

6

Promena učestanosti odabiranja

Sistemi za obradu signala sa jednom učestanošću odabiranja nisu optimalni jer je u nekim delovima sistema poželjno da učestanost odabiranja bude što veća, dok je u ostatku sistema obratno. Na primer, pri odabiranju ili rekonstrukciji signala poželjno je da učestanost odabiranja bude što veća, jer se time relaksiraju zahtevi i smanjuje se potreban red analognih filtara. Pored toga, nadodabiranje signala smanjuje spektralnu gustinu snage kvantizacionog šuma, i uz adekvatno filtriranje signala povećava se odnos signal/šum. Međutim, povećanje učestanosti odabiranja nije poželjno sa stanovišta broja računskih operacija. U sistemu sa jednom učestanošću odabiranja je stoga potrebno napraviti kompromis između složenosti analognih filtara i broja računskih operacija.

Promenom učestanosti odabiranja - smanjenjem posle odabiranja ili povećanjem pre rekonstrukcije - se mogu dobiti sve prednosti nadodabiranja bez povećanja broja računskih operacija u ostatku sistema. U okviru ovog poglavlja se razmatraju osobine promene učestanosti odabiranja.

Promena učestanosti odabiranja se vrši kompresorom koji odbacuje odbirke, ili ekspanderom koji umeće nulte odbirke. Pri odbacivanju odbiraka dolazi do preklapanja spektra, dok se pri umetanju nultih odbiraka pojavljuju spektralne replike. U oba slučaja je potrebno filtrirati signal pre ili posle promene učestanosti odabiranja radi potiskivanja spektralnih replika ili sprečavanja degradacije signala usled preklapanja spektra.

Linearnost promene učestanosti odabiranja je važna osobina, iz koje direktno slede plemeniti identiteti (engl. noble identities). Plemeniti identiteti pokazuju da se, pod određenim uslovima, redosled filtra i ekspandera (kompresora) u interpolatoru (decimatoru) može zameniti. Zamena redosleda filtra i ekspandera (kompresora) je od suštinske važnosti za primenu polifazne dekompozicije u interpolatoru (decimatoru). Direktno realizacije interpolatora i decimatora prikazane u ovoj glavi su pogodno za teorijsku analizu, ali se ne koriste u praksi jer su neefikasne sa stanovišta broja računskih operacija. Efikasne realizacije interpolatora i decimatora sa polifaznim strukturama se razmatraju u poglavlju 7.

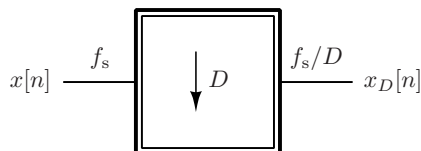
Na kraju poglavlja se razmatra višestepena interpolacija i decimacija, koja se koristi za velike odnose promene učestanosti. Za velike odnose promene učestanosti odabiranja red filtra u interpolatoru (decimatoru) može postati veoma veliki. Filtar veoma velikog reda je nepraktičan sa stanovišta broja računskih operacija, ali i potrebne dužine reči koeficijenata i međurezultata. Višestepenom interpolacijom (decimacijom) se smanjuje red filtara i ukupan broj računskih operacija.

6.1 Smanjenje učestanosti odabiranja

Učestanost odabiranja f_s diskretnog signala $x[n]$ se smanjuje (engl. downsampling) kompresorom, koji je prikazan na slici B.1. Kompresor sa odnosom promene učestanosti odabiranja D prosleđuje odbirke $n = kD$ sa ulaza na izlaz i ostale odbirke odbacuje:

$$x_D[n] = x[nD] = x_a(nDT). \quad (6.1)$$

Učestanost odabiranja ulaznog signala $x[n]$ je f_s , dok učestanost izlaznog signala $x_D[n]$ iznosi f_s/D .



Slika 6.1: Blok za smanjivanje učestanosti odabiranja - kompresor.

Odbacivanje $D - 1$ odbiraka je ekvivalentno odabiranju signala učestanošću f_s/D i može doći do preklapanja spektralnih replika ukoliko spektar signala $x[n]$ nije ograničen. Stoga je od interesa odrediti spektar $x_D[n]$ i uslove pod kojima ne dolazi do preklapanja spektralnih replika.

Smanjenje učestanosti odabiranja D puta se može izvršiti anuliranjem $D - 1$ odbiraka i odbacivanjem nultih odbiraka. Korak anuliranja odbiraka pre odbacivanja je u principu suvišan, pošto se odbirci mogu odbaciti i bez anuliranja, ali teorijska analiza promene učestanosti odabiranja u dva koraka pruža bolji uvid.

U prvom koraku promene učestanosti odbirci signala $x[n]$ se množe sa signalom odabiranja $s_D[n]$ (slika 6.2):

$$s_D[n] = \begin{cases} 1, & n = kD, \quad k \in \mathbb{Z} \\ 0, & \text{inače} \end{cases}, \quad (6.2)$$

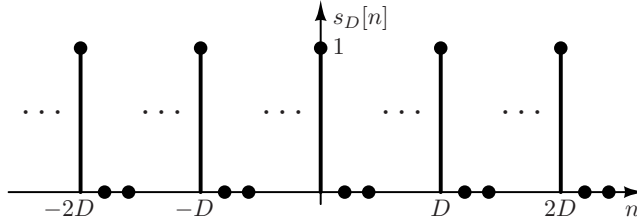
čime se dobija signal sa anuliranim odbircima $\hat{x}[n]$:

$$\hat{x}[n] = x[n]s_D[n] = \begin{cases} x[n], & n = kD, \quad k \in \mathbb{Z} \\ 0, & \text{inače} \end{cases}. \quad (6.3)$$

Anuliranje odbiraka ne menja učestanost odabiranja, tako da $x[n]$ i $\hat{x}[n]$ imaju istu učestanost odabiranja. Učestanost odabiranja se menja u drugom koraku odbacivanjem anuliranih odbiraka.

Signal sa anuliranim odbircima $\hat{x}[n] = x[n]s_D[n]$ se dobija množenjem u vremenskom domenu, odakle sledi da je spektar signala konvolucija $X(\Omega)$ i $S_D(\Omega)$ u frekvencijskom domenu:

$$\hat{X}(\Omega) = X(\Omega) \star S_D(\Omega) \quad (6.4)$$

Slika 6.2: Niz za anuliranje odbiraka $s_D[n]$.

Pretpostavićemo da je spektar signala $X(\Omega)$ poznat, dok se spektar $S_D(\Omega)$ može odrediti diskretnom Furijeovom transformacijom. Pošto je $s_D[n]$ periodičan signal sa periodom D , spektar $S_D(\Omega)$ je diskretan i sadrži D odbiraka spektra.

Po definiciji DFT-a imamo:

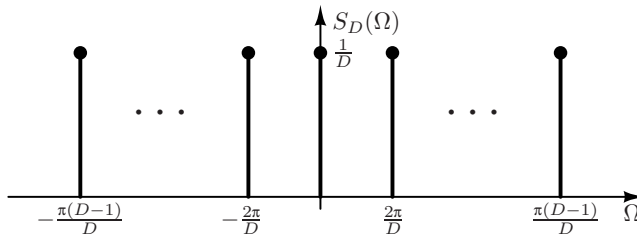
$$S_D[k] = \sum_{n=0}^{D-1} s_D[n] e^{-j2\pi kn/D}. \quad (6.5)$$

Kako je $s_D[n] = 0$ za $n \neq 0$, svi članovi sume su nule osim za $n = 0$, odakle sledi

$$S_D[k] = s_D[0] = 1. \quad (6.6)$$

Odbirci spektra $S_D[k]$ su prikazani na slici 6.3, iz kojih se IDFT-om mogu izraziti odbirci signala $s_D[n]$:

$$s_D[n] = \text{IDFT} \{S_D[k]\} [n] = \frac{1}{D} \sum_{k=0}^{D-1} e^{j2\pi kn/D} \quad (6.7)$$

Slika 6.3: Spektar niza za anuliranje odbiraka $S_D[n]$.

Spektar signala sa anuliranim odbircima $\hat{x}[n]$ se može izračunati diskretnom Furijeovom transformacijom po vremenu:

$$\hat{X}(\Omega) = \mathcal{F} \{x[n] s_D[n]\} (\Omega) \quad (6.8)$$

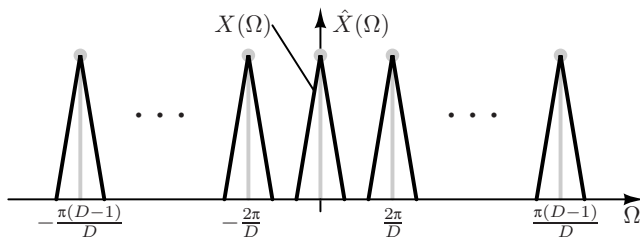
Zamenom (6.7) u prethodni izraz imamo:

$$\begin{aligned}
 \hat{X}(\Omega) &= \mathcal{F} \left\{ x[n] \frac{1}{D} \sum_{k=0}^{D-1} e^{j2\pi kn/D} \right\} (\Omega) \\
 &= \frac{1}{D} \mathcal{F} \left\{ \sum_{k=0}^{D-1} x[n] e^{j2\pi kn/D} \right\} (\Omega). \\
 &= \frac{1}{D} \sum_{k=0}^{D-1} \mathcal{F} \left\{ x[n] e^{j2\pi kn/D} \right\} (\Omega)
 \end{aligned} \tag{6.9}$$

Korišćenjem svojstva Furijeove transformacije $\mathcal{F} \{ x[n] e^{j\Omega_0 n} \} (\Omega) = X(\Omega - \Omega_0)$ sledi:

$$\hat{X}(\Omega) = \frac{1}{D} \sum_{k=0}^{D-1} X \left(\Omega - \frac{2\pi k}{D} \right). \tag{6.10}$$

Iz (6.10) sledi da spektar signala sa anuliranim odbircima $\hat{X}(\Omega)$ sadrži D kopija signala $X(\Omega)$ pomerenih za $\Delta\Omega = 2\pi/D$, što je prikazano na slici 6.4. Ukoliko je $X(\Omega) = 0$ za $|\Omega| \geq \pi/D$ ne dolazi do preklapanja spektralnih replika.



Slika 6.4: Spektar signala sa anuliranim odbircima $\hat{X}(\Omega)$.

U drugom koraku promene učestanosti se signal $x_D[n]$, sa učestanošću odabiranja f_s/D , dobija odbacivanjem $D - 1$ anuliranih odbiraka $\hat{x}[n]$:

$$x_D[n] = \hat{x}[nD] = x[nD] s_D[nD] = x[nD] \tag{6.11}$$

Po definiciji z transformacija $x_D[n]$ je

$$X_D(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_D[n] z^{-n}, \tag{6.12}$$

i imajući u vidu da je $\hat{x}[n] = 0$ za $n \neq kD$ možemo napisati:

$$X_D(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{x}[nD] z^{-n}, \tag{6.13}$$

odakle formalnom smenom $m = nD$ dobijamo:

$$X_D(z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \hat{x}[m] z^{-m/D} \quad (6.14)$$

Zamenom $\hat{x}[n] = x[n]s_D[n]$ dalje sledi:

$$\begin{aligned} X_D(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]s_D[n]z^{-n/D} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \left[\frac{1}{D} \sum_{k=0}^{D-1} e^{j2\pi nk/D} \right] z^{-n/D} \end{aligned} \quad (6.15)$$

Promenom redosleda sumiranja prethodni izraz se može preurediti u:

$$X_D(z) = \frac{1}{D} \sum_{k=0}^{D-1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \left(e^{-j2\pi k/D} z^{1/D} \right)^{-n} \quad (6.16)$$

Unutrašnja suma u prethodnom izrazu ima oblik z transformacije, ali po promenljivoj $e^{-j2\pi k/D} z^{1/D}$:

$$X_D(z) = \frac{1}{D} \sum_{k=0}^{D-1} X(e^{-j2\pi k/D} z^{1/D}) \quad (6.17)$$

Argument funkcije možemo uprostiti smenom $z = e^{j\Omega}$:

$$\begin{aligned} e^{-j2\pi k/D} z^{1/D} &= e^{-j2\pi k/D} e^{j\Omega/D} \\ &= e^{j(\Omega - 2\pi k)/D} \end{aligned} \quad (6.18)$$

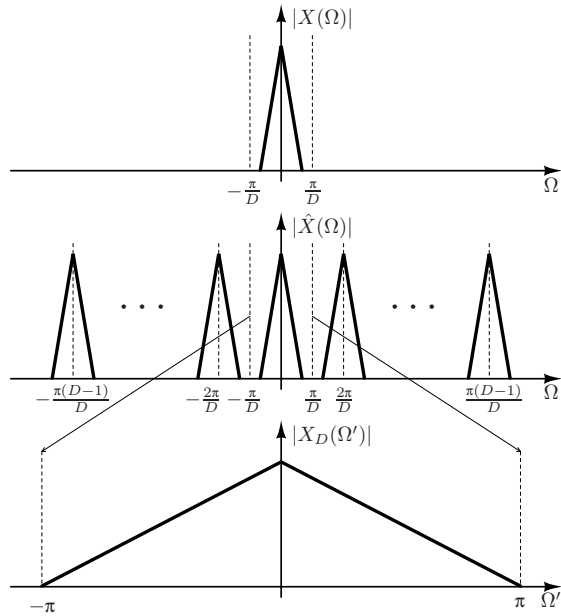
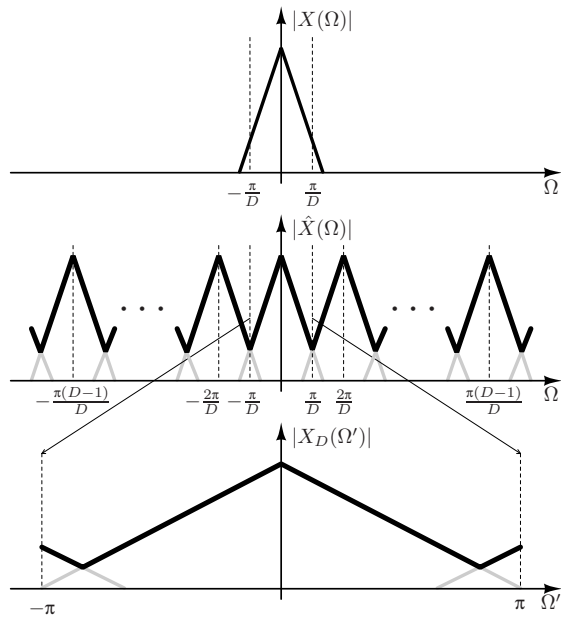
odakle sledi

$$X_D(\Omega) = \frac{1}{D} \sum_{k=0}^{D-1} X\left(\frac{\Omega - 2\pi k}{D}\right) \quad (6.19)$$

Izraz za spektar signala sa smanjenom učestanošću odabiranja (6.19) je sličan izrazu za spektar signala sa anuliranim odbircima (6.10), sa razlikom što je u (6.19) i učestanost Ω podeljena sa D .

Smanjivanjem učestanosti odabiranja D puta perioda odabiranja je D puta duža $T' = DT$. Pošto je $\Omega = 2\pi FT$ sledi da je nova digitalna kružna učestanost $\Omega' = D\Omega$. Smanjivanje učestanosti odabiranja za posledicu ima da se opseg učestanosti $0 \leq |\Omega| \leq \pi/D$ slika na opseg $0 \leq |\Omega'| \leq \pi$.

Spektri $X_D(\Omega')$ i $\hat{X}(\Omega)$ sadrže D replika spektra $X(\Omega)$ i ukoliko je $X(\Omega) \neq 0$ za $|\Omega| \geq \pi/D$ dolazi do preklapanja spektralnih replika. Na slici 6.5 je prikazan slučaj kada ne dolazi do preklapanja spektralnih replika pošto važi $X(\Omega) = 0$ za $|\Omega| \geq \pi/D$, dok je na slici 6.6 prikazan slučaj kada dolazi do preklapanja spektralnih replika.

Slika 6.5: Slučaj $X(\Omega) = 0$ za $|\Omega| \geq \pi/D$.Slika 6.6: Slučaj $X(\Omega) \neq 0$ za $|\Omega| \geq \pi/D$.

6.2 Osobine signala odabiranja $s_D[n]$

U prethodnom odeljku je pokazano da spektar signala $\hat{x}[n]$ koji je dobijen anuliranjem odbiraka signala $x[n]$

$$\hat{x}[n] = x[n]s_D[n]$$

sadrži D replika spektra $X(\Omega)$

$$\hat{X}(\Omega) = \frac{1}{D} \sum_{k=0}^{D-1} X\left(\Omega - \frac{2\pi k}{D}\right),$$

što je prikazano na slici 6.4.

Signal odabiranja $s_D[n]$ je definisan u 6.2, a ovde je ponovljen radi preglednosti

$$s_D[n] = \begin{cases} 1, & n = kD, \quad k \in \mathbb{Z} \\ 0, & \text{inače} \end{cases}.$$

Pošto je $s_D[n]$ periodičan sa periodom D možemo formirati D različitih signala odabiranja kašnjenjem za m taktova:

$$s_D^m[n] = s_D[n - m] = \begin{cases} 1, & n = kD + m, \quad k \in \mathbb{Z} \\ 0, & \text{inače} \end{cases}. \quad (6.20)$$

Korišćenjem zakašnjenih signala odabiranja $s_D^m[n]$ možemo dobiti D različitih parcijalnih sekvenci $\hat{x}_m[n]$

$$\hat{x}_m[n] = x[n]s_D^m[n] = \begin{cases} x[n], & n = kD + m, \quad k \in \mathbb{Z} \\ 0, & \text{inače} \end{cases}. \quad (6.21)$$

Spektar svakog od signala $\hat{x}_m[n]$ sadrži D spektralnih replika ulaznog signala $x[n]$ pošto su signali dobijeni kašnjenjem za m taktova.

Ulazni signal se može predstaviti kao suma svih parcijalnih sekvenci $\hat{x}_m[n]$

$$x[n] = \sum_{m=0}^{D-1} \hat{x}_m[n], \quad (6.22)$$

odakle sledi

$$X(\Omega) = \sum_{m=0}^{D-1} \hat{X}_m(\Omega). \quad (6.23)$$

Rezultat (6.23) je veoma interesantan zbog toga što spektri signala sa anuliranim odbircima $\hat{X}_m(\Omega)$ sadrže D spektralnih replika, ali njihov zbir je jednak spektru ulaznog signala i samim tim sadrži samo jednu kopiju spektra, dok se ostalih $D - 1$ replika poništavaju.

Poništavanje $D - 1$ spektralnih replika je posledica faznog pomeraja koji zavisi od broja taktova za koji je pomeren signal odabiranja m i frekvencijskog pomeraja replike $2\pi k/D$. Fazni pomeraj spektralnih replika se može odrediti iz spektra signala sa anuliranim odbircima $\hat{X}_m(\Omega)$.

Odbirci spektra $S_D^m[k]$ se dobijaju direktnom primenom DFT-a na zakašnjeni signal odabiranja:

$$S_D^m[k] = \sum_{n=0}^{D-1} s_D^m[n] e^{-j2\pi kn/D} = e^{-j2\pi km/D}, \quad (6.24)$$

pomoću kojih se mogu izraziti odbirci $s_D^m[n]$:

$$s_D^m[n] = \text{IDFT} \{S_D^m[k]\} [n] = \frac{1}{D} \sum_{k=0}^{D-1} e^{j2\pi k(n-m)/D} \quad (6.25)$$

Spektar $\hat{X}_m(\Omega)$ se izvodi na isti način kao što je pokazano za $\hat{X}(\Omega)$ u prethodnom odeljku i iznosi:

$$\hat{X}_m(\Omega) = \frac{1}{D} \sum_{k=0}^{D-1} X \left(\Omega - \frac{2\pi k}{D} \right) e^{-j2\pi km/D}. \quad (6.26)$$

Iz (6.26) se vidi da je fazni pomeraj k -te spektralne replike u spektru m -te parcijalne sekvence jednak fazi k -tog odbirka spektra $S_D^m[k]$. Dalje imamo da je

$$\sum_{m=0}^{D-1} \hat{X}_m(\Omega) = \frac{1}{D} \sum_{m=0}^{D-1} \sum_{k=0}^{D-1} X \left(\Omega - \frac{2\pi k}{D} \right) e^{-j2\pi km/D}, \quad (6.27)$$

i zamenom redosleda sumiranja sledi

$$\sum_{m=0}^{D-1} \hat{X}_m = \frac{1}{D} \sum_{k=0}^{D-1} X \left(\Omega - \frac{2\pi k}{D} \right) \sum_{m=0}^{D-1} e^{-j2\pi km/D}. \quad (6.28)$$

Unutrašnja suma ima vrednost (odeljak A.1):

$$\sum_{m=0}^{D-1} e^{-j2\pi km/D} = \begin{cases} D & , k = 0 \\ 0 & , k \neq 0 \end{cases}. \quad (6.29)$$

Zamenom (6.29) u unutrašnju sumu (6.28) imamo:

$$\sum_{k=0}^{D-1} X \left(\Omega - \frac{2\pi k}{D} \right) \sum_{m=0}^{D-1} e^{-j2\pi km/D} = DX(\Omega) \quad (6.30)$$

odnosno

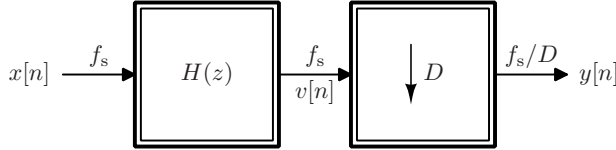
$$\sum_{m=0}^{D-1} \hat{X}_m = X(\Omega) \quad (6.31)$$

odakle sledi da se spektralne replike poništavaju.

Poništavanje spektralnih replika je važan fenomen na kojem se u velikoj meri zasniva rad sistema sa više učestanosti odabiranja. Na primer, pri dekompoziciji filtra na M polifaznih komponenti (poglavlje 7) spektar svake komponente sadrži M spektralnih replika frekvencijske karakteristike filtra. Pojedinačne polifazne komponente nisu selektivne usled višestrukih spektralnih replika frekvencijske karakteristike filtra. Međutim, pri sumiranju doprinosa svih polifaznih komponenti dolazi do poništavanja $M - 1$ spektralnih replika čime se dobija željena frekvencijska karakteristika filtra.

6.3 Decimacija signala

Preklapanje spektralnih replika se može izbeći propuštanjem odbiraka $x[n]$ kroz filter propusnikom niskih učestanosti pre smanjivanja učestanosti odabiranja. Filtriranje odbiraka praćeno smanjenjem učestanosti odabiranja D puta odbacivanjem $D - 1$ odbiraka (slika 6.7) naziva se decimacija signala.



Slika 6.7: Decimator.

Ulazni signal $x[n]$ se propušta kroz filter propusnik niskih učestanosti $H(z)$, i signal $V(z) = H(z)X(z)$ se vodi na kompresor. Primenom (6.19) dobija se spektar decimiranog signala $y[n]$:

$$Y(\Omega) = \frac{1}{D} \sum_{k=0}^{D-1} H\left(\frac{\Omega - 2\pi k}{D}\right) X\left(\frac{\Omega - 2\pi k}{D}\right). \quad (6.32)$$

Do preklapanja spektralnih replika sigurno ne dolazi ako frekvencijska karakteristika filtra propusnika niskih učestanosti ograničava spektar signala na ulazu u kompresor na opseg $|\Omega| < \pi/D$, odnosno ako je:

$$|H(e^{j\Omega})| = \begin{cases} 1, & |\Omega| < \pi/D \\ 0, & \text{inače} \end{cases} \quad (6.33)$$

Pod pretpostavkom da je filter $H(z)$ idealan članovi sume (6.32) su nula za $k > 0$ i spektar signala posle decimacije $y[n]$ je:

$$Y(\Omega) = \frac{1}{D} X\left(\frac{\Omega}{D}\right). \quad (6.34)$$

Iz (6.34) sledi da se spektar ulaznog signala iz opsega učestanosti $(-\pi/D, \pi/D)$ slika u opseg učestanosti $(-\pi, \pi)$ u izlaznom signalu.

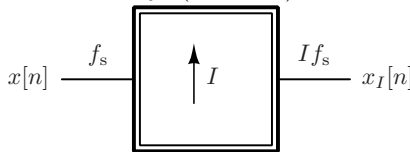
Decimator sa slike 6.7 nije optimalan u smislu broja računskih operacija. Odbirci ulaznog signala se propuštaju kroz filter $H(z)$, koji radi na učestanosti odabiranja ulaznog signala f_s , a zatim se $D - 1$ odbiraka filtriranog signala odbacuje u kompresoru. Broj računskih operacija bi se mogao značajno smanjiti ukoliko bi se izračunavali samo odbirci filtriranog signala koji se koriste, odnosno ukoliko bi se izračunavao svaki D -ti odbirak na izlazu filtra. Strukture za efikasnu realizaciju decimatora se proučavaju u glavama 7 i 8.

6.4 Povećanje učestanosti odabiranja

Učestanost odabiranja signala $x[n]$ se povećava I puta umetanjem $I - 1$ nula između susednih odbiraka ulaznog signala:

$$x_I[n] = \begin{cases} x[n/I], & n = kI, \quad k \in \mathbb{Z} \\ 0, & \text{inače} \end{cases} \quad (6.35)$$

Blok za povećanje učestanosti odabiranja (slika 6.8) se naziva ekspander.



Slika 6.8: Ekspander za povećanje učestanosti odabiranja.

Primenom z transformacije na (6.35) imamo:

$$X_I(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_I[n] z^{-n}, \quad (6.36)$$

i korišćenjem činjenice da je svaki I -ti odbirak $x_I[n]$ nenulti možemo napisati:

$$X_I(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{-nI} = X(z^I) \quad (6.37)$$

Spektar $X_I(\Omega)$ se može izračunati smenom $z = e^{j\Omega}$

$$X_I(e^{j\Omega}) = X\left((e^{j\Omega})^I\right) = X(e^{jI\Omega}), \quad (6.38)$$

odakle je:

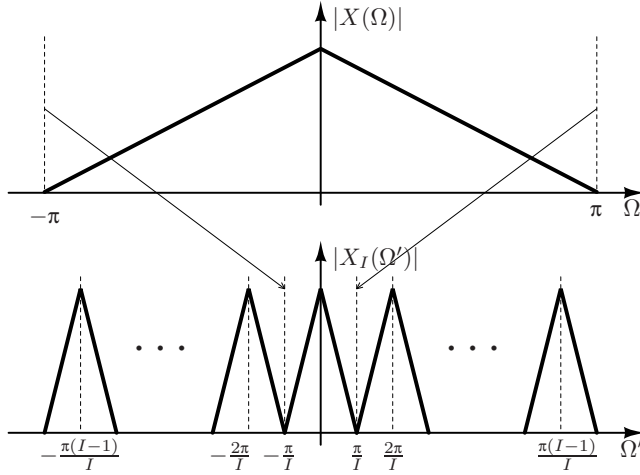
$$X_I(\Omega) = X(I\Omega). \quad (6.39)$$

Iz (6.39) sledi da se spektar ulaznog signala $X(\Omega)$ u opsegu digitalnih kružnih učestanosti $(-\pi, \pi)$ slika u opseg $(-\pi/I, \pi/I)$ i da je

$$f'_s = I f_s, \quad (6.40)$$

$$\Omega' = \frac{\Omega}{I}. \quad (6.41)$$

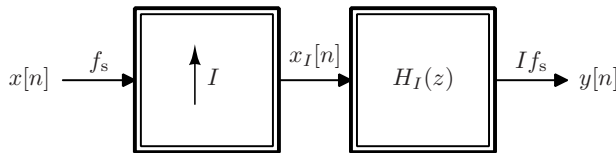
Pored toga, spektar $X_I(\Omega)$ sadrži I replika spektra $X(\Omega)$ pošto zbog periodičnosti spektra važi $X(\Omega) = X(\Omega + 2\pi)$, što je prikazano na slici 6.9. Pri povećanju učestanosti odabiranja ne može doći do preklapanja spektralnih replika, koje se mogu ukloniti filtrom propusnikom niskih učestanosti.



Slika 6.9: Spektar signala na ulazu i izlazu ekspandera.

6.5 Interpolacija signala

Povećanje učestanosti odabiranja I puta dodavanjem $I - 1$ nula rezultuje signalom koji sadrži I spektralnih replika ulaznog signala u opsegu učestanosti $(-\pi, \pi)$. Spektralne replike van opsega $(-\pi/I, \pi/I)$ su nepoželjne i potrebno ih je potisnuti filtrom propusnikom niskih učestanosti. Povećanje učestanosti odabiranja I puta ekspanderom i filtriranje spektralnih replika van opsega $(-\pi/I, \pi/I)$, prikazano na slici 6.10, se naziva interpolacija signala.



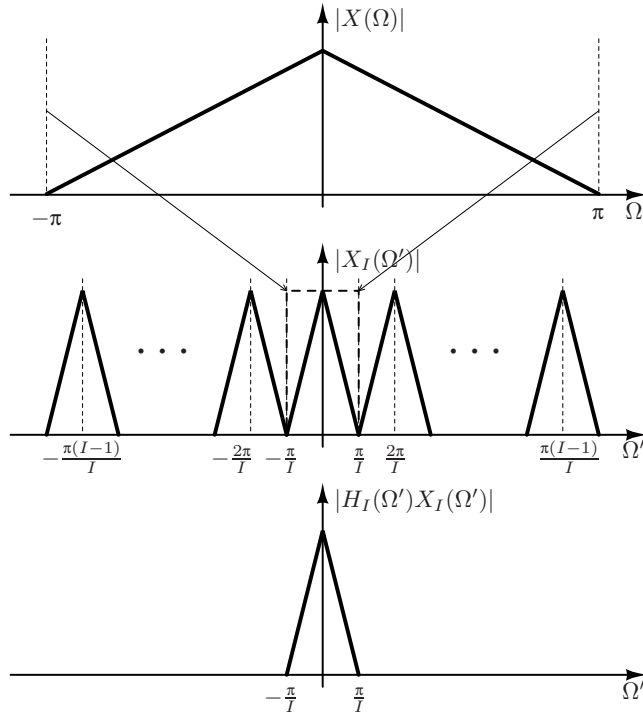
Slika 6.10: Interpolator.

U interpolatoru se učestanost odabiranja ulaznog signala $x[n]$ prvo povećava I puta ekspanderom koji dodaje $I - 1$ nula između odbiraka. Signal sa umetnutim nulama $x_I[n]$, učestanosti odabiranja If_s , se zatim propušta kroz filter propusnik niskih učestanosti $H(z)$ radi potiskivanja spektralnih replika. Spektar izlaznog signala na učestanosti odabiranja If_s je:

$$Y(\Omega) = H_I(\Omega)X_I(\Omega). \quad (6.42)$$

Na slici 6.11 su prikazani spektri signala $X(\Omega)$, $X_I(\Omega)$ i $Y(\Omega)$.

Filtar za uklanjanje spektralnih replika u idealnom slučaju ima frekvencijsku karak-



Slika 6.11: Spektri signala u interpolatoru.

teristiku

$$H_I(e^{j\Omega}) = \begin{cases} C, & |\Omega| \leq \pi/I \\ 0, & \text{inače} \end{cases}, \quad (6.43)$$

gde se konstanta C bira tako da važi

$$y[n] = x[n/I], \quad x = kI, k \in \mathbb{Z}. \quad (6.44)$$

Konstanta C se u principu može proizvoljno izabrati, ali izbor (6.44) obezbeđuje da odbirci ulaznog i interpoliranog signala u vremenskim trenucima $t = nT$ budu jednaki.

Konstanta C se može odrediti ukoliko se nađe veza između odbiraka $y[n]$ i $x[n]$. Odbirci $y[n]$ se mogu izračunati iz spektra $Y(\Omega)$ primenom IDTFT:

$$y[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} Y(\Omega) e^{j\Omega n} d\Omega, \quad (6.45)$$

gde je

$$Y(\Omega) = H_I(\Omega)X_I(\Omega). \quad (6.46)$$

Dalja analiza se može sprovesti za proizvoljno n , ali se za $n = 0$ dobija najjednostavniji

oblik:

$$y[0] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_I(\Omega) X_I(\Omega) d\Omega \quad (6.47)$$

Frekvencijski odziv filtra za uklanjanje spektralnih replika (6.43) je C u opsegu učestanosti $|\Omega| \leq \pi/I$ i nula van njega, odakle sledi:

$$y[0] = \frac{C}{2\pi} \int_{-\pi/I}^{\pi/I} X(I\Omega) d\Omega \quad (6.48)$$

Primenom smene

$$\Omega' = \Omega/I, \quad d\Omega = \frac{d\Omega'}{I} \quad (6.49)$$

dobijamo

$$y[0] = \frac{C}{I} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(\Omega') d\Omega' \quad (6.50)$$

Integral sa desne strane je IDTFT signala $x[n]$ za $n = 0$, odnosno

$$x[0] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(\Omega') d\Omega' \quad (6.51)$$

odakle sledi:

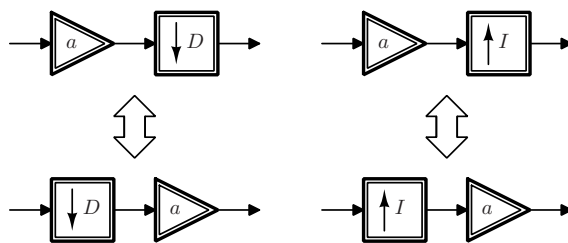
$$y[0] = \frac{C}{I} x[0]. \quad (6.52)$$

Za izbor konstante $C = I$ važi $y[0] = x[0]$, odakle je odziv filtra u interpolatoru

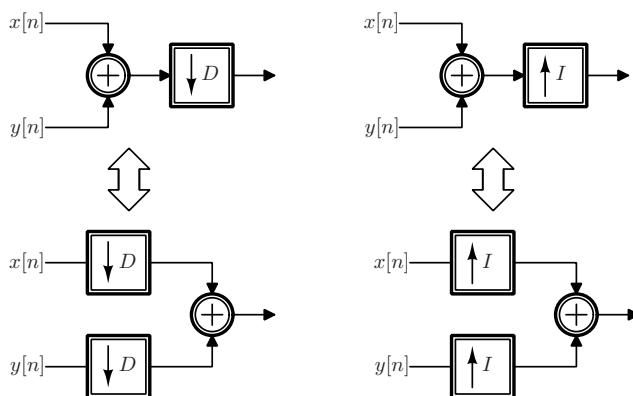
$$H_I = \begin{cases} I, & |\Omega| \leq \pi/I \\ 0, & \text{inače} \end{cases} \quad (6.53)$$

6.6 Linearnost promene učestanosti

Promena učestanosti odabiranja je linearna operacija pošto važe svojstva homogenosti (slika 6.12) i aditivnosti (slika 6.13). Oba svojstva slede direktno iz linearnosti Furijeove i z transformacije. Svojstvo linearnosti promene učestanosti se koristi pri transformacijama strukture filtera, npr. polifaznoj dekompoziciji, koje omogućavaju efikasnu realizaciju decimatora i interpolatora.



Slika 6.12: Homogenost promene učestanosti.



Slika 6.13: Aditivnost promene učestanosti.

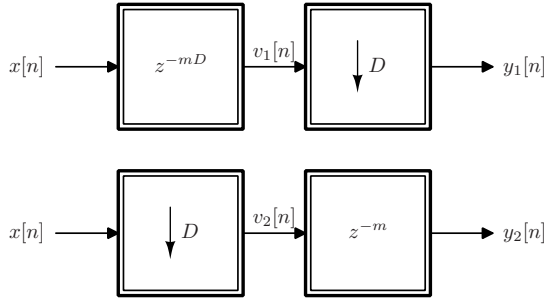
6.7 Zamena redosleda kašnjenja i kompresora

Zamena redosleda kašnjenja i kompresora, prikazana na slici 6.14, je veoma važna transformacija koja se koristi za transformaciju struktura za smanjenje učestanosti odabiranja. Na slici 6.14 su prikazana dva slučaja sa promenjenim redosledom kašnjenja i kompresora. U prvom slučaju signal $y_1[n]$ se dobija kašnjenjem z^{-mD} ulaznog signala $x[n]$ pre promene učestanosti odabiranja D puta kompresorom. U drugom slučaju signal $y_2[n]$ se dobija promenom učestanosti odabiranja od D puta ulaznog signala $x[n]$ i kašnjenjem z^{-m} signala na nižoj učestanosti odabiranja. Prikazani slučajevi su ekvivalentni ukoliko je $y_1[n] = y_2[n]$, što će biti pokazano u daljem tekstu.

U prvom slučaju ulazni signal $x[n]$ se kasni za mD taktova i zatim se smanjuje učestanost odabiranja D puta kompresorom. Signal $v_1[n]$ između kašnjenja i kompresora je zakašnjeni ulazni signal, odnosno:

$$V_1(z) = z^{-mD}X(z). \quad (6.54)$$

Spektar signala $y_1[n]$ se može dobiti primenom izraza za spektar signala na izlazu kom-



Slika 6.14: Zamena redosleda kašnjenja i kompresora.

presora (6.19):

$$Y_1(\Omega) = \frac{1}{D} \sum_{k=0}^{D-1} V_1\left(\frac{\Omega - 2\pi k}{D}\right) \quad (6.55)$$

Iz (6.54) imamo da je:

$$V_1\left(\frac{\Omega - 2\pi k}{D}\right) = e^{-jmD\frac{\Omega - 2\pi k}{D}} X\left(\frac{\Omega - 2\pi k}{D}\right), \quad (6.56)$$

odakle sledi

$$\begin{aligned} Y_1(\Omega) &= \frac{1}{D} \sum_{k=0}^{D-1} e^{-jmD\frac{\Omega - 2\pi k}{D}} X\left(\frac{\Omega - 2\pi k}{D}\right) \\ &= \frac{e^{-jm\Omega}}{D} \sum_{k=0}^{D-1} e^{j2\pi mk} X\left(\frac{\Omega - 2\pi k}{D}\right). \end{aligned} \quad (6.57)$$

Izraz se može dalje uprostiti pošto su m i k celi brojevi i važi $e^{j2\pi mk} = 1$:

$$Y_1(\Omega) = \frac{e^{-jm\Omega}}{D} \sum_{k=0}^{D-1} X\left(\frac{\Omega - 2\pi k}{D}\right) \quad (6.58)$$

U drugom slučaju se učestanost odabiranja ulaznog signala smanjuje D puta kompresorom i zatim kasni m taktova. Signal $v_2[n]$ na izlazu kompresora sa odnosnom promene učestanosti od D puta na čijem ulazu je $x[n]$ je:

$$V_2(\Omega) = \frac{1}{D} \sum_{k=0}^{D-1} X\left(\frac{\Omega - 2\pi k}{D}\right). \quad (6.59)$$

Izlazni signal $y_2[n]$ se dobija kašnjenjem $v_2[n]$ za m taktova:

$$Y_2(z) = z^{-m} V_2(z), \quad (6.60)$$

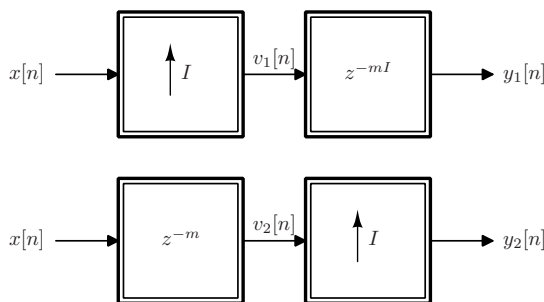
odakle direktno sledi:

$$Y_2(\Omega) = \frac{e^{-jm\Omega}}{D} \sum_{k=0}^{D-1} X\left(\frac{\Omega - 2\pi k}{D}\right). \quad (6.61)$$

Poređenjem (6.58) i (6.61) se vidi da su izrazi isti, odakle sledi da su prikazani slučajevi zamene redosleda kašnjenja i kompresora sa slike 6.14 ekvivalentni.

6.8 Zamena redosleda kašnjenja i ekspandera

Zamena redosleda kašnjenja i ekspandera, prikazana na slici 6.15, se takođe koristi pri transformacijama struktura za promenu učestanosti. Na slici 6.15 su prikazana dva slučaja sa promenjenim redosledom kašnjenja i ekspandera. U prvom slučaju se signal $y_1[n]$ dobija povećanjem učestanosti odabiranja ulaznog signala I puta ekspanderom i zatim se signal kasni mI taktova. U drugom slučaju se signal $y_2[n]$ dobija kašnjenjem ulaznog signala od m taktova i zatim se povećava učestanost odabiranja I puta. Prikazani slučajevi su ekvivalentni ukoliko je $y_1[n] = y_2[n]$, što će biti pokazano.



Slika 6.15: Zamena redosleda kašnjenja i ekspandera.

U prvom slučaju se signal $v_1[n]$ dobija povećanjem učestanosti odabiranja ulaznog signala $x[n]$ I puta ekspanderom. Spektar signala $v_1[n]$ se može dobiti primenom izraza za spektar signala na izlazu ekspandera (6.39):

$$V_1(\Omega) = X(I\Omega) \quad (6.62)$$

Izlazni signal $y_1[n]$ se dobija kašnjenjem signala $v_1[n]$ za mI taktova:

$$Y_1(z) = z^{-mI} V_1(z), \quad (6.63)$$

odakle je spektar izlaznog signala

$$Y_1(\Omega) = e^{-jmI\Omega} X(I\Omega) \quad (6.64)$$

U drugom slučaju se $v_2[n]$ dobija kašnjenjem ulaznog signala za m taktova:

$$V_2(z) = z^{-m} X(z) \quad (6.65)$$

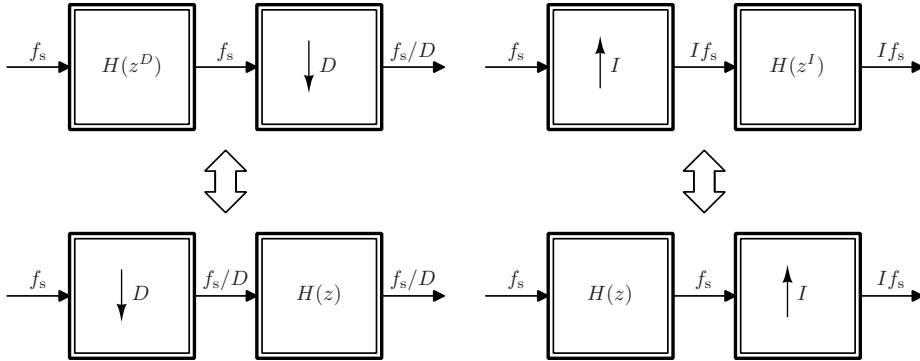
Izlazni signal se dobija povećanjem učestanosti odabiranja I puta signala $v_2[n]$, odakle direktno sledi da je spektar izlaznog signala $y_2[n]$:

$$Y_2(\Omega) = V_2(I\Omega) = e^{-jmI\Omega} X(I\Omega) \quad (6.66)$$

Poređenjem (6.64) i (6.66) se vidi da su izrazi jednaki, odakle sledi da su prikazani slučajevi zamene redosleda kašnjenja i ekspandera sa slike 6.15 ekvivalentni.

6.9 Plemeniti identiteti

Plemeniti identiteti (engl. noble identities), prikazani na slici 6.16, pokazuju da se može izvršiti zamena redosleda FIR filtra i promene učestanosti odabiranja. Primenom plemenitih identiteta filter se može pomeriti u granu sa manjom učestanošću odabiranja, čime se broj računskih operacija značajno smanjuje. Pored toga, u slučaju smanjenja učestanosti odabiranja izbegava se izračunavanje odbirka koji se odbacuju, dok se u slučaju povećanja učestanosti odabiranja ne vrši izračunavanje za umetnute nulte odbirke.



Slika 6.16: Plemeniti identiteti.

Plemeniti identitet za smanjenje učestanosti odabiranja - zamena redosleda kompresora i filtra, prikazana na slici 6.16 levo, se može pokazati primenom svojstava linearnosti promene učestanosti i zamene redosleda kašnjenja i kompresora. Kašnjenje z^{-D} na ulazu kompresora sa odnosom promene učestanosti odabiranja D se može zameniti kašnjenjem z^{-1} na izlazu kompresora:

$$z^{-D} \stackrel{\downarrow D}{\Rightarrow} z^{-1} \quad (6.67)$$

Primenom svojstva homogenosti i aditivnosti promene učestanosti filter $H(z^D)$ na ulazu kompresora se može član po član prebaciti na izlaz:

$$H(z^D) = \sum_{n=0}^N h[n]z^{-nD} \stackrel{\downarrow D}{\Rightarrow} H(z) = \sum_{n=0}^N h[n]z^{-n} \quad (6.68)$$

Plemeniti identitet za povećanje učestanosti odabiranja - zamena redosleda ekspandera i filtra, prikazana na slici 6.16 desno, se takođe može pokazati primenom svojstava

linearnosti promene učestanosti i zamene redosleda kašnjenja i ekspandera. Kašnjenje z^{-1} na ulazu ekspandera sa odnosom promene učestanosti odabiranja I se može zameniti kašnjenjem z^{-I} na izlazu ekspandera:

$$z^{-1} \xrightarrow{\uparrow I} z^{-I} \quad (6.69)$$

Primenom svojstva homogenosti i aditivnosti promene učestanosti filter $H(z)$ na ulazu ekspandera se može član po član prebaciti na izlaz:

$$H(z) = \sum_{n=0}^N h[n]z^{-n} \xrightarrow{\uparrow I} H(z^I) = \sum_{n=0}^N h[n]z^{-nI} \quad (6.70)$$

Pošto smo pokazali da plemeniti identiteti važe, odnosno da oba redosleda filtra i promene učestanosti rezultuju istim odbircima na izlazu, interesantno je uporediti broj računskih operacija različitih redosleda izračunavanja. Na slici 6.16 levo je prikazan plemeniti identitet za slučaj smanjenja učestanosti odabiranja. Kada filter $H(z^D)$ radi na učestanosti odabiranja f_s (gornji slučaj) filter se izračunava za svaki odbirak ulaznog signala. Ukoliko filter ima $N + 1$ koeficijenata, u jednoj sekundi se za izračunavanje izlaza filtra izvrši $f_s(N + 1)$ sabiranja i množenja. Kompresor zatim prosleđuje svaki D -ti odbirak sa izlaza filtra, dok $D - 1$ odbiraka odbacuje. Broj operacija za izračunavanje odbiraka koji se odbacuju $(D - 1)f_s(N + 1)/D$ je u najboljem slučaju, za $D = 2$, jednak broju operacija za izračunavanje odbiraka koji se prosleđuju $f_s(N + 1)/D$, dok je za $D > 2$ veći. Kada je filter $H(z)$ na izlazu kompresora (donji slučaj) i radi na učestanosti odabiranja f_s/D , filter se izračunava za svaki D -ti odbirak ulaznog signala. U tom slučaju se u jednoj sekundi izvršava $f_s(N + 1)/D$ operacija i u potpunosti se izbegava izračunavanje odbiraka koji se odbacuju.

Na slici 6.16 desno je prikazan plemeniti identitet za slučaj povećanja učestanosti odabiranja. Kada je filter $H(z^I)$ na izlazu ekspandera (gornji slučaj) izračunavanje se vrši na učestanosti odabiranja If_s . Ekspander umeće $I - 1$ nula između odbiraka ulaznog signala, tako da su odbirci na ulazu filtra

$$v[n] = [x[0], \overbrace{0, 0, \dots, 0}^{I-1}, x[1], \overbrace{0, 0, \dots, 0}^{I-1}, \dots] \quad (6.71)$$

Pošto je z transformacija filtra oblika $H(z^I)$, $N + 1$ nenultih koeficijenata filtra $h[k]$ su samo uz članove z^{kI} , odnosno:

$$H(z^I) = \sum_{n=0}^N h[n]z^{-nI} = h[0] + h[1]z^{-I} + h[2]z^{-2I} + \dots + h[N]z^{-NI} \quad (6.72)$$

Odbirci na izlazu filtra su:

$$y[n] = \sum_{k=0}^N h[k]v[n - kI] \quad (6.73)$$

odnosno

$$y_1[n] = [h[0]x[0], \overbrace{0, 0, \dots, 0}^{I-1}, h[0]x[1] + h[1]x[0], \overbrace{0, 0, \dots, 0}^{I-1}, \dots] \quad (6.74)$$

Izlaz filtra je različit od nule samo za $n = kI$, dok izračunavanje $I - 1$ odbiraka uvek za rezultat ima nulu. Ukoliko filter ima $N + 1$ nenulih koeficijenata, broj operacija u sekundi je $(N + 1)If_s$, od kojih $(N + 1)(I - 1)f_s$ se troši na operacije koje rezultuju nulom. Kada je filter $H(z)$ ispred ekspandera, na njegovom ulazu su odbirci $x[0], x[1], \dots$ i izlaz filtra je

$$v[n] = [h[0]x[0], h[0]x[1] + h[1]x[0], \dots] \quad (6.75)$$

Ekspander zatim umeće $I - 1$ nula između odbiraka $v[n]$ i izlaz je

$$y_2[n] = [h[0]x[0], \overbrace{0, 0, \dots, 0}^{I-1}, h[0]x[1] + h[1]x[0], \overbrace{0, 0, \dots, 0}^{I-1}, \dots] \quad (6.76)$$

Poređenjem (6.74) i (6.76) se vidi da su izlazi u oba slučaja isti. Međutim, u drugom slučaju filter radi na učestanosti f_s i broj računskih operacija u sekundi za izračunavanje odbiraka je $(N + 1)f_s$. Iako se na izlazu dobijaju isti odbirci, u drugom slučaju je broj računskih operacija I puta manji, pošto se izvršavaju samo nad odbircima ulaznog signala, a ne i nad nulama koje ubacuje ekspander.

Plemeniti identiteti za smanjenje i povećanje učestanosti odabiranja su od velikog praktično značaja pošto se njihovom primenom broj operacija redukuje za odnos promene učestanosti. Zamena redosleda filtra i promene učestanosti odabiranja od M puta je moguća samo ako je z transformacija filtra oblika $H(z^M)$, odnosno ako sadrži samo članove z^{-kM} za $k = 1, 2, 3, \dots$. Ovaj uslov naizgled ograničava primenu plemenitih identiteta pošto u opštem slučaju filter N -tog reda sadrži sve članove z^{-n} za $n = 0, 1, \dots, N$. Međutim, proizvoljni filter se može rastaviti u M komponenti oblika $H_i(z^M)$ primenom polifazne dekompozicije, na koje se zatim mogu primeniti plemeniti identiteti.

6.10 Zamena redosleda kompresora i ekspandera

Redosled kompresora za smanjenje učestanosti D puta i ekspandera za povećanje učestanosti I puta se može zameniti ukoliko su odnosi promene učestanosti uzajamno prosti $\text{NZD}(I, D) = 1$, kao što je prikazano na slici 6.17. Na prvi pogled nije očigledno da identitet važi, pošto se u jednom slučaju odbirci prvo odbacuju a zatim umeću nule, dok se u drugom slučaju prvo umeću nule a zatim odbacuju odbirci.

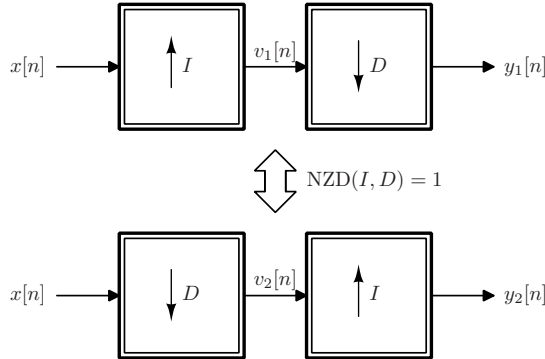
Na slici 6.17 gore je prikazan slučaj $\uparrow I \rightarrow \downarrow D$ u kojem se učestanost odabiranja signala prvo povećava I puta umetanjem $I - 1$ nula između odbiraka ulaznog signala $x[n]$, a zatim se svaki D -ti odbirak prosleđuje na izlaz $y_1[n]$, dok se $D - 1$ odbiraka odbacuje. Prolaskom kroz ekspander i kompresor učestanost odabiranja je sa f_s promenjena na If_s/D .

Signal na izlasku iz ekspandera na slici 6.17 gore je:

$$V_1(z) = X(z^I), \quad (6.77)$$

i na izlazu kompresora je:

$$Y_1(z) = \frac{1}{D} \sum_{k=0}^{D-1} V_1(e^{-j2\pi k/D} z^{1/D}) \quad (6.78)$$



Slika 6.17: Zamena redosleda kompresora i ekspandera.

Zamenom (6.77) u (6.78) imamo:

$$\begin{aligned}
 Y_1(z) &= \frac{1}{D} \sum_{k=0}^{D-1} X((e^{-j2\pi k/D} z^{1/D})^I) \\
 &= \frac{1}{D} \sum_{k=0}^{D-1} X(e^{-j2\pi k I/D} z^{I/D})
 \end{aligned} \tag{6.79}$$

Na slici 6.17 dole je prikazan slučaj $\downarrow D \rightarrow \uparrow I$ u kojem se učestanost odabiranja signala prvo smanjuje D puta odbacivanjem $D-1$ odbiraka ulaznog signala $x[n]$, a zatim ekspander umeće $I-1$ nula između odbiraka čime se dobija izlazni signal $y_2[n]$. Učestanost odabiranja izlaznog signala je ista kao u prvom slučaju i iznosi $I f_s/D$.

Signal na izlasku iz kompresora na slici 6.17 dole je:

$$V_2(z) = \frac{1}{D} \sum_{k=0}^{D-1} X(e^{-j2\pi k/D} z^{1/D}), \tag{6.80}$$

i na izlazu ekspandera je:

$$Y_2(z) = V_2(z^I) \tag{6.81}$$

Zamenom (6.80) u (6.81) imamo:

$$Y_2(z) = \frac{1}{D} \sum_{k=0}^{D-1} X(e^{-j2\pi k/D} z^{I/D}) \tag{6.82}$$

Poređenjem (6.79) i (6.82) se vidi da su izrazi jednaki ukoliko kompleksne eksponentijalne funkcije $p^k = e^{-j2\pi k/D}$ i $p^{kI} = e^{-j2\pi k I/D}$ imaju isti skup vrednosti za $k = 0, 1, \dots, D-1$ pošto redosled pojavljivanja ne menja vrednost sume. Dokaz da p^k i p^{kI} imaju isti skup vrednosti za $k = 0, 1, \dots, D-1$ ako i samo ako je $\text{NZD}(I, D) = 1$ se može naći u [34].

Ekvivalentnost zamene redosleda kompresora i ekspandera se može pokazati i poređenjem spektara izlaznih signala $Y_1(\Omega)$ i $Y_2(\Omega)$:

$$Y_1(\Omega) = \frac{1}{D} \sum_{k=0}^{D-1} X\left(\frac{I\Omega - 2\pi k I}{D}\right) \quad (6.83)$$

$$Y_2(\Omega) = \frac{1}{D} \sum_{k=0}^{D-1} X\left(\frac{I\Omega - 2\pi k}{D}\right) \quad (6.84)$$

Iz (6.84) se vidi da se spektar izlaznog signala sastoji iz D spektralnih replika ulaznog signala $X(I\Omega/D)$ koje su pomerene za $2\pi k/D$, i ne preklapaju se pošto je $k = 0, 1, \dots, D-1$.

Ukoliko je $\text{NZD}(I, D) = q > 1$ onda važi $I = q\hat{I}$, $D = q\hat{D}$, $\text{NZD}(\hat{I}, \hat{D}) = 1$ i (6.83) postaje:

$$Y_1(\Omega) = \frac{1}{D} \sum_{k=0}^{D-1} X\left(\frac{q\hat{I}\Omega}{q\hat{D}} - \frac{2\pi k q\hat{I}}{q\hat{D}}\right) = \frac{1}{D} \sum_{k=0}^{D-1} X\left(\frac{\hat{I}\Omega}{\hat{D}} - \frac{2\pi k \hat{I}}{\hat{D}}\right) \quad (6.85)$$

Usled periodičnosti spektra $X(\Omega) = X(\Omega + 2\pi)$ važi

$$\begin{aligned} X\left(\frac{\hat{I}\Omega}{\hat{D}} - \frac{2\pi k \hat{I}}{\hat{D}}\right) &= X\left(\frac{\hat{I}\Omega}{\hat{D}} - \frac{2\pi(k\hat{I} + \hat{D})}{\hat{D}}\right) \\ &= X\left(\frac{\hat{I}\Omega}{\hat{D}} - \frac{2\pi}{\hat{D}}(k\hat{I} \bmod \hat{D})\right). \end{aligned} \quad (6.86)$$

Jednakost (6.86) pokazuje da se spektralne replike mogu naći na $\hat{D} < D$ različitih frekvencijskih pomeraja. Posledica toga je da za $\text{NZD}(I, D) = q > 1$ u spektru $Y_1(\Omega)$ dolazi do preklapanja spektralnih replika $X(\Omega)$. Pošto su u spektru $Y_2(\Omega)$ sve spektralne replike na jedinstvenim frekvencijskim pomerajima, sledi da $Y_1(\Omega) \neq Y_2(\Omega)$.

Ukoliko je $\text{NZD}(I, D) = 1$ članovi sume u spektru $Y_1(\Omega)$ su oblika

$$X\left(\frac{I\Omega}{D} - \frac{2\pi k I}{D}\right) = X\left(\frac{I\Omega}{D} - \frac{2\pi}{D}(kI \bmod D)\right). \quad (6.87)$$

U ovom slučaju spektralne replike se mogu naći na D različitih frekvencijskih pomeraja. Potrebno je još pokazati da se spektralne replike ne preklapaju, odnosno da $kI \bmod D$ uzima sve vrednosti iz skupa $\{0, 1, \dots, D-1\}$ kada je $k = 0, 1, \dots, D-1$, kako bi važilo $Y_1(\Omega) = Y_2(\Omega)$. Dokaz da $kI \bmod D$ uzima sve vrednosti iz skupa $\{0, 1, \dots, D-1\}$ za $k = 0, 1, \dots, D-1$ kada je $\text{NZD}(I, D) = 1$ se može naći u [35].

6.11 Višestepena decimacija i interpolacija

Odnos promene učestanosti pri decimaciji ili interpolaciji signala određuje gabarite decimacionog ili interpolacionog filtra. Pri smanjenju učestanosti odabiranja D puta spektar ulaznog signala na učestanosti odabiranja f_s u opsegu digitalnih učestanosti $(-\pi/D, \pi/D)$

se slika u opseg $(-\pi, \pi)$ signala na učestanosti odabiranja f_s/D . Ukoliko spektar ulaznog signala nije ograničen na opseg $(-\pi/D, \pi/D)$ dolazi do preklapanja spektralnih replika i degradacije signala.

Isto tako, pri povećanju učestanosti odabiranja I puta spektar signala na učestanosti odabiranja f_s u opsegu digitalnih učestanosti $(-\pi, \pi)$ se slika u spektralne replike $(\pi(2k-1)/I, \pi(2k+1)/I)$ signala na učestanosti odabiranja If_s . Pri interpolaciji signala spektralne replike se ne mogu preklapati, ali je potrebno potisnuti sve replike osim za $k = 0$.

Decimacioni filter se koristi da ograniči spektar ulaznog signala tako da ne dolazi do degradacije signala usled preklapanja spektralnih replika. Frekvencijska karakteristika idealnog decimacionog filtra je

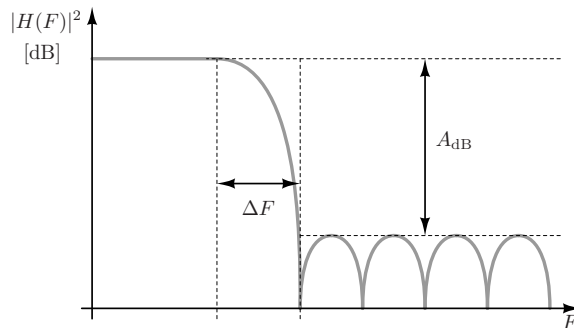
$$H(\Omega) = \begin{cases} 1, & |\Omega| < \pi/D \\ 0, & \text{inače} \end{cases} \quad (6.88)$$

Praktično ostvarivi filteri moraju imati konačnu širinu prelazne zone, na primer $\Delta\Omega = \pi/5D$ odnosno $\Delta F = 0.1/D$. Sa povećanjem odnosa promene učestanosti širina prelazne zone filtra postaje sve uža, i za velike odnose promene učestanosti red filtra može biti nepraktično veliki. Za isti odnos promene učestanosti interpolacioni filter ima iste zahteve po pitanju širine prelazne zone.

Red filtra projektovanog Remezovim algoritmom se može proceniti iz gabarita. Jednostavan izraz za procenu reda filtra je (fred harris):

$$N \approx \frac{1}{\Delta F} \frac{A_{dB}}{22}, \quad (6.89)$$

gde su ΔF širina prelazne zone i A_{dB} slabljenje u nepropusnom opsegu, označeni na slici 6.18. Postoje i drugi izrazi za tačniju procenu reda filtra koje uzimaju u obzir i talasanje u propusnom opsegu, ali je za približnu procenu upotrebljiv i dati izraz.

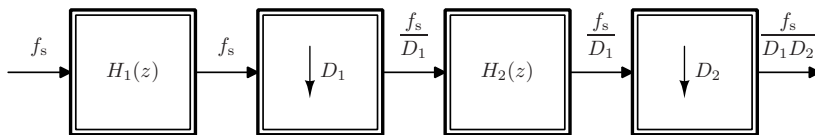


Slika 6.18: Gabariti FIR filtra za jednostavnu procenu reda.

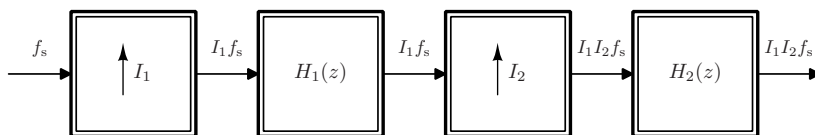
Složenost decimacionog ili interpolacionog filtra se može smanjiti višestepenom arhitekturom, pošto su širine prelaznih zona pojedinačnih filtara ΔF veće. Na slikama 6.19 i

6.20 su prikazani dvostepeni decimator i interpolator. Ukupan faktor promene učestanosti odabiranja je

$$D = D_1 D_2 \quad I = I_1 I_2 \quad (6.90)$$



Slika 6.19: Višestepeni decimator.



Slika 6.20: Višestepeni interpolator.

Broj koeficijenata filtara u M -to stepenom interpolatoru ili decimatoru sa filtrima širina prelaznih zona ΔF_i je približno:

$$N \approx \frac{A_{\text{dB}}}{22} \sum_{i=1}^M \Delta F_i^{-1} \quad (6.91)$$

Primer 6.1: Dvostepena promena učestanosti

Pretpostavimo da filtri u decimatoru ili interpolatoru imaju širinu prelazne zone $\Delta F = 0.1/R$, gde je R odnos promene učestanosti. Red interpolacionog ili decimacionog filtra je približno:

$$N \approx \frac{5RA_{\text{dB}}}{11}.$$

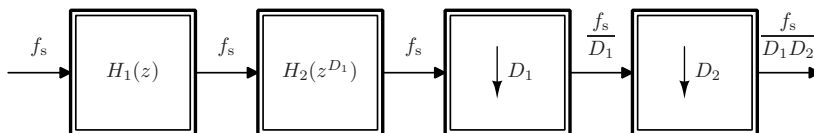
Na primer, za slabljenje u nepropusnom opsegu od 60 dB i odnos promene učestanosti $R = 2$ potreban red filtra je $N \approx 55$, dok je za $R = 12$ red filtra $N \approx 328$. Za isti odnos promene učestanosti $R = 12$ u dva stepena $R_1 = 3$, $R_2 = 4$ i isto slabljenje u nepropusnom opsegu ukupan broj koeficijenata filtara je:

$$N \approx \frac{5A_{\text{dB}}}{11} \sum_{i=1}^M R_i = 191$$

Dvostepenom promenom učestanosti je značajno smanjen broj koeficijenata filtra, sa 328 na 191.

Prenosna funkcija višestepenog decimatora se može izračunati prebacivanjem filtra $H_2(z)$ na ulaz kompresora sa odnosom promene učestanosti D_1 primenom plemenitih identiteta, kao što je prikazano na slici 6.21. Ukupna prenosna funkcija decimacionih filtara je:

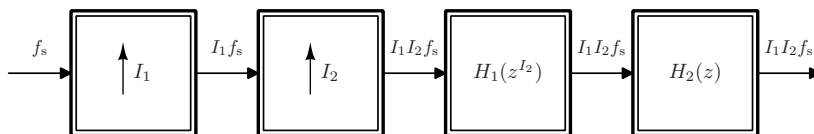
$$H(z) = H_1(z)H_2(z^{D_1}) \quad (6.92)$$



Slika 6.21: Višestepeni decimator posle primene plemenitih identiteta.

Prenosna funkcija višestepenog interpolatora se može izračunati prebacivanjem filtra $H_1(z)$ na izlaz ekspandera sa odnosom promene učestanosti I_2 primenom plemenitih identiteta, kao što je prikazano na slici 6.22. Ukupna prenosna funkcija interpolacionih filtara je:

$$H(z) = H_1(z^{I_2})H_2(z) \quad (6.93)$$



Slika 6.22: Višestepeni interpolator posle primene plemenitih identiteta.

Filtar sa prenosnom funkcijom oblika $H_1(z^R)H_2(z)$ se naziva interpolirani FIR (IFIR) filter i standardni algoritmi za projektovanje, npr. Remezov algoritam, se ne mogu direktno primeniti. Projektovanje interpoliranog FIR filtra se izvršava u dva koraka, preračunavanjem gabarita filtra u gabarite pojedinačnih filtara i projektovanjem pojedinačnih filtara standardnim algoritmima. Postupak projektovanja interpoliranog FIR filtra je opisan u odeljku 8.3.