

# 7

## Polifazne strukture

Polifazna dekompozicija FIR filtra je  
banka filtara

## 7.1 Polifazna dekompozicija FIR filtra

Polifaznom dekompozicijom se FIR filter opšteg oblika

$$H(z) = \sum_{n=0}^N h[n]z^{-n} \quad (7.1)$$

može predstaviti kao suma  $M$  filtara koji su polinomi po  $z^{-M}$ . Koeficijenti  $z$  transformacije FIR filtra  $H(z)$  se mogu grupisati na sledeći način:

$$\begin{aligned} H(z) = & z^0 (h[0] + h[M]z^{-M} + \dots) \\ & + z^{-1} (h[1] + h[M+1]z^{-M} + \dots) \\ & + z^{-2} (h[2] + h[M+2]z^{-M} + \dots) \\ & + \vdots \\ & + z^{-(M-1)} (h[M-1] + h[2M-1]z^{-M} + \dots) \end{aligned} \quad (7.2)$$

Članovi u zagradama imaju oblik FIR filtra po  $z^M$  i može se napisati:

$$\begin{aligned} H(z) = & z^0 H_0(z^M) \\ & + z^{-1} H_1(z^M) \\ & + z^{-2} H_2(z^M) \\ & + \vdots \\ & + z^{-(M-1)} H_{M-1}(z^M) \end{aligned} \quad (7.3)$$

gde su  $H_i(z)$ :

$$H_i(z) = \sum_{n=0}^{N/M} h[nM+i]z^{-n} = \sum_{n=0}^{N/M} h_i[n]z^{-n}, \quad (7.4)$$

$$h_i[n] = h[nM+i]. \quad (7.5)$$

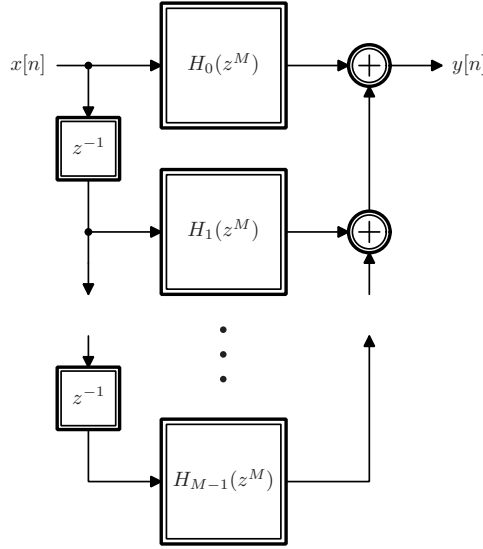
Red filtra se formalno može povećati na  $\hat{N} = qM$  dodavanjem  $p = M\lceil N/M \rceil - N$  nulatih koeficijenata ukoliko  $N/M$  u (7.4) nije ceo broj.

Filtiri  $H_i(z)$  se nazivaju polifaznim komponentama  $H(z)$ , pošto su dobijeni razdvajanjem koeficijenata  $H(z)$  na  $M$  komponenti  $H_i(z)$ . Razdvajanje koeficijenata  $H(z)$  na  $M$  filtara za posledicu ima da frekvencijski odzivi polifaznih komponenti  $H_i(z)$  sadrže  $M$  replika spektra originalnog filtra, ali sa različitim faznim stavovima po čemu su komponente  $H_i(z)$  i dobile naziv.

Upotrebom izraza za polifazne komponente  $H_i(z)$  (7.4) može se napisati:

$$H(z) = \sum_{i=0}^{M-1} H_i(z^M)z^{-i} \quad (7.6)$$

Polifazna dekompozicija FIR filtra (7.6), prikazana na slici 7.1, je po strukturi direktna realizacija u kojoj su skalarni koeficijenti zamenjeni polifaznim komponentama filtra  $H_i(z^M)$  (7.4). Osobina polifazne dekompozicije filtra da su sve polifazne komponente  $H_i(z^M)$  polinomi po  $z^{-M}$  je od suštinskog značaja za sisteme sa više učestanosti odabiranja jer se mogu primeniti plemeniti identiteti. Primenom plemenitih identiteta se može zameniti redosled filtra i promene učestanosti čime se značajno smanjuje broj računskih operacija.



Slika 7.1: Polifazna dekompozicija FIR filtra.

Polifazna reprezentacija FIR filtra (7.6) ima isti impulsni odziv kao (7.1) pošto je dobijen grupisanjem koeficijenata u polifazne komponente  $H_i(z^M)$ . Impulsni odziv pojedinačnih članova  $h_M^i[n]$  sume (7.6) oblika  $z^{-i}H_i(z^M)$  je

$$h_M^i[n] = \overbrace{0, \dots, 0}^i, \overbrace{h[i], 0, \dots, 0}^{M-1}, \overbrace{h(i+M), 0, \dots, 0}^{M-1}, \dots \quad (7.7)$$

i može se dobiti anuliranjem odbiraka impulsnog odziva  $h[n]$  signalom  $s_M^i[n]$ :

$$h_M^i[n] = s_M^i[n]h[n]. \quad (7.8)$$

Spektar signala sa anuliranim odbircima je razmatran u odeljku 6.2 i spektar polifaznih komponenti se može odrediti korišćenjem rezultata (6.26). Spektar zakašnjenih polifaznih komponenti  $z^{-i}H_i(z^M)$  sadrži pomerene spektralne replike filtra  $H(\Omega)$  koje su fazno pomerene za  $e^{-j2\pi ki/M}$ :

$$\mathcal{F}\{s_M^i[n]h[n]\}(\Omega) = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} X\left(\Omega - \frac{2\pi k}{D}\right) e^{-j2\pi ki/M}. \quad (7.9)$$

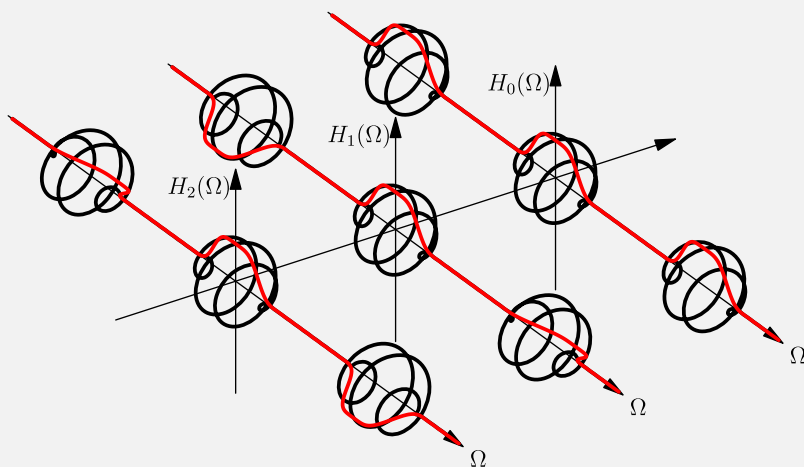
Fazni stavovi pomerenih spektralnih replika  $X(\Omega - 2\pi k/D) e^{-j2\pi k i/M}$  su kompleksni korjeni jedinice i u zbiru se poništavaju za  $k > 0$ .

Poništavanje spektralnih replika polifaznih komponenti za  $k > 0$  je od suštinskog značaja za sisteme sa više učestanosti odabiranja. Spektri signala u polifaznim granama filtra sadrže neželjene spektralne replike, ali se one poništavaju sabiranjem signala iz svih polifaznih grana. Poništavanje spektralnih replika je takođe ključno pri promeni učestanosti odabiranja pošto dolazi do preklapanja svih spektralnih replika u spektrima signala pojedinačnih polifaznih grana.

### Primer 7.1: Frekvencijske karakteristike polifaznih komponenti

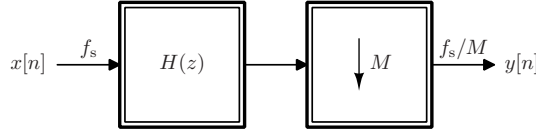
Na slici su prikazani kompleksni odzivi tri polifazne komponente  $z^{-i} H_i(z^3)$  FIR filtra u zavisnosti od kružne digitalne učestanosti  $\Omega$ . Moduo frekvencijskog odziva  $i$ -te polifazne komponente je nacrtani crvenom bojom i simbolično rotiran za fazni stav  $k$ -te spektralne replike  $e^{-j2\pi k i/3}$ .

Fazni stav spektralnih replika oko  $\Omega = 0$  je isti u svim polifaznim komponentama i one se konstruktivno sabiraju. Ostale spektralne replike imaju različite faze u različitim polifaznim komponentama i poništavaju se. Frekvencijska karakteristika zbira svih polifaznih komponenti sadrži samo jednu spektralnu repliku usled konstruktivnog sabiranja oko  $\Omega = 0$  i poništavanja ostalih spektralnih replika.



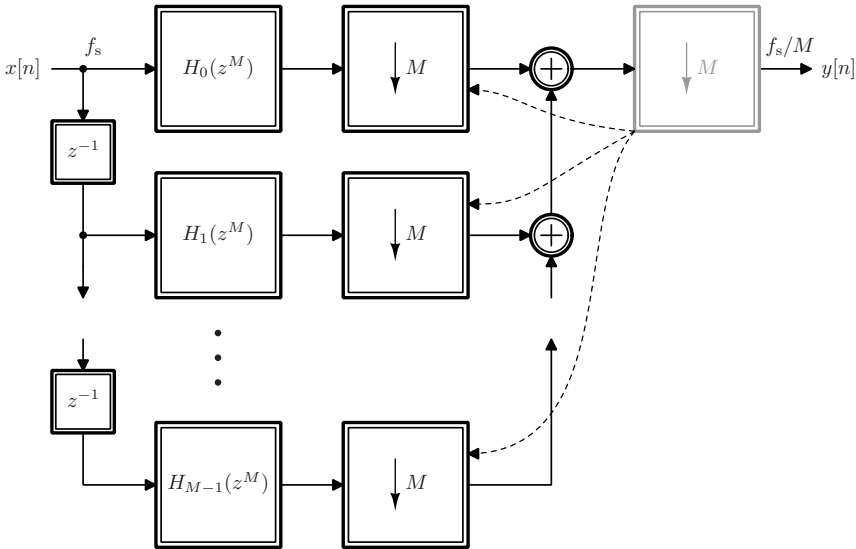
## 7.2 Polifazni decimator

Decimator sa odnosom smanjenja učestanosti odabiranja od  $M$  puta, prikazan na slici 7.2, nije efikasan sa stanovišta broja računskih operacija jer se  $M - 1$  od  $M$  izračunatih odbiraka na izlazu filtra odbacuje. Primenom plemenitih identiteta bi se moglo izbeći izračunavanje odbiraka koji se odbacuju zamenom redosleda filtra i kompresora, kao što je pokazano u prethodnom poglavlju.



Slika 7.2: Decimator sa odnosom smanjenja učestanosti odabiranja od  $M$  puta.

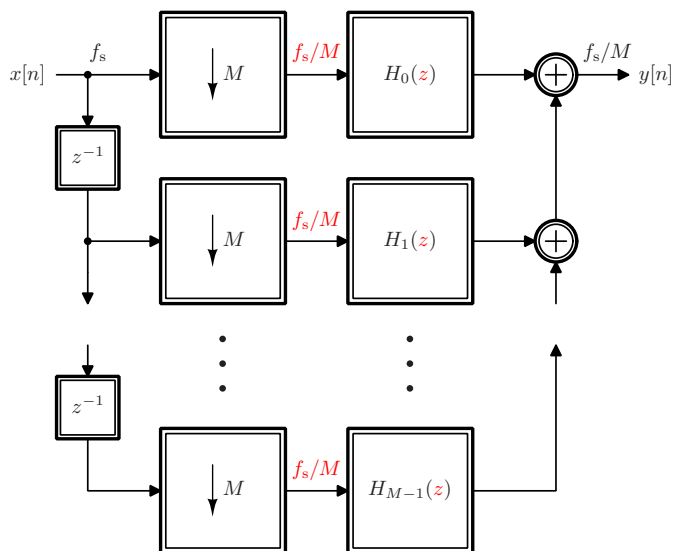
Redosled filtra i kompresora sa odnosom smanjenja učestanosti od  $M$  puta se može zameniti samo ako je filtar oblika  $H(z^M)$ , što se može obezbediti polifaznom dekompozicijom filtra. Polifaznom dekompozicijom se proizvoljni FIR filtar može rastaviti na  $M$  polifaznih komponenti oblika  $H_i(z^M)$ , kao što je prikazano na slici 7.3. Kompresor na izlazu filtra, prikazan sivom bojom, se primenom svojstva aditivnosti promene učestanosti odabiranja može zameniti kompresorima u polifaznim granama, što je simbolično prikazano isprekidanim linijama.



Slika 7.3: Polifazni filtar sa kompresorom u svakoj grani.

Navedenim transformacijama su se stekli uslovi za primenu plemenitog identiteta pošto u svakoj grani postoji filtar oblika  $H(z^M)$  na čijem izlazu je kompresor sa odnosom smanjenja učestanosti od  $M$  puta. Primenom plemenitog identiteta dobija se struktura polifaznog filtra sa kompresorima prikazana na slici 7.4, na kojoj se mogu uočiti dve važne osobine naglašene crvenom bojom.

Prva važna osobina je da polifazne komponente filtra više nisu oblika  $H(z^M)$ , već  $H(z)$ , čime je red polifaznog filtra smanjen  $M$  puta. Ukupan broj koeficijenata je u oba slučaja isti, ali je broj potrebnih memorijskih elemenata, koji je jednak redu filtra, značajno smanjen. U principu bi se broj memorijskih elemenata mogao svesti na isti broj



Slika 7.4: Polifazni filter sa kompresorom posle primene plemenitih identiteta.

u oba slučaja, ali bi to značajno povećalo složenost implementacije filtra oblika  $H(z^M)$ .

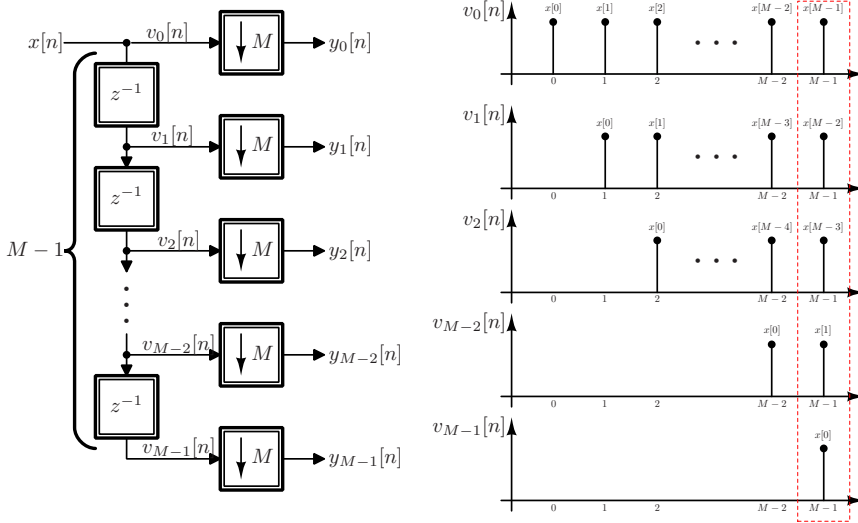
Druga važna osobina je da se filtri u polifaznim komponentama izračunavaju sa učestanošću odabiranja  $f_s/M$  i da se nijedan izračunati odbirak ne odbacuje. Zahvaljući ovoj osobini postiže se značajna ušteda u broju računskih operacija koja raste sa odnosom smanjenja učestanosti  $M$ .

Takođe je važno naglasiti da primenjene transformacije ne menjaju funkcionalnost, odnosno da su strukture na slikama 7.2 i 7.4 ekvivalentne i da za iste ulazne odbirke izračunavaju iste izlazne odbirke. Jedina razlika je u broju izvršenih računskih operacija po odbirku izlaznog signala. Dalje transformacije radi pojednostavljenja realizacije se mogu izvršiti nad linijom za kašnjenje sa kompresorima, koja je predmet analize u narednom odeljku.

### 7.3 Linija za kašnjenje sa kompresorima

U prethodnom odeljku je pokazano kako se polifaznom dekompozicijom filtra dobija struktura na koju je moguće primeniti plemeniti identitet, kojim se vrši zamena redosleda kompresora i filtra. Ulazi pojedinačnih grana polifaznog filtra sa kompresorima se dovode sa izlaza linije za kašnjenje, koja se dalje ne može uprostiti zbog toga što kašnjenja nisu umnošci odnosa promene učestanosti odabiranja  $M$ . Razmatranjem redosleda kojim linija za kašnjenje sa kompresorima prosleđuje odbirke polifaznim komponentama  $H_i(z)$  se može doći do pojednostavljene realizacije.

Linija za kašnjenje sa  $M$  izlaza, prikazana na slici 7.5, sadrži  $M - 1$  kašnjenja i na svojim izlazima ima zakašnjene ulazne odbirke. Vrednost odbirka na  $i$ -tom izlazu linije za kašnjenje  $v_i[n]$ ,  $i = 0, \dots, M - 1$ , je jednaka ulaznom odbirku zakašnjenom za  $i$  taktova  $v_i[n] = x[n - i]$ , kao što je ilustrovano na slici 7.5.



Slika 7.5: Linija za kašnjenje sa kompresorima.

Svi kompresori prosleđuju odbirke na svojim ulazima u istom taktu, na slici je to takt  $M - 1$ , dok narednih  $M - 1$  odbiraka odbacuju. Vrednosti ulaznih odbiraka  $x[n]$  koje kompresori prosleđuju na svoje izlaze  $y_i[n]$  u taktu  $M - 1$  su oivičeni isprekidanom crvenom linijom na slici odakle se vidi da je

$$y_i[0] = x[M - 1 - i], \quad (7.10)$$

odnosno da su odbirci na izlazima kompresora u obrnutom redosledu u odnosu na redosled ulaznih odbiraka. Izlazi kompresora se ne menjaju narednih  $M$  taktova pošto je učestanost odabiranja na njihovim izlazima  $M$  puta manja. U opštem slučaju  $n$ -ti odbirak na izlazu linije za kašnjenje sa kompresorima je:

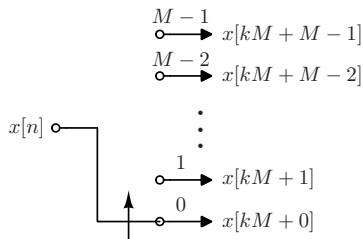
$$y_i[n] = x[M(n + 1) - 1 - i]. \quad (7.11)$$

Na osnovu izloženog sledi da linija za kašnjenje sa kompresorima na svojim izlazima ima vrednosti prethodnih  $M$  ulaznih odbiraka u obrnutom redosledu i da se vrednosti izlaza istovremeno menjaju u svakom  $M$ -tom taktu. Linija za kašnjenje sa kompresorima se može zameniti komutatorom koji ciklično prosleđuje ulazne odbirke ukoliko se uvede modifikacija da se vrednosti izlaza ne menjaju istovremeno u  $M$ -tom taktu, već da se mogu menjati kako pristižu odbirci ulaznog signala. Komutator, prikazan na slici 7.6, u svakom taktu ciklično prosleđuje ulazni odbirak  $x[n]$  na  $m$ -ti izlaz, gde je

$$m = n \bmod M. \quad (7.12)$$

Učestanost odabiranja na izlazima komutatora, u smislu učestanosti promene vrednosti odbirka na pojedinačnim izlazima, je  $M$  puta manja od učestanosti odabiranja ulaznog

signala  $x[n]$ , isto kao i kod linije za kašnjenje sa kompresorima. Razlika je samo u tome što se kod linije za kašnjenje sa kompresorima izlazi menjaju u svakom  $M$ -tom taktu ulaznog signala istovremeno, dok se kod komutatora u svakom taktu menja jedan izlaz.



Slika 7.6: Komutator.

Očigledna prednost komutatora u odnosu na liniju za kašnjenje sa kompresorima je u tome što za realizaciju nisu potrebni memorijski elementi. Manje očigledna, ali važnija prednost komutatora se ogleda u tome što se izlazi menjaju sukcesivno, a ne istovremeno. Izlazi linije za kašnjenje sa kompresorima, odnosno komutatora, su ulazi filtara koji realizuju polifazne komponente  $H_i(z)$ . Ukoliko se vrednosti na ulazima filtara menjaju istovremeno, potrebno je sračunati izlazne odbirke svih  $M$  polifaznih komponenti istovremeno, dok je u slučaju sukcesivne promene vrednosti potrebno izračunati vrednost samo jedne polifazne komponente i na kraju ih sabrati.

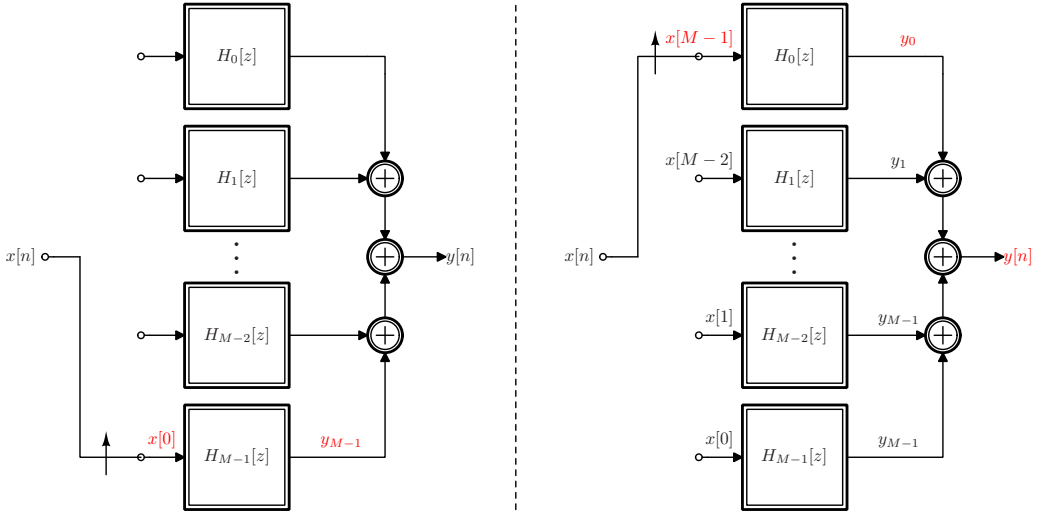
Broj računskih operacija u jedinici vremena je u oba slučaja isti, pošto se u slučaju istovremene promene vrednosti izračunava  $M$  filtara na  $M$  puta manjoj učestanosti odabiranja, dok se u slučaju sukcesivne promene vrednosti u svakom taktu izračunava vrednost jednog filtra, ali na učestanosti ulaznog signala. Međutim, u slučaju sukcesivne promene vrednosti odbiraka, odnosno korišćenjem komutatora za prosleđivanje ulaznih odbiraka, moguće je iskoristiti iste hardverske resurse za izračunavanje svih filtara, čime se postiže velika ušteda u potrebnim resursima. Sukcesivna obrada je takođe pogodna i za softverske implementacije pošto se odbirci odmah koriste za izračunavanja i ne moraju se čuvati u memoriji.

## 7.4 Polifazni decimator sa komutatorom

U prethodnom odeljku je pokazano da se linija za kašnjenje sa kompresorima se može zameniti komutatorom. Ulazni odbirci se prosleđuju polifaznim komponentama filtra u istom redosledu u oba slučaja, s' razlikom da linija za kašnjenje sa kompresorima prosleđuje odbirke istovremeno svakih  $M$  taktova, dok komutator prosleđuje ulazne odbirke sukcesivno u svakom taktu.

Zamenom linije za kašnjenje sa kompresorima u blok dijagramu sa slike 7.4 komutatorom dobija se struktura sa slike 7.7. Odbirci ulaznog signala se sukcesivno prosleđuju pojedinačnim polifaznim komponentata u redosledu  $M - 1, M, \dots, 0$  na učestanosti odabiranja ulaznog signala  $f_s$ . Svakih  $M$  taktova se generiše jedan odbirak izlaznog signala  $y[n]$ , čija učestanost odabiranja iznosi  $f_s/M$ .





Slika 7.7: Polifazni decimator sa komutatorom.

Prvi odbirak ulaznog signala  $x[0]$  se koristi za izračunavanje odziva  $y_{M-1}$  polifazne komponente  $H_{M-1}(z)$ , kao što je prikazano na slici 7.4 levo, dok se ostale polifazne komponente ne izračunavaju. Naredni odbirci ulaznog signala  $x[1], \dots, x[M-1]$  se prosleđuju polifaznim komponentama  $H_{M-2}(z), \dots, H_0(z)$  i izračunavaju se odzivi  $y_{M-2}, \dots, y_0$ . Vrednost izlaznog odbirka  $y[n]$  se zatim izračunava sumiranjem odziva svih polifaznih komponenti:

$$y[n] = \sum_{i=0}^{M-1} y_i, \quad (7.13)$$

kao što je prikazano na slici 7.4 desno. Izračunavanjem odbirka izlaznog signala  $y[n]$  završava se jedan ciklus od  $M$  taktova i započinje se sledeći prosleđivanjem odbirka ulaznog signala  $x(M)$  polifaznoj komponenti  $H_{M-1}(z)$ .

Prednost korišćenja komutatora umesto linije za kašnjenje sa kompresorima je višestruka. Komutator ne koristi memorijske elemente za čuvanje prethodnih vrednosti odbiraka ulaznog signala, već ih samo prosleđuje. Pored toga, realizacija polifaznog decimatora sa komutatorom u svakom taktu ulaznog signala izračunava vrednost samo jedne od  $M$  polifaznih komponenti, odnosno vrednost izlaznog odbirka se izračunava sukcesivno. U realizaciji linijom za kašnjenje sa kompresorima se vrednosti svih  $M$  polifaznih komponenti izračunavaju paralelno, ali sa  $M$  puta manjom učestanošću. Broj računskih operacija je u oba slučaja isti, ali sukcesivno izračunavanje vrednosti polifaznih komponenti omogućava da se hardverski resursi potrebni za realizaciju jedne polifazne komponente iskoriste za izračunavanje svih komponenti, čime se ostvaruje značajna ušteda u resursima.

Polifazna realizacija decimatora je značajno efikasnija od direktne implementacije (slika 7.2) po pitanju broja računskih operacija u sekundi. U direktnoj implementaciji

decimatora FIR filter propusnik niskih učestanosti  $H(z)$  se izračunava za svaki odbirak ulaznog signala  $x[n]$ , a zatim se  $M-1$  od  $M$  izračunatih odbiraka odbacuje u kompresoru. Ukupan broj operacija u sekundi direktne realizacije decimatora je

$$N_{\text{ops,dir}} = f_s N (\text{MUL} + \text{ADD}) \quad (7.14)$$

gde je  $N$  broj koeficijenata.

Za razliku od direktne realizacije, u polifaznoj realizaciji decimatora se za svaki odbirak ulaznog signala  $x[n]$  izračunava vrednost jedne polifazne komponente  $H_i(z)$  koja ima  $N/M$  koeficijenata. Pored toga, izračunati odbirci se ne odbacuju zbog toga što je primenom plemenitog identiteta zamenjen redosled filtra i kompresora. Ukupan broj operacija polifazne realizacija decimatora u sekundi iznosi:

$$N_{\text{ops,poly}} = \frac{f_s N}{M} (\text{MUL} + \text{ADD}) \quad (7.15)$$

Iz (7.14) i (7.15) sledi

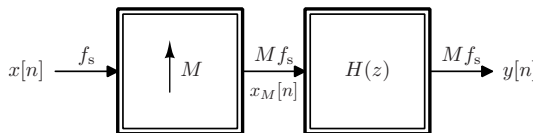
$$k = \frac{N_{\text{ops,dir}}}{N_{\text{ops,poly}}} = M, \quad (7.16)$$

odnosno da je polifazna realizacija decimatora  $M$  puta efikasnija po pitanju broja izvršenih operacija u sekundi.

Realizacije decimatora - direktna i polifazna - su ekvivalentne u smislu da za iste ulazne odbirke daju iste izlazne odbirke i sa stanovišta funkcionalnosti je svejedno koja realizacija se koristi. Međutim, polifazna implementacija je  $M$  puta efikasnija po pitanju broja računskih operacija i hardverskih resursa (odeljak 7.9) i stoga je od velikog praktičnog značaja.

## 7.5 Polifazni interpolator

Interpolator prikazan na slici 6.10 povećava učestanost odabiranja ulaznog signala umetanjem nula i potiskivanjem spektralnih replika. Ekspander povećava učestanost odabiranja ulaznog signala  $M$  puta umetanjem  $M-1$  nula između uzastopnih odbiraka ulaznog signala  $x[n]$ , čime se dobija signal  $x_M[n]$  na učestanosti odabiranja  $Mf_s$ . U odeljku 6.4 je pokazano da signal na izlazu ekspandera sadrži spektralne replike ulaznog signala koje se potiskuju filtrom  $H(z)$ .

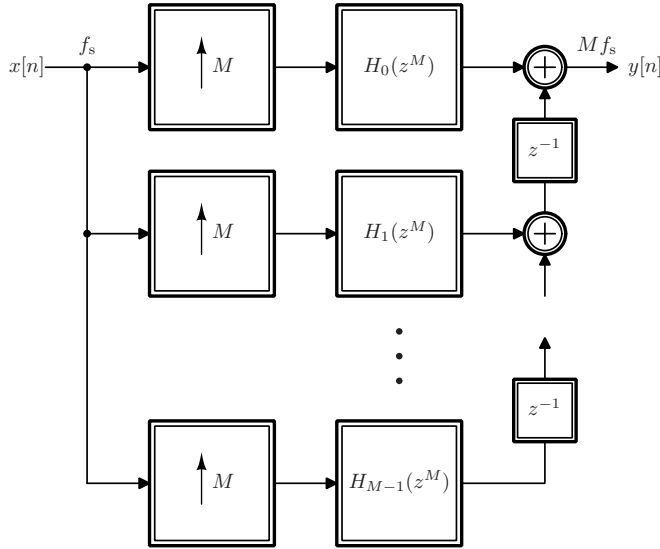


Slika 7.8: Interpolator sa odnosnom promene učestanosti odabiranja od  $M$  puta.

U  $M$  odbiraka signala na ulazu filtra  $H(z)$  je jedan odbirak ulaznog signala i  $M-1$  nultih odbiraka koje je umetnuo ekspander. Usled toga, samo  $\lfloor N/M \rfloor$  elemenata za kašnjenje u filtru sa  $N$  koeficijenata sadrži nenulte odbirke i veliki broj računskih operacija se

nepotrebno izvršava. Izvršavanje nepotrebnih računskih operacija nad nultim odbircima se može izbeći zamenom redosleda filtra i ekspandera primenom plemenitog identiteta.

Zamena redosleda filtra i ekspandera sa odnosom promene učestanosti  $M$  se može izvršiti samo ako je filtar oblika  $H(z^M)$ . Filtar  $H(z)$  se primenom polifazne dekompozicije može rastaviti na  $M$  polifaznih komponenti oblika  $H_i(z^M)$ , kao što je prikazano na slici 7.9. Pored toga, primenom svojstva aditivnosti promene učestanosti odabiranja ekspander na ulazu filtra se može zameniti sa  $M$  ekspandera u pojedinačnim polifaznim granama.



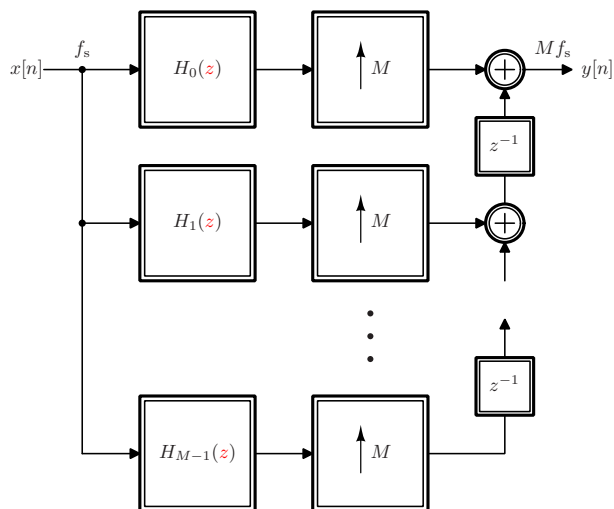
Slika 7.9: Polifazni filtar sa ekspanderima u svakoj grani.

Posle primene opisanih transformacija svaka polifazna grana sadrži ekspander sa odnosom promene učestanosti  $M$  i FIR filtar oblika  $H_i(z^M)$ . Pošto su zadovoljeni uslovi plemenitih identiteta moguće je zameniti redosled filtra i ekspandera, kao što je prikazano na slici 7.10. Filtri u polifaznim granama su posle primene plemenitih identiteta oblika  $H_i(z)$ , što je na slici 7.10 naglašeno crvenom bojom, i u njima se ne izvršavaju nepotrebne računске operacije nad nultim odbircima.

Kao i u slučaju polifaznog decimatora, primenjene transformacije ne menjaju funkcionalnost interpolatora i za iste ulazne odbirke obe realizacije - direktna i polifazna - generišu iste izlazne odbirke. Realizacije se međutim razlikuju u broju izvršenih računskih operacija u sekundi, ili ekvivalentno računskih operacija po izlaznom odbirku, gde je polifazna realizacija  $M$  puta efikasnija.

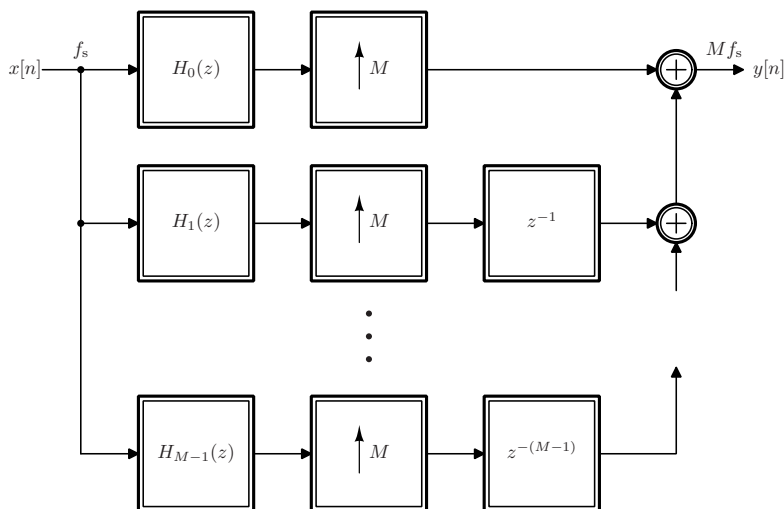
## 7.6 Ekspanderi sa linijom za kašnjenje

Na izlazu polifaznog interpolatora se nalaze ekspanderi sa linijom za kašnjenje. Linija za kašnjenje se može zameniti kašnjenjima u pojedinačnim polifaznim granama, kao što



Slika 7.10: Polifazni filter sa ekspanderima posle primene plemenitog identiteta.

je prikazano na slici 7.11, čime se pojednostavljuje analiza.

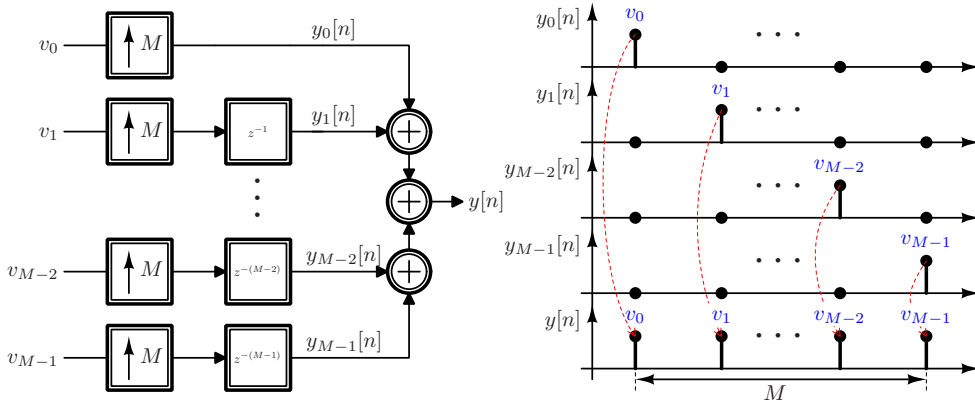


Slika 7.11: Polifazni filter sa ekvivalentnom linijom za kašnjenje.

Analiza rada ekspandera sa linijom za kašnjenje se može izvršiti pomoću vremenskog dijagrama sa slike 7.12. Ekspanderi povećavaju učestanost odabiranja  $M$  puta propuštanjem odbirka  $v_i$  u trenutku  $n = 0$  i umetanjem  $M - 1$  nula. Kašnjenjem izlaza ekspandera

za  $i$  taktova dobijaju se signali  $y_i[n]$ :

$$y_i[n] = \begin{cases} v_i, & i = n \bmod M \\ 0, & \text{inače} \end{cases}. \quad (7.17)$$

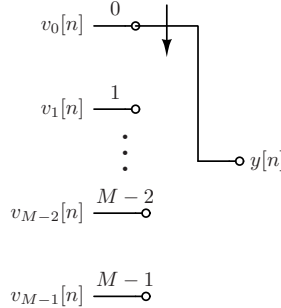


Slika 7.12: Ekspanderi sa linijom za kašnjenje.

U  $i$ -tom trenutku samo  $y_i[n]$  ima nenultu vrednost odakle je:

$$y[n] = \sum_{i=0}^{M-1} y_i[n] = v_{n \bmod M}. \quad (7.18)$$

Iz (7.18) sledi da se ekspanderi sa linijom za kašnjenje mogu zameniti komutatorom sa slike 7.13, koji prosleđuje odbirke  $v_{n \bmod M}$  na izlaz  $y[n]$ .

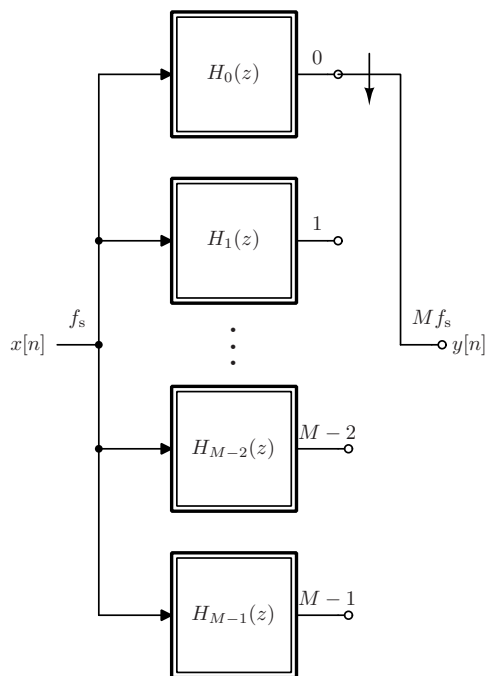


Slika 7.13: Komutator.

## 7.7 Polifazni interpolator sa komutatorom

Korišćenjem komutatora umesto ekspandera i linije za kašnjenje dobija se polifazni interpolator sa komutatorom, prikazan na slici 7.14. Za svaki odbirak ulaznog signala  $x[n]$

izračunavaju se vrednosti svih  $M$  polifaznih komponenti  $H_i(z)$ , koje se zatim sukcesivno prosleđuju na izlaz  $y[n]$ .



Slika 7.14: Polifazni interpolator sa komutatorom.

Pošto se vrednosti izlaza polifaznih komponenti  $H_i(z)$  sukcesivno prosleđuju na izlaz, nije potrebno izračunati ih istovremeno, već se mogu izračunavati u redosledu u kojem se njihove vrednosti prosleđuju na izlaz  $i = n \bmod M$ . U tom slučaju se na učestanosti odabiranja izlaznog signala  $Mf_s$  izračunava vrednost samo jedne polifazne komponente  $H_i(z)$ .

Broj računskih operacija po izlaznom odbirku je isti kao kod polifaznog interpolatora sa ekspanderima i linijom za kašnjenje sa slike 7.10, i  $M$  puta je manji u odnosu na direktnu realizaciju sa slike 7.8. Međutim, sukcesivno izračunavanje vrednosti polifaznih komponenti omogućava korišćenje istih hardverskih resursa za izračunavanje vrednosti svih polifaznih komponenti, čime se ostvaruju značajne uštede u resursima.

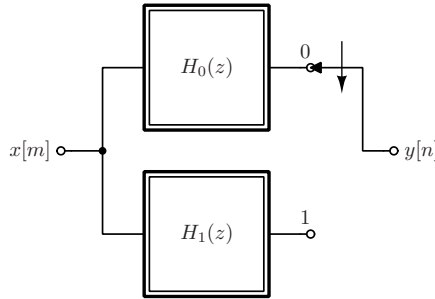
## 7.8 Realizacija polifaznog interpolatora sa komutatorom

U prethodnim odeljcima je pokazano kako se broj računskih operacija po izlaznom odbirku interpolatora može smanjiti  $M$  puta u odnosu na direktnu realizaciju, gde je  $M$  odnos promene učestanosti odabiranja. Smanjenje broja računskih operacija se postiglo primenom polifazne dekompozicijom filtra, kako bi se dobile polifazne komponente koje su polinomi po  $z^{-M}$ , i zatim primenom plemenitih identiteta, čime se nepotrebne računske

operacije nad nultim odbircima izbegavaju. Nagovešteno je da se upotrebom komutatora umesto ekspandera sa linijom za kašnjenje može postići slična ušteda i po pitanju potrebnih hardverskih resursa, što će biti pokazano na primeru polifaznog interpolatora za povećanje učestanosti odabiranja od  $M = 2$  puta.

Polifazni interpolator sa komutatorom za povećanje učestanosti odabiranja od  $M = 2$  puta je prikazan na slici 7.15. Pošto se filter u interpolatoru  $H(z)$  razdvaja na samo dve polifazne komponente, od koeficijenata sa parnim indeksima se formira  $H_0(z)$ , dok se od koeficijenata sa neparnim indeksima formira  $H_1(z)$ :

$$\begin{aligned} H_0(z) &= \sum_{i=0}^{N/2} h[2i]z^{-i} \\ H_1(z) &= \sum_{i=0}^{N/2} h[2i+1]z^{-i} \end{aligned} \quad (7.19)$$

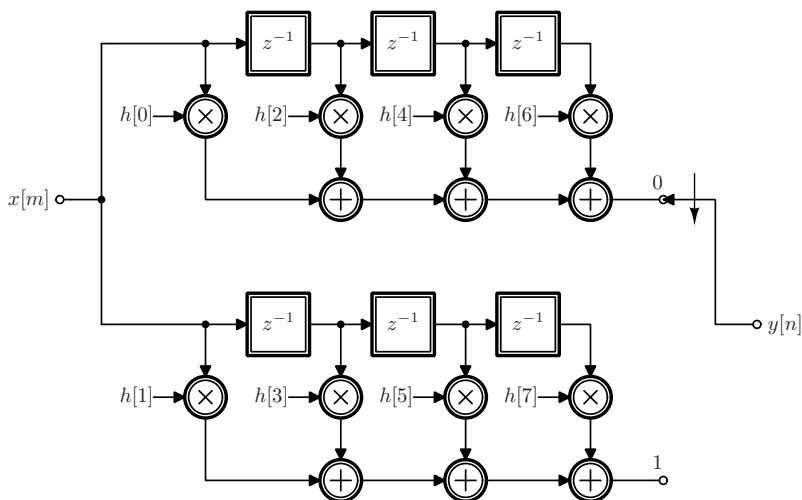


Slika 7.15: Polifazni interpolator sa komutatorom za povećanje učestanosti odabiranja od  $M = 2$  puta.

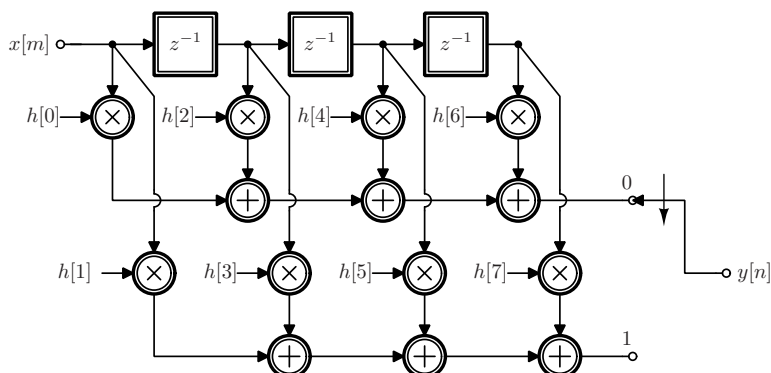
Detaljna šema polifaznog interpolatora sa komutatorom je prikazana na slici 7.16, gde je pretpostavljeno da filter u interpolatoru ima ukupno osam koeficijenata, odnosno da je filter sedmog reda. Polifazne komponente  $H_0(z)$  i  $H_1(z)$  su realizovane u direktnoj formi FIR filtra. Pažljivim proučavanjem detaljne šeme interpolatora sa komutatorom se može primetiti da linije za kašnjenje sadrže iste odbirke ulaznog signala, pošto se za svaki odbirak ulaznog signala  $x(m)$  izračunavaju vrednosti izlaza obe polifazne komponente. Kako linije za kašnjenje sadrže iste odbirke, njihovi izlazi imaju iste vrednosti, i jedna linija za kašnjenje se može koristiti za obe polifazne komponente. Isti zaključak važi i u opštem slučaju sa  $M$  linija za kašnjenje pošto će sve sadržati iste odbirke ulaznog signala. Korišćenjem jedne linije za kašnjenje za sve polifazne komponente se broj elemenata za kašnjenje smanjuje  $M$  puta.

Detaljna šema polifaznog interpolatora sa komutatorom u kojem obe polifazne komponente koriste istu liniju za kašnjenje je prikazana na slici 7.17.

Dalje smanjenje hardverskih resursa se može postići ako se primeti da se pri izračunavanju izlaznog odbirka uvek koriste resursi samo jedne polifazne komponente. Na primer,



Slika 7.16: Detaljna šema polifaznog interpolatora sa komutatorom.



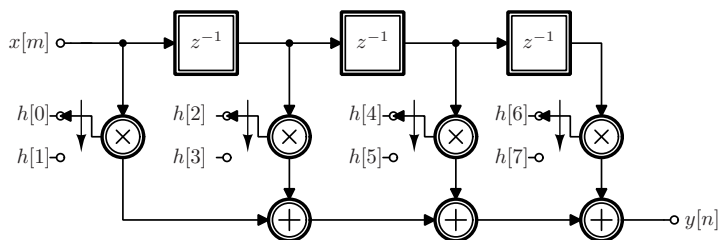
Slika 7.17: Polifazni interpolator sa spojenim linijama za kašnjenje.

u datom primeru se pri izračunavanju parnih izlaznih odbiraka  $y[2n]$  koriste samo množači sa parnim koeficijentima  $h[2n] - h[0], h[2], h[4]$  i  $h[6]$  - i pripadajući sabirači, dok se ostali množači i sabirači ne koriste. U opštem slučaju sa  $M$  polifaznih komponenti pri izračunavanju izlaznog odbirka  $y[kM + i]$  koriste se samo množači i sabirači  $i$ -te polifazne komponente, dok se množači i sabirači u preostalih  $M - 1$  grana ne koriste. Pored toga, svi filtri u polifaznim granama imaju istu strukturu, i razlikuju se samo po koeficijentima kojima se množe odbirci iz linije za kašnjenje.

Iz navedenih zapažanja sledi da se umesto komutatora koji bira izlaz jedne od  $M$  polifaznih grana, koje se razlikuju samo po koeficijentima kojima se množe odbirci iz linije za kašnjenje, može koristiti jedna grana sa promenljivim koeficijentima. Izbor odgovarajućih koeficijenata se može izvršiti komutatorima pri svakom množaču, kao što je prikazano na



slici 7.18.



Slika 7.18: Polifazni interpolator posle uvođenja komutatora za koeficijente.

Komutatorima koji biraju koeficijente se postiže značajna ušteda u pogledu hardverskih resursa. U opštem slučaju se polifazni interpolator sa odnosom povećanja učestanosti odabiranja od  $M$  puta može realizovati sa  $M$  puta manje sabirača, množača i memorijskih elemenata u poređenju sa realizacijom bez primene zapažanja iznešenih u ovom odeljku. Polifazna realizacija interpolatora sa slike 7.18 je ekvivalentna direktnoj realizaciji sa slike 7.8 u smislu da za iste ulazne odbirke obe realizacije imaju iste odbirke na izlazu, ali je  $M$  puta efikasnija po pitanju broja računskih operacija po izlaznom odbirku, i koristi  $M$  puta manje hardverskih resursa.

Komutatori sa koeficijentima se mogu realizovati tabelom u ROM-u ukoliko su unapred poznati, ili u RAM-u ukoliko je poželjna fleksibilnost. Realizacija sa koeficijentima u RAM-u je posebno zanimljiva pošto se faktor interpolacije  $M$  može dinamički menjati. U tom slučaju je maksimalni faktor interpolacije  $M$  ograničen kapacitetom memorije, dok se faktor interpolacije  $Q \leq M$  može postići jednostavnom promenom adresiranja koeficijenata od 0 do  $Q - 1$  umesto od 0 do  $M - 1$ . Dužina linije za kašnjenje  $P$ , odnosno broj množača  $P + 1$ , ograničava maksimalni red filtra  $N < (P + 1)Q$ . Softverske implementacije polifaznog interpolatora su takođe jednostavne i efikasne, pošto imaju formu "običnog" FIR filtra, koji se može efikasno izračunati postojećim optimizovanim bibliotekama. Razlika u odnosu na izračunavanje odbiraka "običnog" FIR filtra je u tome što se koeficijenti polifaznih grana ciklično menjaju.

## 7.9 Realizacija polifaznog decimatora sa komutatorom

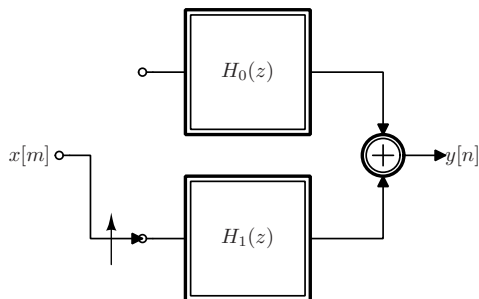
Efikasna realizacija polifaznog decimatora sa komutatorom se može pokazati na primeru sa slike 7.19. U datom primeru je prikazan decimator sa odnosom promene učestanosti od  $M = 2$  puta, ali rezultati važe za proizvoljan odnos promene učestanosti. Na decimator je primenjena polifazna dekompozicija filtra, čime su dobijene polifazne komponente  $H_0(z)$  i  $H_1(z)$ , i linija za kašnjenje sa kompresorima je zamenjena komutatorom.

Odbirci ulaznog signala  $x(m)$  se sukcesivno prosleđuju polifaznim komponentama u redosledu

$$x(i) \rightarrow H_{M-1-i \bmod M}(z), \quad (7.20)$$

izračunavaju se vrednosti izlaznih odbiraka pojedinačnih polifaznih komponenti, čijim sumiranjem se dobija izlazni odbirak  $y[n]$  sa  $M$  puta manjom učestanošću odabiranja.

Polifaznom dekompozicijom filtra u decimatoru i korišćenjem plemenitih identiteta za zamenu redosleda kompresora i filtra se izbegava izračunavanje odbiraka koji bi se odbacili. Broj računskih operacija polifaznog decimatora po izlaznom odbirku je  $M$  puta manji od direktne implementacije sa slike 7.2.



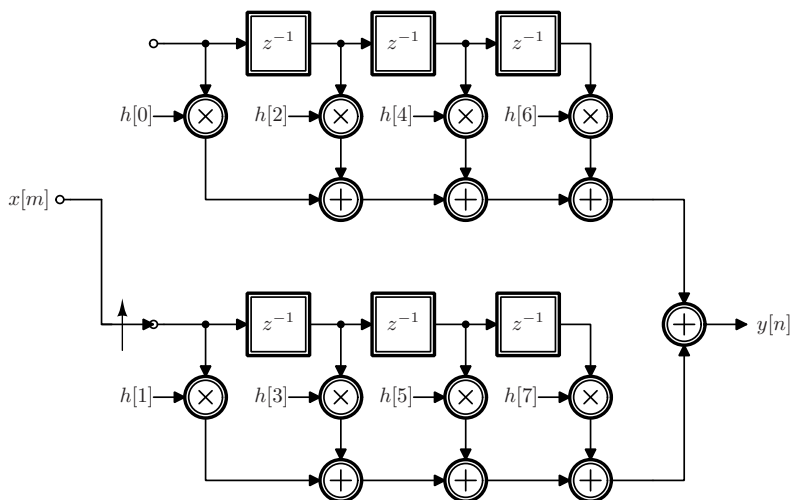
Slika 7.19: Polifazni decimator sa komutatorom za smanjenje učestanosti odabiranja od  $M = 2$  puta.

Detaljna šema polifaznog decimatora sa komutatorom je prikazana na slici 7.20. Polifazne komponente  $H_i(z)$  su realizovane u direktnoj formi FIR filtra. U slučaju polifaznog interpolatora obe linije za kašnjenje su sadržale iste odbirke ulaznog signala, i stoga se mogla koristiti jedna linija za kašnjenje za izračunavanje svih polifaznih komponenti. Slična optimizacija se ne može direktno primeniti na filtre sa slike 7.20 pošto komutator naizmenično prosleđuje odbirke ulaznog signala linijama za kašnjenje, usled čega donja linija za kašnjenje sadrži obirke sa parnim indeksima, dok gornja linija za kašnjenje sadrži odbirke sa neparnim indeksima. Optimizacija potrebnih hardverskih resursa se ipak može izvršiti, ali na transponovanoj formi filtera.

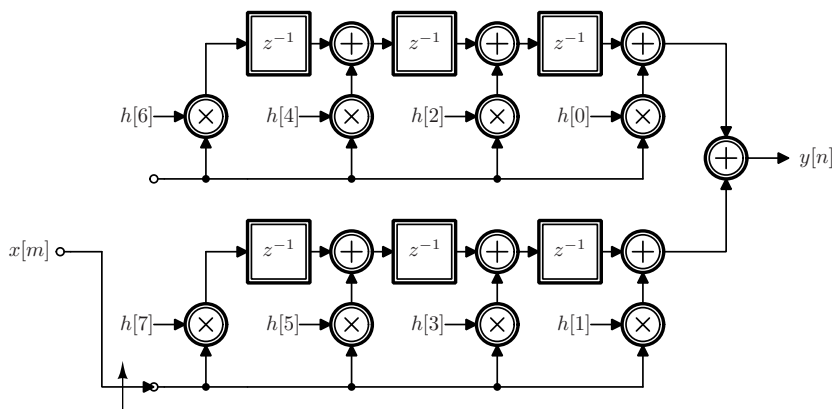
Detaljna šema decimatora sa polifaznim filterima u transponovanoj formi je prikazana na slici 7.21. Pri transponovanju filtra sve grane menjaju smer toka signala i sabirači i množači razmenjuju mesta, što za posledicu ima da memorijski elementi ne sadrže vrednosti ulaznih odbiraka već međurezultata. Takođe, koeficijenti filtra su u obrnutom redosledu u odnosu na direktnu formu.

Linije za kašnjenje u transponovanoj formi filtera polifaznih komponenti sadrže međurezultate čiji zbir predstavlja vrednost izlaznog odbirka. Umesto čuvanja međurezultata pojedinačnih filtera u odvojenim linijama za kašnjenje i sabiranja krajnjih rezultata, isti rezultat se dobija sabiranjem međurezultata svih filtera i čuvanja zbirnih međurezultata u jednoj liniji za kašnjenje. Polifazni decimator sa linijom za kašnjenje koja čuva zbirne međurezultate svih filtera je prikazan na slici 7.22.

Simbol sabirača, krug sa znakom sabiranja, je zamenjen simbolom sa grčkim slovom  $\Sigma$  kako bi se naglasilo da je u pitanju akumulator a ne običan sabirač. Pošto je u svakom taktu aktivna samo jedna od  $M$  polifaznih grana, vrednost međurezultata se dobija sabiranjem međurezultata u  $M$  taktova i stoga je potrebno koristiti akumulator umesto običnog sabirača. Akumulator radi tako što je u početnom trenutku njegova vrednost po-



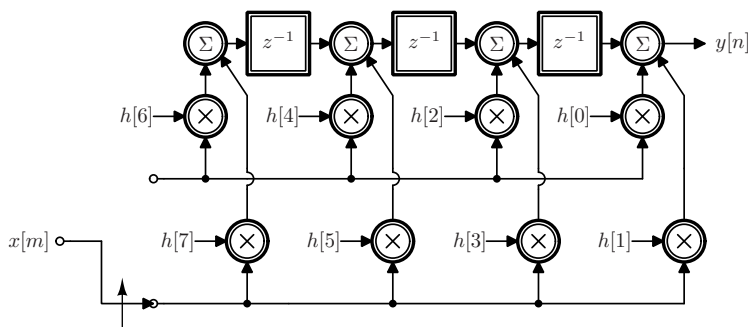
Slika 7.20: Detaljna šema polifaznog decimatora sa komutatorom.



Slika 7.21: Polifazni decimator sa filtrima u transponovanoj formi.

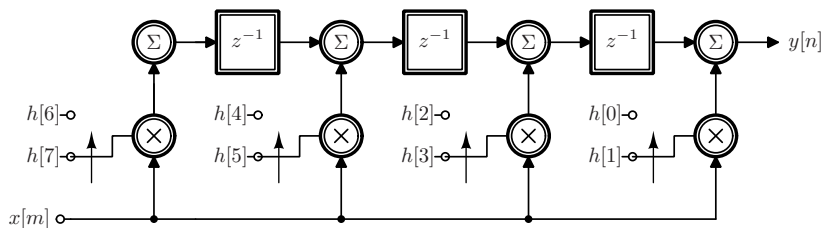
stavi na vrednost izlaza elementa za kašnjenje koji mu prethodi, i u narednih  $M$  taktova se akumulira vrednosti proizvoda koeficijenata i ulaznih odbiraka. Nakon  $M$  taktova, akumulirana vrednost se upisuje u naredni element za kašnjenje i ciklus se ponavlja. Upis u elemente za kašnjenje se vrši na učestanosti odabiranja izlaznog signala, koja je  $M$  puta manja od učestanosti odabiranja ulaznog signala.

Sve polifazne grane imaju istu strukturu - razlikuju se samo po koeficijentima - i svakom taktu je aktivna uvek samo jedna od  $M$  grana. Zahvaljujući ovoj osobini, komutator koji prosleđuje ulazne odbirke polifaznim granama se može zameniti komutatorima koji menjaju koeficijente množača, kao što je prikazano na slici 7.23. Pri implementaciji je po-



Slika 7.22: Polifazni decimator sa linijom za kašnjenje koja čuva zbirne međurezultate svih filtera.

trebno obratiti pažnju na redosled kojim komutatori prosleđuju koeficijente decimacionog filtra. Ovom modifikacijom se značajno smanjuju potrebni hardverski resursi, pošto se hardverskim resursima potrebnim za realizaciju jedne grane izračunavaju vrednosti svih grana.



Slika 7.23: Polifazni decimator sa komutatorima koeficijenata.

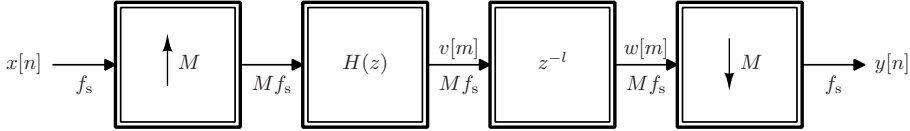
## 7.10 Realizacija kašnjenja za deo perioda odabiranja

Kašnjenje za deo perioda odabiranja se koristi za interpolaciju vrednosti signala između dva odbirka ulaznog signala. Na primer, interpolacija vrednosti signala između dva odbirka se koristi u digitalnim prijemnicima za fino podešavanje trenutka donošenja odluke, kao i u mnogim drugim primenama.

Pod pretpostavkom da su zadovoljeni uslovi teoreme odabiranja, vrednost signala u proizvoljnom vremenskom trenutku  $x(t)$  se može izračunati iz odbiraka  $x(nT)$  interpolacionom funkcijom, kao što je pokazano u odeljku 4.2. Impulsni odziv interpolacione funkcije nije kauzalan i traje beskonačno dugo, i u praktičnim primenama se ograničava na konačno trajanje odsecanjem, čime se suma (4.12) svodi na konačan broj članova. Ograničavanjem trajanja impulsnog odziva interpolacione funkcije se uvodi greška izračunavanja i interpolirana vrednost signala je aproksimativna.

Aproksimativna interpolacija signala se može realizovati i sistemom sa slike 7.24. Učestanost odabiranja ulaznog signala  $x[n]$  se povećava umetanjem  $M - 1$  nula u ekspanderu,

čime se dobija signal učestanosti odabiranja  $Mf_s$  koji sadrži spektralne replike. Spektralne replike se potiskuju filtrom propusnikom niskih učestanosti  $H(z)$  i signal na izlazu filtra  $v[m]$  sadrži interpolirane vrednosti u  $M$  tačaka na jednom periodu odabiranja ulaznog signala. Odbirci signala  $v[m]$  su aproksimativna interpolacija  $x[n]$  zbog toga što je za konačan red filtra  $H(z)$  potiskivanje spektralnih replika konačno.



Slika 7.24: Kašnjenje za deo perioda odabiranja.

Zanemarujući grešku aproksimacije usled konačnog potiskivanja spektralnih replika, svaki  $M$ -ti odbirak interpoliranog signala je jednak ulaznom odbirku:

$$v[nM - (N - 1)/2] = x[n], \quad (7.21)$$

gde član  $(N - 1)/2$  uzima u obzir kašnjenje FIR filtra  $N$ -tog reda. Odbirci  $v[nM - (N - 1)/2 - i]$ , gde je  $i = 0, \dots, M - 1$ , su interpolirane vrednosti ulaznog signala u trenucima  $x[n - i/M]$ . Kašnjenjem signala  $v[n]$  za  $l$  odbiraka na učestanosti odabiranja  $Mf_s$  se dobijaju odbirci  $w[n]$ . Pošto se odbirci signala  $y[n]$  dobijaju prosleđivanjem svakog  $M$ -tog odbirka  $w[m]$  sledi:

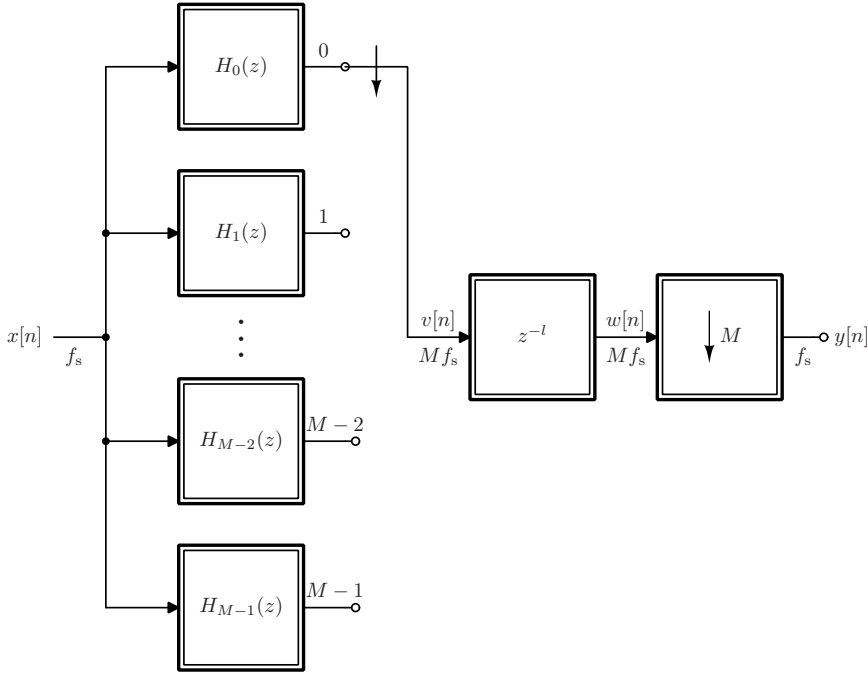
$$y[n] = w[nM] = v[nM - l] = x[n - l/M + (N - 1)/(2M)], \quad (7.22)$$

odnosno izborom kašnjenja  $l$  se dobija vrednost ulaznog signala zakašnjena za deo perioda  $l/M$  na učestanosti odabiranja ulaznog signala  $f_s$ .

Iz dosadašnjih razmatranja o polifaznim strukturama se može naslutiti da realizacija sa slike 7.24 nije optimalna, i da se primenom tehnika iz prethodnih odeljaka može optimizovati po pitanju broja računskih operacija i hardverskih resursa. Na primer, ekspander i filter propusnik niskih učestanosti, u formi sa slike 7.24, se mogu zameniti polifaznim interpolatorom sa komutatorom, čime se postiže smanjenje broja računskih operacija od  $M$  puta.

Na slici 7.25 je prikazan sistem posle zamene ekspandera i filtra  $H(z)$  polifaznim interpolatorom sa komutatorom. Za svaki ulazni odbirak  $x[n]$  izračunavaju se vrednosti polifaznih komponenti  $H_i(z)$  i komutator ih sukcesivno prosleđuje elementu za kašnjenje  $z^{-l}$ . Zakašnji odbirci  $w[m]$  se zatim vode na kompresor koji na izlaz  $y[n]$  prosleđuje svaki  $M$ -ti odbirak, dok ostale odbacuje.

Pretpostavimo da se odbirci iz komutatora direktno vode na kompresor, što odgovara izboru  $l = 0$ . Takođe, primetimo da se operacije komutatora i kompresora ciklično ponavljaju sa periodom od  $M$  odbiraka, odnosno da su sinhronizovani. Kompresor prosleđuje svaki  $M$ -ti odbirak  $v[m]$  na izlaz u taktovima  $m = kM$ . S druge strane, u  $m$ -tom taktu komutator prosleđuje vrednost polifazne grane  $H_i(z)$ , gde je  $i = m \bmod M$ , na svoj izlaz  $v[m] = w[m]$ . U taktovima  $m = kM$  kada kompresor prosleđuje odbirak



Slika 7.25: Kašnjenje za deo perioda odabiranja.

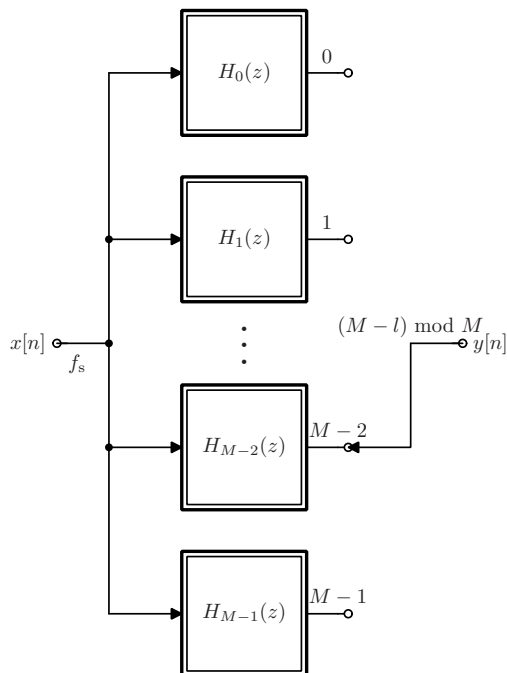
$v[m] = w[m]$  na izlaz sistema, komutator prosleđuje vrednost polifazne grane sa indeksom  $i = kM \bmod M = 0$ , odnosno uvek prosleđuje vrednost  $H_0(z)$ .

Usled sinhronizma komutatora i kompresora uvek se prosleđuje vrednost iste polifazne komponente  $H_i(z)$  - u razmatranom slučaju za  $l = 0$  se uvek prosleđuje vrednost  $H_0(z)$ . Vrednosti ostalih polifaznih komponenti se ne moraju izračunavati pošto se odbacuju. Za  $l = 1$  imamo da je  $W(z) = z^{-1}V(z)$ , odnosno  $w[n] = v[n - 1]$ , tako da se na ulazu kompresora uvek nalazi izračunata vrednost polifazne komponente  $H_{M-1}(z)$  u taktovima  $m = kM$ , koju kompresor prosleđuje na izlaz. U opštem slučaju, za  $l = 0, \dots, M - 1$ , na izlaz se prosleđuju izračunate vrednosti polifazne komponente  $H_i(z)$ , gde je  $i = (M - l) \bmod M$ , dok se ostale polifazne komponente ne moraju izračunavati.

Za fiksnu vrednost kašnjenja  $l$  ceo sistem se može zameniti polifaznom komponentom  $H_i(z)$ ,  $i = (M - l) \bmod M$ , koja radi na učestanosti odabiranja ulaznog signala - kašnjenje za deo periode odabiranja se može izvršiti bez promene učestanosti odabiranja. U poređenju sa početnim sistemom, ušteda u broju računskih operacija i hardverskim resursima je ogromna. Pre svega, računske operacije se izvršavaju nad odbircima učestanosti odabiranja ulaznog signala  $f_s$ , a ne na  $Mf_s$ . Pored toga, izračunava se vrednost samo jedne polifazne komponente, koja je  $M$  puta manjeg reda od filtra  $H(z)$ . Sumarno,  $M$  puta manje računskih operacija se izvršava na  $M$  puta manjoj učestanosti odabiranja.

U većini primena je potrebno realizovati programabilno kašnjenje za deo periode odabiranja. Na slici 7.26 prikazano je programabilno kašnjenje za deo periode odabiranja, koje podseća na polifazni interpolator. Razlika u odnosu na polifazni interpolator je u

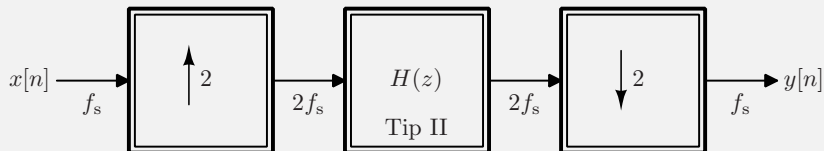
tome što na izlazu nije komutator koji sukcesivno prosleđuje vrednosti polifaznih komponenti, već multiplexer, koji na izlaz prosleđuje vrednost samo jedne izabrane polifazne komponente. Vrednosti ostalih polifaznih komponenti se ne izračunavaju. Razlika je i u tome što je učestanost odabiranja na izlazu programabilnog kašnjenja jednaka učestanosti odabiranja na ulazu. Pošto se u svakom trenutku izračunava vrednost samo jedne polifazne komponente, programabilno kašnjenje se može realizovati kao na slici 7.18, uz modifikaciju da se komutatori za koeficijente zamene multiplexerima.



Slika 7.26: Kašnjenje za deo perioda odabiranja.

#### Primer 7.2: Kašnjenje za četvrtinu perioda odabiranja

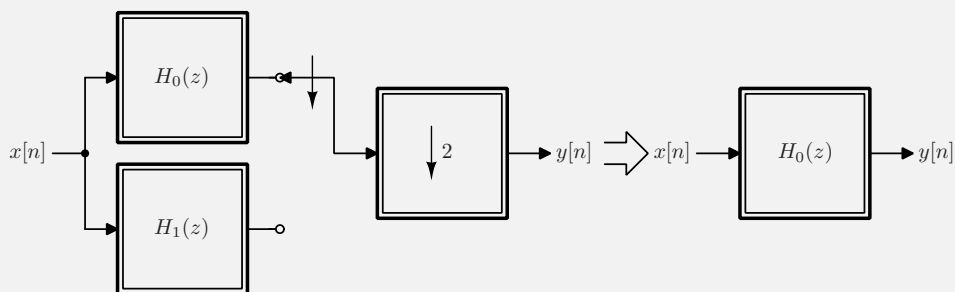
Kašnjenje za četvrtinu perioda odabiranja se principski može realizovati sistemom sa slike ispod. Pretpostavićemo da je FIR filter tipa II - da je neparnog reda sa simetričnim koeficijentima, koji bi bez promene učestanosti odabiranja unosio kašnjenje od  $N/2 = k + 1/2$ ,  $k \in \mathbb{N}$  odbiraka. Ukoliko zanemarimo celobrojno kašnjenje, filter unosi kašnjenje od  $T/2$ , koje je dvostruko veće od željenog. Pošto je kašnjenje filtra vezano za učestanost odabiranja, kašnjenje  $T'/2 = T/4$  se može realizovati povećanjem učestanosti odabiranja od dva puta  $f'_s = 2f_s$ . Zakašnjeni odbirci na učestanosti odabiranja  $f_s$  se zatim dobijaju smanjenjem učestanosti odabiranja od dva puta.



Pri smanjenju učestanosti odabiranja se opseg  $[0, F_{\text{pass}}]$  na učestanosti odabiranja  $2f_s$  slika u opseg  $[0, 2F_{\text{pass}}]$  na učestanosti odabiranja  $f_s$ , i dolazi do preklapanja spektralnih replika. Spektralne replike se mogu potisnuti projektovanjem filtra sa simetričnim granicama propusnog  $F_{\text{pass}}$  i nepropusnog  $F_{\text{stop}} = 0.5 - F_{\text{pass}}$  opsega. Pored graničnih učestanosti, potrebno je zadati i talasanje u nepropusnom opsegu  $\delta_{\text{stop}}$  koje određuje koliko će spektralna replika signala biti potisnuta. Imajući u vidu da se potisnuta spektralna replika preklapa sa željenim signalom pri smanjenju učestanosti odabiranja, nema svrhe projektovati filter sa manjim talasanjem u propusnom opsegu  $\delta_{\text{pass}}$ .

Na osnovu prethodne analize, gabariti FIR filtra tipa II u sistemu za kašnjenje signala za četvrtinu perioda odabiranja u opsegu učestanosti  $[0, F_{\text{max}}]$  su  $F_{\text{pass}} \geq F_{\text{max}}/2$ ,  $F_{\text{stop}} = 0.5 - F_{\text{pass}}$ ,  $\delta_{\text{pass}} = \delta_{\text{stop}}$ . Talasanje u propusnom i nepropusnom opsegu se može odrediti na više načina, npr. tako da potisnuta spektralna replika bude ispod nivoa kvantizacionog šuma, ili da se postigne željeno potiskivanje bočnog opsega  $IR$ .

Ekspander sa odnosom promene učestanosti od dva puta i FIR filter se mogu realizovati podelom FIR filtra na dve polifazne komponente i komutatorom, kao što je prikazano na slici ispod. Odbirci na izlazu  $y[n]$  se uvek izračunavaju polifaznom komponentom filtra  $H_0(z)$  pošto kompresor odbacuje odbirke iz grane  $H_1(z)$ . Zbog toga se polifazne komponente, komutator i kompresor mogu zameniti polifaznom komponentom  $H_0(z)$  i kašnjenje za četvrtinu perioda odabiranja se može realizovati bez promene učestanosti odabiranja.



FIR filter iz primera 4.4 je projektovan sa  $F_{\text{pass}} = 0.065$ ,  $F_{\text{stop}} = 0.5 - F_{\text{pass}}$ , talasanjem u propusnom i nepropusnom opsegu  $\delta = 10^{-3}$ , i zahtevom da je filter neparnog reda. Granična učestanost propusnog opsega polifazne komponente  $H_0(z)$  je  $2F_{\text{pass}}$ , što je ujedno i maksimalna učestanost do koje se može ostvariti vremenski pomeraj za četvrtinu perioda odabiranja.