

Slika 3.11: Pojednostavljeno kolo povezivanja A/D konvertora

Ulazna impedansa A/D konvertora je uglavnom kapacitivna usled parazitnih kapacitivnosti pakovanja, struktura za ESD zaštitu i kondenzatora u kolu za odabiranje. Međutim, konvertori sa veoma širokim propusnim opsegom često imaju ulazni bafer sa rezistivnom ulaznom impedansom - npr. postoje A/D konvertori sa ulaznom impedansom  $R_{ADC}$  od 50 ili 100  $\Omega$ , ali postoje i konvertori sa ulaznom impedansom reda  $k\Omega$  i potrebno je dodati kolo za prilagođenje po snazi. U kolu prikazanom na slici 3.11 prilagođenje po snazi se postiže za odnos broja navojaka transformatora:

$$M = \sqrt{\frac{R_l}{R_g}}. \quad (3.46)$$

Maksimalna amplituda sinusoidalnog signala na ulazu A/D konvertora sa naponom pune skale  $V_{FS}$  je  $V_{sig} = V_{FS}/2$  i tada je snaga signala koja se predaje opterećenju  $R_l = R_{ext} \parallel R_{ADC}$ :

$$P_{sig} = \frac{1}{R_l} \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{V_{FS}}{2} \right)^2 = \frac{V_{FS}^2}{8R_l} = \frac{V_{FS}^2}{8M^2R_g}. \quad (3.47)$$

Snaga šuma koja potiče od izlazne impedanse generatora ulaznog signala  $R_g$  je:

$$P_{n,in} = \left( M v_n \frac{R_l}{R_l + M^2 R_g} \right)^2 \frac{1}{R_l}, \quad (3.48)$$

gde su  $R_l$  i  $R_g$  otpornosti potrošača i generatora,  $v_n = \sqrt{4kTR_gB}$  efektivna vrednost napona šuma otpornika  $R_g$ ,  $k = 1.38 \cdot 10^{-23}$  Bolcmanova konstanta,  $T$  apsolutna temperatura i  $B = ENBW$  ekvivalentni propusni opseg šuma. U slučaju generatora prilagođenog na opterećenje imamo  $M^2 R_g = R_l$ , i snaga šuma ne zavisi od otpornosti generatora:

$$P_{n,in} = kTB. \quad (3.49)$$

Odnos signal/šum ulaznog signala iznosi:

$$SNR_{in} = \frac{P_{sig}}{P_{n,in}} = \frac{V_{FS}^2}{8kTR_lB} = \frac{V_{FS}^2}{8M^2kTR_gB}. \quad (3.50)$$

Odnos signal/šum idealnog A/D konvertora je jednak  $SQNR$  i iznosi

$$SNR_{ADC} = SQNR = 3 \cdot 2^{2N-1} = 10^{SNR_{ADC,dB}/10}, \quad (3.51)$$

dok je kod realnih A/D konvertora  $SNR_{ADC} < SQNR$ .

Zamenom (3.50) i (3.51) u (3.44) dobijamo:

$$F_{ADC} = \frac{V_{FS}^2}{3 \cdot 2^{2N+2} \cdot kTR_l B} = \frac{V_{FS}^2}{3 \cdot 2^{2N+2} \cdot M^2 kTR_g B} \quad (3.52)$$

Iz (3.52) sledi da se faktor šuma A/D konvertora smanjuje sa povećavanjem odnosa transformacije impedanse  $M^2$ , pod pretpostavkom da važi uslov prilagođenja po snazi (3.46). Faktor šuma se smanjuje sa povećanjem odnosa navojaka transformatora  $M$  zbog toga što naponsko pojačanje transformatora  $M$  povećava amplitudu ulaznog signala i šuma, dok efektivna vrednost napona kvantizacionog šuma ne zavisi od  $M$  već samo od napona pune skale i rezolucije konvertora.

Odnos transformacije impedanse  $M^2$  se može povećati izborom vrednosti otpornika  $R_{ext}$  i maksimalni odnos  $M_{max}^2 = R_{ADC}/R_g$  se postiže za  $R_{ext} \rightarrow \infty$ . U praksi se koristi odnos transformacije impedanse  $M < M_{max}$  zbog toga što transformatori sa većim odnosom transformacije imaju užu propusni opseg.

### Primer 3.2: Faktor šuma A/D konvertora

Analogno-digitalni konvertor AD9446 proizvođača Analog Devices ima rezoluciju od  $N = 16$  bita, učestanost odabiranja  $f_s = 80$  MSPS, napon pune skale  $V_{FS} = 3.2$  V, ulaznu otpornost od  $R_{ADC} = 1$  k $\Omega$  i odnos signal/šum  $SNR_{ADC,dB} = 82$  dB [19]. Teorijski  $SQNR$  za 16-to bitni A/D konvertor je  $\approx 98$  dB - ostvarivi  $SNR$  je za 16 dB manji, što odgovara efektivnoj rezoluciji konvertora od  $ENOB \approx 13.3$  bita. Pretpostavićemo da je ekvivalentni propusni opseg šuma analognog filtra za potiskivanje spektralnih replika  $B = ENBW = 40$  MHz.

Prilagođenje po snazi za odnos transformacije  $M = 1$  se postiže za vrednost  $R_{ext} = 52.3$   $\Omega$ . U tom slučaju je:

$$SNR_{in} = \frac{V_{FS}^2}{8M^2 kTR_g B} = \frac{3.2^2}{8 \cdot 1.38 \cdot 10^{-23} \cdot 290 \cdot 50 \cdot 40 \cdot 10^6} \approx 1.6 \cdot 10^{11},$$

$$SNR_{out} = 10^{SNR_{ADC,dB}/10} \approx 1.6 \cdot 10^8,$$

odakle je  $F \approx 10^3$ , odnosno  $NF = 10 \log 10F = 30$  dB. Faktor šuma idealnog konvertora sa  $SNR = SQNR$  bi bio

$$NF_{ideal} = 10 \log_{10} \frac{SNR_{in}}{10^{98/10}} \approx 14 \text{ dB}.$$

Faktor šuma se može poboljšati za  $\approx 6$  dB udvostručavanjem odnosa transformacije  $M$  ili povećavanjem učestanosti odabiranja četiri puta i digitalnim filtriranjem.

## 3.8 Ditering

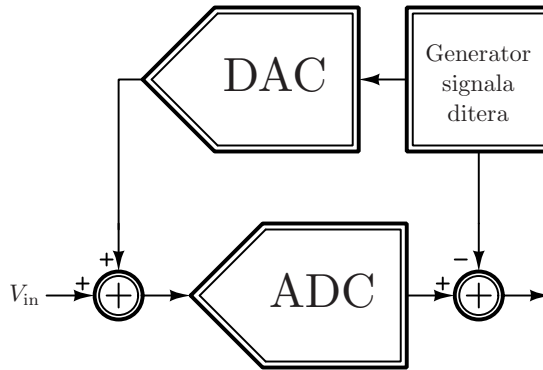
Kvantizacioni šum je korelisan sa ulaznim signalom  $x[n]$  kada uslovi teorema o kvantizaciji signala nisu zadovoljeni i snaga kvantizacionog šuma zavisi od ulaznog signala.

Vremenski promenljiva snaga kvantizacionog šuma nije poželjna jer se manifestuje kao vremenski promenljiva distorzija. Na primer, pri reprodukciji zvuka vremenski promenljiva snaga kvantizacionog šuma zvuči kao pozadinski cvrkut ptica (engl. birdies effect).

Ditering (engl. dithering) je tehnika dodavanja nekorelisanog signala ditera  $d[n]$  ulaznom signalu  $x[n]$  kojom se obezbeđuje da budu zadovoljeni uslovi teorema o kvantizaciji signala. U tom slučaju je kvantizacioni šum nezavisan od ulaznog signala i konstantne snage, čime se eliminišu izobličenja. Pored obezbeđivanja konstantne snage kvantizacionog šuma, ditering sprečava pojavu periodičnih signala greške koji potiču od diferencijalne nelinearnosti kvantizatora.

Signal ditera  $d[n]$  može biti slučajan (šum elektronskih komponenti), pseudoslučajan (generator pseudoslučajnih brojeva) ili deterministički (sinusoida). Ditering se koristi pri analogno-digitalnoj i digitalno-analognoj konverziji, kao i pri rekvantizaciji (promeni širine reči) digitalnog signala.

Pri supstraktivnom diteringu, koji je prikazan na slici 3.12, analogni signal ditera se dodaje ulaznom signalu pre odabiranja i kvantizacije, i zatim se odbirci ditera oduzimaju od rezultata analogno-digitalne konverzije. Supstraktivnim diterom se obezbeđuje ispunjenost uslova teorema o kvantizaciji signala bez degradacije odnosa signal/šum. Slučaj kada se signal ditera ne oduzima u digitalnom domenu se naziva nesupstraktivni diter [20, 21]. Nesupstraktivni diter se koristi kada nije poznato kašnjenje konvertora, ili kada je signal ditera slučajan. Prednost nesupstraktivnog ditera se ogleda u jednostavnosti realizacije, ali se povećava ukupna snaga šuma.



Slika 3.12: Supstraktivni ditering pri analogno-digitalnoj konverziji.

U praksi se najčešće koristi signal ditera sa trougaonom raspodelom verovatnoćom amplitude (engl. triangular probability density function - TPDF) u opsegu  $(-\Delta, \Delta)$ . Korišćenjem TPDF ditera obezbeđuje se da je greška kvantizacije nezavisna od ulaznog signala i uniformne raspodele.

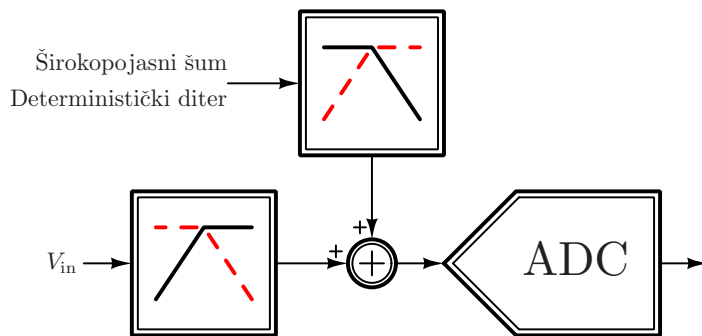
Funkcija trougaone raspodele je data sa:

$$f_{\text{TPDF}}(x) = \begin{cases} \frac{\Delta - |x|}{\Delta^2} & , |x| \leq \Delta \\ 0 & , \text{inače} \end{cases} \quad (3.53)$$

Diter sa trougaonom raspodelom verovatnoće se može generisati sabiranjem dve nezavisne slučajne promenljive sa uniformnom raspodelom  $\text{Unif}(-\Delta/2, \Delta/2)$ .

Slučajan signal ditera se može generisati iz šuma elektronskih komponenti, kao što je termički šum otpornika ili šum specijalnih dioda sa poznatom spektralnom gustinom snage šuma u probouju. Gausov šum sa standardnom devijacijom  $\sigma \geq \Delta/2$  obezbeđuje da su uslovi teorema o kvantizaciji signala približno zadovoljeni. Poželjno je koristiti šum minimalne standardne devijacija  $\sigma = \Delta/2$ , pošto dalje povećanje snage šuma samo smanjuje odnos signal/šum.

Kada koristan signal ne zauzima ceo opseg učestanosti  $[0, f_s/2]$  moguće je koristiti ditering van opsega signala, kao što je prikazano na slici 3.13. Frekvencijske karakteristike filtera za signal i diter su komplementarne, i obezbeđuju da se signal ditera ne preklapa sa korisnim signalom. Iako je na slici 3.13 sistem sa nesupstraktivnim diterom, ne dolazi do degradacije odnosa signal/šum pošto se spektar signala ditera ne preklapa sa spektrom korisnog signala.



Slika 3.13: Ditering van opsega signala

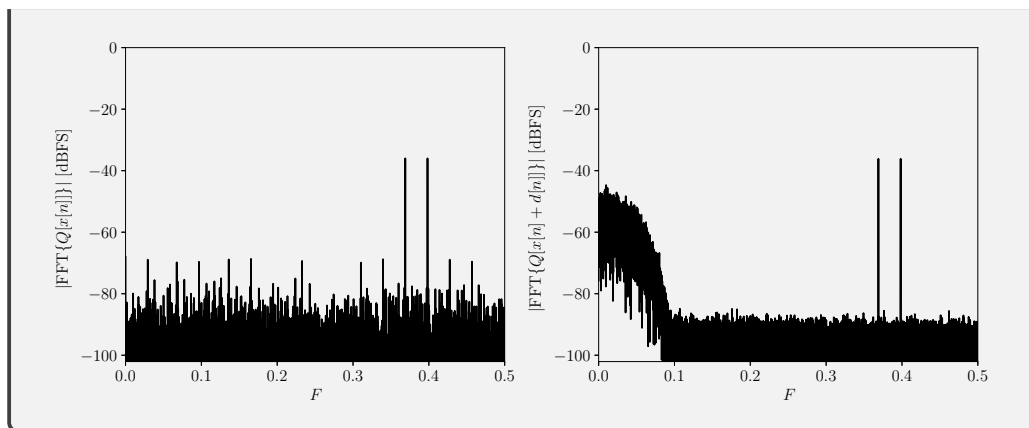
### Primer 3.3: Ditering van opsega signala

Ditering van opsega signala se može koristiti za linearizaciju karakteristike kvantizatora [22]. Pretpostavimo da je signal  $x[n]$  dužine 32768 odbiraka dat sa:

$$x[n] = 4\Delta [\sin(2\pi n F_1) + \sin(2\pi n F_2)],$$

gde su  $F_1 = 12089/32768 \approx 0.36893$ ,  $F_2 = 13049/32768 \approx 0.39822$  i  $\Delta$  korak kvantizacije. Spektar kvantizovanog signala  $Q[x[n]]$  sa rezolucijom od osam bita je prikazan na slici levo, sa koje se vidi da u spektru postoji mnoštvo neželjenih spektralnih komponenti.

Na slici desno je prikazan spektar kvantizovanog signala  $Q[x[n] + d[n]]$ , gde je signal ditera  $d[n]$  dobijen filtriranjem slučajnog signala filtrom propusnika niskih učestanosti granične učestanosti nepropusnog opsega  $F = 0.1$ . Diteringom van opsega signala su u potpunosti potisnute neželjene spektralne komponente.



### 3.9 Tehnike za poboljšanje $SNR$ -a

U mnogim primenama širina spektra signala od interesa je manja od maksimalne  $B < f_s/2$ , npr. zbog relaksiranja gabarita analognog filtra, ili se učestanost odabiranja povećava  $N \gg 1$  puta kako bi se daljom obradom signala uobličio kvantizacioni šum. U tim slučajevima je, pod određenim pretpostavkama i ograničenjima, moguće postići  $SNR$  veći od  $SQNR = 6.02N + 1.76$ . Neke od tehnika za poboljšanje  $SNR$ -a su:

- Nadodabiranje (engl. oversampling),
- Procesno pojačanje FFT-a,
- Uobličavanje kvantizacionog šuma,

i biće razmotrene u narednim odeljcima.

#### 3.9.1 Nadodabiranje

Nadodabiranje (engl. oversampling) je tehnika koja se koristi za poboljšanje odnosa signal/šum povećavanjem učestanosti odabiranja, i zasniva se na činjenici da snaga kvantizacionog šuma ne zavisi od učestanosti odabiranja. Učestanost odabiranja veća od minimalne  $f_{s,\min} = 2B$  se koristi kako bi se relaksirali gabariti analognog filtra za potiskivanje spektralnih replika. U praksi se često uzima da je minimalna učestanost odabiranja za koju je moguće napraviti adekvatan filter  $f_{s,\min} = 2.5B$ , a poželjno je da učestanost odabiranja bude  $f_s > 4B$  kako bi se dodatno relaksirali gabariti i smanjio red filtra.

Snaga kvantizacionog šuma je konstantna i zavisi samo od  $\Delta$ :

$$P_n = \frac{\Delta^2}{12}, \quad (3.54)$$

ali spektralna gustina snage kvantizacionog šuma  $N_e$

$$N_e = \frac{\Delta^2}{12f_s} \quad (3.55)$$

je inverzno proporcionalna učestanosti odabiranja  $f_s$ .

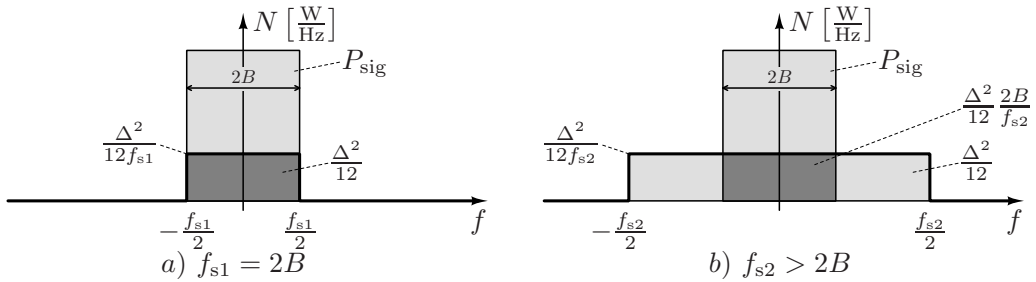
Ukoliko se signal jednostrane širine spektra  $B$  i odnosa vršne i srednje snage  $PAR$  odabira minimalnom učestanošću odabiranja  $f_{s1} = 2B$ , slika 3.14a, važi:

$$SNR = SNQR = 6.02N + 4.76 - 10 \log_{10} PAR \text{ [dB]} \quad (3.56)$$

Snaga šuma u opsegu signala  $2B$  je

$$P_{n1} = N_{e1}2B = \frac{\Delta^2}{12f_{s1}} 2B \stackrel{f_{s1}=2B}{=} \frac{\Delta^2}{12}, \quad (3.57)$$

odnosno sav šum je u opsegu signala.



Slika 3.14: Procesno pojačanje nadodabiranja

Ukoliko se učestanost odabiranja poveća na  $f_{s2} > 2B$  i šum van frekvencijskog opsega signala  $2B$  digitalno filtrira, ukupna snaga šuma je

$$P_{n2} = N_{e2}2B = \frac{\Delta^2}{12} \frac{2B}{f_{s2}} \quad (3.58)$$

Snaga signala  $P_{\text{sig}}$  je ista u oba slučaja, tako da je

$$\frac{SNR_2}{SNR_1} = \frac{P_{\text{sig}}/P_{n2}}{P_{\text{sig}}/P_{n1}} = \frac{P_{n1}}{P_{n2}} = \frac{f_{s2}}{f_{s1}}. \quad (3.59)$$

Povećavanjem učestanosti odabiranja  $k$  puta povećava se i  $SNR$ :

$$\frac{SNR_{kf_s}}{SNR_{f_s}} = k. \quad (3.60)$$

Za  $k = 2$   $SNR$  se poboljšava za

$$10 \log_{10} \frac{SNR_{2f_s}}{SNR_{f_s}} = 10 \log_{10} 2 = 3 \text{ dB}. \quad (3.61)$$

Odabiranje dvostruko većom učestanošću i filtriranjem šuma van frekvencijskog opsega signala je ekvivalentno povećanju rezolucije konvertora za 0.5 bita.

### 3.9.2 Procesno pojačanje DFT-a

Odnos signal/(kvantizacioni)šum je mera koja pokazuje koliki je odnos *ukupne* snage signala i *ukupne* snage (kvantizacionog) šuma. Ukoliko je ulazni signal sinusoida učestanosti  $f_0$  onda je ukupna snaga signala skoncentrisana u dve diskretne spektralne komponente na učestanostima  $-f_0$  i  $f_0$ , dok je snaga šuma šuma raspodeljena u opsegu  $(-f_s/2, f_s/2)$ . U mnogim primenama od praktičnog interesa se može pretpostaviti da je spektralna gustina snage šuma konstantna. Propuštanjem signala kroz filter se može potisnuti šum van opsega signala čime se smanjuje snaga šuma i poboljšava *SNR*. Poboljšanje *SNR* se naziva procesnim pojačanjem i iznosi:

$$\begin{aligned} PG &= \frac{SNR_{\text{filter}}}{SNR} = \frac{P_{n,\text{ukupno}}}{P_{n,\text{filter}}} \\ &= \frac{N_e \cdot f_s}{N_e \cdot ENBW} = \frac{f_s}{ENBW}, \end{aligned} \quad (3.62)$$

gde su *SNR* i *SNR<sub>filter</sub>* respektivno odnosi signal/šum pre i posle filtriranja,  $P_{n,\text{ukupno}}$  snaga šuma pre filtriranja,  $P_{n,\text{filter}}$  snaga šuma filtriranog signala,  $N_e$  spektralna gustina snage šuma i *ENBW* ekvivalentni propusni opseg filtra. Iz (3.62) se vidi da se najveće procesno pojačanje, odnosno poboljšanje *SNR*, postiže za najmanji mogući ekvivalentni propusni opseg šuma.

Diskretna Furijeova transformacija niza od  $M$  tačaka se može interpretirati kao banka od  $M$  filtara propusnika opsega učestanosti, širine propusnog opsega  $f_s/M$ , čiji izlazi (odbirci spektra) predstavljaju snagu signala u propusnom opsegu filtra. Pošto je spektralna gustina snage šuma  $N_e = P_n/f_s$  i širina jednog DFT bina  $f_s/M$ , snaga šuma u jednom binu je

$$P_{n,\text{bin}} = \frac{P_{n,\text{ukupno}}}{M}. \quad (3.63)$$

Snaga sinusoide je raspodeljena u dva bina, na pozitivnim i negativnim učestanostima, tako da je ukupna snaga šuma  $P_{n,\text{filter}} = 2P_{n,\text{bin}}$ , odakle je procesno pojačanje DFT-a:

$$PG_{\text{DFT}} = \frac{P_{n,\text{ukupno}}}{2P_{n,\text{bin}}} = \frac{M}{2} \quad (3.64)$$

Rezultat (3.64) pokazuje da se procesno pojačanje povećava sa brojem tačaka DFT-a, što je posledica smanjivanja širine DFT bina. Imajući u vidu da je širina DFT bina najmanja moguća za dati broj odbiraka, to je ujedno i maksimalno moguće procesno pojačanje.

Ukoliko se koristi prozorska funkcija ekvivalentni propusni opseg šuma je širi od jednog bina i potrebno je izvršiti korekciju procesnog pojačanja. Ekvivalentni propusni opseg šuma normalizovan na jedan DFT bin je

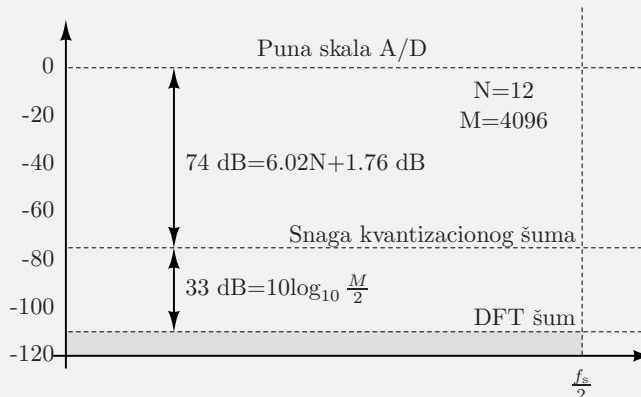
$$ENBW_{\text{bin}} = M \frac{\sum_{n=0}^{M-1} |w[n]|^2}{\left| \sum_{n=0}^{M-1} w[n] \right|^2}, \quad (3.65)$$

gde su  $w[n]$  odbirci prozorske funkcije od  $M$  tačaka. Procesno pojačanje DFT-a sa prozorskom funkcijom je

$$PG_{\text{DFT,win}} = \frac{P_{\text{n,ukupno}}}{2 \cdot ENBW_{\text{bin}} \cdot P_{\text{n,bin}}} = \frac{1}{2} \frac{\sum_{n=0}^{M-1} |w[n]|^2}{\left| \sum_{n=0}^{M-1} w[n] \right|^2} \quad (3.66)$$

#### Primer 3.4: Procesno pojačanje DFT-a

Poboljšanje  $SNR$ -a procesnim pojačanjem DFT-a za slučaj kvantizacionog šuma je prikazan na slici. Odnos signal/kvantizacioni šum  $N = 12$ -to bitnog A/D konvertora je  $SQNR = 6.02N + 1.76 \approx 74$  dB. Izvršavanjem DFT-a nad  $M = 4096$  odbiraka snaga kvantizacionog šuma se raspodeljuje po binovima i ostvaruje se procesno pojačanje  $PG_{\text{DFT}} = 33$  dB. Maksimalni odnos signal/kvantizacioni šum, koji se postiže za sinusoidu maksimalne amplitude, je veći od  $SQNR$  za procesno pojačanje i iznosi  $SQNR + PG_{\text{DFT}} = 107$  dB.



### 3.9.3 Koherentno odabiranje signala

Pri obradi signala korišćenjem diskretne Furijeove transformacije može doći do curenja spektra ukoliko postoji diskontinuitet na granici ponavljanja signala. Ukoliko je učestanost ulaznog sinusoidalnog signala  $f_{\text{in}}$  jednaka učestanosti  $P$ -tog DFT bina:

$$f_{\text{in}} = P f_{\text{bin}} = P \frac{f_s}{M} < f_s/2, \quad (3.67)$$

sinusoida ima tačno  $P$  perioda u  $M$  tačaka i nastavlja se bez diskontinuiteta na granicama ponavljanja, tako da ne dolazi do curenja spektra. U tom slučaju svi odbirci spektra signala  $X[n]$  su nule osim  $X[P]$  i  $X[M - P]$  koji odgovaraju spektralnim komponentama



sinusoide na pozitivnim i negativnim učestanostima, respektivno. Odbirci sinusoide na učestanosti  $P$ -tog DFT bina u  $M$  tačaka su:

$$x[n] = \sin(2\pi f_{\text{in}} nT) = \sin\left(2\pi P \frac{f_s}{M} \frac{n}{f_s}\right) = \sin\left(2\pi n \frac{P}{M}\right). \quad (3.68)$$

Kvantizacijom amplitude odbiraka ulaznog signala se uvodi kvantizacioni šum snage  $P_n = \Delta^2/12$ . Spektralna gustina snage kvantizacionog šuma je konstantna i iznosi  $N_e = \Delta^2/(12f_s)$ , odnosno snaga šuma u jednom DFT binu je

$$P_{n,\text{bin}} = \frac{f_s}{M} N_e = \frac{\Delta^2}{12M}, \quad (3.69)$$

ukoliko pretpostavke modela kvantizacije važe.

Model kvantizacije (odeljak 3.3) pretpostavlja da je greška kvantizacije stacionarni beli šum i da nije korelisana sa ulaznim signalom. Obe pretpostavke ne važe ukoliko broj perioda  $P$  sinusoide i broj odbiraka DFT-a  $M$  imaju zajedničke faktore, odnosno ako je najveći zajednički delitelj (NZD)  $r$  veći od jedan:

$$r = \text{NZD}(P, M) > 1. \quad (3.70)$$

Kada je  $r > 1$  imamo da je  $P = rp$  i  $M = rm$ , i odbirci sinusoide su

$$x[n] = \sin\left(2\pi n \frac{rp}{rm}\right) = \sin\left(\frac{2\pi np}{m}\right), \quad (3.71)$$

odakle sledi da se odbirci sinusoide se ponavljaju sa periodom  $m$ :

$$x[n+m] = \sin\left(2\pi \frac{(n+m)p}{m}\right) = \sin\left(2\pi p + 2\pi \frac{np}{m}\right) = x[n]. \quad (3.72)$$

Kako je  $M = rm$ , istih  $m$  odbiraka sinusoide će se ponoviti  $r$  puta u  $M$  tačaka.

Ponavljanje niza od  $m$  odbiraka  $r$  puta rezultuje periodičnom greškom kvantizacije, koja se takođe ponavlja  $r$  puta. Posledica ponavljanja greške kvantizacije je da snaga kvantizacionog šuma nije ravnomerno raspoređena u svim odbircima spektra, već je skoncentrisana u manjem broju odbiraka koji su značajno veći od očekivanog nivoa šuma.

Periodičnost greške kvantizacije za sinusoidalni ulazni signal se može izbeći izborom učestanosti signala  $f_{\text{in}}$ , odabiranja  $f_s$ , broja perioda ponavljanja sinusoide  $P$  u  $M$  tačaka tako da važi

$$\frac{f_{\text{in}}}{f_s} = \frac{P}{M}, \quad \text{NZD}(P, M) = 1. \quad (3.73)$$

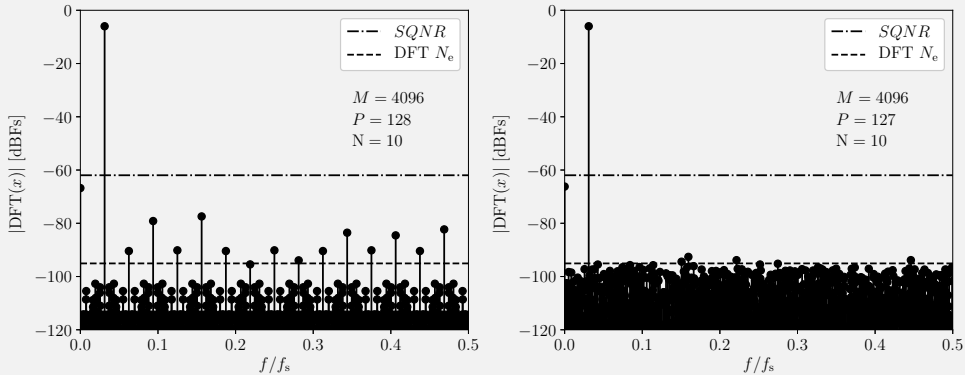
Uslov  $\text{NZD}(P, M) = 1$  obezbeđuje da su  $P$  i  $M$  uzajamno prosti i da se kvantizacioni šum ne ponavlja. Odabiranje signala kada su uslovi (3.73) zadovoljeni se naziva koherentnim odabiranjem. Broj tačaka  $M$  se uglavnom bira tako da je  $M = 2^k$  da bi se DFT mogao efikasno izračunati FFT-om, i u tom slučaju uslov (3.73) je zadovoljen kada je  $P$  neparan broj.

## Primer 3.5: Koherentno odabiranje signala

Efekte ponavljanja kvantizacionog šuma i koherentnog odabiranja signala ćemo pokazati na primeru odabiranja signala u  $M = 4096$  tačaka A/D konvertorom rezolucije  $N = 10$  bita. Učestanost ulaznog signala  $f_{\text{in}}$

$$f_{\text{in}} = f_s \frac{P}{M}$$

je izabrana tako da signal bude u  $P$ -tom DFT binu. Na slici su prikazani spektri signala izračunati FFT-om za  $P = 128$  i  $P = 127$ . Za  $P = 128$  je  $\text{NZD}(P, M) = P$  i uslovi koherentnog odabiranja nisu zadovoljeni, i kvantizacioni šum se ponavlja  $P = 128$  puta. Usled periodičnosti greške kvantizacije u snaga kvantizacionog šuma se koncentriše u manjem broju odbiraka čija snaga je značajno veća od očekivanog nivoa kvantizacionog šuma. Izborom  $P = 127$  imamo  $\text{NZD}(P, M) = 1$  i uslovi koherentnog odabiranja su zadovoljeni. Kvantizacioni šum više nije periodičan i snaga šuma je približno konstantna u svim DFT binovima. Važno je razumeti da je snaga kvantizacionog šuma u oba slučaja ista, samo je u slučaju  $P = 128$  raspodeljena u manjem broju odbiraka spektra, dok je u slučaju  $P = 127$  približno ravnomerno raspoređena u svim odbircima.

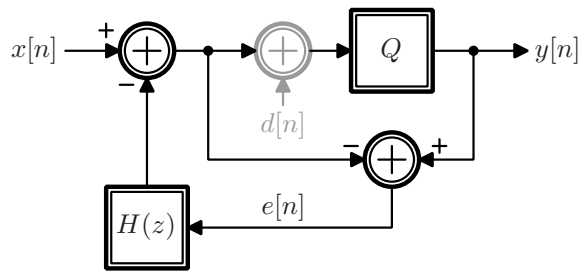


Koherentno odabiranje obezbeđuje da kvantizacioni šum ne bude periodičan i da njegova snaga bude ravnomerno raspoređena u svim odbircima spektra. Primenjuje se u karakterizaciji A/D konvertora, mernim instrumentima i ostalim primenama u kojima je potreban veliki dinamički opseg i moguće je obezbediti da uslov (3.73) važi. U opštem slučaju uslov (3.73) je teško ili nemoguće zadovoljiti, npr. ukoliko učestanost signala nije tačno poznata usled tolerancija učestanosti takta izvora signala i A/D konvertora.

### 3.9.4 Uobličavanje kvantizacionog šuma

Spektralna snaga kvantizacionog šuma je konstantna u celom opsegu digitalnih učestanosti  $F = (-0.5, 0.5)$  kada su ispunjeni uslovi teorema o kvantizaciji signala.

a  
a  
a  
a  
a



Slika 3.15: Uobličavanje kvantizacionog šuma.

Ova stranica je namerno prazna.

# 4

## Rekonstrukcija signala

Idealna rekonstrukcija signala  $x(t)$  iz odbiraka  $x[n]$  je teorijski moguća interpolacionom funkcijom ako su pri odabiranju  $x(t)$  zadovoljeni uslovi teoreme odabiranja. Interpolaciona funkcija nije pogodna za praktičnu rekonstrukciju signala zbog toga što je beskonačnog trajanja i nije kauzalna. Približna rekonstrukcija signala se može izvršiti ograničavanjem i odsecanjem trajanja interpolacione funkcije i kašnjenjem kako bi se dobio kauzalni odziv.

Rekonstrukcija signala približnom interpolacionom funkcijom se retko koristi, npr. u prikazu digitalnih osciloskopa, ali gotovo nikada za rekonstrukciju analognih signala zbog kompleksnosti realizacije. Većina digitalno-analognih konvertora koristi kolo zadržke nultog reda za rekonstrukciju analognih signala, pošto je realizacija veoma jednostavna. Amplitudski odziv kola zadržke nultog reda je frekventijski zavisao i potrebno je izvršiti korekciju u digitalnom domenu pre rekonstrukcije.

Pored rekonstrukcije signala u prvoj Nikvistovoj zoni, moguće je izvršiti i rekonstrukciju u višim Nikvistovim zonama upotrebom odgovarajućeg kola za rekonstrukciju signala. Za razliku od kola zadržke nultog reda, koje ima nule u frekventijskom odzivu na  $f_z = nf_s$ , kola za rekonstrukciju signala u višim Nikvistovim zonama imaju nule na  $f_z = 2nf_s$  ili  $f_z = 4nf_s$ . Pored toga, neka od kola imaju i nulu na  $f_z = 0$ , zbog čega se ne mogu koristiti za rekonstrukciju signala u prvoj Nikvistovoj zoni.

Na kraju poglavlja se razmatra i kolo za rekonstrukciju kompleksnih signala u osnovnom opsegu učestanosti. Prednost direktne rekonstrukcije kompleksnog signala se ogleda u tome što se može izvršiti upotrebom jednog digitalno-analognog konvertora, čime se u potpunosti izbegava greška pojačanja.

### 4.1 Idealna rekonstrukcija signala

Spektar odbiraka signala  $x[n] \equiv x_a(nT)$  sadrži skalirane i pomerene replike spektra kontinualnog signala  $X_a(f) = \mathcal{F}\{x_a(t)\}(f)$ :

$$X(f) = f_s \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a(f - kf_s) \quad (4.1)$$

Spektralne replike  $X_a(f - kf_s)$  se ne preklapaju ukoliko su uslovi teoreme odabiranja zadovoljeni i moguće je u potpunosti rekonstruisati signal  $x_a(t)$  iz odbiraka  $x[n]$ . Pod

pretpostavkom da je spektar kontinualnog signala u prvoj Nikvistovoj zoni, odnosno da je  $X_a(f) \equiv 0$  za  $|f| > f_s/2$ , imamo da je

$$X_a(f) = \begin{cases} \frac{1}{f_s} X(f), & |f| \leq \frac{f_s}{2} \\ 0, & |f| > \frac{f_s}{2} \end{cases}. \quad (4.2)$$

Iz (4.2) sledi da se spektar  $X_a(f)$  signala  $x_a(t)$  može dobiti iz spektra  $X(f)$  odbiraka  $x[n]$  skaliranjem i eliminacijom spektralnih replika. Signal u vremenskom domenu  $x_a(t)$  je inverzna Furijeova transformacija spektra  $X_a(f)$ :

$$\begin{aligned} x_a(t) &= \mathcal{F}^{-1}\{X_a(f)\}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X_a(f) e^{j2\pi f t} df \\ &= \int_{-\frac{f_s}{2}}^{\frac{f_s}{2}} X_a(f) e^{j2\pi f t} df = \frac{1}{f_s} \int_{-\frac{f_s}{2}}^{\frac{f_s}{2}} X(f) e^{j2\pi f t} df \end{aligned} \quad (4.3)$$

Granice integracije u (4.3) su svedene sa  $(-\infty, \infty)$  na  $(-f_s/2, f_s/2)$  zbog toga što je u (4.2)  $X_a(f) \equiv 0$  za  $|f| > f_s/2$ . Iz (4.2) takođe sledi da je  $X_a(f) = f_s^{-1} X(f)$  u intervalu  $(-f_s/2, f_s/2)$ .

Pošto je spektar diskretnog signala  $X(f)$  DTFT odbiraka  $x(n) \equiv x_a(nT)$

$$X(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(nT) e^{-j2\pi n \frac{f}{f_s}}, \quad (4.4)$$

izraz (4.3) se može preurediti u:

$$x_a(t) = \frac{1}{f_s} \int_{-\frac{f_s}{2}}^{\frac{f_s}{2}} \left[ \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(nT) e^{-j2\pi n \frac{f}{f_s}} \right] e^{j2\pi f t} df. \quad (4.5)$$

Redosled integracije i sumiranja se može promeniti ukoliko suma konvergira:

$$x_a(t) = \frac{1}{f_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(nT) \int_{-\frac{f_s}{2}}^{\frac{f_s}{2}} e^{j2\pi f(t-nT)} df. \quad (4.6)$$

Integral u (4.6) se može napisati u obliku

$$\frac{1}{f_s} \int_{-\frac{f_s}{2}}^{\frac{f_s}{2}} e^{j2\pi f(t-nT)} df = \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \frac{1}{f_s} \text{rect}\left(\frac{f}{f_s}\right) e^{-j2\pi f nT} \right] e^{j2\pi f t} df, \quad (4.7)$$

gde je  $\text{rect}(x)$  pravougaona funkcija (odeljak A.3.1), pošto je  $\text{rect}(f/f_s) = 0$  za  $f/f_s > 1/2$  i  $\text{rect}(f/f_s) = 1$  za  $f/f_s < 1/2$ . Desna strana (4.7) ima oblik inverzne Furijeove transformacije i može se izračunati primenom svojstva pomeraja u vremenskom domenu

$$X(f)e^{-j2\pi ft_0} \leftrightarrow x(t - t_0) \quad (4.8)$$

i tabličnog transformacionog para Furijeove transformacije

$$\frac{1}{a} \text{rect}\left(\frac{f}{a}\right) \leftrightarrow \frac{\sin \pi at}{\pi at}. \quad (4.9)$$

Primenom (4.8) i (4.9) na desnu stranu (4.7) dobijamo

$$\frac{1}{f_s} \int_{-\frac{f_s}{2}}^{\frac{f_s}{2}} e^{j2\pi f(t-nT)} df = \frac{\sin\left(\pi \frac{t-nT}{T}\right)}{\pi \frac{t-nT}{T}} = \text{sinc}\left(\frac{t-nT}{T}\right), \quad (4.10)$$

odakle konačno sledi

$$x_a(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(nT) \text{sinc}\left(\frac{t-nT}{T}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \text{sinc}\left(\frac{t-nT}{T}\right) \quad (4.11)$$

Izraz (4.11) pokazuje da se kontinualni signal  $x_a(t)$  može rekonstruisati za svako  $t$  iz vremenski ekvidistantnih odbiraka  $x[n] \equiv x_a(nT)$  ukoliko su uslovi teoreme odabiranja zadovoljeni.

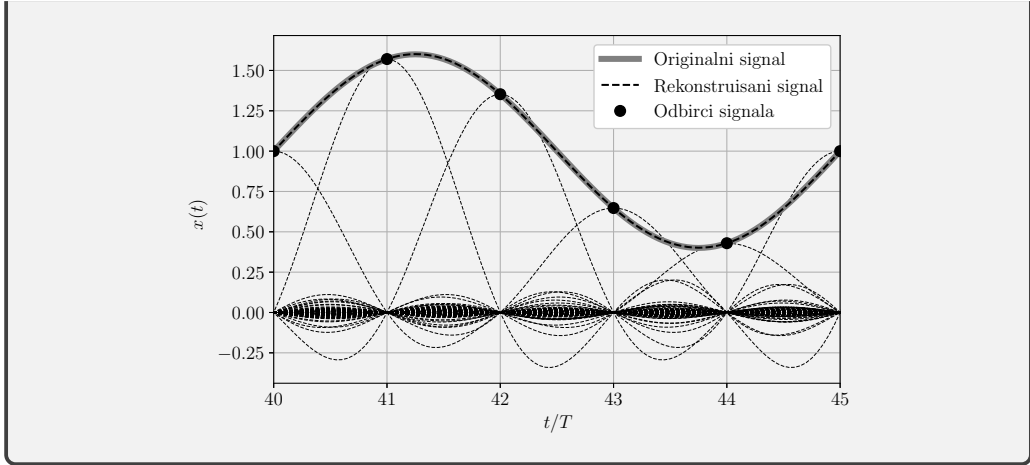
#### Primer 4.1: Idealna rekonstrukcija signala

Obirci  $x[n] = x_a(nT)$  su dobijeni odabiranjem kontinualnog signala

$$x_a(t) = 1 + 0.6 \sin(2\pi t/5)$$

sa periodom  $T = 1$ . Uslovi teoreme odabiranja su zadovoljeni pošto je učestanost sinusoide  $f = 1/5 < 1/(2T) = 1/2$ . Na slici su prikazani signal  $x_a(t)$ , odbirci signala  $x[n]$ , signal rekonstruisan korišćenjem (4.11) i pojedinačne zakašnjene i skalirane interpolacione funkcije. U vremenskim trenucima  $t = nT$  sve osim jedne interpolacione funkcije imaju vrednost nula tako da je vrednost rekonstruisanog signala određena odbirkom  $x_a(nT)$ .

Za  $t \neq nT$  vrednost rekonstruisanog signala je superpozicija *svih* odbiraka signala, uključujući i buduće odbirke  $x[n]$ , gde je  $nT > t$ , pomnoženih zakašnjenim interpolacionim funkcijama. Zavisnost vrednosti signala u trenutku  $t$  od budućih odbiraka je posledica toga što idealna interpolaciona funkcija nije kauzalna.



## 4.2 Interpolaciona funkcija

Izraz za idealnu rekonstrukciju signala (4.11) se može preurediti u oblik

$$x_a(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(nT)g(t - nT), \quad (4.12)$$

gde je  $g(t)$  interpolaciona funkcija za rekonstrukciju signala

$$g(t) = \text{sinc}\left(\frac{t}{T}\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi t}{T}\right)}{\frac{\pi t}{T}}. \quad (4.13)$$

Impulsni odziv interpolacione funkcije  $g(t)$  (4.13), prikazan na slici 4.1, nije kauzalan i beskonačno dugo traje, zbog čega ona nije pogodna za praktičnu primenu. Preuređeni izraz za rekonstrukciju signala (4.12) je stoga od praktičnog značaja, pošto se može koristiti za rekonstrukciju signala sa drugim funkcijama.

Interpolaciona funkcija  $g(t)$  ima osobine

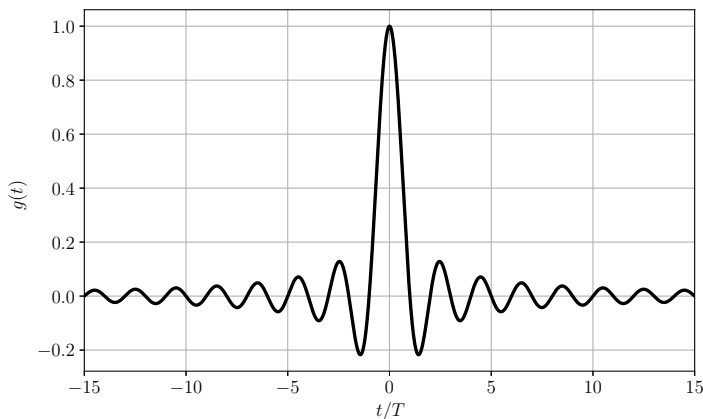
$$g(0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin\left(\frac{\pi t}{T}\right)}{\frac{\pi t}{T}} = 1, \quad (4.14)$$

$$g(nT) \Big|_{n \neq 0} = \frac{\sin(n\pi)}{n\pi} = 0. \quad (4.15)$$

Pošto u vremenskim trenucima  $t = mT$  za  $m \neq n$  važi  $g(t - nT) = 0$ , za  $t = nT$  rekonstruisani signal ima vrednost

$$x_a(nT) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(nT)g(t - nT) = x_a(nT), \quad (4.16)$$





Slika 4.1: Interpolaciona funkcija za idealnu rekonstrukciju signala.

odnosno ne zavisi od vrednosti ostalih odbiraka. Međutim, vrednost rekonstruisanog signala u vremenskim trenucima  $t \neq nT$  zavisi od vrednosti svih odbiraka, prošlih i budućih.

Moduo frekvencijskog odziva interpolacione funkcije  $g(t)$

$$|G(j\omega)| = |\mathcal{F}\{g(t)\}(j\omega)| = \frac{1}{f_s} \text{rect}\left(\frac{f}{f_s}\right) \quad (4.17)$$

zavisi od učestanosti odabiranja  $f_s$ , o čemu je potrebno voditi računa pri poređenju frekvencijskih odziva interpolacionih funkcija. Stoga je pogodno koristiti normalizovani impulsni odziv  $\hat{g}(t)$

$$\hat{g}(t) = \frac{1}{T} g(t) = f_s g(t), \quad (4.18)$$

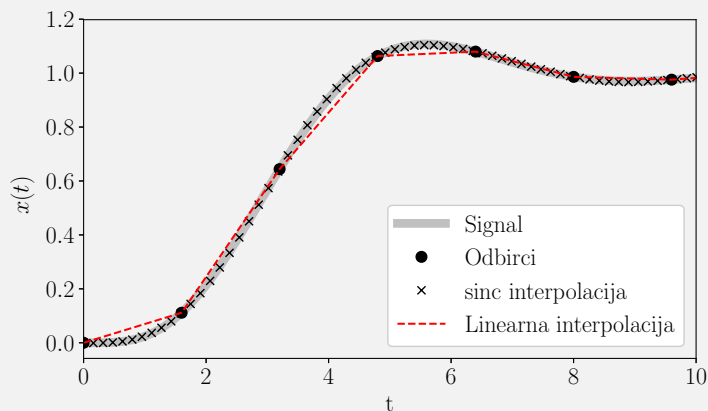
koji ima jedinični odziv u frekvencijskom domenu. Izraz za rekonstrukciju signala sa normalizovanim impulsnim odzivom je

$$x_a(t) = T \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(nT) \hat{g}(t - nT). \quad (4.19)$$

#### Primer 4.2: Prikaz na digitalnom osciloskopu

Interpolaciona funkcija za idealnu rekonstrukciju signala (4.13) se koristi u digitalnim osciloskopima [23] za izračunavanje vrednosti signala između odbiraka radi poboljšanje prikaza signala. Broj interpoliranih tačaka između odbiraka zavisi od proizvođača i modela, i uobičajeno je da se interpolira do 15 tačaka. Prikaz interpoliranih vrednosti signala je koristan za precizno merenje preskoka signala, što je ilustrovano na primeru sa slike. Na slici su prikazani signal koji je odziv filtra sa Batervortovom karakteristikom na Hevisajdovu pobudu, odbirci signala,

sinc interpolacija i linearna interpolacija signala. Može se videti da sinc interpolacija verno interpolira signal i omogućava merenje preskoka, dok se linearnom interpolacijom ne može precizno izmeriti preskok. U praksi je za vernu interpolaciju signala sinc funkcijom potrebno da učestanost odabiranja  $f_s$  bude bar tri puta veća od maksimalne učestanosti u spektru signala  $f_{\max}$ , dok je za linearnu interpolaciju potrebno  $f_s > 10f_{\max}$ .



### 4.3 Kolo zadržke nultog reda (NRZ)

Kolo zadržke nultog reda rekonstruiše signal tako što vrednost odbirka  $x(n)$  zadržava na izlazu u vremenskom intervalu  $(nT, n(T+1))$ , gde je  $T = 1/f_s$  period odabiranja. Drugi naziv kola zadržke nultog reda je kolo bez povratka na nulu (engl. non return to zero - NRZ) kako bi se napravila razlika u odnosu na kolo kod kojeg se izlaz vraća na nulu posle  $T/2$ . Impulzni odziv kola zadržke nultog reda (slika 4.2) je:

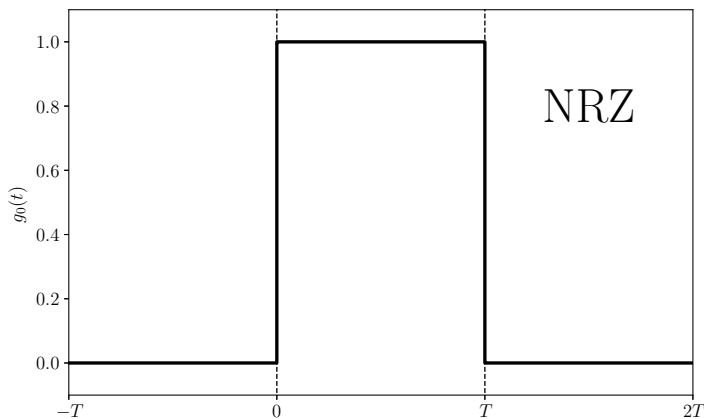
$$g_0(t) = h(t) - h(t - T) \quad (4.20)$$

Zbog jednostavnosti realizacije kolo zadržke nultog reda se veoma često koristi u praksi i važno je razumeti šta je neophodno preduzeti kako bi se obezbedila verna rekonstrukcija signala.

Rekonstruisani signal  $x_a(t)$  u vremenskom domenu

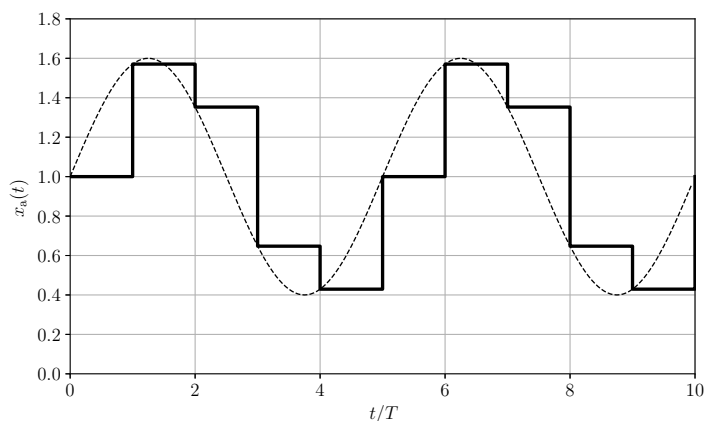
$$x_a(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)g_0(t - nT) \quad (4.21)$$

je prikazan na slici 4.3 punom linijom. Na istoj slici je isprekidanom linijom prikazan i signal, koji zadovoljava uslove teoreme odabiranja, čijim odabiranjem su dobijeni odbirci  $x(n)$ . Poređenjem dva signala se vidi da se rekonstruisani signal značajno razlikuje od



Slika 4.2: Impulsni odziv kola zadržke nultog reda.

polaznog signala. Signal rekonstruisan kolom zadržke nultog reda ima skokovite vrednosti, iz čega se može naslutiti da njegov spektar sadrži mnoštvo harmonika.



Slika 4.3: Rekonstrukcija signala kolom zadržke nultog reda.

Frekvencijska karakteristika kola zadržke nultog reda se može dobiti Laplasovom transformacijom normalizovanog impusnog odziva  $\hat{g}_0(t) = T^{-1}g_0(t)$ :

$$\begin{aligned}
 G_0(s) &= \mathcal{L} \{ \hat{g}_0(t) \} (s) = \mathcal{L} \left\{ \frac{1}{T} (h(t) - h(t - T)) \right\} (s) \\
 &= \frac{1}{T} \left( \frac{1}{s} - \frac{e^{-sT}}{s} \right) = \frac{1 - e^{-sT}}{sT}
 \end{aligned} \tag{4.22}$$

Odziv kola zadržke nultog reda u ustaljenom stanju za prostoperiodičnu pobudu se dobija

zamenom  $s \rightarrow j\omega$ :

$$G_0(j\omega) = \frac{1 - e^{-j\omega T}}{j\omega T} = \frac{e^{\frac{j\omega T}{2}} - e^{-\frac{j\omega T}{2}}}{j\omega T} e^{-\frac{j\omega T}{2}}, \quad (4.23)$$

dok je odziv u funkciji linearne učestanosti:

$$G_0(jf) = \frac{e^{j\pi f T} - e^{-j\pi f T}}{j2\pi f T} e^{-j\pi f T} \quad (4.24)$$

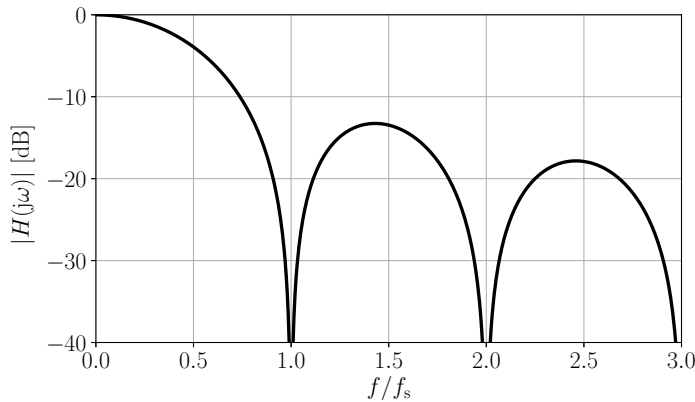
U (4.24) se kompleksne eksponencijalne funkcije mogu zameniti sinusnom funkcijom korišćenjem identiteta:

$$\sin(x) = \frac{e^{jx} - e^{-jx}}{2j}. \quad (4.25)$$

Upotrebom (4.25) u (4.24) izraz za frekventijsku karakteristiku kola zadržke nultog reda se može preurediti u:

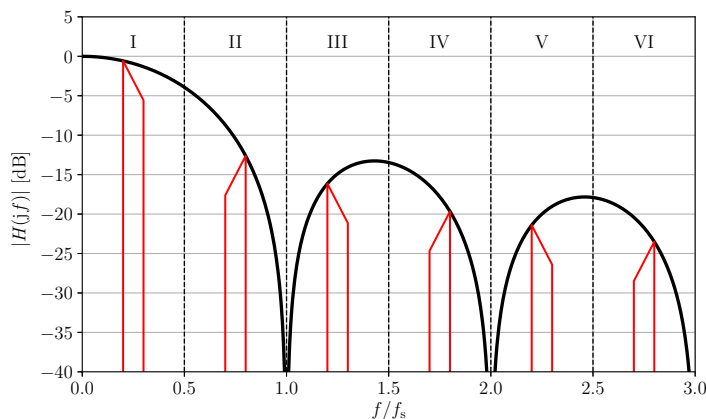
$$G_0(jf) = \frac{\sin(\pi f T)}{\pi f T} e^{-j\pi f T} = \text{sinc}(fT) e^{-j\pi f T}. \quad (4.26)$$

Frekventijski odziv kola zadržke nultog reda je prikazan na slici 4.4. Kolo zadržke nultog reda ima frekventijski zavisno slabljenje u prvoj Nikvistovoj zoni  $(0, f_s/2)$  koje iznosi 4 dB na učestanosti  $f_s/2$ . Frekventijski zavisno slabljenje potiskuje spektralne komponente na višim učestanostima i potrebno je izvršiti korekciju kako bi se obezbedila verna rekonstrukcija signala.



Slika 4.4: Frekventijska karakteristika kola zadržke nultog reda.

Potiskivanje kola zadržke nultog reda signala na učestanostima  $f > f_s/2$ , odnosno u višim Nikvistovim zonama, nije besoknačno tako da su spektralne replike iz viših Nikvistovih zona prisutne u rekonstruisanom signalu, kao što je ilustrovano na slici 4.5 U većini praktičnih primena frekventijski odziv kola zadržke nultog reda ne obezbeđuje adekvatno potiskivanje spektralnih replika i potrebno je koristiti analogni filter koji je razmatran u odeljku 2.3.



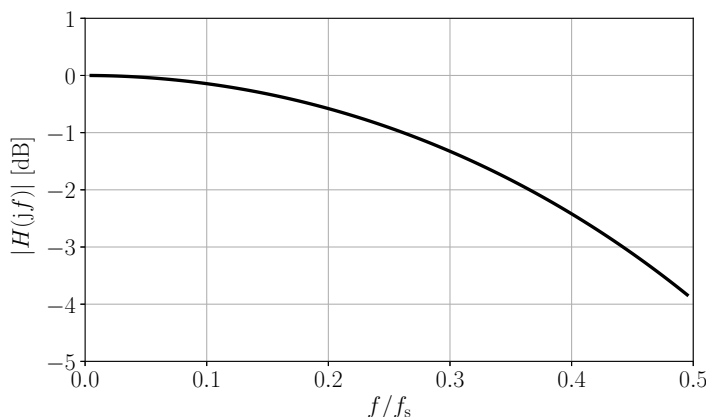
Slika 4.5: Potiskivanje spektralnih replika frekvencijskom karakteristikom kola zadržke nultog reda.

#### 4.4 Korekcija $\sin(x)/x$ odziva kola zadržke nultog reda

Moduo frekvencijskog odziva kola zadržke nultog reda je

$$|H_{\text{NRZ}}(jf)| = \text{sinc}(fT), \quad (4.27)$$

i prikazan je u prvoj Nikvistovoj zoni na slici 4.6. Slabljenje signala na učestanostima  $F > 0.25$  je veće od 1 dB i raste do skoro 4 dB na  $F = 0.5$ . U mnogim primenama frekvencijski zavisno slabljenje nije prihvatljivo i potrebno je razmotriti kako se slabljenje može kompenzovati.



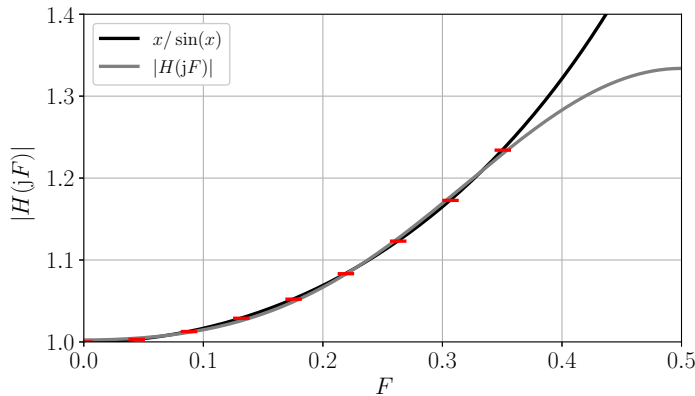
Slika 4.6: Frekvencijska karakteristika kola zadržke nultog reda u prvoj Nikvistovoj zoni.

Kolo zadržke nultog reda se uglavnom koristi sa analognim filtrom za potiskivanje spektralnih replika, tako da bi se frekvencijska karakteristika analognog filtra mogla mo-

difikovati tako da kompenzuje frekvencijski odziv kola zadržke nultog reda. Teorijski je moguće projektovati analogni filter koji bi kompenzovao frekvencijski odziv kola zadržke nultog reda, ali bi njegova realizacija bila nepraktična, npr. zbog strogih zahteva za tolerancijama komponenti. Bolje rešenje je da se korekcija frekvencijske karakteristike izvrši u digitalnom domenu FIR filtrom.

Korekcija  $|\text{sinc}(fT)|$  frekvencijskog odziva kola zadržke nultog se može izvršiti FIR filtrom sa inverznim odzivom u opsegu učestanosti  $[0, F_{\max}]$ . U većini primena je maksimalna učestanost korisnog digitalnog signala ograničena na  $F < 0.4$ , pošto se tim izborom obezbeđuje dovoljna širina prelazne zone analognog filtra. Pošto nema potrebe korigovati frekvencijski odziv signala koji je u prelaznoj zoni analognog filtra, maksimalna učestanost za koju se vrši korekcija frekvencijskog odziva se takođe može ograničiti na  $F_{\max} < 0.4$ .

Koeficijenti  $\text{sinc}(fT)^{-1}$  korekcionog FIR filtra se mogu odrediti nekim od algoritama za projektovanje digitalnih filtera zadavanjem vrednosti željenog frekvencijskog odziva. Na slici 4.7 je prikazana frekvencijska karakteristika  $\text{sinc}(fT)^{-1}$ , zadate vrednosti željenog frekvencijskog odziva crvenom bojom, i frekvencijski odziv projektovanog FIR filtra za korekciju frekvencijskog odziva kola zadržke nultog reda.



Slika 4.7: Frekvencijska karakteristika  $\text{sinc}(fT)^{-1}$  i projektovanog FIR filtra za korekciju frekvencijskog odziva kola zadržke nultog reda.

Sa slike 4.7 se može videti da projektovani FIR filter ima pojačanje veće od jediničnog, zbog čega može doći do prekoračenja opsega. Pojačanje kompenzacionog FIR filtra monotono raste i najveće je na  $F = 1/2$ , i potrebno je skalirati koeficijente filtra tako da pojačanje bude jedinično na  $F = 1/2$ . Pošto je pojačanje FIR filtra na učestanosti  $F$

$$|H(e^{j2\pi F})| = \left| \sum_{n=0}^N b[n] e^{-j2\pi n F} \right|, \quad (4.28)$$

na  $F = 1/2$  je:

$$|H(e^{j\pi})| = \left| \sum_{n=0}^N b[n] e^{-jn\pi} \right| = \left| \sum_{n=0}^N (-1)^n b[n] \right| \quad (4.29)$$

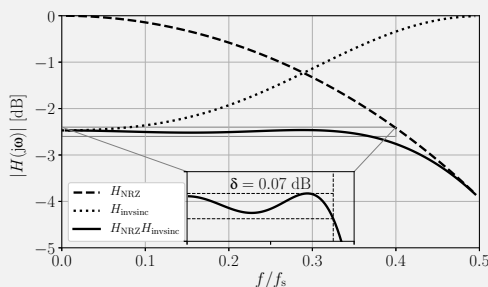
Skalirani koeficijenti FIR filtra kod kojeg ne dolazi do prekoračenja su

$$b'[n] = \frac{b[n]}{\left| \sum_{n=0}^N (-1)^n b[n] \right|} \quad (4.30)$$

#### Primer 4.3: FIR filter za kompenzaciju $\text{sinc}(fT)$ odziva

FIR filter četvrtog reda za kompenzaciju  $\text{sinc}(fT)$  frekvencijske karakteristike kola zadržke nultog reda u opsegu učestanosti  $(0, 0.35f_s)$  je projektovan metodom najmanje kvadratne greške korišćenjem Python funkcije `firls` zadavanjem željenog frekvencijskog odziva filtra u devet tačaka. Dobijeni koeficijenti filtra su skalirani da ne bi dolazilo do prekoračenja opsega korišćenjem (4.30), čime je uneto slabljene od 2.5 dB, i dati su u tabeli. Projektovani FIR filter se može realizovati sa samo tri množača. Frekvencijski odzivi kola zadržke nultog reda, FIR filtra i ukupna karakteristika su prikazani na slici, sa koje se može videti da je u opsegu učestanosti  $(0, 0.35f_s)$  varijacija pojačanja 0.07 dB.

| $n$ | $b[n]$      |
|-----|-------------|
| 0   | 0.01039662  |
| 1   | -0.06213235 |
| 2   | 0.85494206  |
| 3   | -0.06213235 |
| 4   | 0.01039662  |



## 4.5 Rekonstrukcija signala van prve Nikvistove zone

Kolo zadržke nultog reda se koristi za rekonstrukciju signala u prvoj Nikvistovoj zoni, ali to nije jedina mogućnost. U nekim primenama je potrebno ili poželjno izvršiti rekonstrukciju signala u višim Nikvistovim zonama. Na primer, kada je najviša učestanost u spektru signala veća od  $f_s/2$  nije moguće izvršiti rekonstrukciju signala u prvoj Nikvistovoj zoni, i u tom slučaju je potrebno izvršiti rekonstrukciju u nekoj od viših zona. Rekonstrukcijom u višim zonama se može generisati signal na višoj učestanosti od maksimalne učestanosti odabiranja  $f_s/2$ , ili se učestanost odabiranja, a samim tim i broj računskih operacija za generisanje odbiraka, može smanjiti.

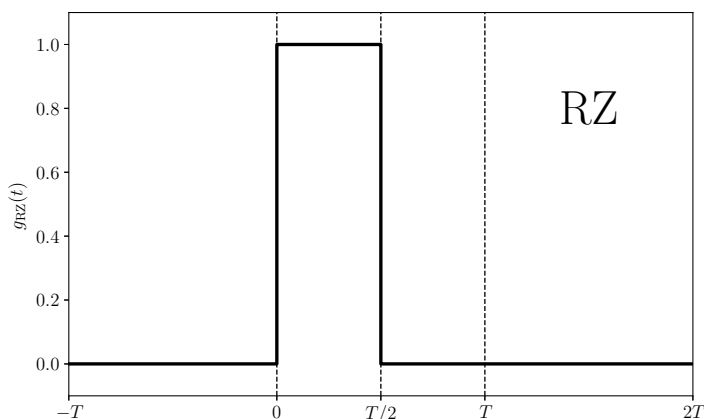
Značaj rekonstrukcije u višim Nikvistovim zonama se može videti iz toga što je implementiran u čipovima visokih performansi. Na primer, 14-to bitni D/A konvertor MAX5879 maksimalne brzine konverzije od 2.5 Gsps podržava sve rekonstrukcione funkcije opisane u narednim odeljcima. Rekonstrukcija u višim Nikvistovim zonama se koristi i u RFSoc familiji čipova kompanije Xilinx.

Spektralne replike signala u višim Nikvistovim zonama postoje i uobličene su amplitudskim odzivom rekonstrukcione funkcije. Izborom adekvatne rekonstrukcione funkcije se može izvršiti rekonstrukcija signala u višim Nikvistovim zonama, i to će biti razmatrano u narednim odeljcima.

#### 4.5.1 Rekonstrukcija signala kolom zadržke nultog reda sa povratkom na nulu (RZ)

Kolo zadržke nultog reda sa povratkom na nulu (engl. return to zero - RZ) zadržava vrednost odbirka tokom polovine periode odabiranja, nakon čega se vrednost izlaza postavlja na nulu. Impulsni odziv RZ kola je (slika 4.8):

$$g_{\text{RZ}}(t) = h(t) - h(t - T/2). \quad (4.31)$$



Slika 4.8: Impulsni odziv kola zadržke nultog reda sa povratkom na nulu.

Rekonstrukcija signala RZ kolom je prikazana na slici 4.9. Punom linijom je nacrtan rekonstruisani signal, dok je isprekidanom linijom nacrtan kontinualni signal od kojeg su dobijeni odbirci. Na izlazu RZ kola vrednost odbirka se zadržava samo u toku polovine periode odabiranja i nakon toga se vraća na nulu, za razliku od NRZ kola gde se vrednost odbirka zadržava u toku cele periode.

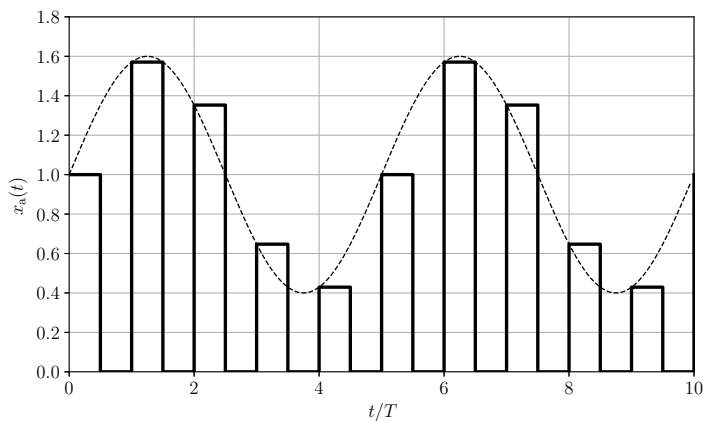
Frekvencijska karakteristika RZ kola se može odrediti Laplasovom transformacijom normalizovanog impulsnog odziva:

$$G_{\text{RZ}}(s) = \mathcal{L}\{\hat{g}_{\text{RZ}}(t)\}(s) = \frac{1}{T} \left( \frac{1}{s} - \frac{e^{-sT/2}}{s} \right) = \frac{1 - e^{-sT/2}}{sT} \quad (4.32)$$

Zamenom  $s \rightarrow j\omega$  dobijamo odziv u ustaljenom stanju:

$$G_{\text{RZ}}(j\omega) = \frac{1 - e^{-j\omega T/2}}{j\omega T} = \frac{e^{j\omega T/4} - e^{-j\omega T/4}}{j\omega T} e^{-j\omega T/4}, \quad (4.33)$$





Slika 4.9: Rekonstrukcija signala kolom zadržke nultog reda sa povratkom na nulu.

i dalje imamo da je:

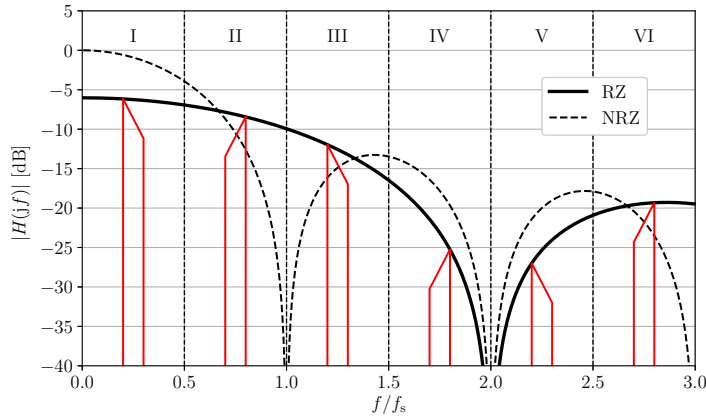
$$G_{\text{RZ}}(jf) = \frac{1}{2} \frac{e^{\frac{j\pi fT}{2}} - e^{-\frac{j\pi fT}{2}}}{j2\pi fT/2} e^{-\frac{j\pi fT}{2}}. \quad (4.34)$$

Kompleksne eksponencijalne funkcije se mogu zameniti sinusnom funkcijom upotrebom identiteta (4.25), tako da konačno dobijamo:

$$G_{\text{RZ}}(jf) = \frac{1}{2} \frac{\sin(\frac{\pi fT}{2})}{\frac{\pi fT}{2}} e^{-j\frac{\pi fT}{2}} = \frac{1}{2} \text{sinc}\left(\frac{fT}{2}\right) e^{-j\frac{\pi fT}{2}} \quad (4.35)$$

Frekvencijski odziv RZ kola, sa označenim Nikvistovim zonama i spektralnim replikama, je prikazan na slici 4.10. Na prvi pogled, RZ kolo je inferiorno u odnosu na NRZ kolo pošto odziv u prvoj Nikvistovoj zoni ima slabljenje od 6 dB. Slabljenje od 6 dB je posledica toga što je vrednost signala na izlazu RZ kola samo u jednoj polovini periode odabiranja. Međutim, promena pojačanja kod RZ kola u opsegu učestanosti  $(0, f_s/2)$  je samo  $\approx 0.93$  dB, dok je kod NRZ kola  $\approx 4$  dB, i u nekim primenama se može koristiti i bez filtra za korekciju frekvencijskog odziva. Filtar za korekciju frekvencijskog odziva NRZ kola unosi slabljenje, npr. za specifikacije iz primera 4.3 slabljenje je  $\approx 2.5$  dB, tako da je razlika u pojačanjima  $\approx 3.5$  dB. Potrebno je koristiti analogni filtar za potiskivanje spektralnih replika, kao i kod NRZ kola za rekonstrukciju. Iz ovih razloga RZ kolo može biti alternativa NRZ kolu u nekim primenama.

Suštinska razlika u frekvencijskim odzivima RZ i NRZ kola je u drugoj Nikvistovoj zoni  $(f_s/2, f_s)$ , gde je odziv RZ kola od  $\approx -6.9$  na  $f_s/2$  do  $\approx -9.9$  dB na  $f_s$ , dok je odziv NRZ kola od  $\approx -4$  dB na  $f_s/2$  do  $-\infty$  na  $f_s$ . Konačan odziv u drugoj i trećoj Nikvistovoj zoni RZ kola omogućava rekonstrukciju signala u opsegu učestanosti  $(f_s/2, f_s)$  ili  $(f_s, 3f_s/2)$  korišćenjem filtra propusnika opsega učestanosti za potiskivanje spektralnih replika odgovarajućih gabarita.



Slika 4.10: Frekvencijski odziv kola zadržke nultog reda sa povratkom na nulu.

Pri rekonstrukciji signala u drugoj Nikvistovoj zoni važno je imati u vidu da je spektar signala invertovan, odnosno spektralna komponenta na učestanosti  $f_0$  se u drugoj Nikvistovoj zoni pojavljuje na učestanosti  $f_s - f_0$ .

#### 4.5.2 Filtar za rekonstrukciju signala u višim Nikvistovim zonama

Kod rekonstrukcije signala u prvoj Nikvistovoj zoni je potrebno izabrati učestanost odabiranja  $f_s$  i/ili ograničiti maksimalnu učestanost u spektru diskretnog signala  $F_{\max} = f_{\max}/f_s$  kako bi širina prelazne zone i red analognog filtra za zadate gabarite bio praktičan - više detalja se može naći u odeljku 2.3. Spektralna komponenta na digitalnoj učestanosti  $F_{\max}$  ima repliku na učestanosti  $F_r = 1 - F_{\max}$ , odakle je širina prelazne zone filtra

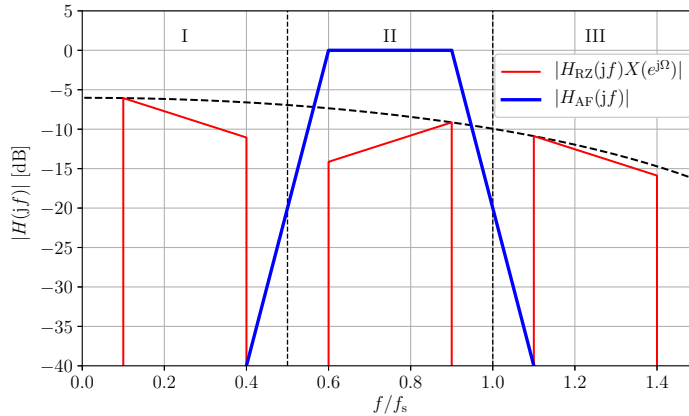
$$\Delta f = f_{\text{stop}} - f_{\text{pass}} = f_s (F_r - F_{\max}) = f_s (1 - 2F_{\max}). \quad (4.36)$$

Izbor  $F_{\max} < 0.4$  rezultuje širinom prelazne zone od  $\Delta f > 0.2f_s$  za koju je u većini slučajeva red analognog filtra praktično ostvariv. U mnogim primenama je jednostavnije i jeftinije povećati učestanost odabiranja radi smanjenja reda analognog filtra.

Za rekonstrukciju signala u  $k$ -toj zoni potrebno je projektovati analogni filtari koji adekvatno potiskuje spektralne replike u susednim zonama, kao što je prikazano na slici 4.11 za drugu zonu i RZ kolo. Spektar diskretnog signala  $X(e^{j\Omega})$  je uobičen frekvencijskim karakteristikama kola za rekonstrukciju - u prikazanom primeru RZ kola  $H_{\text{RZ}}(j\omega)$  - i analognog filtra  $H_{\text{AF}}(j\omega)$ .

Komponenta u spektru diskretnog signala na digitalnoj učestanosti  $F_0 = f_0/f_s$  se u  $k$ -toj zoni pojavljuje na učestanosti:

$$f_k = \begin{cases} \frac{k-1}{2}f_s + f_0, & k \text{ neparno} \\ \frac{k}{2}f_s - f_0, & k \text{ parno} \end{cases}. \quad (4.37)$$



Slika 4.11: Rekonstrukcija signala u drugoj Nikvistovoj zoni.

U slučaju rekonstrukcije signala u drugoj Nikvistovoj zoni sa slike 4.11 spektralna komponenta diskretnog signala na učestanosti  $F_{\max} = f_{\max}/f_s$  se slika na učestanost:

$$f_{2,\min} = f_s - f_{\max}, \quad (4.38)$$

koja je minimalna učestanost signala u drugoj zoni, što je posledica inverzije spektra u parnim zonama. Za rekonstrukciju u  $k$ -toj zoni, gde je  $k$  parno, ograničenje maksimalne učestanosti u spektru diskretnog signala  $F_{\max}$  obezbeđuje potrebnu širinu prelazne zone analognog filtra na granici  $k - 1$ -ve i  $k$ -te zone

$$\Delta f_{k-1,k} = f_k - f_{k-1} = f_s - 2f_{\max} = f_s(1 - 2F_{\max}) \quad (4.39)$$

i jednaka je širini prelazne zone date u (4.36). Širina prelazne zone na granici  $k$ -te i  $k + 1$ -ve zone ( $k$  parno) se dobija za  $f_0 = f_{\min}$  i iznosi:

$$\Delta f_{k,k+1} = f_{k+1} - f_k = 2f_{\min} = 2f_s F_{\min} \quad (4.40)$$

Iz (4.39) i (4.40) se vidi da je za rekonstrukciju signala u višim Nikvistovim zonama potrebno ograničiti spektar diskretnog signala na opseg učestanosti

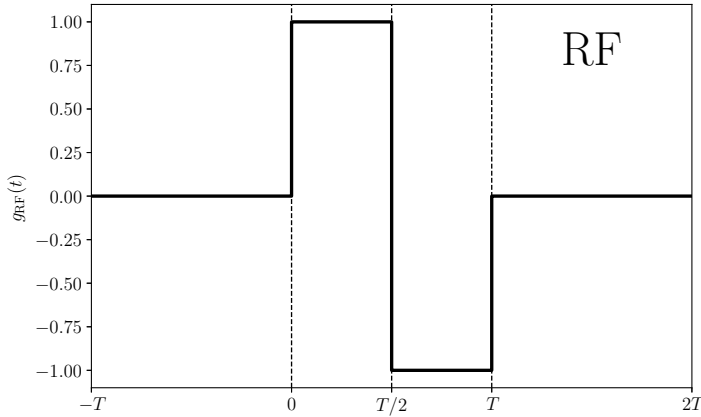
$$(F_{\min}, F_{\max}) \approx (0.1, 0.4), \quad (4.41)$$

kako bi se obezbedila dovoljna širina prelaznih zona analognog filtra propusnika opsega učestanosti od  $0.2f_s$ . Zaključak (4.41) pokazuje da je rekonstrukcija u višim Nikvistovim zonama moguća samo u slučaju signala čiji spektar je ograničen na opseg učestanosti  $(F_{\min}, F_{\max})$ , i da je maksimalna širina spektra signala manja od  $0.3f_s$ . Ekvivalentno izvođenje važi i u slučaju rekonstrukcije signala u neparnim zonama, s' razlikom da  $F_{\min}$  određuje širinu prelazne zone analognog filtra između  $k - 1$ -ve i  $k$ -te Nikvistove zone, dok je širina prelazne zone između  $k$ -te i  $k + 1$ -ve zone određena sa  $F_{\max}$ .

### 4.5.3 Rekonstrukcija signala bipolarnim kolom zadržke nultog reda

Bipolarno kolo zadržke nultog reda (RF) u prvoj polovini perioda odabiranja  $(0, T/2)$  zadržava vrednost odbirka, dok u drugoj polovini  $(T/2, T)$  daje vrednost odbirka sa promenjenim znakom. Impulsni odziv RF kola je (slika 4.12):

$$g_{\text{RF}}(t) = h(t) - 2h(t - T/2) + h(t - T) \quad (4.42)$$



Slika 4.12: Impulsni odziv bipolarnog kola zadržke nultog reda (RF).

Rekonstrukcija signala RF kolom je prikazana na slici 4.13. Punom linijom je nacrtan rekonstruisani signal, dok je isprekidanom linijom nacrtan kontinualni signal od kojeg su dobijeni odbirci. Signal dobijen RF kolom se može smatrati modulisanom verzijom signala dobijenog NRZ kolom, pošto je:

$$x_{\text{RF}}(t) = \text{sgn}(\sin(2\pi t/T))x_{\text{NRZ}}(t). \quad (4.43)$$

Frekvencijska karakteristika RF kola se može odrediti Laplasovom transformacijom normalizovanog impulsnog odziva:

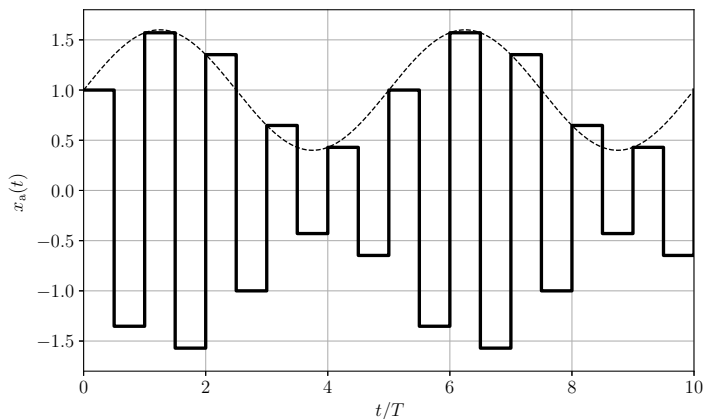
$$\begin{aligned} G_{\text{RF}}(s) &= \mathcal{L}\{\hat{g}_{\text{RF}}(t)\}(s) \\ &= \frac{1 - 2e^{-sT/2} + e^{-sT}}{sT} = \frac{(1 - e^{-sT/2})^2}{sT} \end{aligned} \quad (4.44)$$

Odziv u ustaljenom stanju za prostoperiodičnu pobudu se može dobiti zamenom  $s \rightarrow j2\pi f$ :

$$G_{\text{RF}}(jf) = \frac{(1 - e^{-j\pi fT})^2}{j2\pi fT} = \frac{(e^{j\pi fT/2} - e^{-j\pi fT/2})^2}{j2\pi fT} e^{-j\pi fT} \quad (4.45)$$

Dalje imamo

$$G_{\text{RF}}(jf) = j \left( \frac{e^{j\pi fT/2} - e^{-j\pi fT/2}}{2j} \right)^2 \frac{e^{-j\pi fT}}{\pi fT/2} \quad (4.46)$$



Slika 4.13: Rekonstrukcija signala bipolarnim kolom zadržke nultog reda.

Zamenom  $\sin(x) = (e^{jx} - e^{-jx})/(2j)$  prethodni izraz postaje

$$G_{\text{RF}}(jf) = j \frac{\sin(\pi f T / 2)^2}{\pi f T / 2} e^{-j\pi f T} \quad (4.47)$$

Konačni oblik izraza se dobija upotrebom  $\text{sinc}(x) = \sin(\pi x)/(\pi x)$  i  $j = e^{j\pi/2}$ :

$$G_{\text{RF}}(jf) = \text{sinc}\left(\frac{fT}{2}\right) \sin\left(\frac{\pi f T}{2}\right) e^{-j(\pi f T - \pi/2)} \quad (4.48)$$

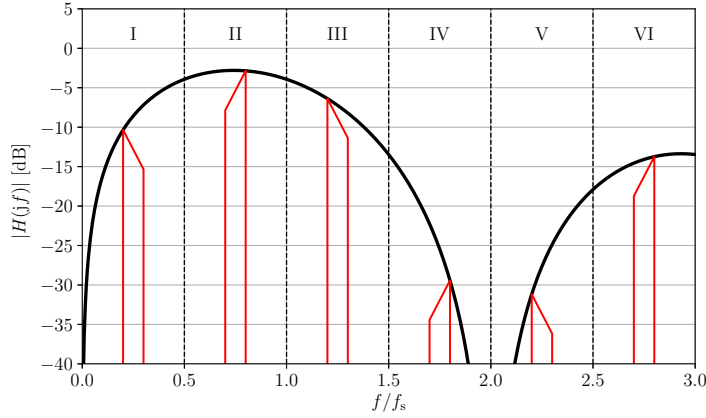
Frekvencijski odziv RF kola (4.48) je prikazan na slici 4.14. RF kolo se ne koristi za rekonstrukciju signala u prvoj Nikvistovoj zoni zbog nule prenosne karakteristike na  $f = 0$ . Signal se može rekonstruisati u drugoj i trećoj Nikvistovoj zoni, s' tim što je rekonstrukcija u trećoj Nikvistovoj zoni više od teorijskog nego od praktičnog značaja zbog velike promene pojačanja.

#### 4.5.4 Rekonstrukcija signala bipolarnim kolom zadržke nultog reda sa povratkom na nulu

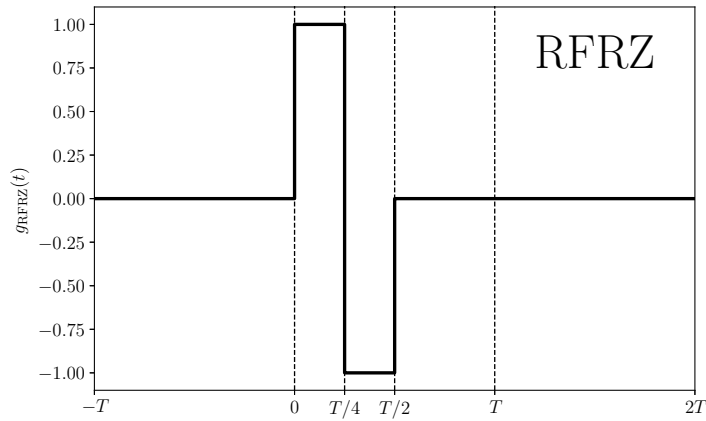
Bipolarno kolo zadržke nultog reda sa povratkom na nulu (RFRZ) u prvoj četvrtini periode odabiranja  $(0, T/4)$  zadržava vrednost odbirka, u drugoj četvrtini  $(T/4, T/2)$  menja znak odbirka i ostatak periode  $(T/2, T)$  na izlazu daje nulu. Impulсни odziv RFRZ kola je dat sa (slika 4.15):

$$g_{\text{RFRZ}}(t) = h(t) - 2h(t - T/4) + h(t - T/2) \quad (4.49)$$

Primer rekonstrukcije signala RFRZ kolom je prikazan na slici 4.16. Rekonstruisani signal je nula u polovini svake periode i stoga je očekivano da frekvencijska karakteristika RFRZ kola ima slabljenje od bar 6 dB.



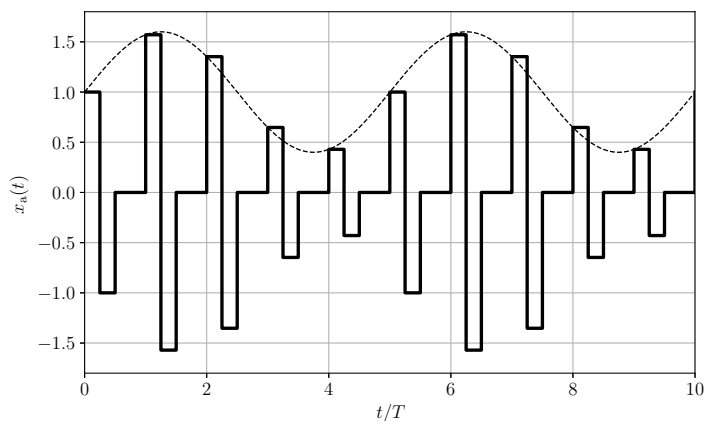
Slika 4.14: Frekvencijska karakteristika bipolarnog kola zadržke nultog reda.



Slika 4.15: Impulsni odziv bipolarnog kola zadržke nultog reda sa povratkom na nulu.

Frekvencijska karakteristika RFRZ kola se može odrediti Laplasovom transformacijom normalizovanog impulsnog odziva:

$$\begin{aligned}
 G_{\text{RFRZ}}(s) &= \mathcal{L} \{ \hat{g}_{\text{RFRZ}}(t) \} (s) \\
 &= \frac{1 - 2e^{-sT/4} + e^{-sT/2}}{sT} \\
 &= \frac{(1 - e^{-sT/4})^2}{sT}
 \end{aligned} \tag{4.50}$$

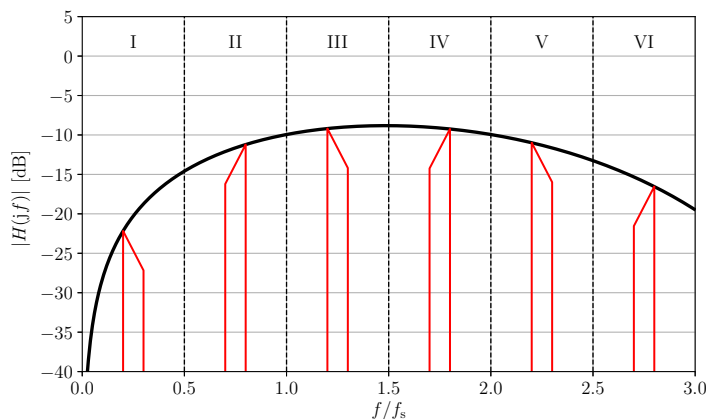


Slika 4.16: Rekonstrukcija signala bipolarnim kolom zadržke nultog reda sa povratkom na nulu.

Odziv u ustaljenom stanju za prostoperiodičnu pobudu dobijamo za  $s \rightarrow j2\pi f$ :

$$G_{\text{RF}}(jf) = \frac{1}{2} \text{sinc}\left(\frac{fT}{4}\right) \sin\left(\frac{\pi fT}{4}\right) e^{-j(\pi fT/4 - \pi/2)} \quad (4.51)$$

Frekvencijska karakteristika RFRZ kola je prikazana na slici 4.17. Rekonstrukcija signala je moguća u II, III, IV i V Nikvistovoj zoni, s' tim što je promena pojačanja u III i IV zoni oko 1 dB, dok je u II i V zoni oko 5 dB. Teorijski, rekonstrukcija signala je moguća i u VI Nikvistovoj zoni, ali bi podrhtavanje takta odabiranja značajno degradiralo odnos signal/šum.



Slika 4.17: Frekvencijska karakteristika bipolarnog kola zadržke nultog reda sa povratkom na nulu.

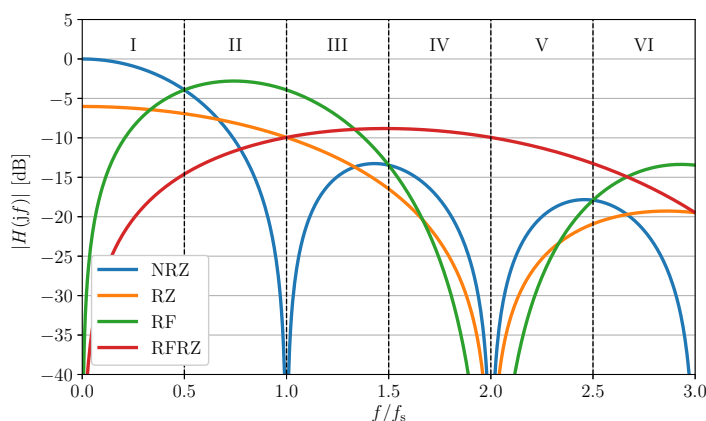
### 4.5.5 Poređenje odziva kola za rekonstrukciju signala

Poređenje frekvencijskih odziva kola za rekonstrukciju signala je prikazano na slici 4.18. Zajedničko za sva kola je da se mora koristiti analogni filter za potiskivanje neželjenih spektralnih replika, i da je za većinu primena potrebno koristiti FIR filter za korekciju frekvencijske karakteristike.

Kolo zadržke nultog reda (NRZ) je adekvatno za rekonstrukciju signala u prvoj Nikvistovoj zoni i spektar diskretnog signala je ograničen širinom prelazne zone analognog filtra na  $(0, F_{\max})$ , koji je u praksi uglavnom  $(0, 0.4)$ . Rekonstrukcija signala u višim Nikvistovim zonama je moguća korišćenjem kola zadržke nultog reda sa povratkom na nulu (RZ), bipolarnim kolom zadržke (RF) i bipolarnim kolom zadržke sa povratkom na nulu (RFRZ). Pri rekonstrukciji signala u višim zonama spektar diskretnog signala mora biti ograničen na opseg  $(F_{\min}, F_{\max})$ , uglavnom na  $(0.1, 0.4)$

Za rekonstrukciju signala u drugoj Nikvistovoj zoni najbolje je RF kolo, pošto ima najmanje slabljenje i malu promenu pojačanja. Moguće je koristiti i RZ kolo uz nešto veće slabljenje i varijaciju pojačanja. Potencijalna prednost RZ kola je u tome što je moguće izvršiti rekonstrukciju i u prvoj Nikvistovoj zoni uz promenu frekvencijske karakteristike analognog filtra, npr. analognim multiplekserom. Pri rekonstrukciji signala u parnim zonama važno je imati u vidu da je spektar signala invertovan po učestanosti i konjugovan.

Rekonstrukcija signala u trećoj i četvrtoj Nikvistovoj zoni je moguća RFRZ kolom uz slabljenje oko 10 dB. Slabljenje signala kod RFRZ kola je značajno, ali u primenama gde ne postoji dovoljno brz D/A konvertor za rekonstrukciju signala u nižim zonama, RFRZ nema alternativu. Rekonstrukcija u višim Nikvistovim zonama se često koristi za generisanje signala u GHz opsegu, tako da ograničenje može biti i u generatoru odbiraka signala, koji ne može postići brzinu odabiranja za rekonstrukciju u prvoj Nikvistovoj zoni, ali može generisati odbirke signala na 3-4 puta nižoj učestanosti.



Slika 4.18: Poređenje frekvencijskih odziva kola za rekonstrukciju signala.



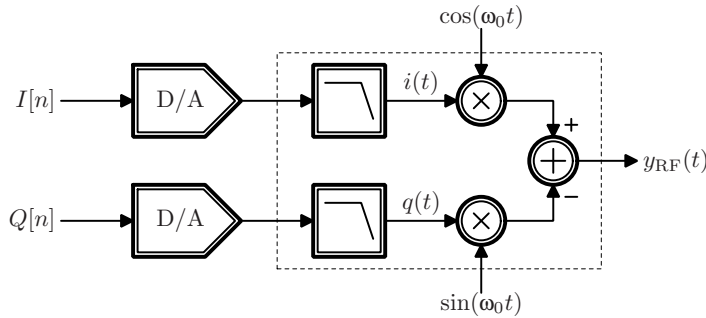
#### 4.5.6 Kolo za rekonstrukciju kompleksnih signala

Kompleksni signal u osnovnom opsegu učestanosti  $x[n] = I[n] + jQ[n]$  se koristi u komunikacionim sistemima za reprezentaciju signala kod kojih su modulirani amplituda i faza, npr. QAM, OFDM itd. Prenos signala se obavlja na centralnoj učestanosti  $f_0$  transliranjem spektra  $x(t)$  kompleksnim mešačem u predajniku sa direktnom konverzijom, kao što je prikazano na slici 4.19. Translacija spektra kompleksnog signala se vrši množenjem kompleksnog signala  $x(t)$  kompleksnom sinusoidom i uzimanjem realnog dela proizvoda:

$$y_{\text{RF}}(t) = \Re \{ [i(t) + jq(t)] e^{j2\pi f_0 t} \} = i(t) \cos(2\pi f_0 t) - q(t) \sin(2\pi f_0 t). \quad (4.52)$$

U arhitekturi predajnika sa direktnom konverzijom sa slike 4.19 realni i imaginarni deo kompleksnog signala se rekonstruišu u osnovnom opsegu učestanosti, i zatim se konverzija na centralnu učestanost  $f_0$  obavlja analognim kolima.

Rekonstrukcija kompleksnog signala se zasniva na pretpostavci da su frekvencijske karakteristike filtera i mešača obe grane uparene, i da fazni pomeraaj signala na centralnoj učestanosti  $\omega_0$  iznosi tačno  $90^\circ$ . Nejednako pojačanje u granama i odstupanje faznog pomeraja od  $90^\circ$  rezultuje konačnim potiskivanjem simetričnog opsega i degradacijom odnosa signal/šum. Detalji o efektima neidealnosti na rekonstrukciju kompleksnog signala se mogu naći u odeljku B.4. Neuparenost u analognim kolima rezultuje različitim pojačanjem i fazom u granama kroz koje prolaze realni i imaginarni deo signala, zbog čega je potrebno izvršiti korekciju u digitalnom domenu.



Slika 4.19: Rekonstrukcija kompleksnog signala analognim kompleksnim mešačem.

Direktna rekonstrukcija kompleksnog signala se principski može izvršiti RFIQ kolom sa slike 4.20. Odziv kola za rekonstrukciju realnog dela signala je

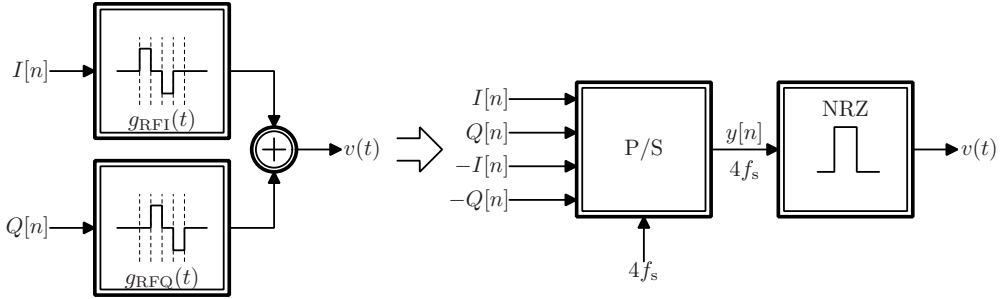
$$g_{\text{RFI}}(t) = h(t) - h(t - T/4) - h(t - T/2) + h(t - 3T/4), \quad (4.53)$$

dok je odziv kola za rekonstrukciju kompleksnog dela signala pomeren za  $T/4$ :

$$g_{\text{RFQ}}(t) = g_{\text{RFI}}(t - T/4). \quad (4.54)$$

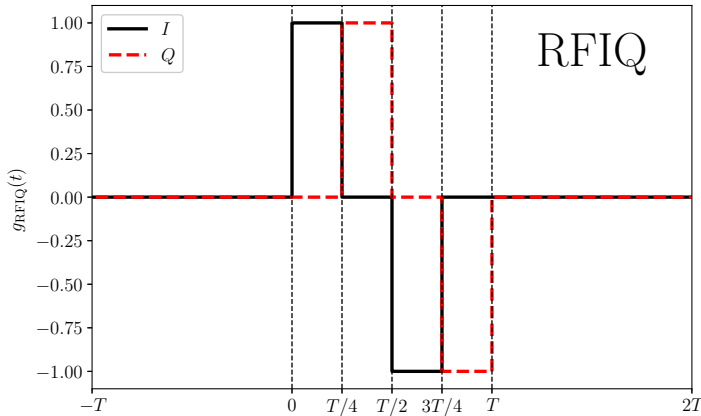
Ekvivalentno kolo za rekonstrukciju se može realizovati paralelno-serijskim konvertorom koji radi na  $4f_s$  i kolom zadržke nultog reda. Od posebnog interesa je slučaj kada su

signali  $I[n]$  i  $Q[n]$  jednobitni pošto se rekonstrukcija signala u potpunosti može izvršiti digitalnim kolima. U literaturi [24] je prikazana FPGA implementacija direktnog generisanja RF signala  $\Delta\Sigma$  modulacijom kompleksnog signala u osnovnom opsegu učestanosti, i korišćenjem ugrađenih gigabitnih paralelno-serijskih konvertora za rekonstrukciju signala.



Slika 4.20: Kolo za rekonstrukciju kompleksnih signala i realizacija paralelno-serijskim konvertorom i NRZ kolom za rekonstrukciju.

Vremenski odziv kola za rekonstrukciju realnog i imaginarnog dela kompleksnog signala RFIQ je prikazan na slici 4.21. Odziv RFIQ kola za rekonstrukciju je sličan odzivu RFRZ kola, ali su intervali povratka na nulu umetnuti između pozitivnih i negativnih impulsa, i kola za rekonstrukciju su isprepletana sa vremenskim pomerajem od  $T/4$ .



Slika 4.21: Impulzni odziv kola za rekonstrukciju kompleksnih signala.

Frekventijska karakteristika I grane RFIQ kola za rekonstrukciju kompleksnih signala se može odrediti Laplasovom transformacijom (4.53):

$$G_{\text{RFI}}(s) = \mathcal{L} \{ \hat{g}_{\text{RFI}}(t) \} (s) = \frac{(1 + e^{-sT/4}) (1 - e^{-sT/4})^2}{sT} \quad (4.55)$$

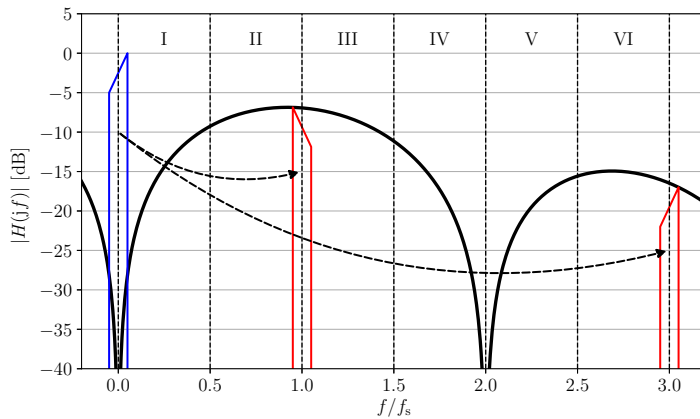
iz koje se može odrediti odziv u ustaljenom periodičnom stanju:

$$G_{\text{RFI}}(jf) = \frac{j}{2} e^{-j3\pi f T/4} \sin\left(\frac{\pi f T}{2}\right) \text{sinc}\left(\frac{f T}{4}\right). \quad (4.56)$$

Impulsni odziv kola za rekonstrukciju signala Q grane je pomeren za  $T/4$ :

$$G_{\text{RFQ}}(jf) = e^{-j\pi f T/4} G_{\text{RFI}}(jf) = \frac{j}{2} e^{-j5\pi f T/4} \sin\left(\frac{\pi f T}{2}\right) \text{sinc}\left(\frac{f T}{4}\right). \quad (4.57)$$

Za razliku od ostalih kola za rekonstrukciju signala, spektar signal rekonstruisanog RFIQ kolom ne mora biti simetričan oko  $n \cdot f_s$  jer se vrši rekonstrukcija kompleksnog signala. Pored toga, RFIQ kolo se koristi za rekonstrukciju signala na učestanosti  $f = f_s$ , kao što je prikazano na slici 4.22, i spektar rekonstruisanog signala je invertovan.



Slika 4.22: Frekvencijska karakteristika kola za rekonstrukciju kompleksnih signala.

Pri rekonstrukciji kompleksnog signala na centralnoj učestanosti  $f_0 = f_s$  signali u I i Q granama se množe signalima nosioca koji su pomereni za  $\pi/2$  (slika 4.19), dok je u RFIQ kolu signal Q grane zakašnjen za  $T/4 = 1/(4f_s)$ . Vremensko kašnjenje od  $T/4$  odgovara frekvencijski zavisnom faznom pomeraju

$$\phi = \angle G_{\text{RFI}}(jf) - \angle G_{\text{RFQ}}(jf) = \angle e^{j\pi f T/2} = \frac{\pi f}{2 f_s}, \quad (4.58)$$

koji iznosi  $\pi/2$  samo na učestanosti  $f = f_s$ .

Odstupanje faznog pomeraja  $\phi$  od  $\pi/2$  rezultuje frekvencijski zavisnim potiskivanjem simetričnog opsega:

$$IR = 10 \log_{10} \frac{1 + 2\Delta \cos \theta + \Delta^2}{1 - 2\Delta \cos \theta + \Delta^2} \quad (4.59)$$

U razmatranom slučaju pojačanja I i Q grana su ista iz čega sledi da je  $\Delta = 1$ , dok je

greška faze  $\theta = \phi - \pi/2$ . Zamenom  $\Delta$  i  $\theta$  u (4.59) dobijamo:

$$IR = 10 \log_{10} \frac{1 + \cos\left(\frac{\pi}{2} \frac{f-f_s}{f_s}\right)}{1 - \cos\left(\frac{\pi}{2} \frac{f-f_s}{f_s}\right)} = 10 \log_{10} \tan^2\left(\frac{\pi}{4} \frac{f + f_s}{f_s}\right). \quad (4.60)$$

Posledica odstupanja faznog pomeraja (4.58) od  $90^\circ$  je konačno potiskivanje simetričnog opsega  $IR$ , koje je manje od 40 dB za učestanosti van opsega  $(1 \pm 0.013)f_s$ , i manje od 30 dB za učestanosti van opsega  $(1 \pm 0.04)f_s$ . Preklapanje simetričnog opsega sa signalom ograničava odnos signal/šum na  $IR$  i potrebno je razmotriti tehnike za poboljšanje  $IR$ .

Poboljšanje  $IR$  se može postići pomeranjem odbiraka  $Q$  grane *unapred* za  $T/4$

$$Q'[n] = Q[n + 1/4] \Rightarrow Q'(z) = H_Q(z)Q(z), \quad (4.61)$$

gde je  $H_Q(z) = z^{1/4}$ . U tom slučaju fazni pomeraj između  $I$  i  $Q'$  grana

$$\phi = \angle G_{\text{RFI}}(jf) - \angle \left[ H_Q \left( e^{j2\pi(f-f_s)T} \right) G_{\text{RFQ}}(jf) \right] = \angle e^{j\pi/2} = \frac{\pi}{2} \quad (4.62)$$

je tačno  $\pi/2$  na svim učestanostima.

Vremenski pomeraj unapred za  $T/4$  se može aproksimirati na više načina, npr. kašnjenjem za deo periode odabiranja koje je prikazano u odeljku 7.10. Aproksimacija vrednosti signala pomerenog za  $T/4$  se može izračunati i kao

$$Q\left(nT + \frac{T}{4}\right) \approx Q(nT) + \frac{dQ}{dt} \frac{T}{4} \quad (4.63)$$

Izvod  $dy/dt$  se može aproksimirati centralnom razlikom

$$\left. \frac{dy}{dt} \right|_{t=nT} \approx \frac{y((n+1)T) - y((n-1)T)}{2T}, \quad (4.64)$$

odakle sledi

$$\frac{dQ}{dt} \frac{T}{4} \approx \frac{Q((n+1)T) - Q((n-1)T)}{2T} \frac{T}{4} = \frac{Q((n+1)T) - Q((n-1)T)}{8} \quad (4.65)$$

Vremenski pomereni odbirci  $Q$  grane su

$$Q'[n] = Q[n] + \frac{Q[n+1] - Q[n-1]}{8}, \quad (4.66)$$

odnosno u  $z$  domenu:

$$Q'(z) = Q(z) + \frac{zQ(z) - z^{-1}Q(z)}{8} = H_Q(z)Q(z) \quad (4.67)$$

gde je prenosna karakteristika kola za korekciju faze  $Q$  grane:

$$H_Q(z) = 1 + \frac{z - z^{-1}}{8}. \quad (4.68)$$

Prenosna funkcija kola za korekciju faze  $Q$  grane (4.68) nije kauzalna zbog člana  $z$ , ali se može učiniti kauzalnom kašnjenjem za jedan odbirak.

Frekvencijski odziv se može dobiti zamenom  $z \rightarrow e^{j2\pi F}$ ,  $F = f/f_s$ :

$$H_Q(e^{j2\pi F}) = 1 + \frac{e^{j2\pi F} - e^{-j2\pi F}}{8} = 1 + j \frac{\sin(2\pi f/f_s)}{4}, \quad (4.69)$$

iz koje se dobijaju amplitudska i fazna karakteristika kola za korekciju faze  $Q$  grane:

$$\begin{aligned} |H_Q(e^{j2\pi F})| &= \sqrt{1 + \frac{\sin^2(2\pi f/f_s)}{16}} \\ \angle H_Q(e^{j2\pi F}) &= \arctan\left(\frac{\sin(2\pi f/f_s)}{4}\right) \end{aligned} \quad (4.70)$$

Razlika faza  $I$  i  $Q$  grana sa kolom za korekciju faze  $Q$  grane iznosi:

$$\phi_Q = \angle G_{\text{RFI}}(jf) - \angle (H_Q(e^{j2\pi F})G_{\text{RFQ}}(jf)) = \frac{\pi}{2} \frac{f}{f_s} - \arctan\left(\frac{\sin(2\pi f/f_s)}{4}\right). \quad (4.71)$$

Odstupanje faze  $\phi_Q$  (4.71) od  $\pi/2$  je značajno manje nego u slučaju bez korekcije (4.58).

Iz (4.70) se može videti da je pojačanje kola za korekciju  $1 \leq |H_Q(e^{j2\pi F})| \leq \sqrt{1 + 4^{-2}}$ , i unosi nejednakost u pojačanja  $I$  i  $Q$  grana. Pojačanja grana se može izjednačiti pome-  
ranjem odbiraka obe grane za  $\pm T/8$ :

$$\begin{aligned} I\left(nT - \frac{T}{8}\right) &\approx I(nT) - \frac{dI}{dt} \frac{T}{8} \\ Q\left(nT + \frac{T}{8}\right) &\approx Q(nT) + \frac{dQ}{dt} \frac{T}{8} \end{aligned} \quad (4.72)$$

Prenosne karakteristike kola za korekciju faza  $I$  i  $Q$  grana (4.72) su

$$H_{IQ}(z) = 1 \mp \frac{z - z^{-1}}{16}, \quad (4.73)$$

dok su frekvencijske karakteristike:

$$H_{IQ}(e^{j2\pi F}) = 1 \mp \frac{e^{j2\pi F} - e^{-j2\pi F}}{16} = 1 \mp j \frac{\sin(2\pi f/f_s)}{8}, \quad (4.74)$$

gde se znak  $-$  koristi u kompenzaciji  $I$  grane, dok se znak  $+$  koristi za  $Q$  granu.

#### Primer 4.4: Poboljšanje $IR$ korekcijom faze

Spektar rekonstruisanog signala kompleksne sinusoide  $x[n] = e^{j2\pi n F}$  bi u idealnom slučaju sadržao samo jednu komponentu na učestanosti  $(1 - F)f_s$ . Usled različitih pojačanja  $I$  i  $Q$  grana i odstupanja faze od  $\pi/2$  u spektru rekonstruisanog signala će postojati i spektralna komponenta na simetričnoj učestanosti  $(1 + F)f_s$ .

Potiskivanje simetričnog opsega se može odrediti simulacijom iz odnosa

$$IR = 20 \log_{10} \left| \frac{X((1-F)f_s)}{X((1+F)f_s)} \right|$$

Na slici je prikazano potiskivanje simetričnog opsega  $IR$  dobijeno simulacijom rekonstrukcije kompleksne sinusoide u opsegu učestanosti  $F = [-0.1, 0.1]$  sa različitim metodama korekcije. Potiskivanje simetričnog opsega je najmanje bez korekcije odstupanja faze Q grane, i poboljšava se korekcijom u Q grani (4.68), kao i u slučaju korekcije u obe grane (4.72).

FIR filtar za kompenzaciju faznog pomeraja (pogledati primer 7.2) je projektovan sa graničnim učestanostima  $F_{\text{pass}} = 0.065$ ,  $F_{\text{stop}} = 0.5 - F_{\text{pass}}$ , talasanjem u propusnom i nepropusnom opsegu  $\delta = 10^{-3}$ , i zahtevom da je filtar neparnog reda. Imajući u vidu da je kašnjenje FIR filtra neparnog reda  $(kn + 1/2)T$ , podelom projektovanog filtra na dve polifazne komponente se realizuje kašnjenje Q grane za  $T/4$ :

$$H_Q(z) = -0.03790088 + 0.26075501z^{-1} + 0.84407961z^{-2} - 0.06784352z^{-3}.$$

Celobrojni deo kašnjenja FIR filtra se kompenzuje kašnjenjem odbiraka u I grani

$$H_I(z) = z^{-2}.$$

Korekcija faznog pomeraja rezultuje konstantnim  $IR$  u celom opsegu učestanosti od interesa. Potiskivanje simetričnog opsega  $IR$  se može poboljšati projektovanjem filtra sa  $\delta = 10^{-4}$ , kao što je prikazano na slici, uz povećanje reda filtra za dva.

