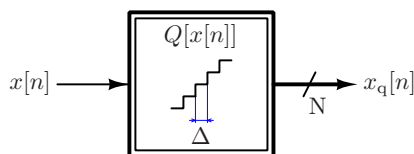


3

Kvantizacija signala

Kvantizacija je proces diskretizacije signala po amplitudi kojim se diskretni signal kontinualne amplitude svodi na konačan skup vrednosti - slika 3.1. U praksi se najčešće koristi uniformni kvantizator sa korakom Δ i izlazom $x_q[n]$ širine reči od N bita.



Slika 3.1: Kvantizacija signala.

Diskretizacijom po amplitudi uvek dolazi do gubitka informacija i nije moguće rekonstruisati odbirke signala $x[n]$ iz kvantizovanih odbiraka $x_q[n]$. Međutim, pod uslovima koji su formulisani u teoremama o kvantizaciji signala, moguće je rekonstruisati funkciju gustinu raspodele i izračunati momente $x[n]$ iz $x_q[n]$. Teoreme o kvantizaciji signala se mogu koristiti čak i kada nisu zadovoljeni uslovi ukoliko se koristi tehnika diteringa.

Uslovi i rezultati teorema o kvantizaciji signala su složeni i zbog toga se veoma često koristi pojednostavljeni model kvantizacije kada su uslovi (približno) zadovoljeni. U pojednostavljenom modelu kvantizacije nelinearna karakteristika kvantizatora se zamenjuje linearnom operacijom dodavanja ekvivalentnog kvantizacionog šuma ulaznom signalu.

Pojednostavljeni model kvantizacije omogućava analizu odnosa signal-kvantizacioni šum kvantizovanog signala $x_q[n]$. Odnos signal-kvantizacioni šum se može poboljšati raznim tehnikama, kao što su nadodabiranje, procesno pojačanje DFT-a i uobličavanje kvantizacionog šuma.

3.1 Kvantizacija signala

Odabiranjem se od signala kontinualnog po vremenu i amplitudi dobija signal diskretan po vremenu, ali kontinualan po amplitudi. Digitalna reprezentacija signala je konačne tačnosti i stoga je potrebno izvršiti diskretizaciju signala na konačan skup vrednosti - kvantizaciju signala. Za razliku od diskretizacije po vremenu, kod koje je moguća idealna rekonstrukcija signala ukoliko su zadovoljeni uslovi teoreme odabiranja, diskretizacija po amplitudi uvek rezultuje degradacijom signala.

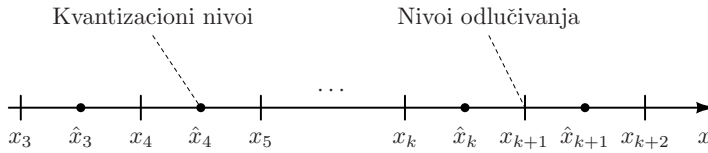
Kvantizacija signala, prikazana na slici 3.2, se vrši podelom opsega ulaznog signala u L intervala [13]

$$I_k = \{x_k < x < x_{k+1}\}, \quad k = 1, 2, \dots, L \quad (3.1)$$

pragovima odlučivanja x_1, x_2, \dots, x_{L+1} . Izlaz kvantizatora $x_q[n]$ je \hat{x}_k ukoliko vrednost ulaznog signala pripada intervalu I_k :

$$x_q[n] \equiv Q[x[n]] = \hat{x}_k, \quad \text{ako } x(n) \in I_k \quad (3.2)$$

gde je $\{\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_L\}$ skup izlaznih vrednosti kvantizatora.



Slika 3.2: Kvantizacioni nivoi i nivoi odlučivanja

Jedina ograničenja pri izboru kvantizacionih nivoa i nivoa odlučivanja su monotonost (3.1) i da kvantizacioni nivo pripada odgovarajućem kvantizacionom intervalu (3.2). U sistemima za digitalnu obradu signala se uglavnom koristi uniformni kvantizator (slika 3.3), kod koga su izlazne vrednosti \hat{x}_i i pragovi odlučivanja \hat{x}_k ekvidistantni sa korakom kvantizacije Δ :

$$\begin{aligned} \hat{x}_{k+1} - \hat{x}_k &= \Delta \\ x_{k+1} - x_k &= \Delta \end{aligned} \quad (3.3)$$

Greška kvantizacije signala $e_q[n] = x[n] - x_q[n]$ uniformnog kvantizatora je u opsegu:

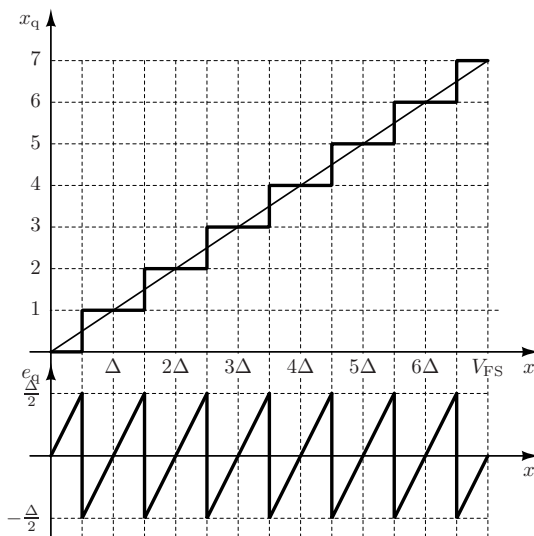
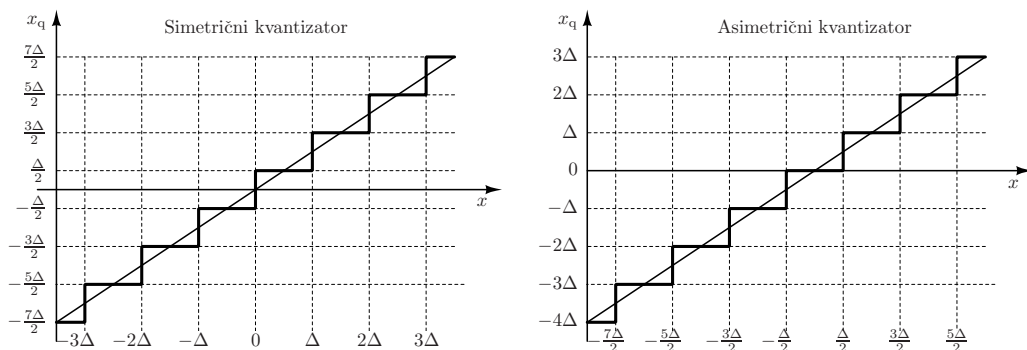
$$-\frac{\Delta}{2} < e_q[n] \leq \frac{\Delta}{2}. \quad (3.4)$$

Kvantizator sa dužinom reči izlaznog signala od N bita ima $L = 2^N$ izlaznih vrednosti. Kod unipolarnog kvantizatora sa opsegom ulaznih napona $[0, V_{FS}]$, gde je $V_{FS} = x_{L+1} - x_1$ napon pune skale, korak kvantizacije Δ je

$$\Delta = \frac{V_{FS}}{2^N}. \quad (3.5)$$

Na slici 3.4 prikazane su karakteristike simetričnog (engl. mid-rise) i asimetričnog (engl. mid-thread) bipolarnog kvantizatora. Oba tipa kvantizatora imaju isti broj kvantizacionih nivoa, a razlikuju se po nivoima odlučivanja i kvantizacionim nivoima. Kvantizacioni nivoi simetričnog kvantizatora su oblika $(2n+1)\Delta/2$, dok su nivoi odlučivanja $n\Delta$. Asimetrični kvantizator ima kvantizacione nivoe oblika $n\Delta$ u opsegu $[-N, N-1]$, dok su nivoi odlučivanja $(2n+1)\Delta/2$.

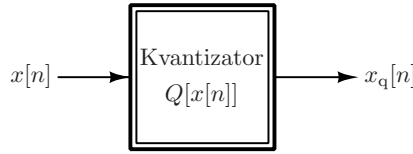
U praksi se uglavnom koriste konvertori sa asimetričnim kvantizatorom. Jedan od razloga je to što se za ulazni napon $|V_{in}| < \Delta/2$ na izlazu kvantizatora dobija nulta vrednost. U slučaju simetričnog kvantizatora za $|V_{in}| \approx 0$ šum u električnim kolima bi menjao vrednost izlaza pri svakom prolasku kroz nulu i dobila bi se povorka ± 1 LSB.

Slika 3.3: Kvantizacioni nivoi i greška kvantizacije e_q 

Slika 3.4: Kvantizacioni nivoi simetričnog i asimetričnog bipolarnog kvantizatora

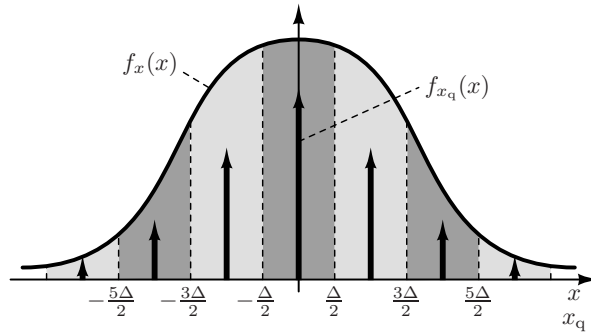
3.2 Teoreme o kvantizaciji signala

Za razliku od diskretizacije po vremenu, gde je moguće izvršiti idealnu rekonstrukciju kontinualnog signala ukoliko su zadovoljeni uslovi Teoreme odabiranja, diskretizacijom po amplitudi (slika 3.5) dolazi do nepovratnog gubitka informacija. Odbirci signala $x[n]$ se ne mogu rekonstruisati iz kvantizovanih odbiraka $x_q[n]$, ali se pod određenim uslovima mogu izračunati statističke osobine signala. Teoreme o kvantizaciji signala [14, 15, 16, 17] pokazuju pod kojim uslovima i koje osobine $x[n]$ se mogu izračunati iz kvantizovanih odbiraka $x_q[n]$.

Slika 3.5: Kvantizacija odbiraka $x[n]$.

Kvantizator je nelinearni element i nije moguće primeniti isti pristup kao pri analizi diskretizacije po vremenu. Ključan uvid teorema o kvantizaciji je da se kvantizator ponaša kao *linearni* element nad *statističkim* osobinama $x[n]$ i $x_q[n]$.

Pretpostavićemo da je funkcija gustine verovatnoće $f_x(x)$ odbiraka na ulazu u kvantizator $x[n]$ kontinualna, kao što je prikazano na slici 3.6. Takođe, pretpostavićemo da je kvantizator asimetričan sa korakom kvantizacije Δ , nivoima odlučivanja $(2k + 1)\Delta/2$ i kvantizacionim nivoima $k\Delta$. Odbirci na izlazu kvantizatora $x_q[n]$ mogu imati samo diskretne vrednosti kvantizacionih nivoa $n\Delta$, i zbog toga je funkcija gustina verovatnoće $f_{x_q}(x)$ takođe diskretna, kao što je prikazano na slici 3.6.

Slika 3.6: Funkcija gustine verovatnoće odbiraka $x[n]$ i izlaza kvantizatora $x_q[n]$.

Za vrednosti ulaznog signala $x[n]$ koje pripadaju intervalu $((k - 1/2)\Delta, (k + 1/2)\Delta)$ vrednost na izlazu kvantizatora $x_q[n]$ je $k\Delta$. Verovatnoća da izlaz kvantizatora $x_q[n]$ ima vrednost $k\Delta$ je jednaka verovatnoći p_k da vrednost ulaznog odbirka $x[n]$ bude u intervalu $((k - 1/2)\Delta, (k + 1/2)\Delta)$:

$$p_k = \int_{(k-1/2)\Delta}^{(k+1/2)\Delta} f_x(x) dx. \quad (3.6)$$

Funkcija gustine verovatnoće $f_{x_q}(x)$ vrednosti odbiraka na izlazu kvantizatora u intervalu $((k - 1/2)\Delta, (k + 1/2)\Delta)$ je diskretna i nenulta samo za $x = k\Delta$, za koju ima vrednost p_k , i može se predstaviti u obliku $p_k \delta(x - k\Delta)$. Sumiranjem po k dobija se izraz za $f_{x_q}(x)$:

$$f_{x_q}(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(x - k\Delta) p_k = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(x - k\Delta) \int_{(k-1/2)\Delta}^{(k+1/2)\Delta} f_x(\mu) d\mu. \quad (3.7)$$

Iz (3.7) sledi da funkcija gustine verovatnoće $f_{x_q}(x)$ odabira *površinu* ispod krive $f_x(x)$ i može se primeniti analiza kao kod odabiranje signala povorkom Dirakovih impulsa iz odeljka 2.2. Izraz za $f_{x_q}(x)$ u obliku (3.7) nije pogodan za dalju analizu pošto granice integrala zavise od indeksa k .

Uvođenjem pomoćne funkcije $f_{xn}(x)$ izraz (3.7) se može preurediti u oblik

$$f_{x_q}(x) = f_{xn}(x) \text{III}_\Delta(x), \quad (3.8)$$

gde je $\text{III}_\Delta(x)$ skalirana povorka Dirakovih impulsa:

$$\text{III}_\Delta(x) = \Delta \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(x - k\Delta). \quad (3.9)$$

Povorka Dirakovih impulsa $\text{III}_\Delta(x)$ ima vrednost nula za $x \neq k\Delta$, i od interesa su samo vrednosti pomoćne funkcije $f_{xn}(x)$ za $x = k\Delta$. Pomoćna funkcija $f_{xn}(x)$ se može predstaviti kao konvolucija

$$f_{xn}(x) = \{f_x(u) \star f_n(u)\}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_x(x-u)f_n(u)du, \quad (3.10)$$

gde je $f_n(x)$ skalirani pravougaoni prozor:

$$f_n(x) = \frac{1}{\Delta} \text{rect}\left(\frac{x}{\Delta}\right) = \begin{cases} \frac{1}{\Delta} & , -\frac{\Delta}{2} \leq x \leq \frac{\Delta}{2} \\ 0 & , \text{inače} \end{cases} \quad (3.11)$$

Pošto je $f_n(x) \equiv 0$ za $|x| > \Delta/2$, granice integracije se svode na interval $(-\Delta/2, \Delta/2)$ i (3.10) se svodi na:

$$f_{xn}(x) = \frac{1}{\Delta} \int_{-\Delta/2}^{\Delta/2} f_x(x-u)du. \quad (3.12)$$

Vrednost pomoćne funkcije $f_{xn}(x)$ za $x = k\Delta$ iznosi:

$$f_{xn}(k\Delta) = \frac{1}{\Delta} \int_{-\Delta/2}^{\Delta/2} f_x(u - k\Delta)du \stackrel{\zeta=u-k\Delta}{=} \frac{1}{\Delta} \int_{(k-1/2)\Delta}^{(k+1/2)\Delta} f_x(\zeta)d\zeta, \quad (3.13)$$

Funkcija gustine verovatnoće $f_{x_q}(x)$ odbiraka na izlazu kvantizatora je konačno:

$$f_{x_q}(x) = f_{xn}(x) \cdot \text{III}_\Delta(x) = \{f_x(u) \star f_n(u)\}(x) \cdot \text{III}_\Delta(x). \quad (3.14)$$

Analiza (3.14) se može sprovesti na sličan način kao u slučaju diskretizacije po vremenu. U verovatnoći i statistici se za analizu funkcije gustine verovatnoće $f_x(x)$ koristi karakteristična funkcija $\Phi_x(u)$ [18]:

$$\Phi_x(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f_x(x)e^{jux}dx, \quad (3.15)$$

koja odgovara inverznoj Furijeovoj transformaciji po kružnoj učestanosti. Karakteristična funkcija povorke Dirakovih impulsa se može izračunati postupkom datim u odeljku A.3.2:

$$\Phi_{\text{III}\Delta}(u) = \Psi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(u + k\Psi), \quad (3.16)$$

gde je

$$\Psi = \frac{2\pi}{\Delta} \quad (3.17)$$

ekvivalent kružne učestanosti.

Primenom svojstva proizvoda Furijeove transformacije po kružnoj učestanosti

$$f_{xn}(x) \cdot \text{III}_{\Delta}(x) \Rightarrow \frac{1}{2\pi} \Phi_{xn}(u) \star \Phi_{\text{III}\Delta}(u) \quad (3.18)$$

na (3.14) imamo

$$\begin{aligned} \Phi_{x_q}(u) &= \frac{1}{2\pi} \Phi_{xn}(u) \star \Phi_{\text{III}\Delta}(u) \\ &= \frac{\Psi}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{xn}(\mu) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(u - \mu + k\Psi) d\mu \end{aligned} \quad (3.19)$$

Pod pretpostavkom da integral u (3.19) konvergira, redosled sume i integrala se može zameniti, odakle sledi

$$\begin{aligned} \Phi_{x_q}(u) &= \frac{1}{\Delta} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{xn}(\mu) \delta(u - \mu + k\Psi) d\mu \\ &= \frac{1}{\Delta} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \Phi_{xn}(u + k\Psi) \end{aligned} \quad (3.20)$$

Primenom svojstva konvolucije Furijeove transformacije na $f_{xn}(n)$ (3.10) sledi

$$f_{xn}(n) = f_x(n) \star f_n(x) \Rightarrow \Phi_{xn}(u) = \Phi_x(u) \cdot \Phi_n(u). \quad (3.21)$$

Zamenom transformacije (3.15) prozora $f_n(x)$ (3.11)

$$\Phi_n(u) = \Delta \operatorname{sinc} \left(\frac{\Delta u}{2\pi} \right), \quad (3.22)$$

u (3.21) konačno dobijamo vezu karakteristične funkcije odbiraka na izlazu kvantizatora $\Phi_{x_q}(u)$ i karakteristične funkcije odbiraka na ulazu kvantizatora $\Phi_x(u)$:

$$\Phi_{x_q}(u) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \Phi_x(u + k\Psi) \operatorname{sinc} \left(\frac{\Delta(u + k\Psi)}{2\pi} \right). \quad (3.23)$$

Rezultat (3.23) pokazuje da se karakteristična funkcija $\Phi_{x_q}(u)$ odbiraka na izlazu kvantizatora $x_q[n]$ sastoji iz beskonačne sume pomerenih replika karakteristične funkcije $\Phi_x(u + k\Psi)$ odbiraka na ulazu kvantizatora $x[n]$. Teorema o kvantizaciji signala daje uslove pod kojima je moguće rekonstruisati karakterističnu funkciju odbiraka na ulazu kvantizatora iz kvantizovanih odbiraka.

Teorema o kvantizaciji signala I (QT I)

Ako je karakteristična funkcija $\Phi_x(u)$ signala $x[n]$ ograničena, tako da je

$$\Phi_x(u) = 0, \quad |u| > \frac{\pi}{\Delta} = \frac{\Psi}{2},$$

onda važi

- replike karakteristične funkcije $\Phi_x(u)$ se ne preklapaju u karakterističnoj funkciji kvantizovanog signala $\Phi_{x_q}(u)$,
- moguće je rekonstruisati karakterističnu funkciju $\Phi_x(u)$ iz karakteristične funkcije kvantizovanog signala $\Phi_{x_q}(u)$,
- moguće je rekonstruisati funkciju gustine verovatnoće $f_x(x)$ iz funkcije gustine verovatnoće kvantizovanog signala $f_{x_q}(x)$.

Uslovi QT I su restriktivni i zbog toga su formulisane druge teoreme o kvantizaciji signala. Teoreme su formulisane tako da su uslovi pod kojima važe progresivno slabiji, tako da ako su ispunjeni uslovi QT I, onda su ispunjeni uslovi i svih teorema sa većim rednim brojem - QT II, III, IV. Teorema o kvantizaciji signala II (QT II) pokazuje pod kojim uslovima je moguće izračunati momente odbiraka $x[n]$ iz $x_q[n]$.

Teorema o kvantizaciji signala II (QT II)

Ako je karakteristična funkcija $\Phi_x(u)$ signala $x[n]$ ograničena, tako da je

$$\Phi_x(u) = 0, \quad |u| > \frac{2\pi}{\Delta} = \Psi,$$

onda se momenti x mogu izračunati iz odbiraka kvantizovanog signala x_q .

Teorema QT II je od praktičnog značaja pošto pokazuje da je moguće izračunati srednju vrednost (prvi moment) i snagu (drugi moment) signala iz kvantizovanih odbiraka pod relaksiranim uslovima. Problem sa primenom QT I i II u praksi je u tome što većina signala formalno ne zadovoljava uslove teorema, ali ih pod nekim uslovima vrlo približno zadovoljavaju. U tim slučajevima je pojednostavljeni model kvantizacije, predstavljen u odeljku 3.3, dovoljno tačan za većinu praktičnih primena.

U slučaju kada signal $x[n]$ ne zadovoljava uslove teorema kvantizacije dolazi do preklapanja pomerenih replika karakteristične funkcije $\Phi_x(u)$ u (3.23), i nije moguće izračunati

momente, npr. srednju vrednost i snagu, signala $x[n]$ iz kvantizovanog signala $x_q[n]$.

Uslovi teorema o kvantizaciji signala se mogu ispuniti čak i kada $x[n]$ ne zadovoljava uslove. Posmatrajmo zbir željenog signala $x[n]$ i statistički nezavisnog signala $d[n]$:

$$y[n] = x[n] + d[n]. \quad (3.24)$$

Funkcija gustine verovatnoće $f_y(x)$ zbira dve nezavisne promenljive x i d je jednaka konvoluciji funkcija gustina verovatnoća $f_x(x)$ i $f_d(x)$:

$$f_y(x) = f_x(x) \star f_d(x), \quad (3.25)$$

odakle sledi da je karakteristična funkcija $\Phi_y(u)$:

$$\Phi_y(u) = \Phi_x(u) \cdot \Phi_d(u). \quad (3.26)$$

Iz (3.26) se vidi da ako *bilo koja* od karakterističnih funkcija $\Phi_x(u)$ ili $\Phi_d(u)$ zadovoljava uslove $\Phi(u) = 0$ za $u > \Psi/2$ (QT I) ili $u > \Psi$ (QT II), i njihov proizvod, karakteristična funkcija zbira $\Phi_y(u)$, takođe zadovoljava iste uslove. Rezultat (3.26) je od velike praktične važnosti jer pokazuje da se teoreme o kvantizaciji signala mogu primeniti i na signal $x[n]$, koji ne zadovoljava uslove teorema, sabiranjem sa signalom $d[n]$ koji zadovoljava uslove teorema.

Signal $d[n]$ se naziva diter (engl. dither), koji može biti deterministički ili slučajni signal poznatih statističkih osobina, i koristi se pri kvantizaciji signala koji ne zadovoljavaju uslove teorema o kvantizaciji signala. Efekat dodavanja ditera je sličan filtriranju signala pre diskretizacije po vremenu, pošto sprečava preklapanje replika karakteristične funkcije $\Phi_x(u)$ u karakterističnoj funkciji kvantizovanog signala $\Phi_{x_q}(u)$.

Šum u električnim kolima se ponaša kao diter sa Gausovom raspodelom, i od interesa je odrediti kako utiče na kvantizaciju signala. Funkcija gustine verovatnoće $f_G(x)$ Gausove raspodele sa srednjom vrednošću $\mu = 0$ i standardnom devijacijom σ je

$$f_G(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}, \quad (3.27)$$

dok je karakteristična funkcija

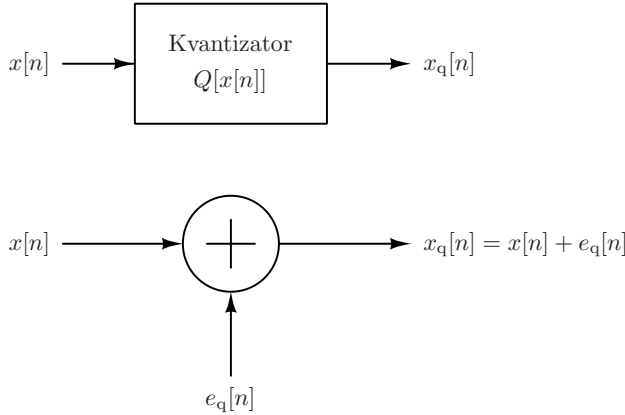
$$\Phi_G(u) = e^{-\frac{u^2\sigma^2}{2}}. \quad (3.28)$$

Karakteristična funkcija Gausove raspodele (3.28) formalno ne zadovoljava uslove QT I i II, ali za $\sigma \geq \Delta/2$ je $\Phi_G(u \geq \Psi/2) \leq e^{-\frac{\Psi^2}{2}} \approx 7 \cdot 10^{-3}$, i za većinu praktičnih primena se može smatrati da su uslovi QT I, a samim tim i svih ostalih teorema o kvantizaciji signala, zadovoljeni. Iz prethodnog razmatranja sledi da ukoliko je standardna devijacija šuma sa Gausovom raspodelom $\sigma \geq \Delta/2$, praktično će biti zadovoljeni uslovi QT I bez obzira na karakteristike signala $x[n]$. Nedostatak korišćenja šuma kao ditera je u tome što je šum slučajan signal, i ne može se razdvojiti od korisnog signala.

Deterministički diter se može razdvojiti od korisnog signala i zbog toga se često koristi u praksi [16]. Odbirci determinističkog ditera mogu se mogu izračunati zadatom funkcijom ili se mogu koristiti pseudo slučajni brojevi sa željenom raspodelom. Neke od metoda za generisanje pseudo slučajnih brojeva su razmatrane u dodatku E.

3.3 Model kvantizacije

U prethodnom odeljku je pokazano da se dodavanjem ditera, ili u slučaju kada je standardna devijacija aditivnog Gausovog belog šuma veća od $\Delta/2$, uslovi teorema o kvantizaciji signala su praktično ispunjeni. Kvantizator se može zameniti ekvivalentnim linearnim modelom sa slike 3.7 uvođenjem pretpostavki koje su formulisane u modelu greške kvantizacije. U tom slučaju se greška kvantizacije može smatrati slučajnim signalom i koristi se termin kvantizacioni šum.



Slika 3.7: Kvantizator i ekvivalentni linearni model kvantizacije.

Model greške kvantizacije uvodi sledeće pretpostavke:

- Greška kvantizacije ima raspodelu $e_q \sim \text{Unif}\left(-\frac{\Delta}{2}, \frac{\Delta}{2}\right)$,
- Greška kvantizacije je stacionarni beli šum i $E[e_q[n]e_q[n+m]] = 0 \Big|_{m \neq 0}$,
- Greška kvantizacije $e_q[n]$ nije korelisana sa $x[n]$, $E[e_q[n]x[n]] = 0$,
- Signal $x(n)$ je stacionaran i $E[x[n]] = 0$.

Uvedene pretpostavke su zadovoljene u velikom broju primena od praktičnog značaja ali ne i u svim slučajevima. Na primer, za ulazni signal amplitude nekoliko koraka kvantizacije Δ greška kvantizacije $e_q[n]$ je korelisana sa signalom. Usled korelacije kvantizacionog šuma i ulaznog signala pojavljuju se značajne neželjene spektralne komponente, koje se mogu potisnuti diteringom. Neželjene spektralne komponente se mogu javiti i kod signala velike amplitude ukoliko je kvantizacioni šum periodičan, pošto je snaga periodičnih signala skoncentrisana u malom broju spektralnih odbiraka. Kvantizacioni šum je periodičan ukoliko je učestanost odabiranja umnožak učestanosti signala i može se izbeći izborom učestanosti signal i/ili odabiranja koje zadovoljavaju uslove koherentnog odabiranja.

3.4 Snaga kvantizacionog šuma

Model greške kvantizacije pretpostavlja da greška kvantizacije ima uniformnu raspodelu $e_q \sim \text{Unif}(-\Delta/2, \Delta/2)$, odakle sledi da je funkcija gustine verovatnoće konstantna u intervalu raspodele i nula van njega:

$$p(e_q) = \begin{cases} c & , -\frac{\Delta}{2} < e_q < \frac{\Delta}{2} \\ 0 & , \text{inače} \end{cases} \quad (3.29)$$

Pošto vrednost slučajne promenljive mora biti u intervalu raspodele imamo:

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(e_q) de_q = c \int_{-\Delta/2}^{\Delta/2} de_q = c\Delta = 1. \quad (3.30)$$

odakle je

$$p(e_q) = \frac{1}{\Delta}. \quad (3.31)$$

Funkcija gustine verovatnoće greške kvantizacije $p(e_q)$ u intervalu $(-\Delta/2, \Delta/2)$ je konstantna, kao što je prikazano na slici 3.8. Srednja vrednost greške kvantizacije μ_n iznosi:

$$\mu_n = E[e_q] = \int_{-\Delta/2}^{\Delta/2} e_q p(e_q) de_q = \frac{1}{\Delta} \int_{-\Delta/2}^{\Delta/2} e_q de_q = 0 \quad (3.32)$$

Snaga kvantizacionog šuma je jednaka varijansi e_q i iznosi:

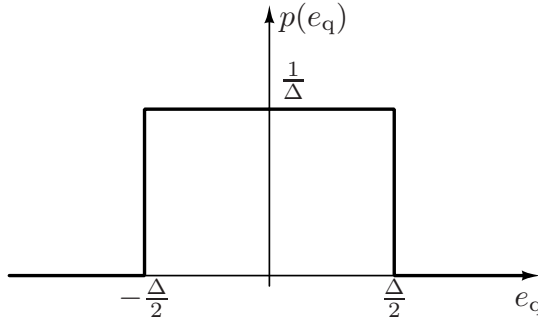
$$P_n = \text{Var}[e_q] = \int_{-\Delta/2}^{\Delta/2} e_q^2 p(e_q) de_q = \frac{1}{\Delta} \int_{-\Delta/2}^{\Delta/2} e_q^2 de_q = \frac{\Delta^2}{12} \quad (3.33)$$

Rezultat (3.33) je značajan iz dva razloga. Prvi, i očigledan, razlog je što možemo izračunati snagu šuma koji nastaje usled kvantizacije signala, odnos signal/kvantizacioni šum $SQNR$ i napraviti vezu između rezolucije A/D konvertora i $SQNR$.

Drugi, i možda manje očigledan, ali veoma važan, razlog je u tome što rezultat (3.33) pokazuje da snaga kvantizacionog šuma **ne zavisi** od učestanosti odabiranja, već samo od koraka kvantizacije Δ . Pošto je snaga kvantizacionog šuma P_n konstantna, spektralna gustina snage kvantizacionog šuma N_e

$$N_e = \frac{P_n}{f_s} = \frac{\Delta^2}{12f_s}, \quad (3.34)$$

opada sa porastom učestanosti odabiranja f_s , što se može iskoristiti za poboljšanje odnosa signal/šum tehnikom nadodabiranja.



Slika 3.8: Pretpostavljena funkcija gustine verovatnoće greške kvantizacije $p(e_q)$

3.5 Odnos signal-kvantizacioni šum $SQNR$

Degradacija signala usled kvantizacije se može opisati odnosom signal-kvantizacioni šum (engl. signal to quantization noise ratio - $SQNR$):

$$SQNR = \frac{P_{\text{sig}}}{P_n} = 12 \frac{P_{\text{sig}}}{\Delta^2}. \quad (3.35)$$

$SQNR$ predstavlja vezu između rezolucije kvantizatora i ostvarivog odnosa signal/šum.

Pretpostavićemo da je na ulazu kvantizatora, koraka kvantizacije Δ i napona pune skale V_{FS} , sinusoida amplitude A . U tom slučaju, maksimalna amplituda sinusoide je polovina napona pune skale

$$A = \frac{V_{FS}}{2} = \frac{\Delta 2^N}{2}, \quad (3.36)$$

gde je N rezolucija kvantizatora u bitovima. Signal sinusoide u vremenskom domenu je:

$$v(t) = A \sin(2\pi f_0 t) = \Delta 2^{N-1} \sin(2\pi f_0 t), \quad (3.37)$$

odakle je efektivna vrednost signala $v(t)$:

$$A_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T v(t)^2 dt} = \frac{A}{\sqrt{2}} = \frac{\Delta 2^{N-1}}{\sqrt{2}}, \quad (3.38)$$

gde je $T = f_0^{-1}$. Snaga signala P_s je:

$$P_s = A_{\text{eff}}^2 = \left(\frac{\Delta 2^{N-1}}{\sqrt{2}} \right)^2 = \Delta^2 2^{2N-3}. \quad (3.39)$$

Odnos signal-kvantizacioni šum $SQNR = P_s/P_n$ je:

$$\begin{aligned} SQNR &= 10 \log_{10} \frac{P_s}{P_n} = 10 \log_{10} \frac{\Delta^2 2^{2N-3}}{\Delta^2/12} \\ &= 10 \log_{10} \frac{12}{8} 2^{2N} = 6.02N + 1.76 \end{aligned} \quad (3.40)$$

Iz (3.40) sledi da se odnos signal-kvantizacioni šum povećava za 6 dB sa svaki bit rezolucije kvantizatora.

Važno je imati u vidu pretpostavke pod kojima je izraz (3.40) izveden - da je na ulazu kvantizatora jedna sinusoida maksimalne amplitude za koju ne dolazi do odsecanja. Za druge oblike signala odnos signal/šum može biti manji, ili veći ukoliko se vrši dodatna obrada signala, npr. digitalno filtriranje ili diskretna Furijeova transformacija. Pored toga, osim kvantizacionog šuma postoje i drugi izvori šuma, npr. termički šum, podrhtavanje takta odabiranja itd., koji degradiraju odnos signal/šum.

Primer 3.1: Odnos signal-kvantizacioni šum složenog signala

Pretpostavimo da je na ulazu kvantizatora signal koji se sastoji iz M sinusoida učestanosti $n\omega_0$, $n = 1, \dots, M$, jednakih amplituda A_M :

$$v(t) = A_M \sum_{n=1}^M \sin \left(n\omega_0 t - (n-1)\frac{\pi}{2} \right).$$

Maksimalna vrednost signala $v(t)$ iznosi $\max(v(t)) = MA_M$ koja se dostiže za $t = \pi/(2\omega_0)$, odakle su amplituda i efektivna vrednost

$$A_M = \frac{V_{FS}}{2M} = \frac{\Delta 2^{N-1}}{M}, \quad A_{\text{eff},M} = \frac{\Delta 2^{N-1}}{\sqrt{2}M}.$$

Pošto su sve sinusoide iste snage, ukupna snaga signala je

$$P_{s,M} = MA_{\text{eff},M}^2 = \frac{\Delta^2 2^{2N-3}}{M} = \frac{P_s}{M},$$

gde je P_s snaga jedne sinusoide maksimalne amplitude. Dalje imamo da je $SQNR_M$ signala koji se sastoji iz M sinusoida

$$SQNR_M = 10 \log_{10} \frac{1}{M} \frac{P_s}{P_n} = SQNR - 10 \log_{10} M,$$

gde je $SQNR$ odnos signal-kvantizacioni šum jedne sinusoide amplitude $A = V_{FS}/2$. U datom primeru je vršna snaga signala sa jednom i M sinusoida ista, ali je srednja snaga signala sa M sinusoida M puta manja, a samim tim i $SQNR$. Pošto je odnos vršne i srednje snage (engl. peak to average power - PAR) sinusoide iznosi 2 (3 dB), u opštem slučaju za signal sa PAR -om važi:

$$SQNR_{PAR} = 6.02N + 4.76 - 10 \log_{10} PAR$$

3.6 Efektivni broj bita $ENOB$

Odnos signal-kvantizacioni šum $SQNR$

$$SQNR = 6.02N + 1.76 \text{ [dB]}$$

uzima u obzir samo kvantizacioni šum idealnog kvantizatora. U realnim A/D konvertorima postoje i drugi izvori šuma, kao što su termički šum, kT/C šum, fazni šum i sl., ali i nelinearnost koja unosi izobličenja (distorziju).

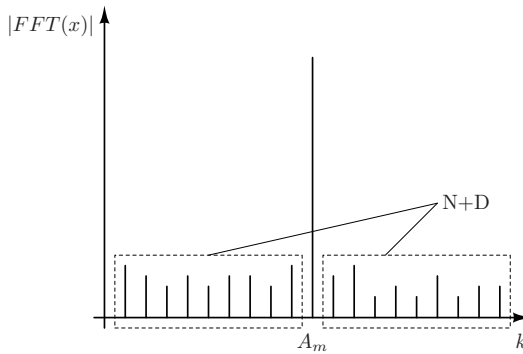
Performanse realnog A/D konvertora se mogu bolje opisati ukoliko se pri računanju odnosa signal/šum uzme u obzir ukupan doprinos šuma i distorzije (engl. signal to noise and distortion - $SINAD$):

$$SINAD = \frac{P_{\text{sig}}}{P_{\text{sum}} + P_{\text{disto}}}. \quad (3.41)$$

$SINAD$ se može izračunati iz spektra diskretnog signala $x[n]$ (slika 3.9) za sinusoidalni ulazni signal kao:

$$SINAD = \frac{|X[m]|^2}{\left[\sum_{k=1}^{M/2} |X[k]|^2 \right] - |X[m]|^2}, \quad (3.42)$$

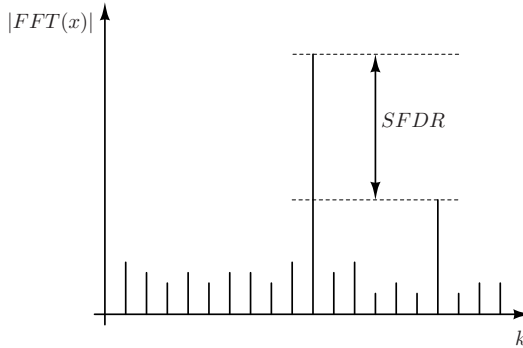
gde je $X[m]$ odбирak spektra koji odgovara ulaznom signalu. U praksi je za snagu signala potrebno sumirati nekoliko odбирaka spektra, a tačan broj zavisi od primenjene prozorske funkcije, ili izabrati učestanost signala i odabiranja tako da su zadovoljeni uslovi koherentnog odabiranja - odeljak 3.9.3.



Slika 3.9: $SINAD$

Usled izobličenja i dodatnih izvora šuma kod realnih konvertora važi da je $SINAD < SNQR$, a samim tim i dinamički opseg A/D konvertora je manji od $6.02N + 1.76$ dB. Kao što se odnos signal-kvantizacioni šum $SQNR$ može zameniti $SINAD$ -om, tako se i rezolucija konvertora može zameniti efektivnim brojem bita konvertora (engl. effective number of bits - $ENOB$):

$$ENOB = \frac{SINAD - 1.76}{6.02} \quad (3.43)$$

Slika 3.10: *SFDR*

Pošto je definisan preko *SINAD*-a, efektivni broj bita *ENOB* uzima u obzir sve izvore šuma i izobličenja koja unosi A/D konvertor.

Efektivni broj bita *ENOB* je mera koja realno pokazuje ostvariv *SNR* konvertora, i zavisi od učestanosti ulaznog signala. Frekvencijska zavisnost *ENOB*-a ima više uzroka, od kojih je kod konvertora visoke rezolucije (>10 bita) i brzine konverzije (>10 MHz) u većini slučajeva najznačajniji podrhtavanje aperture i referentnog takta.

Pored efektivne rezolucije konvertora, od interesa je i dinamički opseg konvertora u kojem nema neželjenih spektralnih komponenti (engl. spurious free dynamic range *SFDR*), koji je prikazan na slici 3.10.

3.7 Faktor šuma A/D konvertora

Faktor šuma F kola je definisan kao odnos *SNR* ulaznog i izlaznog signala:

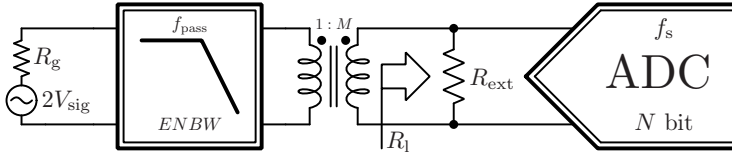
$$F = \frac{SNR_{in}}{SNR_{out}}, \quad (3.44)$$

i predstavlja meru degradacije *SNR* usled šuma kola. U idealnom slučaju kolo ne unosi dodatni šum i tada je $F = 1$, pošto su *SNR* ulaznog i izlaznog signala jednaki. Faktor šuma A/D konvertora F_{ADC} se može izraziti kao:

$$F_{ADC} = \frac{P_{sig}/P_{n,in}}{SNR_{ADC}}, \quad (3.45)$$

gde su P_{sig} snaga ulaznog signala, $P_{n,in}$ snaga šuma koji potiče od ulaznog signala i SNR_{ADC} odnos signal/šum A/D konvertora.

Pojednostavljeno kolo povezivanja A/D konvertora je prikazano na slici 3.11. Generator signala izlazne otpornosti R_g i amplitude sinusoidalnog signala V_{sig} je povezan na filter za potiskivanje spektralnih replika granične učestanosti f_{pass} i ekvivalentnog propusnog opsega šuma *ENBW*. Transformator sa odnosom broja navojaka 1 : M se koristi za prilagođenje ulazne impedanse A/D konvertora $R_l = R_{ext} \| R_{ADC}$ na generator. Pretpostavićemo da je rezolucija A/D konvertora N bita, učestanost odabiranja f_s i napon pune skale V_{FS} .



Slika 3.11: Pojednostavljeno kolo povezivanja A/D konvertora

Ulazna impedansa A/D konvertora je uglavnom kapacitivna usled parazitnih kapacitivnosti pakovanja, struktura za ESD zaštitu i kondenzatora u kolu za odabiranje. Međutim, konvertori sa veoma širokim propusnim opsegom često imaju ulazni bafer sa rezistivnom ulaznom impedansom - npr. postoje A/D konvertori sa ulaznom impedansom R_{ADC} od 50 ili 100 Ω , ali postoje i konvertori sa ulaznom impedansom reda $k\Omega$ i potrebno je dodati kolo za prilagođenje po snazi. U kolu prikazanom na slici 3.11 prilagođenje po snazi se postiže za odnos broja navojaka transformatora:

$$M = \sqrt{\frac{R_l}{R_g}}. \quad (3.46)$$

Maksimalna amplituda sinusoidalnog signala na ulazu A/D konvertora sa naponom pune skale V_{FS} je $V_{sig} = V_{FS}/2$ i tada je snaga signala koja se predaje opterećenju $R_l = R_{ext} \parallel R_{ADC}$:

$$P_{sig} = \frac{1}{R_l} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{V_{FS}}{2} \right)^2 = \frac{V_{FS}^2}{8R_l} = \frac{V_{FS}^2}{8M^2R_g}. \quad (3.47)$$

Snaga šuma koja potiče od izlazne impedanse generatora ulaznog signala R_g je:

$$P_{n,in} = \left(M v_n \frac{R_l}{R_l + M^2 R_g} \right)^2 \frac{1}{R_l}, \quad (3.48)$$

gde su R_l i R_g otpornosti potrošača i generatora, $v_n = \sqrt{4kTR_gB}$ efektivna vrednost napona šuma otpornika R_g , $k = 1.38 \cdot 10^{-23}$ Bolcmanova konstanta, T apsolutna temperatura i $B = ENBW$ ekvivalentni propusni opseg šuma. U slučaju generatora prilagođenog na opterećenje imamo $M^2 R_g = R_l$, i snaga šuma ne zavisi od otpornosti generatora:

$$P_{n,in} = kTB. \quad (3.49)$$

Odnos signal/šum ulaznog signala iznosi:

$$SNR_{in} = \frac{P_{sig}}{P_{n,in}} = \frac{V_{FS}^2}{8kTR_lB} = \frac{V_{FS}^2}{8M^2kTR_gB}. \quad (3.50)$$

Odnos signal/šum idealnog A/D konvertora je jednak $SQNR$ i iznosi

$$SNR_{ADC} = SQNR = 3 \cdot 2^{2N-1} = 10^{SNR_{ADC,dB}/10}, \quad (3.51)$$

dok je kod realnih A/D konvertora $SNR_{ADC} < SQNR$.

Zamenom (3.50) i (3.51) u (3.44) dobijamo:

$$F_{ADC} = \frac{V_{FS}^2}{3 \cdot 2^{2N+2} \cdot kTR_l B} = \frac{V_{FS}^2}{3 \cdot 2^{2N+2} \cdot M^2 kTR_g B} \quad (3.52)$$

Iz (3.52) sledi da se faktor šuma A/D konvertora smanjuje sa povećavanjem odnosa transformacije impedanse M^2 , pod pretpostavkom da važi uslov prilagođenja po snazi (3.46). Faktor šuma se smanjuje sa povećanjem odnosa navojaka transformatora M zbog toga što naponsko pojačanje transformatora M povećava amplitudu ulaznog signala i šuma, dok efektivna vrednost napona kvantizacionog šuma ne zavisi od M već samo od napona pune skale i rezolucije konvertora.

Odnos transformacije impedanse M^2 se može povećati izborom vrednosti otpornika R_{ext} i maksimalni odnos $M_{max}^2 = R_{ADC}/R_g$ se postiže za $R_{ext} \rightarrow \infty$. U praksi se koristi odnos transformacije impedanse $M < M_{max}$ zbog toga što transformatori sa većim odnosom transformacije imaju užu propusni opseg.

Primer 3.2: Faktor šuma A/D konvertora

Analogno-digitalni konvertor AD9446 proizvođača Analog Devices ima rezoluciju od $N = 16$ bita, učestanost odabiranja $f_s = 80$ MSPS, napon pune skale $V_{FS} = 3.2$ V, ulaznu otpornost od $R_{ADC} = 1$ k Ω i odnos signal/šum $SNR_{ADC,dB} = 82$ dB [19]. Teorijski $SQNR$ za 16-to bitni A/D konvertor je ≈ 98 dB - ostvarivi SNR je za 16 dB manji, što odgovara efektivnoj rezoluciji konvertora od $ENOB \approx 13.3$ bita. Pretpostavićemo da je ekvivalentni propusni opseg šuma analognog filtra za potiskivanje spektralnih replika $B = ENBW = 40$ MHz.

Prilagođenje po snazi za odnos transformacije $M = 1$ se postiže za vrednost $R_{ext} = 52.3$ Ω . U tom slučaju je:

$$SNR_{in} = \frac{V_{FS}^2}{8M^2 kTR_g B} = \frac{3.2^2}{8 \cdot 1.38 \cdot 10^{-23} \cdot 290 \cdot 50 \cdot 40 \cdot 10^6} \approx 1.6 \cdot 10^{11},$$

$$SNR_{out} = 10^{SNR_{ADC,dB}/10} \approx 1.6 \cdot 10^8,$$

odakle je $F \approx 10^3$, odnosno $NF = 10 \log 10F = 30$ dB. Faktor šuma idealnog konvertora sa $SNR = SQNR$ bi bio

$$NF_{ideal} = 10 \log_{10} \frac{SNR_{in}}{10^{98/10}} \approx 14 \text{ dB}.$$

Faktor šuma se može poboljšati za ≈ 6 dB udvostručavanjem odnosa transformacije M ili povećavanjem učestanosti odabiranja četiri puta i digitalnim filtriranjem.

3.8 Ditering

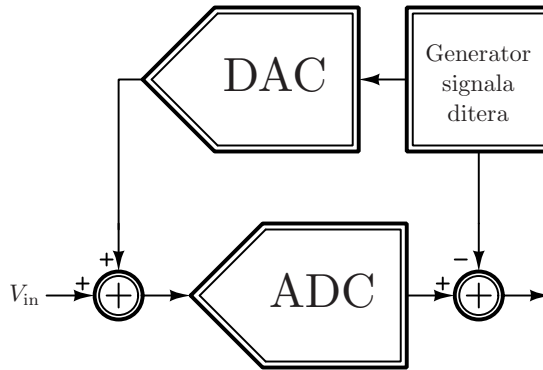
Kvantizacioni šum je korelisan sa ulaznim signalom $x[n]$ kada uslovi teorema o kvantizaciji signala nisu zadovoljeni i snaga kvantizacionog šuma zavisi od ulaznog signala.

Vremenski promenljiva snaga kvantizacionog šuma nije poželjna jer se manifestuje kao vremenski promenljiva distorzija. Na primer, pri reprodukciji zvuka vremenski promenljiva snaga kvantizacionog šuma zvuči kao pozadinski cvrkut ptica (engl. birdies effect).

Ditering (engl. dithering) je tehnika dodavanja nekorelisanog signala ditera $d[n]$ ulaznom signalu $x[n]$ kojom se obezbeđuje da budu zadovoljeni uslovi teorema o kvantizaciji signala. U tom slučaju je kvantizacioni šum nezavisan od ulaznog signala i konstantne snage, čime se eliminišu izobličenja. Pored obezbeđivanja konstantne snage kvantizacionog šuma, ditering sprečava pojavu periodičnih signala greške koji potiču od diferencijalne nelinearnosti kvantizatora.

Signal ditera $d[n]$ može biti slučajan (šum elektronskih komponenti), pseudoslučajan (generator pseudoslučajnih brojeva) ili deterministički (sinusoida). Ditering se koristi pri analogno-digitalnoj i digitalno-analognoj konverziji, kao i pri rekvantizaciji (promeni širine reči) digitalnog signala.

Pri supstraktivnom diteringu, koji je prikazan na slici 3.12, analogni signal ditera se dodaje ulaznom signalu pre odabiranja i kvantizacije, i zatim se odbirci ditera oduzimaju od rezultata analogno-digitalne konverzije. Supstraktivnim diterom se obezbeđuje ispunjenost uslova teorema o kvantizaciji signala bez degradacije odnosa signal/šum. Slučaj kada se signal ditera ne oduzima u digitalnom domenu se naziva nesupstraktivni diter [20, 21]. Nesupstraktivni diter se koristi kada nije poznato kašnjenje konvertora, ili kada je signal ditera slučajan. Prednost nesupstraktivnog ditera se ogleda u jednostavnosti realizacije, ali se povećava ukupna snaga šuma.



Slika 3.12: Supstraktivni ditering pri analogno-digitalnoj konverziji.

U praksi se najčešće koristi signal ditera sa trougaonom raspodelom verovatnoćom amplitude (engl. triangular probability density function - TPDF) u opsegu $(-\Delta, \Delta)$. Korišćenjem TPDF ditera obezbeđuje se da je greška kvantizacije nezavisna od ulaznog signala i uniformne raspodele.

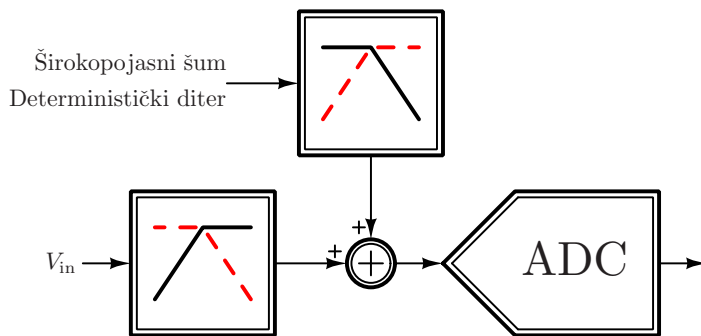
Funkcija trougaone raspodele je data sa:

$$f_{\text{TPDF}}(x) = \begin{cases} \frac{\Delta - |x|}{\Delta^2} & , |x| \leq \Delta \\ 0 & , \text{inače} \end{cases} \quad (3.53)$$

Diter sa trougaonom raspodelom verovatnoće se može generisati sabiranjem dve nezavisne slučajne promenljive sa uniformnom raspodelom $\text{Unif}(-\Delta/2, \Delta/2)$.

Slučajan signal ditera se može generisati iz šuma elektronskih komponenti, kao što je termički šum otpornika ili šum specijalnih dioda sa poznatom spektralnom gustinom snage šuma u probouju. Gausov šum sa standardnom devijacijom $\sigma \geq \Delta/2$ obezbeđuje da su uslovi teorema o kvantizaciji signala približno zadovoljeni. Poželjno je koristiti šum minimalne standardne devijacija $\sigma = \Delta/2$, pošto dalje povećanje snage šuma samo smanjuje odnos signal/šum.

Kada koristan signal ne zauzima ceo opseg učestanosti $[0, f_s/2]$ moguće je koristiti ditering van opsega signala, kao što je prikazano na slici 3.13. Frekvencijske karakteristike filtera za signal i diter su komplementarne, i obezbeđuju da se signal ditera ne preklapa sa korisnim signalom. Iako je na slici 3.13 sistem sa nesupstraktivnim diterom, ne dolazi do degradacije odnosa signal/šum pošto se spektar signala ditera ne preklapa sa spektrom korisnog signala.



Slika 3.13: Ditering van opsega signala

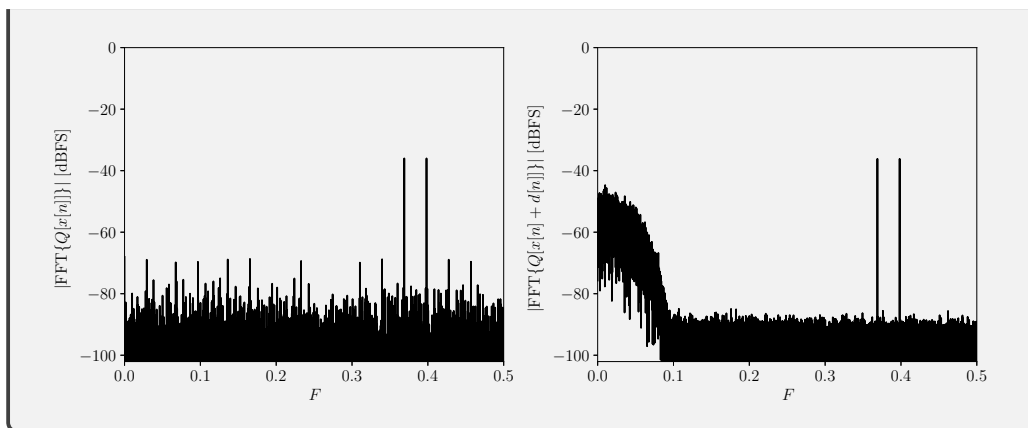
Primer 3.3: Ditering van opsega signala

Ditering van opsega signala se može koristiti za linearizaciju karakteristike kvantizatora [22]. Pretpostavimo da je signal $x[n]$ dužine 32768 odbiraka dat sa:

$$x[n] = 4\Delta [\sin(2\pi n F_1) + \sin(2\pi n F_2)],$$

gde su $F_1 = 12089/32768 \approx 0.36893$, $F_2 = 13049/32768 \approx 0.39822$ i Δ korak kvantizacije. Spektar kvantizovanog signala $Q[x[n]]$ sa rezolucijom od osam bita je prikazan na slici levo, sa koje se vidi da u spektru postoji mnoštvo neželjenih spektralnih komponenti.

Na slici desno je prikazan spektar kvantizovanog signala $Q[x[n] + d[n]]$, gde je signal ditera $d[n]$ dobijen filtriranjem slučajnog signala filtrom propusnika niskih učestanosti granične učestanosti nepropusnog opsega $F = 0.1$. Diteringom van opsega signala su u potpunosti potisnute neželjene spektralne komponente.



3.9 Tehnike za poboljšanje SNR -a

U mnogim primenama širina spektra signala od interesa je manja od maksimalne $B < f_s/2$, npr. zbog relaksiranja gabarita analognog filtra, ili se učestanost odabiranja povećava $N \gg 1$ puta kako bi se daljom obradom signala uobličio kvantizacioni šum. U tim slučajevima je, pod određenim pretpostavkama i ograničenjima, moguće postići SNR veći od $SQNR = 6.02N + 1.76$. Neke od tehnika za poboljšanje SNR -a su:

- Nadodabiranje (engl. oversampling),
- Procesno pojačanje FFT-a,
- Uobličavanje kvantizacionog šuma,

i biće razmotrene u narednim odeljcima.

3.9.1 Nadodabiranje

Nadodabiranje (engl. oversampling) je tehnika koja se koristi za poboljšanje odnosa signal/šum povećavanjem učestanosti odabiranja, i zasniva se na činjenici da snaga kvantizacionog šuma ne zavisi od učestanosti odabiranja. Učestanost odabiranja veća od minimalne $f_{s,\min} = 2B$ se koristi kako bi se relaksirali gabariti analognog filtra za potiskivanje spektralnih replika. U praksi se često uzima da je minimalna učestanost odabiranja za koju je moguće napraviti adekvatan filter $f_{s,\min} = 2.5B$, a poželjno je da učestanost odabiranja bude $f_s > 4B$ kako bi se dodatno relaksirali gabariti i smanjio red filtra.

Snaga kvantizacionog šuma je konstantna i zavisi samo od Δ :

$$P_n = \frac{\Delta^2}{12}, \quad (3.54)$$

ali spektralna gustina snage kvantizacionog šuma N_e

$$N_e = \frac{\Delta^2}{12f_s} \quad (3.55)$$

je inverzno proporcionalna učestanosti odabiranja f_s .

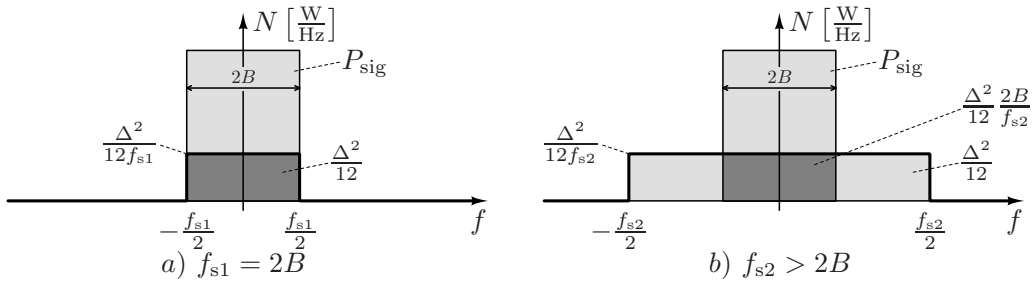
Ukoliko se signal jednostrane širine spektra B i odnosa vršne i srednje snage PAR odabira minimalnom učestanošću odabiranja $f_{s1} = 2B$, slika 3.14a, važi:

$$SNR = SNQR = 6.02N + 4.76 - 10 \log_{10} PAR \text{ [dB]} \quad (3.56)$$

Snaga šuma u opsegu signala $2B$ je

$$P_{n1} = N_{e1}2B = \frac{\Delta^2}{12f_{s1}} 2B \stackrel{f_{s1}=2B}{=} \frac{\Delta^2}{12}, \quad (3.57)$$

odnosno sav šum je u opsegu signala.



Slika 3.14: Procesno pojačanje nadodabiranja

Ukoliko se učestanost odabiranja poveća na $f_{s2} > 2B$ i šum van frekvencijskog opsega signala $2B$ digitalno filtrira, ukupna snaga šuma je

$$P_{n2} = N_{e2}2B = \frac{\Delta^2}{12} \frac{2B}{f_{s2}} \quad (3.58)$$

Snaga signala P_{sig} je ista u oba slučaja, tako da je

$$\frac{SNR_2}{SNR_1} = \frac{P_{\text{sig}}/P_{n2}}{P_{\text{sig}}/P_{n1}} = \frac{P_{n1}}{P_{n2}} = \frac{f_{s2}}{f_{s1}}. \quad (3.59)$$

Povećavanjem učestanosti odabiranja k puta povećava se i SNR :

$$\frac{SNR_{kf_s}}{SNR_{f_s}} = k. \quad (3.60)$$

Za $k = 2$ SNR se poboljšava za

$$10 \log_{10} \frac{SNR_{2f_s}}{SNR_{f_s}} = 10 \log_{10} 2 = 3 \text{ dB}. \quad (3.61)$$

Odabiranje dvostruko većom učestanošću i filtriranjem šuma van frekvencijskog opsega signala je ekvivalentno povećanju rezolucije konvertora za 0.5 bita.

3.9.2 Procesno pojačanje DFT-a

Odnos signal/(kvantizacioni)šum je mera koja pokazuje koliki je odnos *ukupne* snage signala i *ukupne* snage (kvantizacionog) šuma. Ukoliko je ulazni signal sinusoida učestanosti f_0 onda je ukupna snaga signala skoncentrisana u dve diskretne spektralne komponente na učestanostima $-f_0$ i f_0 , dok je snaga šuma šuma raspodeljena u opsegu $(-f_s/2, f_s/2)$. U mnogim primenama od praktičnog interesa se može pretpostaviti da je spektralna gustina snage šuma konstantna. Propuštanjem signala kroz filter se može potisnuti šum van opsega signala čime se smanjuje snaga šuma i poboljšava SNR . Poboljšanje SNR se naziva procesnim pojačanjem i iznosi:

$$\begin{aligned} PG &= \frac{SNR_{\text{filter}}}{SNR} = \frac{P_{n,\text{ukupno}}}{P_{n,\text{filter}}} \\ &= \frac{N_e \cdot f_s}{N_e \cdot ENBW} = \frac{f_s}{ENBW}, \end{aligned} \quad (3.62)$$

gde su SNR i SNR_{filter} respektivno odnosi signal/šum pre i posle filtriranja, $P_{n,\text{ukupno}}$ snaga šuma pre filtriranja, $P_{n,\text{filter}}$ snaga šuma filtriranog signala, N_e spektralna gustina snage šuma i $ENBW$ ekvivalentni propusni opseg filtra. Iz (3.62) se vidi da se najveće procesno pojačanje, odnosno poboljšanje SNR , postiže za najmanji mogući ekvivalentni propusni opseg šuma.

Diskretna Furijeova transformacija niza od M tačaka se može interpretirati kao banka od M filtara propusnika opsega učestanosti, širine propusnog opsega f_s/M , čiji izlazi (odbirci spektra) predstavljaju snagu signala u propusnom opsegu filtra. Pošto je spektralna gustina snage šuma $N_e = P_n/f_s$ i širina jednog DFT bina f_s/M , snaga šuma u jednom binu je

$$P_{n,\text{bin}} = \frac{P_{n,\text{ukupno}}}{M}. \quad (3.63)$$

Snaga sinusoide je raspodeljena u dva bina, na pozitivnim i negativnim učestanostima, tako da je ukupna snaga šuma $P_{n,\text{filter}} = 2P_{n,\text{bin}}$, odakle je procesno pojačanje DFT-a:

$$PG_{\text{DFT}} = \frac{P_{n,\text{ukupno}}}{2P_{n,\text{bin}}} = \frac{M}{2} \quad (3.64)$$

Rezultat (3.64) pokazuje da se procesno pojačanje povećava sa brojem tačaka DFT-a, što je posledica smanjivanja širine DFT bina. Imajući u vidu da je širina DFT bina najmanja moguća za dati broj odbiraka, to je ujedno i maksimalno moguće procesno pojačanje.

Ukoliko se koristi prozorska funkcija ekvivalentni propusni opseg šuma je širi od jednog bina i potrebno je izvršiti korekciju procesnog pojačanja. Ekvivalentni propusni opseg šuma normalizovan na jedan DFT bin je

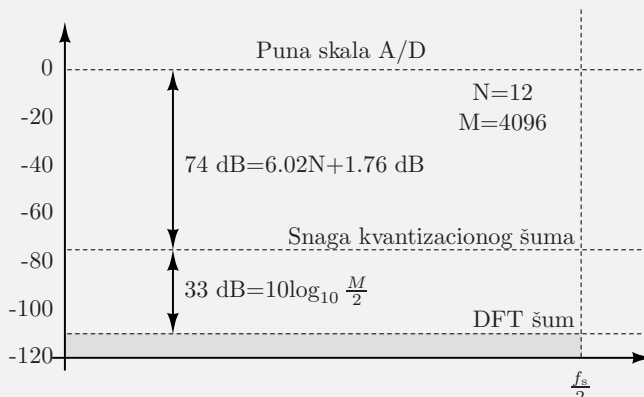
$$ENBW_{\text{bin}} = M \frac{\sum_{n=0}^{M-1} |w[n]|^2}{\left| \sum_{n=0}^{M-1} w[n] \right|^2}, \quad (3.65)$$

gde su $w[n]$ odbirci prozorske funkcije od M tačaka. Procesno pojačanje DFT-a sa prozorskom funkcijom je

$$PG_{\text{DFT,win}} = \frac{P_{\text{n,ukupno}}}{2 \cdot ENBW_{\text{bin}} \cdot P_{\text{n,bin}}} = \frac{1}{2} \frac{\sum_{n=0}^{M-1} |w[n]|^2}{\left| \sum_{n=0}^{M-1} w[n] \right|^2} \quad (3.66)$$

Primer 3.4: Procesno pojačanje DFT-a

Poboljšanje SNR -a procesnim pojačanjem DFT-a za slučaj kvantizacionog šuma je prikazan na slici. Odnos signal/kvantizacioni šum $N = 12$ -to bitnog A/D konvertora je $SQNR = 6.02N + 1.76 \approx 74$ dB. Izvršavanjem DFT-a nad $M = 4096$ odbiraka snaga kvantizacionog šuma se raspodeljuje po binovima i ostvaruje se procesno pojačanje $PG_{\text{DFT}} = 33$ dB. Maksimalni odnos signal/kvantizacioni šum, koji se postiže za sinusoidu maksimalne amplitude, je veći od $SQNR$ za procesno pojačanje i iznosi $SQNR + PG_{\text{DFT}} = 107$ dB.



3.9.3 Koherentno odabiranje signala

Pri obradi signala korišćenjem diskretne Furijeove transformacije može doći do curenja spektra ukoliko postoji diskontinuitet na granici ponavljanja signala. Ukoliko je učestanost ulaznog sinusoidalnog signala f_{in} jednaka učestanosti P -tog DFT bina:

$$f_{\text{in}} = P f_{\text{bin}} = P \frac{f_s}{M} < f_s/2, \quad (3.67)$$

sinusoida ima tačno P perioda u M tačaka i nastavlja se bez diskontinuiteta na granicama ponavljanja, tako da ne dolazi do curenja spektra. U tom slučaju svi odbirci spektra signala $X[n]$ su nule osim $X[P]$ i $X[M - P]$ koji odgovaraju spektralnim komponentama

sinusoide na pozitivnim i negativnim učestanostima, respektivno. Odbirci sinusoide na učestanosti P -tog DFT bina u M tačaka su:

$$x[n] = \sin(2\pi f_{\text{in}} nT) = \sin\left(2\pi P \frac{f_s}{M} \frac{n}{f_s}\right) = \sin\left(2\pi n \frac{P}{M}\right). \quad (3.68)$$

Kvantizacijom amplitude odbiraka ulaznog signala se uvodi kvantizacioni šum snage $P_n = \Delta^2/12$. Spektralna gustina snage kvantizacionog šuma je konstantna i iznosi $N_e = \Delta^2/(12f_s)$, odnosno snaga šuma u jednom DFT binu je

$$P_{n,\text{bin}} = \frac{f_s}{M} N_e = \frac{\Delta^2}{12M}, \quad (3.69)$$

ukoliko pretpostavke modela kvantizacije važe.

Model kvantizacije (odeljak 3.3) pretpostavlja da je greška kvantizacije stacionarni beli šum i da nije korelisana sa ulaznim signalom. Obe pretpostavke ne važe ukoliko broj perioda P sinusoide i broj odbiraka DFT-a M imaju zajedničke faktore, odnosno ako je najveći zajednički delitelj (NZD) r veći od jedan:

$$r = \text{NZD}(P, M) > 1. \quad (3.70)$$

Kada je $r > 1$ imamo da je $P = rp$ i $M = rm$, i odbirci sinusoide su

$$x[n] = \sin\left(2\pi n \frac{rp}{rm}\right) = \sin\left(\frac{2\pi np}{m}\right), \quad (3.71)$$

odakle sledi da se odbirci sinusoide se ponavljaju sa periodom m :

$$x[n+m] = \sin\left(2\pi \frac{(n+m)p}{m}\right) = \sin\left(2\pi p + 2\pi \frac{np}{m}\right) = x[n]. \quad (3.72)$$

Kako je $M = rm$, istih m odbiraka sinusoide će se ponoviti r puta u M tačaka.

Ponavljanje niza od m odbiraka r puta rezultuje periodičnom greškom kvantizacije, koja se takođe ponavlja r puta. Posledica ponavljanja greške kvantizacije je da snaga kvantizacionog šuma nije ravnomerno raspoređena u svim odbircima spektra, već je skoncentrisana u manjem broju odbiraka koji su značajno veći od očekivanog nivoa šuma.

Periodičnost greške kvantizacije za sinusoidalni ulazni signal se može izbeći izborom učestanosti signala f_{in} , odabiranja f_s , broja perioda ponavljanja sinusoide P u M tačaka tako da važi

$$\frac{f_{\text{in}}}{f_s} = \frac{P}{M}, \quad \text{NZD}(P, M) = 1. \quad (3.73)$$

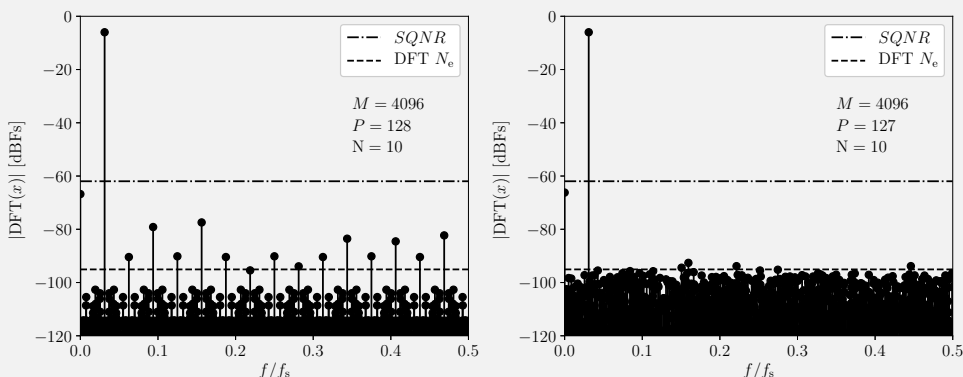
Uslov $\text{NZD}(P, M) = 1$ obezbeđuje da su P i M uzajamno prosti i da se kvantizacioni šum ne ponavlja. Odabiranje signala kada su uslovi (3.73) zadovoljeni se naziva koherentnim odabiranjem. Broj tačaka M se uglavnom bira tako da je $M = 2^k$ da bi se DFT mogao efikasno izračunati FFT-om, i u tom slučaju uslov (3.73) je zadovoljen kada je P neparan broj.

Primer 3.5: Koherentno odabiranje signala

Efekte ponavljanja kvantizacionog šuma i koherentnog odabiranja signala ćemo pokazati na primeru odabiranja signala u $M = 4096$ tačaka A/D konvertorom rezolucije $N = 10$ bita. Učestanost ulaznog signala f_{in}

$$f_{\text{in}} = f_s \frac{P}{M}$$

je izabrana tako da signal bude u P -tom DFT binu. Na slici su prikazani spektri signala izračunati FFT-om za $P = 128$ i $P = 127$. Za $P = 128$ je $\text{NZD}(P, M) = P$ i uslovi koherentnog odabiranja nisu zadovoljeni, i kvantizacioni šum se ponavlja $P = 128$ puta. Usled periodičnosti greške kvantizacije u snaga kvantizacionog šuma se koncentriše u manjem broju odbiraka čija snaga je značajno veća od očekivanog nivoa kvantizacionog šuma. Izborom $P = 127$ imamo $\text{NZD}(P, M) = 1$ i uslovi koherentnog odabiranja su zadovoljeni. Kvantizacioni šum više nije periodičan i snaga šuma je približno konstantna u svim DFT binovima. Važno je razumeti da je snaga kvantizacionog šuma u oba slučaja ista, samo je u slučaju $P = 128$ raspodeljena u manjem broju odbiraka spektra, dok je u slučaju $P = 127$ približno ravnomerno raspoređena u svim odbircima.

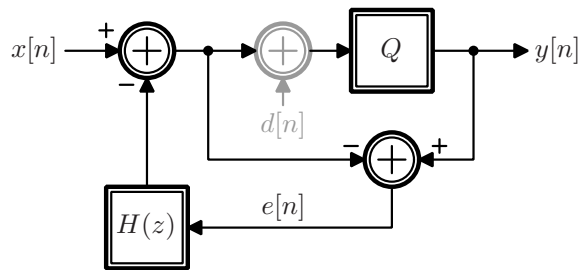


Koherentno odabiranje obezbeđuje da kvantizacioni šum ne bude periodičan i da njegova snaga bude ravnomerno raspoređena u svim odbircima spektra. Primenjuje se u karakterizaciji A/D konvertora, mernim instrumentima i ostalim primenama u kojima je potreban veliki dinamički opseg i moguće je obezbediti da uslov (3.73) važi. U opštem slučaju uslov (3.73) je teško ili nemoguće zadovoljiti, npr. ukoliko učestanost signala nije tačno poznata usled tolerancija učestanosti takta izvora signala i A/D konvertora.

3.9.4 Uobličavanje kvantizacionog šuma

Spektralna snaga kvantizacionog šuma je konstantna u celom opsegu digitalnih učestanosti $F = (-0.5, 0.5)$ kada su ispunjeni uslovi teorema o kvantizaciji signala.

a
a
a
a
a



Slika 3.15: Uobličavanje kvantizacionog šuma.