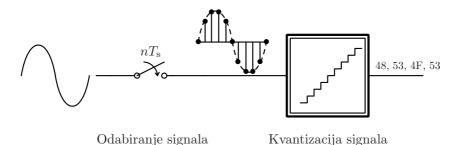
Proces analogno-digitalne konverzije, odnosno konverzije signala kontinualnog po vremenu i amplitudi u signal diskretan po vremenu i amplitudi, prikazan na slici 2.1, se obavlja u dva koraka. U prvom koraku se diskretizacija po vremenu vrši odabiranjem vrednosti signala  $x_a(t)$  u izabranim vremenskim trenucima  $t_n$ , čime se dobija signal diskretan u vremenu  $x[n] = x_a(t_n)$ . Zatim se diskretizacija po amplitudi vrši kvantizacijom vrednosti odbiraka signala x[n] na konačan skup vrednosti.



Slika 2.1: Odabiranje i kvantizacija signala.

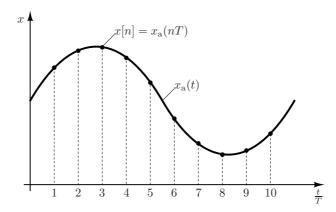
Izbor trenutaka odabiranja  $t_n$  za koji se iz odbiraka x[n] može izvršiti rekonstrukcija  $x_a(t)$  nije jednoznačan. Uniformno odabiranje odgovara izboru ekvidistantnih vremenskih trenutaka  $t_n = nT$ , gde je T perioda odabiranja. Pored uniformnog, može se izvršiti i neuniformno odabiranje izborom vremenskih trenutaka koji nisu ekvidistantni [1, 2, 3]. Teorijska analiza neuniformnog odabiranja je veoma složena i zbog toga se retko koristi, osim u specifičnim primenama.

Odabiranje signala, odnosno diskretizacija po vremenu, ne dovodi do gubitka informacija ukoliko su zadovoljeni uslovi teoreme odabiranja, i moguće je u potpunosti rekonstruisati signal  $x_{\rm a}(t)$  iz odbiraka x[n]. Za razliku od diskretizacije po vremenu, kvantizacija signala uvek rezultuje nepovratnim gubitkom informacija.

### 2.1 Odabiranje signala

Uniformnim odabiranjem sa periodom T kontinualnog signala  $x_a(t)$  dobija se signal x[n] koji je diskretan u vremenu (slika 2.2):

$$x[n] = x_{\mathbf{a}}(nT) \tag{2.1}$$



Slika 2.2: Uniformno odabiranje signala.

Spektar kontinualnog signala  $x_a(t)$  se može izračunati Furijeovom transformacijom:

$$X_{\mathbf{a}}(f) = \mathscr{F}\left\{x_{\mathbf{a}}(t)\right\}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x_{\mathbf{a}}(t)e^{-\mathrm{j}2\pi ft}\mathrm{d}t. \tag{2.2}$$

Inverznom Furijeovom transformacijom se signal u vremenskom domenu  $x_a(t)$  može rekonstruisati iz spektra  $X_a(f)$ 

$$x_{\rm a}(t) = \mathscr{F}^{-1} \{X_{\rm a}(f)\}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X_{\rm a}(f) e^{\mathrm{j}2\pi f t} \mathrm{d}f.$$
 (2.3)

Odbirci  $x[n] \equiv x_a(nT)$  se mogu izračunati iz spektra kontinualnog signala  $X_a(f)$  korišćenjem inverzne Furijeove transformacije (2.3) za t = nT:

$$x[n] \equiv x_{\rm a}(nT) = \mathscr{F}^{-1} \{X_{\rm a}(f)\} (t) \Big|_{t=nT} = \int_{-\infty}^{+\infty} X_{\rm a}(f) e^{\mathrm{j}2\pi f nT} \mathrm{d}f.$$
 (2.4)

U slučaju uniformnog odabiranja vremena  $t_n$  se mogu izraziti preko periode odabiranja T i učestanosti odabiranja  $f_s$ :

$$t_n = nT = \frac{n}{f_s},\tag{2.5}$$

tako da se (2.4) može preurediti u:

$$x[n] = \int_{-\infty}^{+\infty} X_{\mathbf{a}}(f)e^{\mathbf{j}2\pi n\frac{f}{f_{\mathbf{s}}}}\mathrm{d}f$$
 (2.6)

Izraz (2.6) pokazuje vezu između spektra signala  $X_{\rm a}(f)$ , učestanosti odabiranja  $f_{\rm s}$  i odbiraka x[n], koju ćemo iskoristiti za uspostavljanje veze između spektara kontinualnog signala  $X_{\rm a}(f)$  i spektra odbiraka  $X(\Omega)$ .

Spekar odbiraka signala x[n] se može izračunati diskretnom Furijeovom transformacijom u vremenu (DTFT), gde je  $\Omega$  kružna digitalna učestanost:

$$X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\Omega n},$$
(2.7)

ili u funkciji digitalne učestanosti F:

$$X(F) = \sum_{n = -\infty}^{\infty} x[n]e^{-j2\pi Fn}.$$
(2.8)

Spektar diskretnog signala je periodičan sa periodiom od  $2\pi$ :

$$X(\Omega + 2\pi) = \sum_{n = -\infty}^{\infty} x[n]e^{-j(\Omega + 2\pi)n} = \sum_{n = -\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\Omega n}e^{-j2\pi n} = X(\Omega),$$
 (2.9)

gde je u poslednjem koraku iskorišćena činjenica da je n ceo broj i  $e^{-j2\pi n} \equiv 1$ . Ekvivalentnim izvođenjem se može pokazati da važi X(F+1) = X(F). Periodičnost spektra diskretnog signala za posledicu ima da se sva informacija o signalu nalazi u jednom periodu, i uobičajeno je da se spektar digitalnog signala izučava u samo opsegu  $\Omega = (-\pi, \pi)$ , odnosno F = (-0.5, 0.5).

Odbirci signala x[n] se mogu rekonstruistati iz spektra  $X(\Omega)$  inverznom diskretnom Furijeovom transformaciom u vremenu (IDTFT):

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(\Omega) e^{j\Omega n} d\Omega$$

$$= \int_{-1/2}^{1/2} X(F) e^{j2\pi F n} dF$$
(2.10)

Izjednačavanjem izraza za odbirke x[n] (2.6) i (2.10) možemo napisati:

$$\int_{-1/2}^{1/2} X(F)e^{j2\pi F n} dF = \int_{-\infty}^{+\infty} X_{a}(f)e^{j2\pi n \frac{f}{f_{s}}} df$$
 (2.11)

Korišćenjem smene  $F = f/f_s$  u levoj strani (2.11) dobijamo:

$$\frac{1}{f_{\rm s}} \int_{-f_{\rm s}/2}^{f_{\rm s}/2} X(f) e^{\mathrm{j}2\pi n \frac{f}{f_{\rm s}}} \mathrm{d}f = \int_{-\infty}^{+\infty} X_{\rm a}(f) e^{\mathrm{j}2\pi n \frac{f}{f_{\rm s}}} \mathrm{d}f. \tag{2.12}$$

Integral sa desne strane jednakosti (2.12) u granicama  $(-\infty, +\infty)$  se može predstaviti beskonačnom sumom integrala u granicama  $((k-1/2)f_s, (k+1/2)f_s)$ :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} X_{\mathbf{a}}(f)e^{\mathbf{j}2\pi n\frac{f}{f_{\mathbf{s}}}}df = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{\left(k-\frac{1}{2}\right)f_{\mathbf{s}}}^{\left(k+\frac{1}{2}\right)f_{\mathbf{s}}} X_{\mathbf{a}}(f)e^{\mathbf{j}2\pi n\frac{f}{f_{\mathbf{s}}}}df.$$
 (2.13)

Upotrebom smene  $f = u + kf_s$  u integralu sa desne strane (2.13) dobijamo:

$$\int_{(k-\frac{1}{2})f_{s}} X_{a}(f)e^{j2\pi n\frac{f}{f_{s}}}df = \int_{-\frac{f_{s}}{2}}^{\frac{f_{s}}{2}} X_{a}(u+kf_{s})e^{j2\pi n\frac{u+kf_{s}}{f_{s}}}du.$$
(2.14)

Korišćenjem svojstva periodičnosti eksponencijalne funkcije  $e^{j2\pi n} \equiv 1$  za  $n \in \mathbb{Z}$ :

$$e^{j2\pi n\frac{f+kf_s}{f_s}} = e^{j2\pi n\frac{f}{f_s}}e^{j2\pi nk} = e^{j2\pi n\frac{f}{f_s}}$$
 (2.15)

jednakost (2.14) se, uz zamenu  $u \to f$ , može preurediti u:

$$\int_{(k-\frac{1}{2})f_{s}} X_{a}(f)e^{j2\pi n\frac{f}{f_{s}}} df = \int_{-\frac{f_{s}}{2}}^{\frac{f_{s}}{2}} X_{a}(f+kf_{s})e^{j2\pi n\frac{f}{f_{s}}} df,$$

$$(2.16)$$

i upotrebiti u sumi (2.13):

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{(k-\frac{1}{2})f_{s}}^{(k+\frac{1}{2})f_{s}} X_{a}(f)e^{j2\pi n\frac{f}{f_{s}}} df = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{-\frac{f_{s}}{2}}^{\frac{f_{s}}{2}} X_{a}(f+kf_{s})e^{j2\pi n\frac{f}{f_{s}}} df.$$
 (2.17)

Pod pretpostavkom da integral sa desne strane konvergira može se izvršiti zamena mesta sume i integrala:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[ \int_{-\frac{f_{\rm s}}{2}}^{\frac{f_{\rm s}}{2}} X_{\rm a}(f+kf_{\rm s}) e^{{\rm j}2\pi n\frac{f}{f_{\rm s}}} {\rm d}f \right] = \int_{-\frac{f_{\rm s}}{2}}^{\frac{f_{\rm s}}{2}} \left[ \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_{\rm a}(f+kf_{\rm s}) \right] e^{{\rm j}2\pi n\frac{f}{f_{\rm s}}} {\rm d}f \qquad (2.18)$$

Korišćenjem (2.18) u (2.13) sledi da je:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} X_{\mathbf{a}}(f) e^{j2\pi n \frac{f}{f_{\mathbf{s}}}} df = \int_{-\frac{f_{\mathbf{s}}}{2}}^{\frac{f_{\mathbf{s}}}{2}} \left[ \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_{\mathbf{a}}(f+kf_{\mathbf{s}}) \right] e^{j2\pi n \frac{f}{f_{\mathbf{s}}}} df, \tag{2.19}$$

i veza između spektara X(f) i  $X_{\rm a}(f)$  se može dobiti zamenom (2.19) u (2.12):

$$\frac{1}{f_{\rm s}} \int_{-f_{\rm s}/2}^{f_{\rm s}/2} X(f) e^{\mathrm{j}2\pi n \frac{f}{f_{\rm s}}} \mathrm{d}f = \int_{-\frac{f_{\rm s}}{2}}^{\frac{f_{\rm s}}{2}} \left[ \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_{\rm a}(f+kf_{\rm s}) \right] e^{\mathrm{j}2\pi n \frac{f}{f_{\rm s}}} \mathrm{d}f. \tag{2.20}$$

Izrazi sa leve i desne strane (2.20) su inverzne DTFT signala, odakle iz teoreme o jedinstvenosti DTFT sledi:

$$X(f) = f_{\rm s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_{\rm a}(f + kf_{\rm s}) = f_{\rm s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_{\rm a}(f - kf_{\rm s}),$$
 (2.21)

gde poslednja jednakost važi zbog toga što je suma po k od  $-\infty$  do  $\infty$ .

Iz (2.21) se može videti da spektar odabranog signala X(f) sadrži preklopljene skalirane spektralne replike signala  $X_{\rm a}(f)$  pomerene za  $\pm kf_{\rm s}$ , kao što je prikazano na slici 2.3. Ukoliko je učestanost odabiranja  $f_{\rm s}$  dvostruko veća od širine spektra signala B ne dolazi do preklapanja spektralnih replika (engl. aliasing) i signal se može u potpunosti rekonstruisati. Ukoliko je  $f_{\rm s} < 2B$  dolazi do preklapanja spektralnih replika, kao što je prikazano na slici 2.4.

Uslovi pod kojima ne dolazi do preklapanja spektralnih replika su iskazani u teoremi odabiranja, koja je poznata i kao Nikvist-Šenonova teorema.

## Teorema odabiranja

Kontinualni signal  $x_a(t)$ , ograničen u spektru

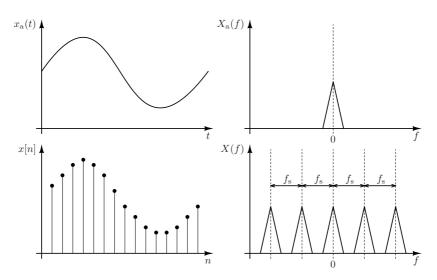
$$\mathscr{F}\{x_{\rm a}(t)\}(f) = X_{\rm a}(f) = 0 \text{ za } |f| > B$$

se jedinstveno može rekonstruisati iz odbiraka

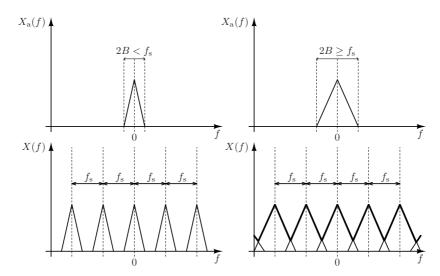
$$x[n] = x_a(nT)$$

ukoliko je učestanost odabiranja

$$f_{\rm s} = \frac{1}{T} > 2B$$



Slika 2.3: Spektri signala  $X_{\mathbf{a}}(f)$  i X(f).



Slika 2.4: Spektar signala X(f) u slučaju a)  $2B < f_s$  i b)  $2B \ge f_s$ .

Preklapanje spektralnih replika dovodi do nepovratnog gubitka informacija pošto se preklopljenje spektralne komponente više ne mogu razdvojiti. Stoga je potrebno obezbediti da spektar signala  $X_{\rm a}(f)$  bude ograničen pre odabiranja, odnosno da ne sadrži značajne spektralne komponente za |f| > B, korišćenjem filtra propusnika niskih učestanosti za potiskivanje spektralnih replika (engl. anti-aliasing filter).

Minimalna učestanost odabiranja  $f_s > 2B$  je u teoremi odabiranja izvedena pod pretpostavkom da spektar signala  $x_a(t)$  zauzima ceo opseg učestanosti [-B, B]. U mnogim

primenama spektar signala je ograničen na opseg učestanosti  $(f_{\rm L}, f_{\rm H})$ , gde je  $f_{\rm L}>0$ . Pošto teorema odabiranja pretpostavlja da je spektar signala u potpunosti popunjen do najviše učestanosti, odnosno da je  $f_{\rm L}=0$ , minimalna učestanost odabiranja je  $f_{\rm s}>2f_{\rm H}$ . U odeljku 2.5 se razmatraju uslovi pod kojima ne dolazi do preklapanja spektralnih replika za  $f_{\rm s}<2f_{\rm H}$  kada je  $f_{\rm L}>0$ .

### 2.2 Odabiranje signala povorkom Dirakovih impulsa

Odabiranje signala se može izvršiti i povorkom Dirakovih impulsa [4, 5]

$$III(t) = \sum_{n = -\infty}^{\infty} \delta(t - nT), \qquad (2.22)$$

zahvaljujući fundamentalnom svojstvu Dirakove funkcije:

$$x(T) = \int_{-\infty}^{\infty} x_{\mathbf{a}}(t)\delta(t-T)dt = \lim_{\epsilon \to 0} \int_{T-\epsilon}^{T+\epsilon} x_{\mathbf{a}}(t)\delta(t-T)dt = x_{\mathbf{a}}(T). \tag{2.23}$$

Iz (2.23) se vidi da Dirakova funkcija odabira vrednost funkcije u trenutku t=T. Važno je imati u vidu da

$$x_{\mathbf{a}}(T) \neq x_{\mathbf{a}}(t)\delta(t-T)\Big|_{t=T},$$
 (2.24)

pošto  $\delta(0)$  nije definisano i  $\delta(t) = 0$  za  $t \neq 0$ , ali je

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \delta(t) dt = 1.$$
 (2.25)

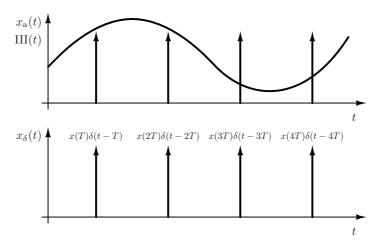
Odabiranjem signala povorkom Dirakovih impulsa III(t) dobija se povorka skaliranih Dirakovih impulsa  $x_{\delta}(t)$ , kao što je prikazano na slici 2.5:

$$x_{\delta}(t) = x_{\mathrm{a}}(t)\mathrm{III}(t) = x_{\mathrm{a}}(t) \sum_{n = -\infty}^{\infty} \delta(t - nT). \tag{2.26}$$

U prethodnom odeljku smo razmatrali proces odabiranja signala  $x_a(t)$  definisan kao  $x[n] \equiv x_a(nT)$  (2.1), koji formalno nije ekvivalentan odabiranju povorkom Dirakovih impulsa (2.26). Pokazaćemo da oba načina odabiranja rezultuju istim spektrom odabranog signala, ali je suštinska razlika u tome što je  $x[n] \equiv x_a(nT)$  diskretan signal u vremenu, dok je signal odabran povorkom Dirakovih impulsa  $x_\delta(t)$  kontinualan u vremenu i pri tome važi:

$$x_{\delta}(t)\big|_{t\neq nT} = 0, (2.27)$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{nT-\varepsilon}^{nT+\varepsilon} x_{\delta}(t) dt = x_{a}(nT)$$
 (2.28)



Slika 2.5: Odabiranje signala povorkom Dirakovih impulsa.

Spektar signala odabranog povorkom Dirakovih impulsa  $X_{\delta}(f)$  se može odrediti Furijeovom transformacijom  $x_{\delta}(t)$ :

$$X_{\delta}(f) = \mathscr{F}\left\{x_{\mathrm{a}}(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)\right\} (f)$$
 (2.29)

Pošto je  $x_{\delta}(t)$  proizvod kontinualnog signala  $x_{\mathrm{a}}(t)$  i povorke Dirakovih impulsa III(t) u vremenskom domenu, Furijeova transformacija  $X_{\delta}(f)$  se može izračunati upotrebom svojstva konvolucije u frekvencijskom domenu:

$$\mathscr{F}\left\{g(t)h(t)\right\}\left(f\right)=\mathscr{F}\left\{g(t)\right\}\left(f\right)\star\mathscr{F}\left\{h(t)\right\}\left(f\right) \tag{2.30}$$

Primenom (2.30) na (2.29) imamo:

$$X_{\delta}(f) = X_{\mathbf{a}}(f) \star \operatorname{III}(f)$$

$$= X_{\mathbf{a}}(f) \star \mathscr{F} \left\{ \sum_{n = -\infty}^{\infty} \delta(t - nT) \right\} (f)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} X_{\mathbf{a}}(f - u) \mathscr{F} \left\{ \sum_{n = -\infty}^{\infty} \delta(t - nT) \right\} (u) du$$

$$(2.31)$$

Furijeova transformacija povorke Dirakovih impulsa III(f) je izvedena u odeljku A.3.2 i

korišćenjem rezultata (A.20) u (2.31) dobijamo:

$$X_{\delta}(f) = f_{s} \int_{-\infty}^{+\infty} X_{a}(f - u) \sum_{n = -\infty}^{\infty} \delta(u - nf_{s}) du$$

$$= f_{s} \sum_{n = -\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} X_{a}(f - u) \delta(u - nf_{s}) du$$

$$= f_{s} \sum_{n = -\infty}^{\infty} X_{a}(f - nf_{s})$$

$$(2.32)$$

gde je u poslednjem koraku upotrebljeno svojstvo Dirakove funkcije

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta(x-x_0)dx = f(x_0).$$

Upoređivanjem (2.21) i (2.32) se vidi da odabrani signali imaju isti spektar, koji se sastoji iz skaliranih spektralnih replika kontinualnog signala  $X_{\rm a}(f)$ , iako procesi odabiranja formalno nisu ekvivalentni.

### 2.3 Filtar za potiskivanje spektralnih replika

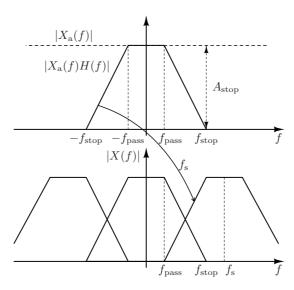
Spektar odabranog signala X(f) sadrži pomerene i skalirane spektralne replike kontinualnog signala  $X_{\rm a}(f)$ . Ukoliko spektar kontinualnog signala nije ograničen tako da su zadovoljeni uslovi teoreme odabiranja, može doći do preklapanja spektralnih replika. Pošto realni filtri nemaju beskonačno slabljenje, uvek će dolaziti do preklapanja spektralnih replika, i potrebno je odrediti gabarite filtra i/ili učestanost odabiranja tako da ne dolazi do značajne degradacije signala.

Razmotrimo slučaj odabiranja kontinualnog signala  $X_{\rm a}(f)$  prikazan na slici 2.6. Pretpostavićemo da  $X_{\rm a}(f)$  ima konstantnu spektralnu gustinu snage, da se signal od interesa nalazi u opsegu učestanosti  $(-f_{\rm pass}, f_{\rm pass})$  i da je propušten kroz filtar propusnik niskih učestanosti H(f) sa propusnim opsegom  $f_{\rm pass}$  i slabljenjem  $A_{\rm stop}$  na učestanosti  $f_{\rm stop}$ . Pretpostavka da  $X_{\rm a}(f)$  ima konstantnu spektralnu gustinu snage je konzervativna, i mogla bi se relaksirati ukoliko je poznat spektar korisnog signala, šuma i smetnji.

U spektru odabranog signala X(f) dolazi do preklapanja spektra signala od interesa i spektralnih replika pomerenih za  $f_s$ . Spektar signala na učestanosti  $f_{pass}$  se preklapa sa  $(X_a \cdot H)(f_s - f_{pass})$  tako da se izborom

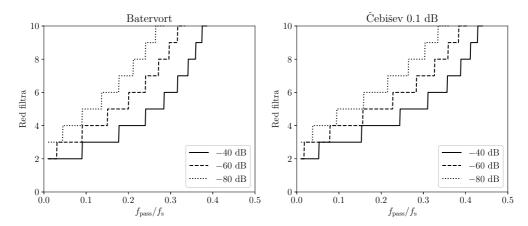
$$f_{\text{stop}} = f_{\text{s}} - f_{\text{pass}} \tag{2.33}$$

obezbeđuje da spektralna replika bude u nepropusnom opsegu filtra i potisnuta za  $A_{\rm stop}$ . Potreban red analognog filtra za potiskivanje spektralnih replika se može izračunati iz granične učestanosti filtra  $f_{\rm pass}$  i slabljenja u nepropusnom opsegu  $A_{\rm stop}$ . Na slici 2.7 su



Slika 2.6: Spektar kontinualnog signala  $X_a(f)H(f)$  i odabranog signala X(f).

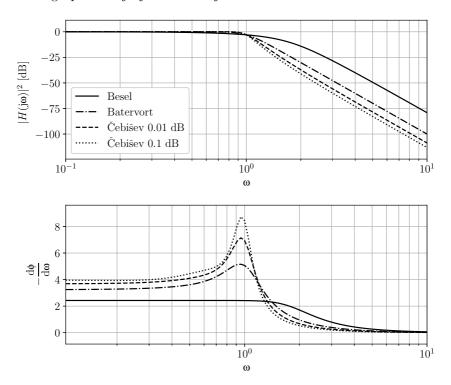
dati grafici reda filtra u zavisnosti od gabarita za filtre sa Batervortovom i Čebiševljevom karakteristikom. Filtri sa Čebiševljevom karakteristikom imaju bolju selektivnost tako da je za isti propusni opseg i slabljenje moguće koristiti filtar nižeg reda, ili za zadati red filtra dobiti širi propusni opseg i/ili bolje potiskivanje u nepropusnom opsegu.



Slika 2.7: Red filtra u zavisnosti od normalizovane granične učestanosti  $f_{\rm pass}/f_{\rm s}$  i slabljenja od 40, 60 i 80 dB na normalizovanoj učestanosti  $(f_{\rm s}-f_{\rm pass})/f_{\rm s}$ .

Ukoliko bi se uzimao u obzir samo red filtra za zadato potiskivanje, uvek bi se koristili filtri sa Čebiševljevom ili eliptičkom karakteristikom. Međutim, izbor tipa filtra se ne može svesti samo na postizanje minimalnog reda filtra. Dobra selektivnost filtra sa Čebiševljevom karakteristikom se postiže zahvaljujući talasanju (engl. ripple) prenosne

funkcije u propusnom opsegu. Filtri sa Batervortovom karateristikom imaju maksimalno ravno pojačanje u propusnom opsegu, dok filtri sa Beselovom karakteristikom imaju maksimalno ravno grupno kašnjenje. Frekvencijske karakteristike filtara su date na slici 2.8.



Slika 2.8: Poređenje frekvencijskih odziva i grupnog kašnjenja filtara propusnika niskih učestanosti petog reda sa Beselovom, Batervortovom i Čebiševljevom karakteristikom.

Propusni opseg filtra sa Čebiševljevom karakteristikom je definisan u odnosu na talasanje u propusnom opsegu  $\delta$ , odnosno  $20 \log_{10} |H(j\omega_0)| = -\delta$ , dok je propusni opseg ostalih filtara definisan u odnosu na 3 dB slabljenje. Učestanost na kojoj filtar sa Čebiševljevom karakteristikom ima 3 dB slabljenja je:

$$\omega_{3dB} = \omega_0 \cosh\left(\frac{1}{n} \operatorname{arccosh} \frac{1}{\varepsilon}\right),$$
(2.34)

gde su  $\omega_0$  granična učestanost filtra, n red filtra i  $\epsilon$ :

$$\varepsilon = \sqrt{10^{\delta/10} - 1},\tag{2.35}$$

i  $\delta$  talasanje u propusnom opsegu izraženo u decibelima. Na slici 2.8 su svi filtri projektovani da imaju 3 dB slabljenje na kružnoj učestanosti  $\omega_0 = 1$  rad/s. Filtri sa Čebiševljevom

karakteristikom su projektovani sa graničnom učestanošću

$$\omega_0 = \left[ \cosh \left( \frac{1}{n} \operatorname{arccosh} \frac{1}{\varepsilon} \right) \right]^{-1}. \tag{2.36}$$

Poređenjem frekvencijskih karakteristika može se videti da za isti red filtra, Čebiševljeva karakteristika za  $\delta = 0.1$  dB ima najveće slabljenje u nepropusnom opsegu, dok Beselov filtar ima najmanje slabljenje.

Pored slabljenja u nepropusnom opsegu, od interesa može biti i grupno kašnjenje signala koje zavisi od faze prenosne funkcije filtra. Grupno kašnjenje

$$\tau_{\rm g}(\mathbf{\omega}) = -\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\mathbf{\omega}} \tag{2.37}$$

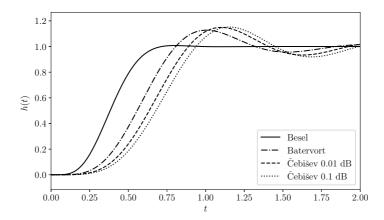
predstavlja vremensko kašnjenje sinusoide na učestanosti  $\omega$ . Filtri sa linearnom fazom imaju konstantno grupno kašnjenje, dok filtri sa nelinearnom fazom imaju frekvencijski zavisno grupno kašnjenje. Ukoliko je grupno kašnjenje konstantno, što je slučaj kod filtara sa Beselovom karakteristikom, sve spektralne komponente signala su zakašnjene za isto vreme i vremenski oblik signala je očuvan. U slučaju kada grupno kašnjenje nije konstantno dolazi do distorzije oblika signala u vremenskom domenu.

Sa stanovišta potiskivanja u nepropusnom opsegu najbolje je koristiti filtar sa Čebiševljevom karakteristikom, dok je za konstantno grupno kašnjenje najbolje koristiti filtar sa Beselovom karakteristikom. Izbor karakteristike filtra zavisi od karakteristika signala koji se odabira - da li je informacija sadržana u vremenskom obliku signala ili u spektru. Na primer, ljudsko uho je neosetljivo na fazni pomeraj i filtri sa frekvencijski zavisnim grupnim kašnjenjem ne unose primetna izobličenja. Signali kod kojih vremenski oblik nosi informaciju, kao što je EKG, su osetljivi na frekvencijski zavisno grupno kašnjenje i stoga je potrebno korisiti filtar sa Beselovom karakteristikom.

Pored frekvencijskih karakteristika filtra - talasanja u propusnom i slabljenja u nepropusnom opsegu i grupnog kašnjenja - od interesa je i odziv filtra u vremenskom domenu. Odzivi filtara petog reda na Hevisajdovu pobudu su prikazani na slici 2.9. Osim kod filtra sa Beselovom karakteristikom, primetan je preskok u vremenskom domenu i vreme smirivanja koje je nekoliko puta duže od vremena uspostavljanja. Preskok u vremenskom odzivu filtra može dovesti do prekoračenja napona pune skale A/D konvertora i o tome je potrebno voditi računa prilikom projektovanja sistema.

Filtri za potiskivanje spektralnih replika se mogu realizovati kao aktivni ili pasivni. Na nižim učestanostima, npr.  $f_{\rm pass} < 1$  MHz, vrednosti elemenata pasivnih filtara su nepraktično velike i stoga se uglavnom koriste aktivni filtri. Aktivni filtri sa operacionim pojačavačima se uglavnom projektuju kao kaskadna veza bikvadratnih sekcija, koje realizuju parove konjugovano-kompleksnih polova, i sekcija sa realnim polovima. Najčešće se koriste topologije sa višestrukom povratnom spregom (engl. multiple feedback) i Salen-Ki (engl. Sallen-Key).

Salen-Ki topologija se obično koristi za realizaciju sekcija sa malim faktorom dobrote i pojačanjem, pošto je položaj polova funkcije prenosa osetljiv na tolerancije vrednosti



Slika 2.9: Poređenje vremenskog odziva filtara propusnika niskih učestanosti petog reda sa Beselovom, Batervortovom i Čebiševljevom karakteristikom.

komponenti. U ovoj topologiji operacioni pojačavač radi kao neinvertujući pojačavač i manje je osetljiv na proizvod pojačanja i propusnog opsega GBW od ostalih topologija.

Za sekcije sa visokim Q faktorom i velikim pojačanjem uglavnom se koristi topologija sa višestrukom povratnom spregom, pošto je osetljivost na tolerancije vrednosti komponenti manja nego kod Salen-Ki topologije. Položaj polova je osetljiv na GBW operacionog pojačavača koji radi kao analogni integrator. Konačan GBW operacionog pojačavača neznatno utiče na prirodnu učestanost polova  $\omega_0$ , ali smanjuje njihov Q faktor [6, 7].

Frekvencijska karakteristika filtra je, zavisno od korišćene topologije, u manjoj ili većoj meri osetljiva na vrednosti komponenti, i potrebno je izvršiti analizu osetljivosti kako bi se odredile prihvatljive tolerancije. Otpornici su raspoloživi u većem broju standardnih vrednosti od kondenzatora, i često se prvo izaberu vrednosti kondenzatora a zatim izračunaju vrednosti otpornika. Sa porastom reda filtra prihvatljive tolerancije su sve manje i eventualno postaju nepraktične. Stoga se analogni filtri uglavnom projektuju do šestog reda, izuzetno do desetog.

Pored tolerancije vrednosti komponente, potrebno je obratiti pažnju i na temperaturni i naponski koeficijent, pošto promena vrednosti u temperaturnom opsegu i u opsegu radnog napona može biti veća od tolerancije. Otpornici uglavnom imaju zanemarljiv naponski koeficijent, dok temperaturni koeficijent zavisi od tehnologije izrade.

Višeslojni keramički kondenzatori (engl. multi layer ceramic capacitor - MLCC) su klasifikovani po temperaturnom koeficijentu dielektrika. Dielektrici klase I, npr. C0G, NP0 i dr., koriste materijale sa dielektričnom konstantom u opsegu  $\varepsilon_r = 20-40$  i imaju zanemarljiv temperaturni i naponski koeficijent. Dielektrici klase II, npr. X7R, Y5V i dr., koriste materijale sa većom dielektričnom konstantom u opsegu  $\varepsilon_r = 200-14000$  i imaju značajno veći temperaturni i naponski koeficijent.