u)$  postoji minimum ili maksimum funkcije i amplitudski odziv nije monotonno opadajući, već postoji prevojna tačka.

Iz  $W(F_u) = a_0$  i (C.13) sledi uslov

$$\frac{F_u \sin(\pi F_u)}{\pi} \sum_{m=0}^M \frac{(-1)^m a_m}{F_u^2 - m^2} = a_0, \quad (\text{C.47})$$

koji se može upotrebiti u sistemu jednačina za određivanje koeficijenata prozorske funkcije sa malom neizvesnošću amplitude.

Prozorska funkcija sa  $M + 1$  koeficijenata ima

#### Primer C.3: GKPF sa malom neizvesnošću amplitude

Koeficijenti GKPF sa dva koeficijenta i malom neizvesnošću amplitude se mogu odrediti iz sistema jednačina:

$$\begin{aligned} \frac{F_u \sin(\pi F_u)}{\pi} \left( \frac{a_0}{F_u^2} - \frac{a_1}{F_u^2 - 1} \right) - a_0 &= 0 \quad (\text{iz (C.47)}) \\ a_0 + a_1 &= 1 \quad (\text{normalizacija}). \end{aligned}$$

Rešenje ovog sistema jednačina je

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{-F_u^2 \sin(\pi F_u)}{\pi F_u (F_u^2 - 1) + (1 - 2F_u^2) \sin(\pi F_u)} \\ a_1 &= \frac{(F_u^2 - 1)(\pi F_u - \sin(\pi F_u))}{\pi F_u (F_u^2 - 1) + (1 - 2F_u^2) \sin(\pi F_u)} \end{aligned}$$

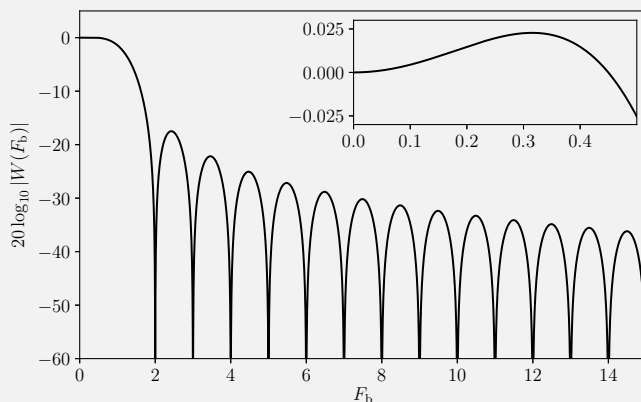
Koeficijenti  $a_0$  i  $a_1$  zavise od izbora učestanosti  $F_u$ , koja se može odrediti minimizacijom maksimalnog odstupanja amplitude:

$$\epsilon = \max_{F_b \in [0, 0.5]} |W(F_b) - W(0)|.$$

Numeričkom optimizacijom su dobijene vrednosti  $\epsilon \approx 2.7 \cdot 10^{-4}$  za  $F_u \approx 0.44966$ , i vrednosti koeficijenata su:

$$a_0 = 0.370557, \quad a_1 = 0.629443.$$

Amplitudski odziv projektovane prozorske funkcije je prikazan na slici, sa koje se vidi da je maksimalna greška određivanja amplitude u prvom binu manja od  $\pm 0.025$  dB.



Bočni lukovi projektovane prozorske funkcije opadaju sa 6 dB/oct.

Dodavanjem još jednog koeficijenta se može povećati brzina opadanja bočnih lukova, za koji je sistem jednačina:

$$\begin{aligned} a_0 - a_1 + a_2 &= 0 \quad (\text{iz } c_0 = 0) \\ \frac{F_u \sin(\pi F_u)}{\pi} \left( \frac{a_0}{F_u^2} - \frac{a_1}{F_u^2 - 1} + \frac{a_2}{F_u^2 - 4} \right) - a_0 &= 0 \quad (\text{iz (C.47)}) \\ a_0 + a_1 + a_2 &= 1 \quad (\text{normalizacija}), \end{aligned}$$

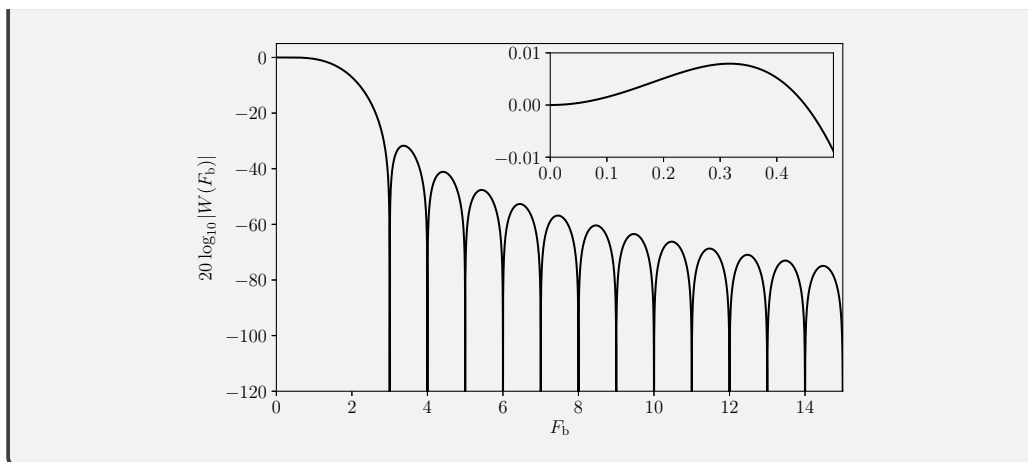
čije rešenje je

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{3F_u^2 \sin(\pi F_u)}{2(F_u^2 - 1) [\pi F_u (F_u^2 - 4) + 4 \sin(\pi F_u)]} \\ a_1 &= \frac{1}{2} \\ a_2 &= \frac{(F_u^2 - 4) [\pi F_u (F_u^2 - 1) + \sin(\pi F_u)]}{2(F_u^2 - 1) [\pi F_u (F_u^2 - 4) + 4 \sin(\pi F_u)]}. \end{aligned}$$

Numeričkom optimizacijom se dobija maksimalna greška  $\epsilon \approx 2.4 \cdot 10^{-4}$  za  $F_u \approx 0.45032$ , i vrednosti koeficijenata su:

$$a_0 = 0.265321, \quad a_1 = 0.5, \quad a_2 = 0.234679.$$

Amplitudski odziv projektovane prozorske funkcije je prikazan na slici, sa koje se može videti da je, pored brzine opadanja bočnih lukova od 18 dB/oct, smanjena i maksimalna greška određivanja amplitude u prvom binu koja je manja od  $\pm 0.01$  dB.



GKPF sa  $M + 1$  koeficijenata ima  $M$  stepena slobode koji se mogu upotrebiti za postizanje željenih osobina prozorske funkcije. Jednim stepenom slobode se može postići povećanje opadanja bočnih lukova od 12 dB/oct, uvesti nula u frekvencijskom odzivu ili smanjiti neizvesnost amplitude. U prikazanim primerima svi stepeni slobode su iskorišćeni za formiranje sistema jednačina koji ima jednoznačno rešenje. Međutim, moguće je formulisati i sistem od  $k < M$  jednačina i izvršiti numeričku optimizaciju  $M - k$  slobodnih koeficijenata radi postizanja željenog amplitudskog odziva.

## C.7 Preklapanje spektralnih replika prozorske funkcije

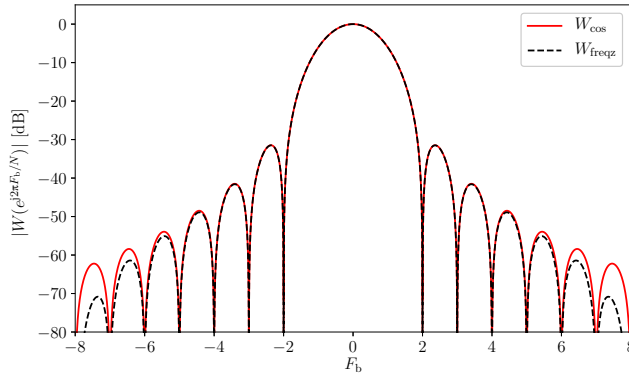
Na slici C.4 prikazano je poređenje amplitudskih odziva Hanove prozorske funkcije izračunate korišćenjem (C.13) (na slici označen sa  $W_{\cos}$ ) i funkcijom `freqz` iz  $N = 16$  odbiraka koji zadovoljavaju uslove periodičnosti (na slici označen sa  $W_{\text{freqz}}$ ). Amplitudski odziv u glavnom i prva tri bočna luka je gotovo identičan, ali se sa porastom učestanosti pojavljuju sve veće razlike.

Razlika u amplitudskim odzivima nije posledica numeričke greške - zaokruživanja, konačne tačnosti vrednosti odbiraka i sl., već je posledica preklapanja spektralnih replika prozorske funkcije. Prozorske funkcije su po svojoj prirodi konačnog trajanja u vremenskom domenu, i samim tim moraju imati beskonačno širok spektar na osnovu osobina Furijeove transformacije. Posledica beskonačne širine spektra prozorske funkcije je da uslovi teoreme odabiranja ne mogu biti zadovoljeni sa konačnim periodom odabiranja. Samim tim, u spektru odbiraka prozorske funkcije *uvek* dolazi do preklapanja spektralnih replika.

Preklapanje spektralnih replika se može pokazati na primeru Hanove prozorske funkcije, koja je vremenskom domenu definisana kao:

$$w_{\text{Hann}}(t) = \begin{cases} \frac{1 + \cos(2\pi t)}{2} & , |t| \leq \frac{1}{2} \\ 0 & , \text{inače} \end{cases} \quad (\text{C.48})$$





Slika C.4: Poređenje amplitudskih odziva Hanove prozorske funkcije izračunatih iz koeficijenata  $a_m$  i odbiraka.

i može se predstaviti i u obliku:

$$w_{\text{Hann}}(t) = \text{rect}(t) \frac{1 + \cos(2\pi t)}{2}. \quad (\text{C.49})$$

Spektar Hanove funkcije se može dobiti Furijeovom transformacijom:

$$\begin{aligned} W_{\text{Hann}}(f) &= \mathcal{F} \{w_{\text{Hann}}(t)\} (f) \\ &= \mathcal{F} \left\{ \text{rect}(t) \frac{1 + \cos(2\pi t)}{2} \right\} (f) \\ &= \mathcal{F} \{ \text{rect}(t) \} (f) * \mathcal{F} \left\{ \frac{1 + \cos(2\pi t)}{2} \right\} (f) \\ &= \frac{1}{2} \frac{\sin \pi f}{\pi f} \frac{1}{1 - f^2}. \end{aligned} \quad (\text{C.50})$$

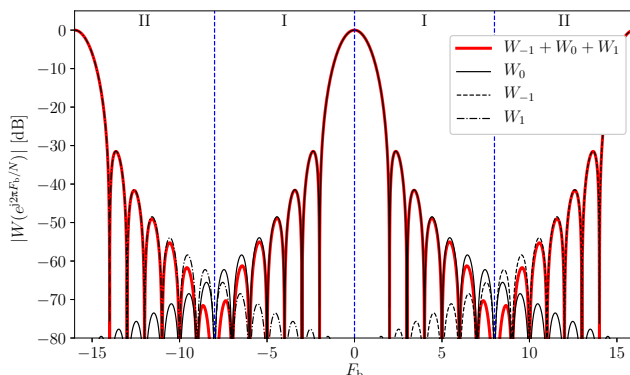
Izborom perioda odabiranja od  $T = 1/N$ , odnosno  $f_s = N$ , i odabiranjem (C.49) na intervalu  $[-1/2, 1/2)$  dobija se periodična prozorska funkcija sa  $N$  odbiraka. Spektar signala odabranog sa  $f_s = N$  (2.21) je:

$$W(f) = f_s \sum_{k=-\infty}^{+\infty} W_{\text{Hann}}(f - kf_s) = N \sum_{k=-\infty}^{+\infty} W_{\text{Hann}}(f - kN), \quad (\text{C.51})$$

i može se aproksimirati kao

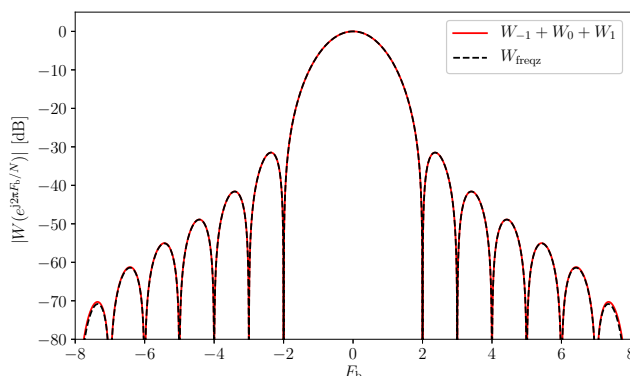
$$W(f) \approx N [W_{-1}(f) + W_0(f) + W_1(f)], \quad (\text{C.52})$$

gde je  $W_k(f) = W_{\text{Hann}}(f - kN)$ . Aproksimacija (C.52) unosi malu grešku jer je doprinos  $W_k(f)$  za  $k > 1$  zanemarljiv u prvoj Nikvistovoj zoni. Na slici C.5 prikazani su normalizovani doprinosi  $W_k(f)$  i aproksimacije  $W(f)$  (C.52), sa koje se može videti da na granici I i II Nikvistove zone dolazi do poništavanja spektralnih replika i opadanja amplitude bočnih lukova.



Slika C.5: Preklapanje spektralnih replika Hanove prozorske funkcije.

Poređenje amplitudskih odziva Hanove prozorske funkcije izračunatih iz koeficijenata  $a_m$ , uzimajući u obzir preklapanje spektralnih replika, i odbiraka je prikazano na slici C.6.



Slika C.6: Poređenje amplitudskih odziva Hanove prozorske funkcije izračunatih iz koeficijenata  $a_m$  uzimajući u obzir preklapanje spektralnih replika i odbiraka.

## C.8 Pregled osobina odabranih prozorskih funkcija

Sveobuhvatan pregled osobina i koeficijenata prozorskih funkcija prevazilazi okvire ovog dodatka, i može se naći u [73] odakle su i preuzete tabele sa osobinama. Pri izboru prozorske funkcije osobine od interesa su amplituda najvećeg bočnog luka  $NBL$ , brzina opadanja bočnih lukova  $f^{-n}$ , ekvivalentni propusni opseg šuma  $ENBW$ , trodecibelski propusni opseg  $BW_{3dB}$  i neizvesnost amplitude  $SL$ . Tabela C.1 sadrži pregled osobina prozorskih funkcija koje se često koriste u praksi, dok je u tabeli C.2 pregled osobina flat top prozorskih funkcija. U obe tabele su **podebljanim slovima** označene GKPF.

Tabela C.1: Prozorske funkcije [73].

Funkcija	$NBL$ [dB]	$f^{-n}$	$ENBW$ [bin]	$BW_{3dB}$ [bin]	$SL$ [dB]
Pravougaona	-13.3	1	1.0000	0.8845	-3.9224
Velč	-21.3	2	1.2000	1.1535	-2.2248
Trougaona	-26.5	2	1.3333	1.2736	-1.8242
<b>Han</b>	-31.5	3	1.5000	1.4382	-1.4236
<b>Heming</b>	-42.7	1	1.3628	1.3008	-1.7514
<b>Nutal 3</b>	-46.7	5	1.9444	1.8496	-0.8630
<b>Nutal 4</b>	-60.9	7	2.3100	2.1884	-0.6184
<b>Nutal 3a</b>	-64.2	3	1.7721	1.6828	-1.0453
Kajzer $\alpha = 3$	-69.6	1	1.7952	1.7025	-1.0226
<b>Nutal 3b</b>	-71.5	1	1.7037	1.6162	-1.1352
<b>Nutal 4a</b>	-82.6	5	2.1253	2.0123	-0.7321
<b>Blekman</b>	-92	1	2.0044	1.8962	-0.8256
<b>Nutal 4b</b>	-93.3	3	2.0212	1.9122	-0.8118
Kajzer $\alpha = 4$	-94.4	1	2.0533	1.9417	-0.7877
<b>Nutal 4c</b>	-98.1	1	1.9761	1.8687	-0.8506
Kajzer $\alpha = 5$	-119.8	1	2.2830	2.1553	-0.6403

$NBL$  - amplituda najvećeg bočnog luka

$ENBW$  - ekvivalentni propusni opseg šuma

$BW_{3dB}$  - 3 dB propusni opseg

$SL$  - neizvesnost amplitude (engl. scalloping loss)

Prozorske funkcije u tabeli C.1 su poređane po amplitudi najvećeg bočnog luka. Najveću amplitudu bočnog luka ima pravougaona prozorska funkcija od  $-13.3$  dB, ali i najmanju širinu propusnog opsega i ekvivalentnog opsega šuma.

Među prikazanim prozorskim funkcijama Kajzerova funkcija sa vrednošću parametra  $\alpha = 5$  ima najmanju amplitudu bočnog opsega od  $-119.8$  dB, ali širinu propusnog opsega šuma od 2.283 bina i brzinu opadanja bočnih lukova od 6 dB/oct. Zanimljivo je primećiti da najveću ekvivalentnu širinu propusnog opsega šuma od 2.31 bina ima prozorska funkcija Nutal 4, kod koje je amplituda najvećeg bočnog luka  $-60.9$  dB, ali i brzina opadanja bočnih lukova od 42 dB/oct. Pri izboru prozorske funkcije uvek se mora napraviti kompromis, i izbor primarne osobine zavisi od primene.

U nekim primenama neizvesnost amplitude prozorskih funkcija iz tabele C.1 je neprihvatljivo velika i potrebno je koristiti flat-top prozorske funkcije iz tabele C.2. Flat-top

Tabela C.2: Flat-top prozorske funkcije [73].

Funkcija	$NBL$ [dB]	$f^{-n}$	$ENBW$ [bin]	$BW_{3dB}$ [bin]	$SL$ [dB]
<b>SFT3F</b>	-31.7	3	3.1681	3.1502	+0.0082
<b>SFT3M</b>	-44.2	1	2.9452	2.9183	-0.0115
<b>FTNI</b>	-44.4	1	2.9656	2.9355	+0.0169
<b>SFT4F</b>	-44.7	5	3.7970	3.7618	+0.0041
<b>SFT5F</b>	-57.3	7	4.3412	4.2910	-0.0025
<b>SFT4M</b>	-66.5	1	3.3868	3.3451	-0.0067
<b>FTHP</b>	-70.4	1	3.4279	3.3846	+0.0096
<b>HFT70</b>	-70.4	1	3.4129	3.3720	-0.0065
<b>FTSRS</b>	-76.6	3	3.7702	3.7274	-0.0156
<b>SFT5M</b>	-89.9	1	3.8852	3.8340	+0.0039
<b>HFT90D</b>	-90.2	3	3.8832	3.8320	-0.0039
<b>HFT95</b>	-95.0	1	3.8112	3.7590	+0.0044
<b>HFT116D</b>	-116.8	3	4.2186	4.1579	-0.0028
<b>HFT144D</b>	-144.1	3	4.5386	4.4697	+0.0021
<b>HFT169D</b>	-169.5	3	4.8347	4.7588	+0.0017
<b>HFT196D</b>	-196.2	3	5.1134	5.0308	+0.0013
<b>HFT223D</b>	-223.0	3	5.3888	5.3000	-0.0011
<b>HFT248D</b>	-248.4	3	5.6512	5.5567	+0.0009

$NBL$  - amplituda najvećeg bočnog luka

$ENBW$  - ekvivalentni propusni opseg šuma

$BW_{3dB}$  - 3 dB propusni opseg

$SL$  - neizvesnost amplitude (engl. scalloping loss)

prozorske funkcije imaju značajno manju neizvesnost amplitude, koja se dobija po ceni veće širine glavnog luka, a samim tim i ekvivalentnog propusnog opsega šuma.

Za istu učestanost odabiranja  $f_s$  i broj odbiraka  $N$  flat top prozorske funkcije imaju manju frekvencijsku rezoluciju od "običnih" prozorskih funkcija. Širina bina  $f_s/N$  se može smanjiti uzimanjem većeg broja odbiraka, ali se time produžava vreme akvizicije podataka.

Koeficijenti nekih prozorskih funkcija iz tabele C.2 su dati u odeljku o flat-top prozorskim funkcijama, a ostali se mogu naći u [73].

## C.9 Nutalove prozorske funkcije

Nutalove prozorske funkcije [70] su GKPF sa tri ili četiri koeficijenta, koji su dati u tabeli C.3. Koeficijenti su optimizovani za najmanju amplituda najvećeg bočnog luka uz zadati broj koeficijenata i brzinu opadanja bočnih lukova.

Maksimalna brzina opadanja bočnih lukova funkcije sa  $M + 1$  koeficijenata se dobija kada se postave uslovi  $c_i = 0$  za  $i < M$ . U tom slučaju se dobija potpuno određeni sistem jednačina i nema preostalih stepena slobode kojima se može smanjiti amplituda najvećeg bočnog luka. U odeljku o projektovanju GKPF je pokazano kako se iz uslova maksimalne brzine opadanja mogu odrediti koeficijenti funkcija Nutal 3 i 4.

Funkcije Nutal 3a i 4a su projektovane izbacivanjem uslova  $c_1 = 0$ , odnosno  $c_2 = 0$ , čime se dobija jedan stepen slobode kojim se može smanjiti amplituda najvećeg bočnog luka po cenu smanjene brzine opadanje bočnih lukova. Izbacivanjem preostalih uslova  $c_i = 0$  su projektovane ostale Nutalove prozorske funkcije, koje imaju progresivno manju amplitudu najvećeg bočnog luka, ali i sporije opadanje bočnih lukova.

Tabela C.3: Nutalove prozorske funkcije [73].

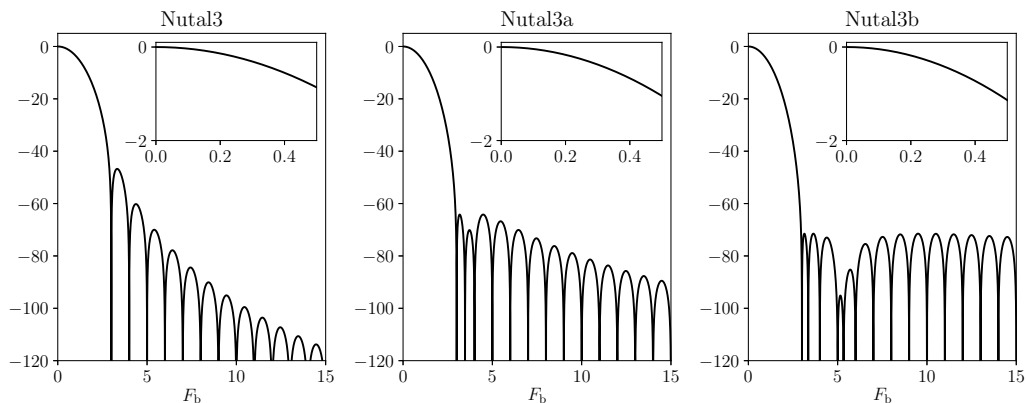
Funkcija	$a_0$	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$f^{-n}$	$NBL$
Nutal 3	0.3750000	0.5000000	0.1250000		5	-46.7
Nutal 3a	0.4089700	0.5000000	0.0910300		3	-64.2
Nutal 3b	0.4243801	0.4973406	0.0782793		1	-71.5
Nutal 4	0.3125000	0.4687500	0.1875000	0.0312500	7	-60.9
Nutal 4a	0.3389460	0.4819730	0.1610540	0.0180270	5	-82.6
Nutal 4b	0.3557680	0.4873960	0.1442320	0.0126040	3	-93.3
Nutal 4c	0.3635819	0.4891775	0.1365995	0.0106411	1	-98.1

$NBL$  - amplituda najvećeg bočnog luka

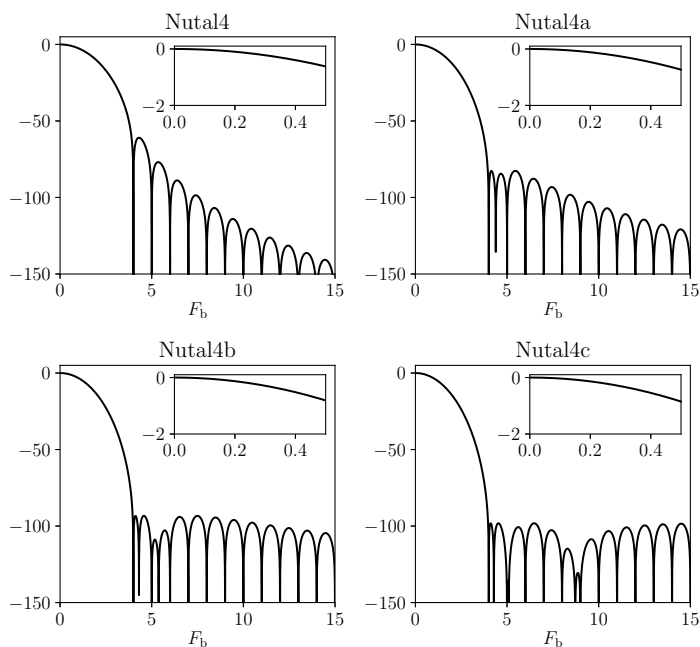
Amplitudske karakteristike Nutalovih prozorskih funkcija sa tri i četiri koeficijenta su prikazane na slikama C.7 i C.8, respektivno. Nutalove prozorske funkcije su pogodne za mnoge primene gde je amplituda najvećeg bočnog luka od primarnog interesa, uz prihvatljivo proširenje glavnog luka. Koeficijenti prozorskih funkcija Nutal 3 i Nutal 4 se mogu realizovati primenom ožičenih pomerača i Butovog algoritma sa najviše dva sabirača po koeficijentu, što ih čini pogodnim za upotrebu u sistemima sa limitiranim resursima.

## C.10 Flat-top prozorske funkcije

Flat-top prozorske funkcije se koriste u primenama gde je tačnost određivanja amplitude od primarnog značaja. Cena za malu neizvesnost amplitude je širina glavnog luka od tri do pet bina, što je okvirno dvostruka širina glavnog luka ostalih prozorskih funkcija. Karakteristično za flat-top prozorske funkcije je amplitudski odziv glavnog luka nije



Slika C.7: Amplitudski odziv Nutalovih prozorskih funkcija sa tri koeficijenta.



Slika C.8: Amplitudski odziv Nutalovih prozorskih funkcija sa četiri koeficijenta.

monotono opadajući, već inicijalno raste i ima prevojnu tačku. Pored toga, odbirci nisu striktno pozitivni, već postoje i negativni odbirci.

Jedan od retkih radova koji razmatra flat-top prozorske funkcije je [72], u kojem su dati koeficijenti prozorskih funkcija iz tabele C.4. Imena prozorskih funkcija iz su napravljena

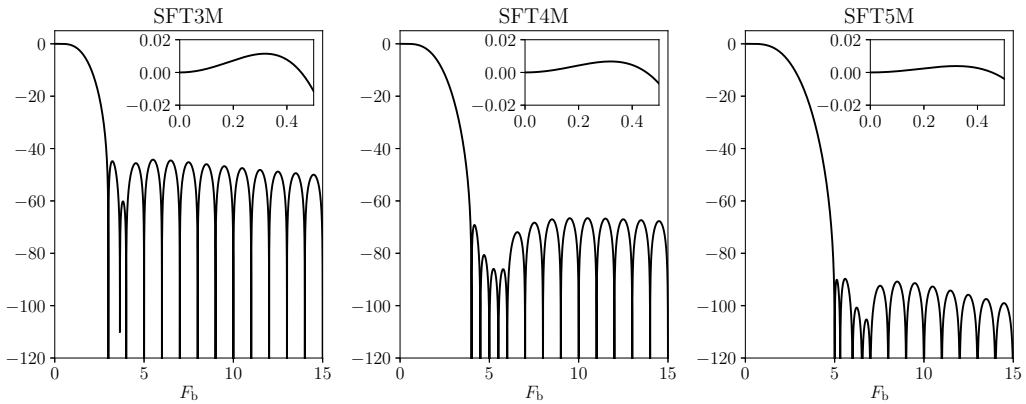
po ključu: S po autoru Salvatore, FT za flat top, broj koeficijenata, i sufiks F za funkcije sa brzim opadanjem bočnih lukova ili M za minimalnu amplitudu bočnih lukova.

Tabela C.4: Flat top prozorske funkcije [73, 72].

Funkcija	$a_0$	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$f^{-n}$	$NBL$
SFT3F	0.26526	0.50000	0.23474			3	-31.7
SFT4F	0.21706	0.42103	0.28294	0.07897		5	-44.7
SFT5F	0.18810	0.36923	0.28702	0.13077	0.02488	7	-57.3
SFT3M	0.28235	0.52105	0.19659			1	-44.2
SFT4M	0.24191	0.46084	0.25538	0.04187		1	-66.5
SFT5M	0.20967	0.40733	0.28122	0.09267	0.0091036	1	-89.9

$NBL$  - amplituda najvećeg bočnog luka

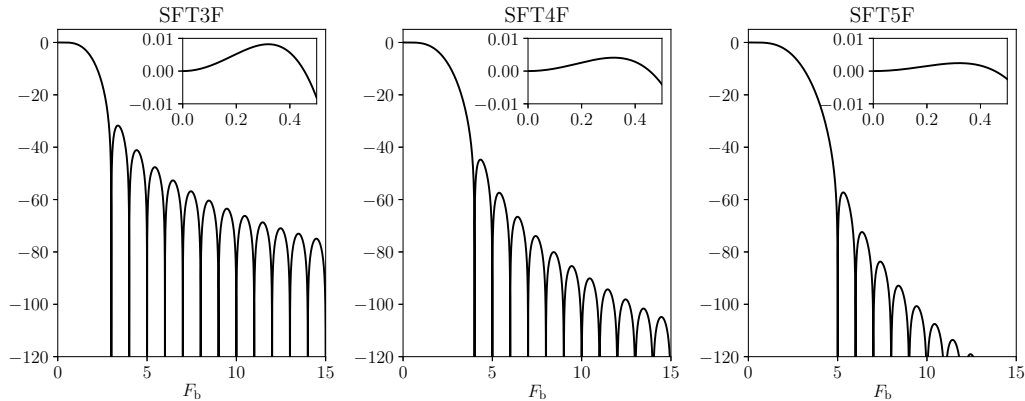
Amplitudski odzivi flat top prozorskih funkcija sa maksimalnom brzinom opadanja bočnih lukova SFT3F, SFT4F i SFT5F iz literature [72] su prikazani na slici C.9. Sa porastom broja koeficijenata povećava se i brzina opadanja bočnih lukova, ali i širina glavnog luka i ekvivalentni propusni opseg šuma (tabela C.2).



Slika C.9: Amplitudski odziv flat top prozorskih funkcija sa maksimalnom brzinom opadanja bočnih lukova [72].

Odzivi prozorskih funkcija sa minimalnom amplitudom najvećeg bočnog luka SFT3M, SFT4M i SFT5M prikazani na slici C.10. Prozorska funkcija SFT4M nije optimalna u smislu najvećeg potiskivanja bočnih lukova pošto postoje prozorske funkcije sa četiri koeficijenta koje imaju manju amplitudu najvećeg bočnog luka, npr. FTHP iz tabele C.5.

Koeficijenti flat top prozorskih funkcija koje se koriste u mernoj opremi su dati u



Slika C.10: Amplitudski odziv flat top prozorskih funkcija sa minimalnom amplitudom bočnih lukova [72].

tabeli C.5. Prozorska funkcija FTNI se koristi u nekim uređajima kompanije National Instruments, kod koje je najveći bočni luk potisnut za 44.4 dB i neizvesnost amplitude je 0.0169 dB. U mernoj opremi kompanije Hewlett Packard koristila se prozorska funkcija označena sa FTHP sa neizvesnošću amplitude od 0.0096 dB i potiskivanjem bočnog luka od 70.4 dB. Koeficijenti prozorske funkcije u instrumentima kompanije Agilent nisu javno dostupni, ali je merenjem utvrđeno da je frekvencijski odziv gotovo identičan prozorskoj funkciji HFT95 [73]. U analizatoru spektra SR785 kompanije Stanford Research koristi se prozorska funkcija FTSRS.

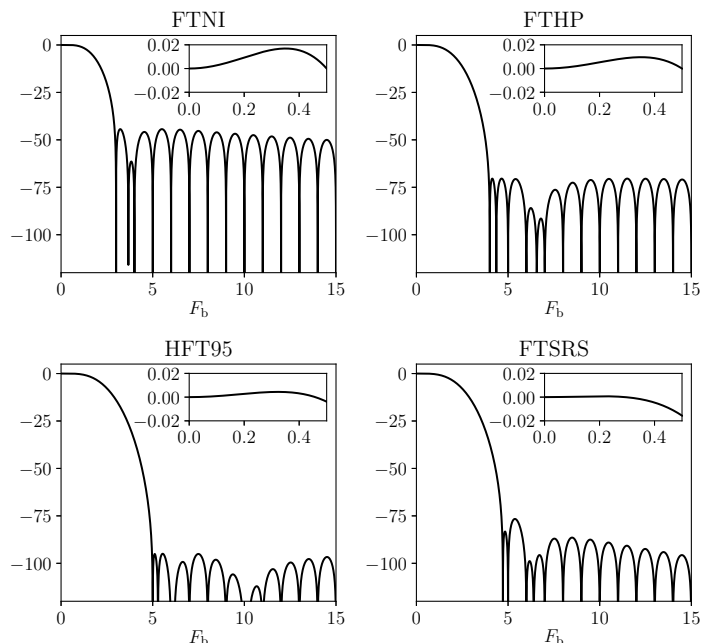
Tabela C.5: Flat top prozorske funkcije u mernim instrumentima [73].

Funkcija	$a_0$	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$f^{-n}$	$NBL$
FTNI	0.281064	0.520897	0.198040			1	-44.4
FTHP	1.0	1.912511	1.079173	0.183263		1	-70.4
HFT95	1	1.938338	1.304520	0.402827	0.035066	1	-95.0
FTSRS	1.0	1.93	1.29	0.388	0.028	3	-76.6

$NBL$  - amplituda najvećeg bočnog luka

Amplitudski odzivi prozorskih funkcija korišćenih u mernim instrumentima iz tabele C.5 su prikazani na slici C.11. Kao što je i očekivano, prozorske funkcije sa više koeficijenata imaju veće potiskivanje bočnih lukova i veći ekvivalentni propusni opseg šuma.





Slika C.11: Amplitudski odziv flat top prozorskih funkcija iz tabele C.5.

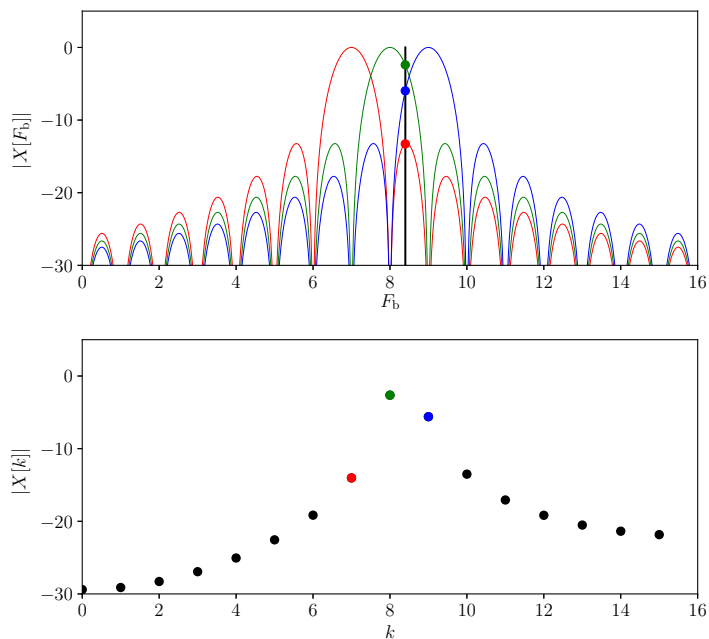
## C.11 Izbor prozorske funkcije

Ne postoji "univerzalna" prozorska funkcija koja bi se mogla koristiti u svim primenama, već se mora napraviti kompromis između širine glavnog luka, amplitude najvećeg bočnog luka, brzine opadanja bočnih lukova itd. Pri izboru prozorske funkcije potrebno je uzeti u obzir osobine signala i primene.

Na primer, kada je potrebno razlučiti dve spektralne komponente bliskih učestanosti i sličnih amplituda glavni kriterijum pri izboru prozorske funkcije je širina glavnog luka, koja je najmanja kod pravougaone prozorske funkcije. Pravougaona prozorska funkcija je najbolji izbor kada su poznate učestanosti spektralnih komponenti signala i izborom učestanosti odabiranja se mogu zadovoljiti uslovi koherentnog odabiranja.

Pravougaona prozorska funkcija nije adekvatan izbor kada spektralne komponente ulaznog signala nisu tačno na učestanostima centara DFT binova, npr. kada spektar ulaznog signala nije poznat, ili se učestanost odabiranja ne može proizvoljno izabrati. Na slici C.12 gore je prikazan ulazni signal na normalizovanoj učestanosti od  $F_b = Nf_{\text{sig}}/f_s = 8.4$  i amplitudski odziv tri susedna bina DFT-a, dok su na slici dole prikazani odbirci spektra dobijenog DFT-om iz  $N = 32$  odbirka signala. Svi odbirci spektra su nenulti jer učestanost ulaznog signala nije jednaka centralnoj učestanosti DFT bina i dolazi do curenja spektra.

Amplitudski odziv svih prozorskih funkcija van glavnog luka ima nule na centralnim učestanostima ostalih binova, i na učestanostima na kojima je eksplicitno uvedena nula



Slika C.12: Curenje spektra.

(primer C.6), dok na ostalim učestanostima ima nenulti odziv. U primeru sa slike C.12 učestanost ulaznog signala je  $F_b = 8.4$ .

Međutim, u slučaju kada se amplitude spektralnih komponenti značajno razlikuju potrebno je uzeti u obzir i amplitudu najvećeg bočnog luka, koja je u slučaju pravougone prozorske funkcije samo -13 dB.

U primenama gde je tačnost određivanja amplitude od primarnog značaja, kao što su merni instrumenti, koriste se prozorske funkcije sa malom neizvesnošću amplitude, tzv. funkcije sa "ravnim vrhom" (engl. flat top), koje imaju značajno širi glavni luk od ostalih prozorskih funkcija.