

8

Efikasne realizacije filtara

Filtiri projektovani Remez algoritmom su optimalni u smislu aproksimacije zadatog frekvencijskog odziva.

Filtiri u poslednjim stepenima interpolatora ili prvim stepenima decimatora u mnogim slučajevima rade na veoma visokim učestanostima odabiranja. Kašnjenje kritične putanje, koje raste sa složenošću filtra, ograničava maksimalnu radnu učestanost i samim tim maksimalni odnos promene učestanosti. Stoga je od interesa razmotriti jednostavne filtre koji se mogu realizovati korišćenjem minimalnih hardverskih resursa i imaju malo kašnjenje kroz kritičnu putanju.

Češljasti filter sa integratorom (CIC) se može realizovati samo sabiračima i zbog toga se često koristi u interpolatorima i decimatorima .

- Poluopsežni filter

- Interpolirani FIR filter

- Maskirajući filter

Na kraju poglavlja predstavljena je tehnika višestrukog filtriranja kojom se može poboljšati selektivnost proizvoljnog filtra. Višestrukim filtriranjem se poboljšava selektivnost filtra koji se može efikasno realizovati, npr. filtra sa malim brojem koeficijenata ili filtra koji ne koristi množače.

8.1 Češljasti filter sa integratorom (CIC)

Češljasti filter sa integratorom (engl. cascaded integrator comb - CIC) se koristi u interpolatorima i decimatorima sa velikim odnosom promene učestanosti odabiranja. Jednostavna realizacija CIC filtra, u kojoj se koriste samo sabirači, omogućava rad na višim učestanostima odabiranja u odnosu na druge tipove filtara. Frekvencijska karakteristika CIC filtra odgovara FIR filtru N -tog reda sa jediničnim koeficijentima, ali je realizacija značajno jednostavnija.

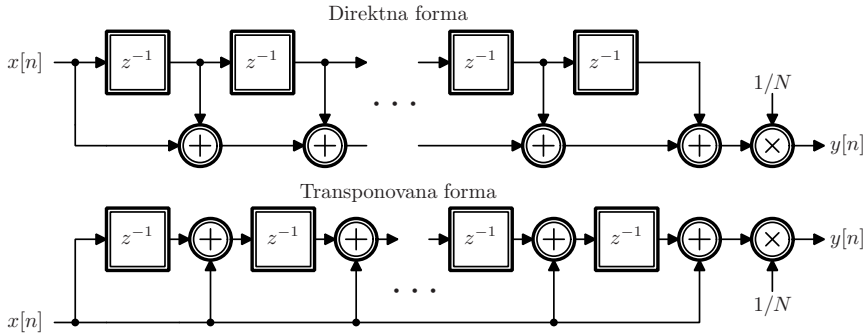
FIR filter $N - 1$ -og reda sa jediničnim koeficijentima

$$H_{MA}(z) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} z^{-n}, \quad (8.1)$$

izračunava srednju vrednost poslednjih N odbiraka (engl. moving average - MA)

$$y_{MA}(n) = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} x[n - i]. \quad (8.2)$$

Relizacija MA filtra u direktnoj i transponovanoj formi je prikazana na slici 8.1. Filter $N - 1$ -og reda sadrži $N - 1$ sabirača i elemenata za kašnjenje, i množač konstantom N^{-1} . Kašnjenje kritične putanje je manje u transponovanoj formi filtra, koja je pogodnija za hardversku realizaciju.



Slika 8.1: Realizacija MA filtra u direktnoj i transponovanoj formi.

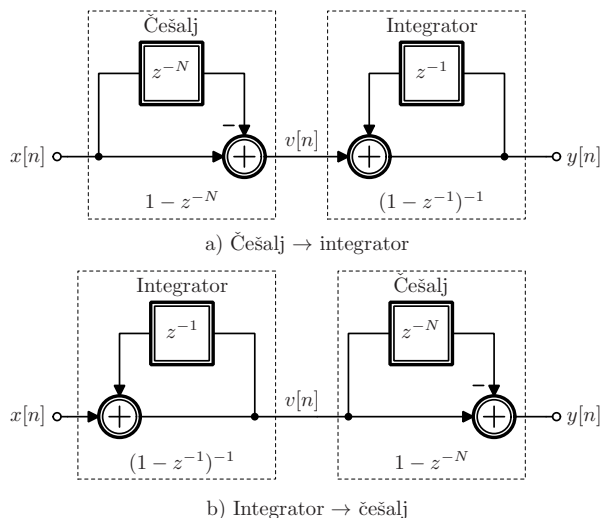
Sumiranjem geometrijske progresije u izrazu (8.1):

$$\sum_{n=0}^{N-1} z^{-n} = \frac{1 - z^{-N}}{1 - z^{-1}}, \quad (8.3)$$

dobija se prenosna funkcija koja ima oblik češljastog filtra sa integratorom, odnosno CIC filtra:

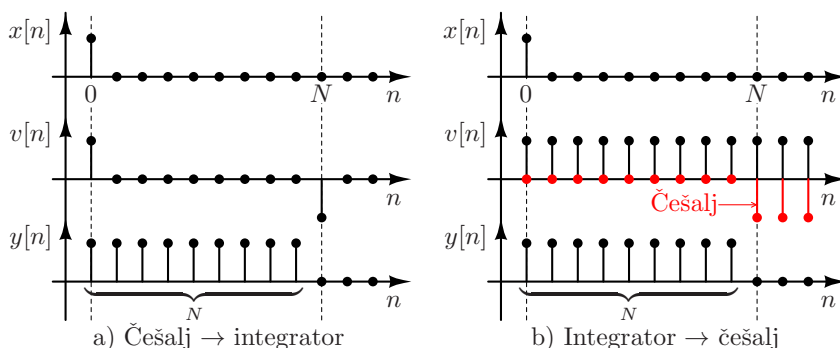
$$H_{CIC}(z) = \frac{1 - z^{-N}}{1 - z^{-1}} = \underbrace{(1 - z^{-N})}_{\text{češalj}} \underbrace{(1 - z^{-1})^{-1}}_{\text{integrator}}. \quad (8.4)$$

Prenosna funkcija CIC filtra (8.4) je, zanemarujući multiplikativni faktor N^{-1} , ekvivalentna sa (8.1). Prednost CIC filtra se ogleda u tome što se koriste samo dva sabirača bez obzira na red filtra, kao što je prikazano na slici 8.2.



Slika 8.2: Dve realizacije CIC filtra.

Impulsni odziv MA filtra (8.1) je trajanja N odbiraka, i isto bi trebalo da važi i za CIC filter pošto je njegova prenosna funkcija dobijena sumiranjem geometrijske progresije. Međutim, CIC filter sadrži povratnu spregu u integratoru i nije očigledno da je impulsni odziv konačnog trajanja. Impulsni odzivi dve realizacije CIC filtra su prikazani na slici 8.3, i u oba slučaja je dužine N .



Slika 8.3: Impulsni odziv CIC filtra.

U slučaju sa slike 8.2a kada je češljasti filter ispred integratora, jedinični impuls u $n = 0$ postavlja stanje izlaza na jediničnu vrednost, koja je ujedno i vrednost integratora

u narednom taktu. Vrednost izlaza i stanja integratora se ne menjaju sve dok se u N -tom taktu ne pojavi jedinični impuls zakašnjen u grani z^{-N} češljastog filtra. Zakašnjeni jedinični impuls se oduzima od trenutne vrednosti ulaza i sabira sa vrednošću integratora, odnosno:

$$y[N] = y[N-1] + x[N] - x[0]. \quad (8.5)$$

Kako je $x[0] = 1$ i $x[n] = 0$ za $n > 0$, i $y[n] = 1$ za $n = 0, \dots, N-1$ sledi da je vrednost izlaza $y[N] = 0$, što je ujedno i vrednost integratora u narednom taktu. Vrednost izlaza se u narednim taktovima ne menja i ostaje nula, iz čega sledi da je impulsni odziv povorka jedinica dužine N , kao što je i očekivano.

U CIC filtru sa slike 8.2b je zamenjen redosled integratora i češljastog filtra. Jedinični impuls u $n = 0$ se akumulira u integratoru, čija vrednost ostaje konstantna za $n > 0$. Izlaz integratora se kasni N taktova u češljastom filtru i oduzima od trenutne vrednosti. Usled toga, impulsni odziv CIC filtra sa slike 8.2b je povorka od N jedinica, kao što je i očekivano.

Obe realizacije CIC filtra sa slike 8.2 imaju isti impulsni odziv, ali se interna stanja filtera razlikuju. Kada je češljasti filter ispred integratora interna stanja filtera se vraćaju na nulu posle $N+1$ taktova, dok u obrnutom slučaju vrednosti u elementima za kašnjenje integratora i češljastog filtra sadrže akumulirane vrednosti. Usled toga, vrednost integratora može proizvoljno rasti i dovesti do prekoračenja koje je razmatrano u odeljku 8.1.1.

Prenosna funkcija CIC filtra

$$H_{\text{CIC}}(z) = \frac{1 - z^{-N}}{1 - z^{-1}} = \frac{(1 - z^{-1})(1 + z^{-1} + \dots + z^{-(N-1)})}{1 - z^{-1}}$$

se razlikuje od FIR filtra sa jediničnim koeficijentima (8.1) po tome što ima pol i nulu u $z = 1$ ($\Omega = 0$) koji se poništavaju.

Primer 8.1: Poništavanje pola i nule u CIC filtru

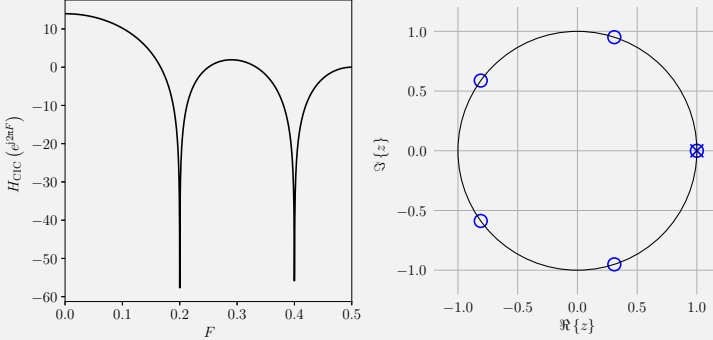
Frekvencijska odziv i položaj polova i nula CIC filtra

$$H_{\text{CIC5}}(z) = \frac{1 - z^{-5}}{1 - z^{-1}}$$

je prikazan na slici. Prenosna funkcija ima jedan pol u $z = 1$ i pet nula u $z = e^{j2\pi n/5}$, $n = 0, \dots, 4$, i nalaze se jediničnom krugu $|z| = 1$. Koeficijenti CIC filtra su jedinični i mogu se predstaviti egzaktno u binarnoj aritmetici, usled čega se pol i nula u $z = 1$ uvek poništavaju.

U ukupnoj prenosnoj funkciji CIC filtra se pol i nula u $z = 1$ poništavaju, ali postoje u pojedinačnim blokovima - češljastom filtru i integratoru. Pol i nula u $z = 1$ se poništavaju sve dok češljasti filter $1 - z^{-N}$ može poništiti porast vrednosti u integratoru. Razdvajanje prenosne funkcije u dva bloka za posledicu ima da stanje integratora može neograničeno rasti, dok nula u $z = 1$ češljastog filtra obezbeđuje da izlaz CIC filtra bude konačan. Neograničeni porast vrednosti integratora može dovesti do prekoračenja opsega, kada češljasti filter ne može

poništiti porast vrednosti u integratoru. U tom slučaju se pol i nula u $z = 1$ ne poništavaju i CIC filtar nije stabilan.



Frekvencijski odziv CIC filtra se može izračunati zamenom $z \rightarrow e^{j\Omega}$:

$$\begin{aligned} H_{\text{CIC}}(e^{j\Omega}) &= \frac{1 - e^{-jN\Omega}}{1 - e^{-j\Omega}} \\ &= \frac{e^{-jN\Omega/2} e^{jN\Omega/2} - e^{-jN\Omega/2}}{e^{-j\Omega/2} e^{j\Omega/2} - e^{-j\Omega/2}} \end{aligned} \quad (8.6)$$

i upotrebom identiteta $\sin(x) = (e^{jx} - e^{-jx}) / (2j)$ dobija se

$$H_{\text{CIC}}(e^{j\Omega}) = e^{-j(N-1)\Omega/2} \frac{\sin(N\Omega/2)}{\sin(\Omega/2)}. \quad (8.7)$$

U funkciji digitalne učestanosti F frekvencijski odziv CIC filtra je:

$$H_{\text{CIC}}(e^{j2\pi F}) = e^{-j\pi(N-1)F} \frac{\sin(\pi NF)}{\sin(\pi F)}. \quad (8.8)$$

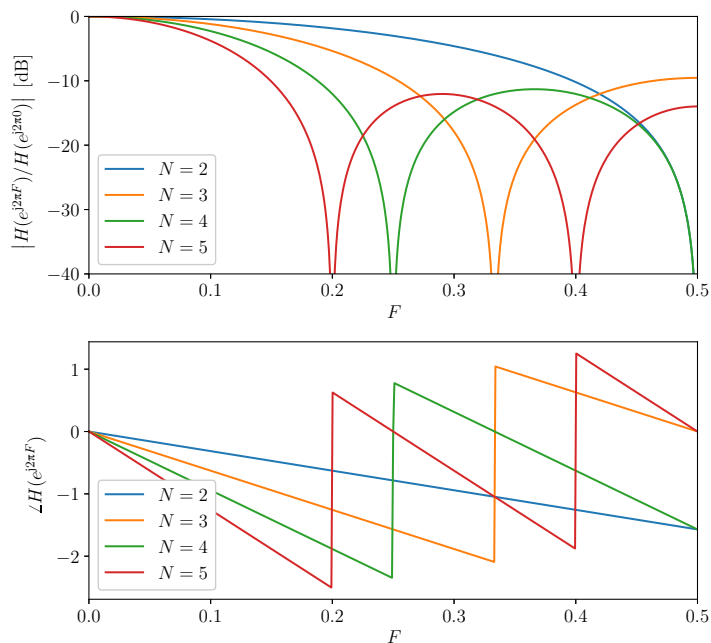
Moduo frekvencijskog odziva CIC filtra

$$|H_{\text{CIC}}(e^{j2\pi F})| = \underbrace{|\sin(\pi NF)|}_{\text{češalj}} \cdot \underbrace{|\sin(\pi F)|^{-1}}_{\text{integrator}}, \quad (8.9)$$

se u opsegu učestanosti $F \ll 1$ može aproksimirati kao

$$|H_{\text{CIC}}(e^{j2\pi F})| \stackrel{F \ll 1}{\approx} \left| \frac{\sin(\pi NF)}{\pi F} \right|, \quad (8.10)$$

Iz (8.7) i (8.8) sledi da CIC filtar ima linearnu fazu, odnosno konstantno grupno kašnjenje, u opsegu učestanosti $\Omega_1 = (-2\pi/N, 2\pi/N)$, odnosno $F_1 = (-N^{-1}, N^{-1})$. Za $|\Omega| = \Omega_1$ brojilac u (8.7) menja znak što se manifestuje kao skok u fazi za π . Normalizovana amplitudska i fazna karakteristika CIC filtra je prikazana na slici 8.4 za vrednosti kašnjenja u češljastom filtru $N = 2, \dots, 5$.



Slika 8.4: Frekvencijski odziv CIC filtra.

8.1.1 Prekoračenje opsega u CIC filtru

Akumulirana vrednost u integratoru CIC filtra sa slike 8.2b neograničeno raste kada ulazni signal ima nenultu srednju vrednost. Neograničeni rast akumulirane vrednosti je posledica pola prenosne funkcije integratora

$$H_{\text{int}}(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}} \quad (8.11)$$

u $z = 1$ ($\Omega = 0$), i neminovno rezultuje prekoračenjem opsega.

Prekoračenje opsega može, ali ne mora, rezultovati greškom u izračunavanju vrednosti odbiraka CIC filtra. Stoga je od interesa razmotritu pod kojim uslovima se obirci CIC filtra mogu tačno izračunati kada u integratoru dolazi do prekoračenja opsega.

Rezultat operacija sabiranja i oduzimanja brojeva u komplementu dvojke je tačan i u slučaju kada u međurezultatima dolazi do prekoračenja opsega [36]. Na primer, pri izračunavanju izraza $(100 + 33) - 47$ sa brojevima širine reči od 8 bita u komplementu

dvojke:

$$\begin{aligned}
 & \overbrace{(01100100)}^{100} + \overbrace{(00100001)}^{33} + \overbrace{(11010001)}^{-47} \\
 &= \overbrace{(10000101)}^{-123} + \overbrace{(11010001)}^{-47} \\
 &= \overbrace{(01010110)}^{86}
 \end{aligned} \tag{8.12}$$

dolazi do prekoračenja opsega, ali je krajnji rezultat tačan. Do prekoračenja opsega dolazi pri izračunavanju člana $100 + 33$, pošto se rezultat ne može predstaviti u komplementu dvojke širine reči od 8 bita, i vrednost međurezultata je -123 umesto 133. Krajnji rezultat 86 je tačan jer se može predstaviti rečju širine 8 bita u komplementu dvojke.

Pojačanje CIC filtra u $\Omega = 0$ je

$$H_{\text{CIC}}(e^{j0}) = \lim_{\Omega \rightarrow 0} e^{-j(N-1)\Omega/2} \frac{\sin(N\Omega/2)}{\sin(\Omega/2)} = N, \tag{8.13}$$

zbog čega je za reprezentaciju izlaznih odbiraka potrebna širina reči

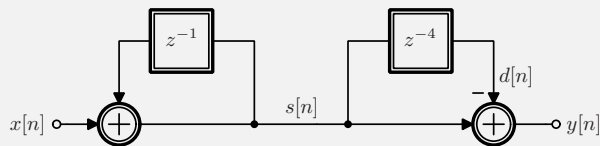
$$m_{\text{out}} = m_{\text{in}} + \log_2 \lceil N \rceil, \tag{8.14}$$

gde je m_{in} širina ulazne reči. Širina reči izlaznih odbiraka m_{out} je ujedno i potrebna širina reči integratora.

Tačnost krajnjih rezultata, kada u međurezultatima dolazi do prekoračenja, se zasniva na osobinama aritmetike u komplementu dvojke, i ne važi u slučaju reprezentacije sa pokretnim zarezmom. Rezultati računskih operacija u reprezentaciji sa pokretnim zarezmom se normalizuju promenom vrednosti eksponenta i odsecanjem bita mantise, usled čega može doći do gubitka preciznosti. Efekat odsecanja bitova mantise i promene vrednosti eksponenta se može manifestovati tek posle velikog broja odbiraka ukoliko je broj bita mantise i eksponenta veliki. Kada je na ulazu CIC filtra signal koji ima nenultu srednju vrednost stanje integratora se neprestano uvećava, sve dok ne dođe do prekoračenja opsega. Za razliku od prekoračenja opsega u slučaju aritmetike u fiksnom zarezu, prekoračenje opsega u reprezentaciji sa pokretnim zarezmom se ne može poništiti u češljastom filtru. Stoga se CIC filtar realizuje isključivo u reprezentaciji brojeva u komplementu dvojke sa fiksnim zarezmom.

Primer 8.2: Prekoračenje opsega u CIC filtru

Korektnost izračunatih odbiraka CIC filtra se može pokazati na primeru sa slike. Ulazni odbirci su predstavljeni u komplementu dvojke, širine reči šest bita, u formatu znak i pet bita za razlomljeni deo. Širina reči integratora je veća za $\lceil \log_2 N \rceil = 2$ bita od širine reči ulaznih podataka - reč integratora je širine osam bita u formatu tri bita za ceo deo i znak, i pet bita za razlomljeni deo.



Vrednosti izlaza integratora $s[n]$, zakašnjenog signala $d[n]$ u češljastom filtru i izlaza CIC filtra $y[n]$ za ulazni signal $x[n] = 0.96875$, odnosno u binarnom zapisu $x[n] = 0.11111$, su date u tabeli. Iz tabele se može videti da u iteracijama $n = 4$ i $n = 8$ dolazi do prekoračenja opsega u integratoru, ali da vrednost izlaza CIC filtra ostaje tačna.

n	$s[n]$		$d[n]$		$y[n]$	
0	+0.96875	000.11111	+0.00000	000.00000	+0.96875	000.11111
1	+1.93750	001.11110	+0.00000	000.00000	+1.93750	001.11110
2	+2.90625	010.11101	+0.00000	000.00000	+2.90625	010.11101
3	+3.87500	011.11100	+0.96875	000.11111	+2.90625	010.11101
4	-3.15625	100.11011	+1.93750	001.11110	+2.90625	010.11101
5	-2.18750	101.11010	+2.90625	010.11101	+2.90625	010.11101
6	-1.21875	110.11001	+3.87500	011.11100	+2.90625	010.11101
7	-0.25000	111.11000	-3.15625	100.11011	+2.90625	010.11101
8	+0.71875	000.10111	-2.18750	101.11010	+2.90625	010.11101
9	+1.68750	001.10110	-1.21875	110.11001	+2.90625	010.11101

8.1.2 Višestepeni CIC filtar

Prvi bočni luk u frekventijskom odzivu jednostepenog CIC filtra je potisnut za manje od 15 dB (slika 8.4), što nije dovoljno u većini primena. Potiskivanje bočnog luka gotovo ne zavisi od vrednosti kašnjenja N u češljastom filtru, i veće potiskivanje se može ostvariti samo višestepenim CIC filtrom.

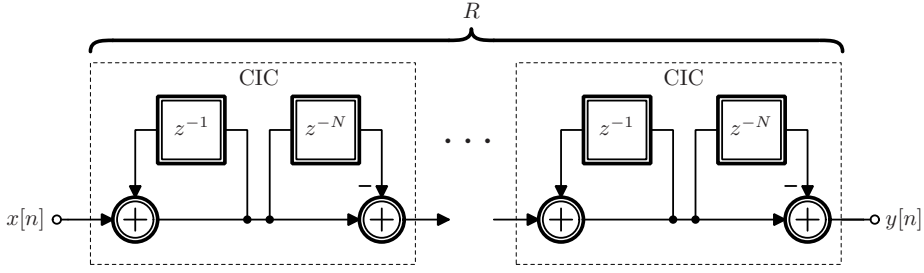
Prenosna funkcija R -tostenog CIC filtra, prikazanog na slici 8.5, iznosi

$$H_{\text{CIC},R}(z) = \left(\frac{1 - z^{-N}}{1 - z^{-1}} \right)^R \quad (8.15)$$

dok je frekventijski odziv:

$$H_{\text{CIC},R}(e^{j\Omega}) = e^{-jR(N-1)\Omega/2} \left(\frac{\sin(N\Omega/2)}{\sin(\Omega/2)} \right)^R \quad (8.16)$$

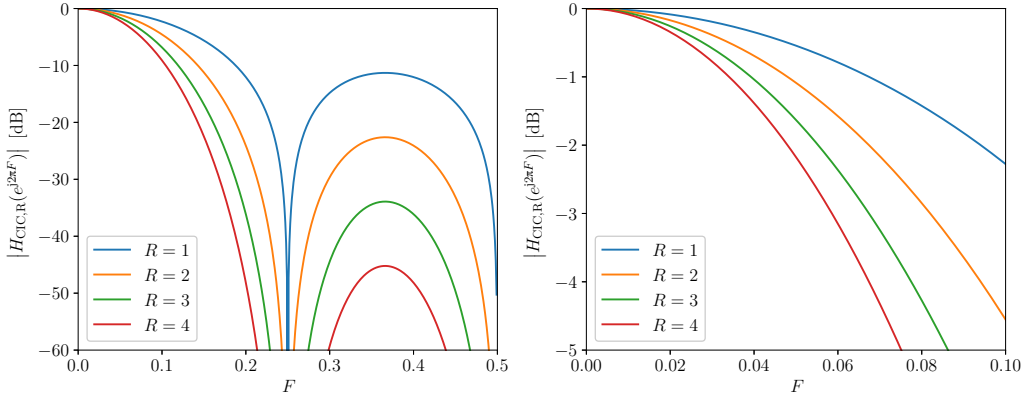
Frekventijski odziv R -tostenog CIC filtra sa kašnjenjem u češljastom filtru $N = 4$ za $R = 1, \dots, 4$ je prikazan na slici 8.6. Povećavanjem broja stepena R poboljšava se potiskivanje bočnog luka, ali i strmina opadanja pojačanja u propusnom opsegu. Opadanje



Slika 8.5: Višestepeni CIC filtar.

pojaćanja u propusnom opsegu je posledica frekvencijskog odziva oblika $\approx \sin(RNF)/F$ za $F \ll 1$, i ogranićava opseg učestanosti u kojem se CIC filtar može koristiti.

Frekvencijski odziv u propusnom opsegu se može poboljšati FIR filtrom za kompenzaciju $\approx \sin(RNF)/F$ odziva, na isti način kao primeru 4.3. Pri projektovanju kompenzacionog filtra je, pored odziva u propusnom opsegu učestanosti, potrebno obratiti pažnju i na degradaciju potiskivanja boćnog luka.



Slika 8.6: Frekvencijski odziv višestepenog CIC filtra.

Širina reći u višestepenom CIC filtru raste za $\log_2[N]$ u svakom stepenu. Ako je širina ulazne reći m_{in} , onda je i -ti stepen, $i = 1, \dots, R$, potrebno realizovati sa širinom reći

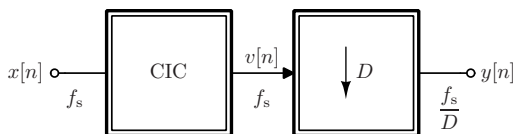
$$m_i = m_{\text{in}} + i \log_2[N], \quad (8.17)$$

odakle sledi da je širina reći izlaznih odbiraka $m_{\text{in}} + R \log_2[N]$.

8.1.3 CIC decimator

Decimator sa CIC filtrom je veoma efikasan sa stanovišta broja računskih operacija i potrebnih resursa, i često se koristi u hardverskim i softverskim realizacijama. Direktna

realizacija CIC decimatora u formi sa slike 8.7 nije optimalna i može se može poboljšati primenom teorije izložene u prethodnim odeljcima.

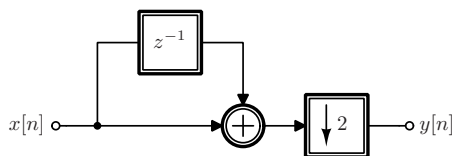


Slika 8.7: CIC decimator.

Najjednostavniji decimator sa CIC filtrom se može napraviti jednostepenim CIC filtrom sa $N = 2$ (slika 8.8):

$$\begin{aligned} H(z) &= \sum_{n=0}^1 z^{-n} = \frac{1 - z^{-2}}{1 - z^{-1}} \\ &= \frac{(1 - z^{-1})(1 + (z^{-1}))}{1 - z^{-1}} = 1 + z^{-1} \end{aligned} \quad (8.18)$$

Rezultat (8.18) je zanimljiv pošto CIC filter nije rekurzivan, odnosno ne sadrži integrator.



Slika 8.8: Jednostepeni CIC decimator sa odnosom promene učestanosti odabiranja od $D = 2$ puta.

Decimator sa slike 8.8 računa zbir poslednja dva odbirka i prosleđuje svaki drugi rezultat. Broj računskih operacija se može prepoloviti izračunavanjem zbira prethodnog i trenutnog odbirka u svakom drugom taktu, čime se izbegava izračunavanje odbiraka odbačenih u kompresoru.

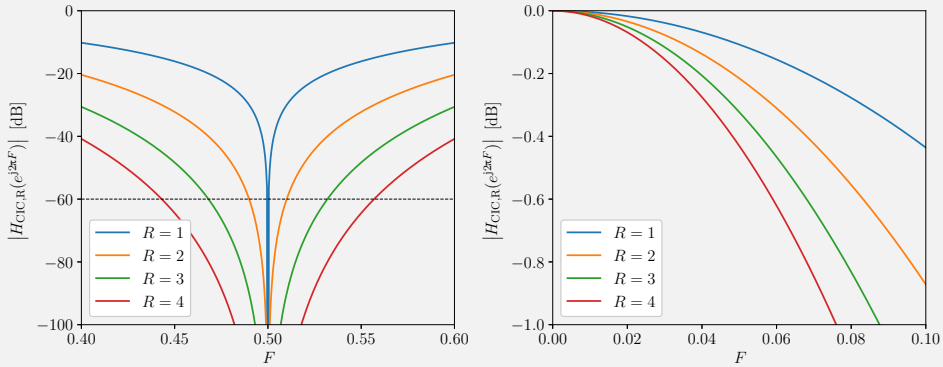
Veoma jednostavna struktura jednostepenog decimatora sa promenom učestanosti odabiranja od $D = 2$ puta je poželjna sa stanovišta potrebnih resursa. Međutim, frekvencijski odziv takvog decimatora je pogodan samo za primene u sistemima sa velikim odnosnom promene učestanosti odabiranja, kao što su $\Delta\Sigma$ A/D konvertori.

Primer 8.3: Potiskivanje spektralnih replika CIC filtrom

U decimatorima sa odnosom promene učestanosti od $D = 2$ puta je u opštem slučaju potrebno potisnuti spektralne komponente u opsegu učestanosti $F = [0.5 - F_{\max}, 0.5 + F_{\max}]$ kada se signal od interesa nalazi u opsegu učestanosti $F = [0, F_{\max}]$, kako bi se sprečilo preklapanje spektra. Pod pretpostavkom da je $F_{\max} \ll 1$, potrebno je potisnuti spektralne komponente u uskom opsegu učestanosti oko $F = 0.5$.

Na slici je prikazan frekvencijski odziv R -tostepenih CIC filtara sa $N = 2$ u opsegu učestanosti oko $F = 0.5$ i $F = 0$, gde slučaj $R = 1$ odgovara filtru u decimatoru sa slike 8.8. Sa slike se može videti da je potiskivanje od 60 dB oko učestanosti $F = 0.5$ moguće u veoma uskom opsegu učestanosti za $R = 1$, koji se proširuje sa povećanjem broja stepena R . Sa povećanjem broja stepena R se menja i frekvencijski odziv oko učestanosti $F = 0$, i sa povećanjem R se smanjuje širina propusnog opsega.

U sistemu sa ukupnim faktorom smanjenja učestanosti (decimacije) od D puta maksimalna širina korisnog signala je $F_{\max} = 1/(2D)$, i širina opsega u kojem se postiže željeno slabljenje spektralnih komponenti oko $F = 0.5$ može biti dovoljna ukoliko je $D \gg 1$. Na primer, kod $\Delta\Sigma$ A/D konvertora se često koristi $D = 128$, kada je $F_{\max} = 2^{-8}$.



Kaskadiranjem decimatora sa odnosom promene učestanosti od $D = 2$ puta sa slike 8.8 može se realizovati decimator sa odnosom promene učestanosti od 2^N , koji je prikazan na slici 8.9. Korišćenjem identiteta

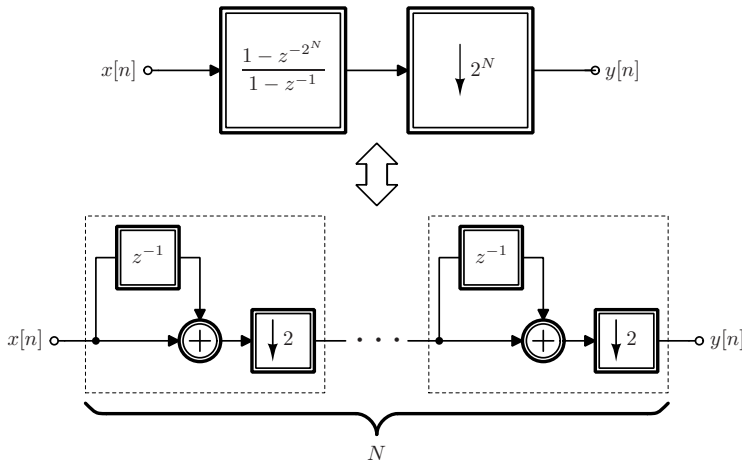
$$\prod_{k=0}^{N-1} (1 + z^{-2^k}) = \frac{1 - z^{-2^N}}{1 - z^{-1}}, \quad (8.19)$$

direktno sledi da je ukupna prenosna karakteristika:

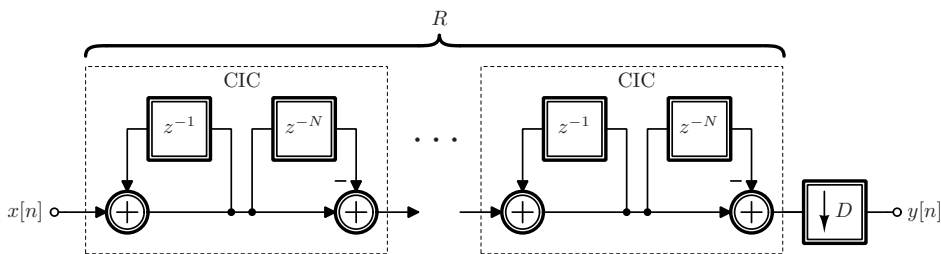
$$H(z) = \frac{1 - z^{-2^N}}{1 - z^{-1}}, \quad (8.20)$$

odnosno da je ukupna prenosna funkcija N kaskadno vezanih decimatora sa odnosom promene učestanosti od $D = 2$ puta jednaka CIC decimatoru odnosa promene učestanosti od $D = 2^N$ puta sa filtrom datim u (8.20).

Potiskivanje spektralnih komponenti koje se preklapaju sa željenim signalom se može poboljšati višestepenim CIC filtrom. Na slici 8.10 prikazan je decimator sa R -tostepenim CIC filtrom sa kašnjenjem od N taktova u češljastom filtru.



Slika 8.9: Jednostepeni CIC decimator sa odnosom promene učestanosti od $D = 2^N$ puta.



Slika 8.10: Višestepeni CIC filter sa decimatorom.

Prenosna funkcija R -tostepenog CIC filtra

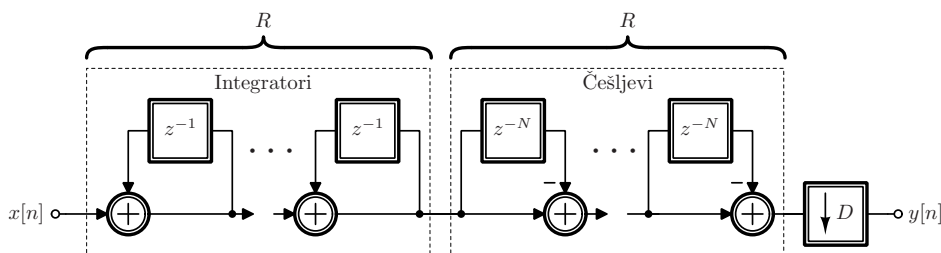
$$H_{\text{CIC},R}(z) = \left(\frac{1 - z^{-N}}{1 - z^{-1}} \right)^R = \underbrace{\frac{1 - z^{-N}}{1 - z^{-1}} \cdots \frac{1 - z^{-N}}{1 - z^{-1}}}_R \quad (8.21)$$

se može preurediti u oblik

$$H_{\text{CIC},R}(z) = \underbrace{(1 - z^{-1})^{-1} \cdots (1 - z^{-1})^{-1}}_{R \text{ integratora}} \cdot \underbrace{(1 - z^{-N}) \cdots (1 - z^{-N})}_{R \text{ češljeva}}, \quad (8.22)$$

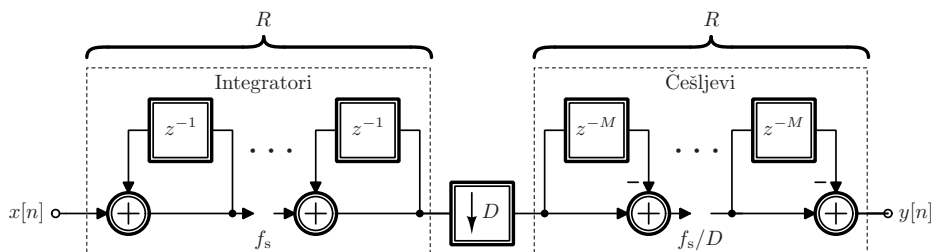
koji je prikazan na slici 8.11.

Pod pretpostavkom da je kašnjenje u češljastim filterima $N = MD$, češljasti filteri se mogu prebaciti iza kompresora sa odnosom promene učestanosti od D puta primenom



Slika 8.11: Preuređeni višestepeni CIC filtar sa decimatorom.

plemenitog identiteta. Primenom plemenitih identiteta dobija se struktura sa slike 8.12, koji se naziva Hogenauerovim decimatorom [37].



Slika 8.12: Hogenauerov decimator.

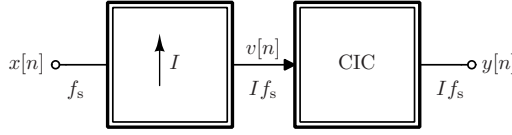
Kašnjenje od M taktova u češljastim filtrima se zove diferencijalno kašnjenje. Vrednost diferencijalnog kašnjenja je u većini primena $M = 1$ ili $M = 2$, za koje je opadanje pojačanja u propusnom opsegu prihvatljivo u većini primena.

Hogenauerov decimator ima interesantnu osobinu da se odnos promene učestanosti D može proizvoljno menjati, bez potrebe za promenom strukture filtra. Maksimalni odnos promene učestanosti odabiranja je u principu određen širinom reči u integratorima i češljastim filtrima. Poslednji integrator u svakom taktu akumulira vrednost izlaza prethodnog stepena, čime se njegova vrednost uvećava. Kompresor prosleđuje svaki D -ti odibak izlaza poslednjeg integratora i potrebno je obezbediti dovoljnu širinu reči da se rezultat D sabiranja može predstaviti. Potrebna širina reči je $\lceil \log_2 D \rceil$ veća od širine reči u slučaju CIC filtra bez kompresora.

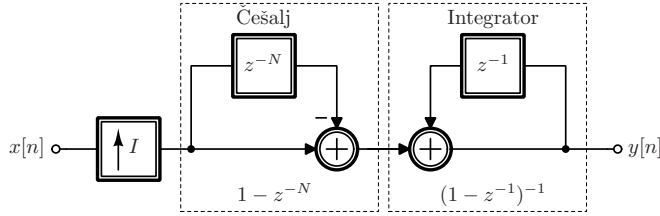
8.1.4 CIC interpolator

Blok dijagram interpolatora sa CIC filtrom je prikazan na slici 8.13. Ekspander povećava učestanost odabiranja I puta umetanjem $I - 1$ nultih odbiraka između susednih odbiraka ulaznog signala. Interpolator u formi sa slike 8.13 nije optimalan po pitanju broja operacija pošto se računске operacije izvršavaju nad nultim odbircima.

Detalji strukture interpolatora sa CIC filtrom su prikazani na slici 8.14.

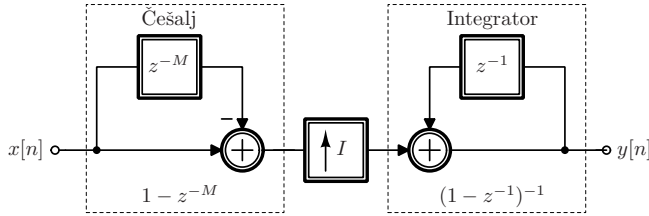


Slika 8.13: Blok dijagram interpolatora sa CIC filtrom.



Slika 8.14: Interpolator sa CIC filtrom.

Nepotrebne računске operacije sa nultim odbircima se mogu izbеći prebacivanjem češljastog filtra ispred ekspandera primenom plemenitog identiteta. Primenom plemenitog identiteta, pod pretpostavkom da je kašnjenje u češljastom filtru $N = IM$, dobija se interpolator sa slike 8.15.



Slika 8.15: Interpolator sa CIC filtrom.

U slučaju kada je $M = 1$ moguće je zameniti jednostepeni CIC interpolator kolom zadržke, kao što je predloženo u [38]. Vrednost izlaza integratora se ne menja kada su na ulazu nulti odbirci, i menja se samo kada je na izlazu ekspandera nenulta vrednost. Pošto je izlaz ekspandera sa odnosom promene učestanosti odabiranja od I puta jednak ulaznom odbirku u taktovima $n = kI$, dok je u ostalim taktovima nula, vrednost izlaza integratora ima konstantu vrednost u I taktova.

Nenulti odbirci na izlazu ekspandera za $M = 1$ su:

$$v[nI] = x[n] - x[n - 1], \quad (8.23)$$

dok je vrednost izlaza integratora

$$y[nI] = y[(n - 1)I] + v[nI] = y[(n - 1)I] + x[n] - x[n - 1]. \quad (8.24)$$

Za $n = 0$ ваži

$$y[0] = x[0], \quad (8.25)$$

dok je za $n = 1$

$$y[I] = y[0] + x[1] - x[0] = x[1], \quad (8.26)$$

odakle sledi da je

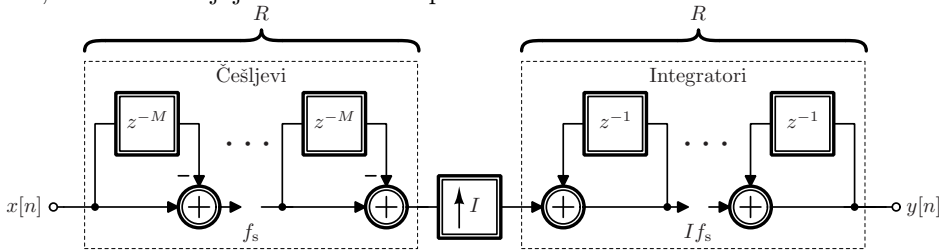
$$y[nI] = x[n]. \quad (8.27)$$

U taktovima $nI + 1$ do $(n + 1)I - 1$ na izlazu ekspandera su multi odbirci i vrednost integratora se ne menja, odnosno

$$y[nI] = y[nI + 1] = \dots = y[(n + 1)I - 1] = x[n]. \quad (8.28)$$

Iz (8.28) sledi da se jednostepeni interpolator faktora povećanja učestanosti odabiranja od I puta sa diferencijalnim kašnjenjem $M = 1$ može zameniti kolom zadržke koje odbirak na ulazu ponavlja I puta.

Interpolator sa višestepenim CIC filtrom, prikazan na slici 8.16, se dobija na isti način kao što je pokazano na primeru decimatora - grupisanjem češljastih filtara i primenom plemenitog identiteta. U slučaju kada je vrednost diferencijalnog kašnjenja $M = 1$ češljasti filter pre ekspandera, ekspander i integrator posle ekspandera se mogu zameniti kolom zadržke, čime se smanjuje složenost interpolatora.



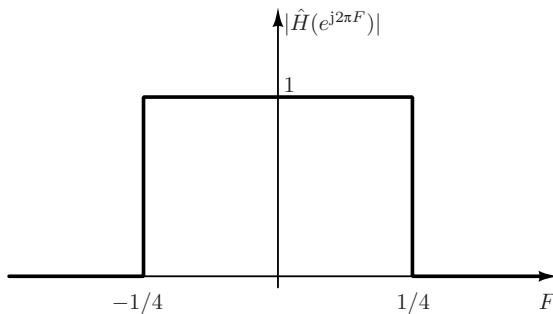
Slika 8.16: Višestepeni CIC interpolator.

8.2 Poluopsežni filter (HB)

Poluopsežni filter (engl. half band filter - HB) [39, 40] je dobio ime po tome što je granična učestanost propusnog opsega na polovini Nikvistove učestanosti $\Omega_{\text{pass}} = \pi/2$, $F_{\text{pass}} = 1/4$. Skoro polovina koeficijenata poluopsežnog filtra N -tog reda, tačnije $N/2 - 1$ od $N + 1$, su nule što značajno smanjuje broj računskih operacija. Red poluopsežnog filtra mora biti oblika $N = 4k + 2$, za koji ima $k + 2$ različitih koeficijenata, ili $N = 4k$, za koji ima $k + 1$ različitih koeficijenata. Središnji koeficijet je uvek $1/2$ i može se realizovati pomeranjem u desno za jedan bit. Zbog malog broja računskih operacija i potrebnih množača često se koristi u višestepenim interpolatorima i decimatorima za realizaciju sekcije sa promenom učestanosti od $M = 2$ puta. U literaturi [41] su predstavljene efikasne hardverske realizacije poluopsežnih filtara sa velikim potiskivanjem bez upotrebe množača.

Frekvencijski odziv idealnog poluopsežnog filtra (slika 8.17) je dat sa:

$$\left| \hat{H}(e^{j2\pi F}) \right| = \begin{cases} 1, & |F| \leq \frac{1}{4} \\ 0, & \text{inače} \end{cases} \quad (8.29)$$



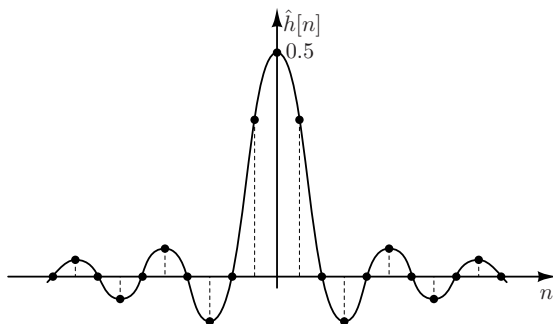
Slika 8.17: Frekvencijski odziv idealnog poluopsežnog filtra.

Sa idealnim poluopsežnim filtrom koristan signal bi mogao zauzimati teorijski opseg učestanosti $(-\pi, \pi)$ pri interpolaciji, odnosno $(-\pi/2, \pi/2)$ pri decimaciji, za odnos promene učestanosti $M = 2$. Usled konačne selektivnosti realnih poluopsežnih filtara opseg učestanosti koji može zauzeti koristan signal je u praksi oko 80% od maksimalnog opsega.

Impulsni odziv idealnog poluopsežnog filtra se može dobiti inverznom DTFT i iznosi (slika 8.18):

$$\hat{h}[n] = \frac{1}{2} \frac{\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)}{\frac{\pi n}{2}} = \frac{1}{2} \text{sinc}\left(\frac{n}{2}\right). \quad (8.30)$$

Iz (8.30) se vidi da impulsni odziv nije kauzalan i da traje beskonačno dugo. Kauzalnost bi se mogla obezbediti kašnjenjem odbiraka impulsnog odziva ukoliko bi se vremensko trajanje na neki način ograničilo. Sa slike 8.18 se vidi, a može se direktno proveriti i iz (8.30), da su odbirci impulsnog odziva sa parnim indeksima nule $\hat{h}[2n] = 0$, osim za $n = 0$, što je karakteristična osobina poluopsežnog filtra. Računske operacije sa multim odbircima impulsnog odziva se mogu preskočiti čime se njihov broj značajno smanjuje.

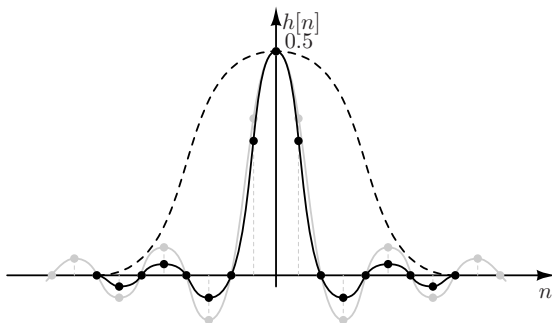


Slika 8.18: Impulsni odziv idealnog poluopsežnog filtra.

Impulsni odziv idealnog poluopsežnog filtra se može vremenski ograničiti množenjem sa odbircima prozorske funkcije $w[n]$:

$$h[n] = \hat{h}[n] \cdot w[n]. \quad (8.31)$$

Broj odbiraka prozorske funkcije mora biti $4k + 3$ ili $4k + 1$ da bi se očuvala simetrija impulsnog odziva. Za trajanje prozorske funkcije od $4k + 1$ odbiraka se prvi i poslednji odbirak prozorske funkcije množe nulama impulsnog odziva idealnog poluopsežnog filtra. Vremenski ograničeni impulsni odziv poluopsežnog filtra takođe ima nulte parne odbirke, pošto se odbirci prozorske funkcije množe nulama, osim za $n = 0$ za koje je $h[0] = 1/2$.



Slika 8.19: Impulsni odziv konačnog trajanja realnog poluopsežnog filtra.

Množenjem odbiraka impulsnog odziva idealnog poluopsežnog filtra $\hat{h}[n]$ odbircima prozorske funkcije $w[n]$ se dobijaju odbirci vremenski ograničenog impulsnog odziva poluopsežnog filtra $h[n]$, čiji frekvencijski odziv je konvolucija frekvencijskih odziva idealnog poluopsežnog filtra i prozorskse funkcije u frekvencijskom domenu

$$H(F) = \hat{H}(F) \star W(F). \quad (8.32)$$

Efekte ograničavanja trajanja impulsnog odziva, odnosno konvolucije u frekvencijskom domenu, su da se u propusnom opsegu učestanosti javlja talasanje frekvencijskog odziva, i granična učestanost je $F_{\text{pass}} < 1/4$. Slabljenje u nepropusnom opsegu postaje konačno i granična učestanost je $F_{\text{stop}} > 1/4$.

Efekte konačne dužine impulsnog odziva poluopsežnog filtra - talasanje u propusnom i konačno potiskivanje u opsegu učestanosti, kao i konačna širina prelazne zone - su očekivani jer se javljaju i kod drugih klasa filtara. Međutim, u slučaju poluopsežnog filtra talasanja u propusnom i nepropusnom opsegu nisu nezavisna, već moraju biti jednaka. Pored toga, granične učestanosti propusnog i nepropusnog opsega nisu nezavisne i moraju biti podjednako udaljene od $F = 1/4$. Navedene osobine su karakteristične za poluopsežni filter i biće razmatrane u daljem tekstu.

Impulsni odziv $h(n)$ nekauzalnog poluopsežnog filtra zadovoljava uslove:

- I** Impulsni odziv je trajanja $N + 1$ odbiraka - $h[n] = 0$ za $|n| > N/2$, gde je N paran broj,
- II** Odbirci impulsnog odziva su realni brojevi $h[n] \in \mathbb{R}$,
- III** Impulsni odziv je parno simetričan $h[n] = h[-n]$,
- IV** Parni odbirci impulsnog odziva su

$$h[2n] = \begin{cases} 0 & , n \neq 0 \\ h[0] \neq 0 & , n = 0 \end{cases} \quad (8.33)$$

Osim uslova **IV** - da su parni odbirci $h[2n]$ impulsnog odziva nule za $n \neq 0$, navedene uslove zadovoljava svaki nekauzalni FIR filter tipa I. Vremenski ograničen odziv idealnog poluopsežnog filtra zadovoljava sve navedene uslove za bilo koju prozorsku funkciju.

Osobine frekvencijskog odziva filtra čiji impulsnog odziv zadovoljava postavljene uslove se mogu odrediti na osnovu svojstava DTFT-a i z transformacije. Iz uslova **II** - odbirci impulsnog odziva su realni - sledi da frekvencijski odziv filtra poseduje konjugovano-kompleksnu simetriju:

$$h[n] \in \mathbb{R} \iff H(e^{j\Omega}) = H^*(e^{-j\Omega}). \quad (8.34)$$

Dalje, iz osobina odbiraka impulsnog odziva **II** i **III** - odbirci su realni i imaju parnu simetriju - sledi da je frekvencijski odziv filtra $H(e^{j\Omega})$ čisto realan:

$$h[n] \in \mathbb{R} \wedge h[n] = h[-n] \iff H(e^{j\Omega}) \in \mathbb{R} \quad (8.35)$$

na osnovu osobina DTFT-a. Iz (8.34) i (8.35) sledi da je frekvencijski odziv parno simetričan:

$$H(e^{j\Omega}) = H(e^{-j\Omega}). \quad (8.36)$$

Filter $H(z)$ se primenom polifazne dekompozicije može predstaviti u obliku

$$H(z) = H_0(z^2) + z^{-1}H_1(z^2), \quad (8.37)$$

gde polifazna komponenta $H_0(z)$ sadrži parne odbirne impulsnog odziva, a $H_1(z)$ neparne. Iz uslova **IV** da su svi parni odbirci nule, osim za $n = 0$, sledi

$$H(z) = h[0] + z^{-1}H_1(z^2), \quad (8.38)$$

Primetimo da je $H(-z) = h[0] - z^{-1}H_1(z^2)$ odakle sledi

$$H(z) + H(-z) = 2h[0]. \quad (8.39)$$

Frekvencijski odziv filtra u ustaljenom stanju se dobija za $z = e^{j\Omega}$, i važi

$$-z = -1 \cdot e^{j\Omega} = e^{-j\pi} \cdot e^{j\Omega} = e^{j(\Omega-\pi)}. \quad (8.40)$$

Iz osobine (8.36) da je frekvencijski odziv $H(e^{j\Omega})$ parno simetričan imamo da je

$$H(e^{j(\Omega-\pi)}) = H(e^{j(\pi-\Omega)}), \quad (8.41)$$

odakle za $z = e^{j\Omega}$ sledi:

$$H(-z) = H(e^{j(\pi-\Omega)}). \quad (8.42)$$

Zamenom (8.42) u (8.43) konačno dobijamo:

$$H(e^{j\Omega}) + H(e^{j(\pi-\Omega)}) = 2h[0]. \quad (8.43)$$

Izborom $h[0] = 1/2$ i smenom $\Omega = \pi/2 - \Theta$ izraz (8.43) postaje

$$H(e^{j(\pi/2-\Theta)}) + H(e^{j(\pi/2+\Theta)}) = 1. \quad (8.44)$$

Rezultat (8.44) je veoma važan pošto pokazuje da je zbir amplituda frekvencijskih odziva na učestanostima $\pi/2 - \Theta$ i $\pi/2 + \Theta$ konstantan za svako Θ , odnosno da je frekvencijski odziv simetričan oko učestanosti polovine opsega $\pi/2$, što se moglo naslutiti i iz imena filtra.

Na osnovu izloženog može se zaključiti da poluopsežni filter sa konačnim trajanjem impulsnog odziva ima osobine:

- Frekvencijski odziv je simetričan oko $\Omega = \pi/2$ ($F = 1/4$),
- Frekvencijski odziv na $\Omega = \pi/2$ je $H(e^{j\pi/2}) = h[0]$,
- Granične učestanosti propusnog Ω_{pass} i nepropusnog Ω_{stop} opsega su podjednako udaljene od $\pi/2$ i važi $\Omega_{\text{pass}} + \Omega_{\text{stop}} = \pi$,
- Talasanje δ u propusnom i nepropusnom opsegu je isto.

Važno je napomenuti da navedene osobine ne zavise od prozorske funkcije kojom se ograničava vremensko trajanje impulsnog odziva. Takođe, navedene osobine važe i u slučaju filtra sa kvantizovanim koeficijentima.

Prve dve osobine, simetričnost frekvencijskog odziva oko $\Omega = \pi/2$ i frekvencijski odziv na učestanosti polovine opsega $H(e^{j\pi/2}) = h[0]$ slede iz (8.44).

Frekvencijski odziv filtra u propusnom opsegu $\Omega < \Omega_{\text{pass}}$ talasa između $1 \pm \delta$ i zatim monotonno opada do $\Omega = \Omega_{\text{stop}}$. Pošto je zbir frekvencijskih odziva na učestanostima $\pi/2 \pm \Theta$ konstantan (8.44), opadanje odziva na učestanostima u prelaznoj zoni $\Omega_{\text{stop}} > \Omega > \Omega_{\text{pass}}$, odnosno $0 \leq \Theta < \pi/2 - \Omega_{\text{pass}}$, mora biti kompenzovano porastom odziva na učestanosti $\Omega = \pi/2 + \Theta$. Samim tim, donja granična učestanost prelazne zone Ω_{pass} , za koju je $\Theta = \pi/2 - \Omega_{\text{pass}}$, određuje gornju graničnu učestanost $\Omega_{\text{stop}} = \pi/2 + \Theta$ odakle sledi

$$\Omega_{\text{pass}} + \Omega_{\text{stop}} = \pi, \quad F_{\text{pass}} + F_{\text{stop}} = \frac{1}{2}. \quad (8.45)$$

Pošto važi $\Omega_{\text{pass}} = \pi/2 - \Theta$ i $\Omega_{\text{stop}} = \pi/2 + \Theta$, granične učestanosti propusnog i nepropusnog opsega su podjednako udaljene od $\pi/2$. Širina prelazne zone je određena graničnom učestanošću propusnog opsega:

$$\Delta\Omega = \pi - 2\Omega_{\text{pass}}, \quad \Delta F = \frac{1}{2} - 2F_{\text{pass}}. \quad (8.46)$$

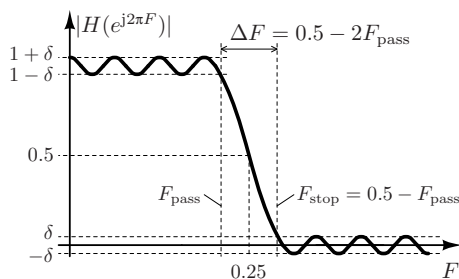
Talasanje odziva filtra između vrednosti $1 \pm \delta$ u opsegu učestanosti $\Omega < \Omega_{\text{pass}}$, za koje je $\pi/2 - \Omega_{\text{pass}} \leq \Theta < \pi/2$, mora biti kompenzovano talasanjem $\pm\delta$ u opsegu učestanosti $(\Omega_{\text{min}}, \Omega_{\text{max}})$, gde su:

$$\Omega_{\text{min}} = \pi/2 + \Theta_{\text{min}} = \pi - \Omega_{\text{pass}} = \Omega_{\text{stop}}, \quad (8.47)$$

$$\Omega_{\text{max}} = \pi/2 + \Theta_{\text{max}} = \pi, \quad (8.48)$$

koji je jednak nepropusnom opsegu učestanosti $(\Omega_{\text{stop}}, \pi)$. Zaključak je da talasanje frekvencijskog odziva u propusnom i nepropusnom opsegu mora biti isto.

Karakteristične osobine poluopsežnog filtra su prikazane na slici 8.20. Odziv filtra je simetričan oko učestanosti polovine opsega $F = 0.25$, sa istim talasanjem u propusnom i nepropusnom opsegu učestanosti. Granične učestanosti nisu nezavisne već važi $F_{\text{pass}} + F_{\text{stop}} = 0.5$, što za posledicu ima da je $\Delta F = 0.5 - 2F_{\text{pass}}$.



Slika 8.20: Karakteristične osobine poluopsežnog filtra.

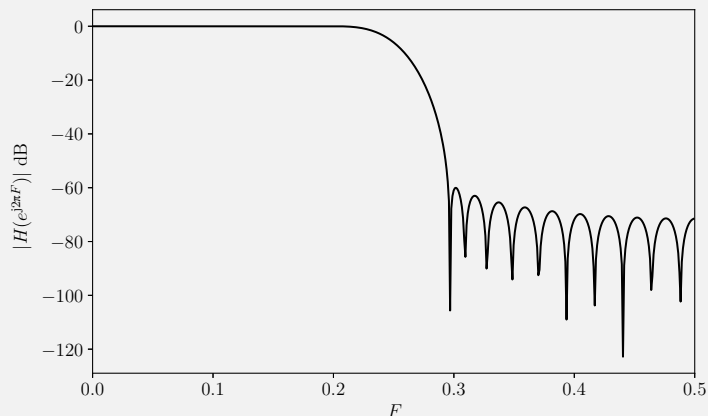
Primer 8.4: Projektovanje poluopsežnog filtra prozorskom funkcijom

Poluopsežni filtar sa potiskivanjem u nepropusnom opsegu učestanosti od $A_{\text{dB}} = 60$ dB i širine prelazne zone od $\Delta F = 0.1$ se može projektovati Kajze-rovom prozorskom funkcijom izborom odgovarajućih vrednosti parametara M i β :

$$\beta = \begin{cases} 0.1102(A_{\text{dB}} - 8.7), & A_{\text{dB}} > 50 \\ 0.5842(A_{\text{dB}} - 21)^{0.4} + 0.078876(A_{\text{dB}} - 21), & 21 < A_{\text{dB}} < 50 \\ 0, & A < 21. \end{cases}$$

$$M = \frac{A_{\text{dB}} - 8}{2.285\Delta\Omega} = \frac{A_{\text{dB}} - 8}{14.357\Delta F}$$

Za slabljenje od $A_{\text{dB}} = 60$ dB i širinu prelazne zone od $\Delta F = 0.1$ vrednosti parametra prozorske funkcije su $\beta = 5.6533$ i $M = 36.2$, dok su specifikacije zadovoljene, uzimajući u obzir i ograničenje reda filtra, za $M = 41$. Množenjem odbiraka projektovane prozorske funkcije sa impulsnim odzivom idealnog poluopsežnog filtra $\hat{h}[n] = 0.5\text{sinc}(n/2)$ dobijaju se odbirci vremenski ograničenog impulsnog odziva poluopsežnog filtra. Frekvencijski odziv projektovanog filtra je prikazan na slici.



8.2.1 Projektovanje HB filtra Remezovim algoritmom

Poluopsežni filter se može projektovati i Remezovim algoritmom zadavanjem odgovarajućih graničnih učestanosti i težinskih koeficijenata. Pre svega, filter mora biti parnog reda $4k + 2$ ili $4k$, odnosno imati neparan broj koeficijenata. Iz osobina polupsežnog filtra poznato je da su granične učestanosti propusnog i nepropusnog opsegu podjednako udaljene od $F = 1/4$, odnosno $F_{\text{pass}} = 1/4 - \Delta F/2$ i $F_{\text{stop}} = 1/4 + \Delta F/2$, i da talasanja u propusnom i nepropusnom opsegu moraju biti jednaka. Jednakost talasanja u propusnom i nepropusnom opsegu se može obezbediti izborom težinskih koeficijenata 1 u propusnom i δ^{-1} u nepropusnom opsegu. Trebalo bi obezbediti i da odziv filtra na $F = 1/4$ bude $|H(e^{j\pi/2})| = 1/2$.

Izvršavanjem Remezovog algoritma sa navedenim vrednostima parametara se u principu može projektovati poluopsežni filter. Nedostatak ove metode se ogleda u tome što nije moguće eksplicitno zadati ograničenje da svi parni odbirci, osim središnjeg, budu nule. Postupak projektovanja poluopsežnog filtra predložen u [42] koristi Remezov algoritam za određivanje koeficijenata impulsnog odziva, ali obezbeđuje da parni koeficijenti, osim središnjeg, budu tačno nula.

Postupak projektovanja predložen u [42] se zasniva na činjenici da FIR filtri tipa II imaju nulu u frekvencijskom odzivu na $\Omega = \pi/2$ i da je nekauzalna komponenta frekvencijskog odziva $H_z(e^{j\Omega})$ periodična sa periodom 4π [43]. Detaljno razmatranje o osobinama FIR filtara svih tipova se može naći u literaturi [44]. Nula u frekvencijskom odzivu FIR filtra tipa II na $\Omega = \pi/2$ se može pokazati na sledeći način. Filter tipa II je neparnog reda:

$$H_{\text{II}}(z) = \sum_{n=0}^{N=2k+1} h[n]z^{-n}, \quad (8.49)$$

sa simetričnim koeficijentima $h[n] = h[N-n]$. Izraz za z transformaciju filtra $N = 2k+1$ -og reda sa simetričnim koeficijentima se može preurediti u:

$$H_{\text{II}}(z) = \sum_{n=0}^{2k+1} h[n]z^{-n} = \sum_{n=0}^k h[n] \left(z^{-n} + z^{-(N-n)} \right). \quad (8.50)$$

Frekvencijski odziv filtra na $\Omega = \pi$ se dobija za $z = e^{j\pi} = -1$, i u tom slučaju izraz u zagradama (8.50):

$$z^{-n} + z^{-(N-n)} = (-1)^{-n} + (-1)^{-N-n} = (-1)^n + (-1)^{N-n} \quad (8.51)$$

je uvek nula pošto je N neparan broj, odakle sledi da je $H_{\text{II}}(e^{j\pi}) = 0$.

Frekvencijski odziv filtara tipa I i II N -og reda se može predstaviti kao [43]

$$H(e^{j\Omega}) = e^{j\Omega N/2} H_z(e^{j\Omega}), \quad (8.52)$$

gde je $H_z(e^{j\Omega})$ odziv nekauzalnog filtra sa nultim kašnjenjem (engl. zero delay), koji je uvek realan i ima parnu simetriju $H_z(e^{j\Omega}) = H_z(e^{-j\Omega})$. Frekvencijski odziv $H(e^{j\Omega})$ je periodičan sa periodom 2π

$$H(e^{j\Omega}) = H(e^{j(\Omega+2\pi)}) \quad (8.53)$$

na osnovu osobina DTFT-a. Zamenom (8.52) u (8.53) imamo

$$\begin{aligned} e^{j\Omega N/2} H_z(e^{j\Omega}) &= e^{j(\Omega+2\pi)N/2} H_z(e^{j(\Omega+2\pi)}) \\ &= e^{j\Omega N/2} e^{j\pi N} H_z(e^{j(\Omega+2\pi)}) \end{aligned} \quad (8.54)$$

Za neparno N važi $e^{j\pi N} = -1$, odakle sledi

$$H_z(e^{j\Omega}) = -H_z(e^{j(\Omega+2\pi)}). \quad (8.55)$$

Na isti način se može pokazati da važi

$$H_z(e^{j\Omega}) = H_z(e^{j(\Omega+4\pi)}), \quad (8.56)$$

odnosno da je $H_z(e^{j\Omega})$ periodičan sa periodom 4π za neparni red filtra N , odnosno za FIR filtre tipa II.

Iz osobina parne simetrije $H_z(e^{j\Omega}) = H_z(e^{-j\Omega})$ i antisimetrije filtra tipa II $H_z(e^{j\Omega}) = -H_z(e^{j(\Omega+2\pi)})$ sledi da je frekvencijski odziv $H_z(e^{j\Omega})$ u opsegu učestanosti $(0, 2\pi)$ antisimetričan oko $\Omega = \pi$, odnosno važi:

$$H_z(e^{j(\pi-\Theta)}) = -H_z(e^{j(\pi+\Theta)}) \quad (8.57)$$

Dalje iz (8.57) sledi da ako nekauzalni filtar tipa II ima frekvencijski odziv ograničen sa $1 \pm \delta$ u propusnom opsegu učestanosti $(0, F_{\text{pass}})$, frekvencijski odziv filtra u opsegu $(1 - F_{\text{pass}}, 1)$ mora biti ograničen sa $-1 \pm \delta$. Drugim rečima, talasanje u oba opsega mora biti isto i granične učestanosti su simetrične oko $F = 1/2$ - slika 8.21. Ovo su takođe osobine poluopsežnog filtra, s' razlikom da su granične učestanosti poluopsežnog filtra simetrične oko $F = 1/4$ i što frekvencijski odziv u nepropusnom opsegu učestanosti $(1/2 - F_{\text{pass}}, 1/2)$ iznosi $\pm\delta$ umesto $-1 \pm \delta$.

Frekvencijska karakteristika nekauzalnog filtra tipa II ima iste osobine simetrije kao poluopsežni filtar, ali je odziv simetričan oko $\Omega = \pi$ umesto oko $\Omega = \pi/2$. U odeljku 6.4 o povećanju učestanosti odabiranja je pokazano da se umetanjem $I - 1$ nula između odbiraka impulsnog odziva filtra $H(z)$ spektar sužava I puta, odnosno da važi

$$H_I(z) = H(z^I) \Rightarrow H_I(e^{j\Omega}) = H(e^{jI\Omega}). \quad (8.58)$$

Za $I = 2$, što odgovara smeni $z \rightarrow z^2$, se opseg učestanosti $\Omega = (0, 2\pi)$ slika u opseg učestanosti $\Omega = (0, \pi)$, odnosno $F = (0, 1)$ u $F = (0, 0.5)$, tako da filtar $H_z(z^2)$ ima iste širine zona kao poluopsežni filtar:

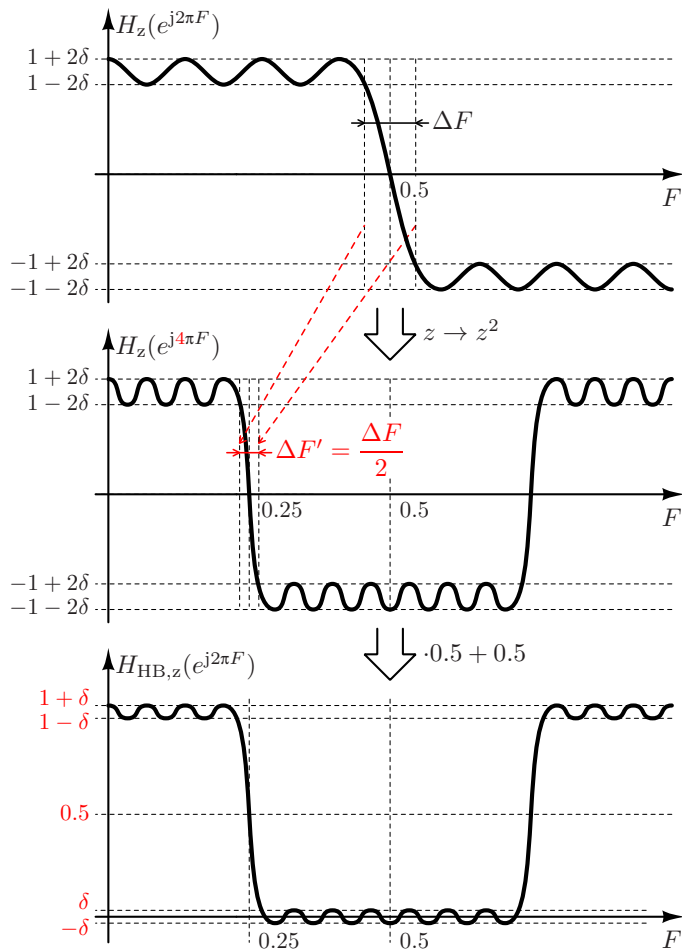
$$H_z(z) \rightarrow H_z(z^2) \Rightarrow 2F_{\text{pass}} \rightarrow F_{\text{pass}}, \quad 2F_{\text{stop}} \rightarrow F_{\text{stop}}. \quad (8.59)$$

Smenom $z \rightarrow z^2$ se obezbeđuje da odbirci sa parnim indeksima budu nule. Samim tim, prevazilazi se nedostatak Remezovog algoritma u pogledu mogućnosti specifikiranja ograničenja u impulsnom odzivu pri direktnom projektovanju poluopsežnog filtra.

Vrednosti frekvencijskog odziva $H_z(z^2)$ su u granicama $1 \pm \delta$ u propusnom opsegu učestanosti $(0, F_{\text{pass}})$ i u granicama $-1 \pm \delta$ u nepropusnom opsegu učestanosti $(0.5 - F_{\text{pass}}, 0.5)$. Linearnom transformacijom

$$H_{\text{HB},z}(z) = \frac{1 + H_z(z^2)}{2} \quad (8.60)$$

se dobija odziv poluopsežnog filtra. Talasanje frekventijskog odziva poluopsežnog filtra u propusnom i nepropusnom opsegu su dvostruko manja od talasanja $H_z(z)$ zbog multiplikativnog faktora $1/2$. Konstantan član $1/2$ u frekventijskom odzivu odgovara diskretnoj delta funkciji amplitude $1/2$ u impulsnom odzivu $h[0] = 1/2$.



Slika 8.21: Faze projektovanja poluopsežnog filtra Remezovim algoritmom.

Na osnovu izloženog, poluopsežni filter se projektuje Remezovim algoritmom u sledećim koracima:

- Iz zadate granične učestanosti propusnog opsega F_{pass} ili širine prelazne zone ΔF , i potiskivanja u nepropusnom opsegu A_{dB} se izračunavaju gabariti $G(z)$

$$F_{\text{pass,G}} = 2F_{\text{pass}}$$

ili

$$F_{\text{pass,G}} = \frac{1}{2} - \Delta F$$

$$\delta_G = 2\delta = 2 \cdot 10^{A_{\text{dB}}/20}$$

- Remezovim algoritmom se projektuje FIR filtar $G(z)$ neparnog reda N_G (tip II) sa izračunatom granicom propusnog opsega $F_{\text{pass,G}}$ i dozvoljenim talasanjem δ_G . Impulsni odziv $g[n]$ projektovanog filtra ima paran broj odbiraka $N_G + 1$.
- Kauzalni impulsni odziv poluopsežnog filtra $h[n]$ se dobija umetanjem nula između odbiraka $g[n]$, postavljanjem vrednosti središnjeg odbirka na jedinicu i skaliranjem svih odbiraka dobijenog impulsnog odziva faktorom $1/2$, odnosno:

$$h[n] = \begin{cases} \frac{1}{2}g\left[\frac{n}{2}\right], & n \text{ parno} \\ 0, & n \text{ neparno i } n \neq \frac{N}{2}, \\ \frac{1}{2}, & n = \frac{N}{2} \end{cases}$$

gde je $0 \leq n \leq N$ i $N = 2N_G$.

Opisanim postupkom se po konstrukciji dobija poluopsežni filtar. Provera da li frekven-
cijski odziv filtra zadovoljava zadate gabarite se može izvršiti i na $G(z)$ jer su granična
učestanost propusnog opsega i talasanje uvek dvostruko veći.

Primer 8.5: Red poluopsežnog filtra

Remezovim algoritmom su projektovani poluopsežni filtri sa slabljenjem u nepropusnom opsegu A_{dB} od 60 i 90 dB, za različite granične učestanosti propusnog opsega F_{pass} , odnosno širine prelazne zone ΔF . U tabeli su dati red N i broj različitih koeficijenata, izuzimajući središnji koeficijent 0.5. Za slabljenje od 90 dB i $F_{\text{pass}} = 0.245$ Remezov algoritam nije konvergirao. Iz prikazanih rezultata se može videti da red poluopsežnog filtra naglo raste kako se granica propusnog opsega približava vrednosti 0.25. Takođe se može videti da je za isto slabljenje A_{dB} proizvod $N\Delta F$ približno konstantan.

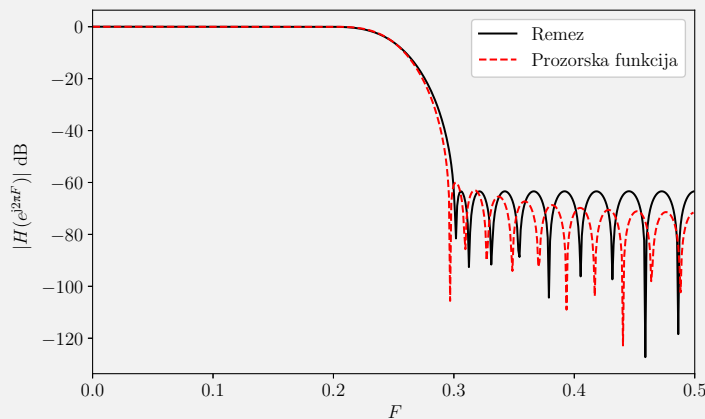
F_{pass}		0.1	0.15	0.2	0.21	0.22	0.23	0.24	0.245
ΔF		0.3	0.2	0.1	0.08	0.06	0.04	0.02	0.01
N	$A_{\text{dB}} = 60$	10	18	34	42	54	82	166	326
	$A_{\text{dB}} = 90$	18	26	54	66	90	134	266	-
# koef.	$A_{\text{dB}} = 60$	3	5	9	11	14	21	42	82
	$A_{\text{dB}} = 90$	5	7	14	17	23	34	67	-

Primer 8.6: Projektovanje poluopsežnog filtra Remezovim algoritmom

Poluopsežni filter istih gabarita ($A_{dB} = 60$ dB i $\Delta F = 0.1$) kao u prethodnom primeru je projektovan Remezovim algoritmom. Projektovan je FIR filter tipa II $G(z)$ sa dvostrukom graničnom učestanošću

$$F_{pass,G} = 2F_{pass} = 2 \left(\frac{1}{4} - \frac{\Delta F}{2} \right) = 0.4. \quad (8.61)$$

Provera ispunjenosti specifikacija se može izvršiti na $G(z)$ zbog toga što su kod poluopsežnog filtra talasanja u propusnom i nepropusnom opsegu jednaka. Talasanje u propusnom opsegu $G(z)$ je u zadatim gabaritima $\delta < 2 \cdot 10^{-A_{dB}/20} = 0.002$ za filter sa 18 koeficijenata, odnosno 17. reda. Smenom $z \rightarrow z^2$, odnosno umetanjem nula između odbiraka impulsnog odziva $g(n)$, dodavanjem jediničnog središnjeg odbirka i skaliranjem koeficijenata impulsnog odziva sa $1/2$ dobija se impulsni odziv poluopsežnog filtra $h(n)$. Frekvencijski odziv projektovanog filtra je prikazan na slici, gde je radi poređenja prikazan i frekvencijski odziv filtra projektovanog Kajzerovom prozorskom funkcijom. Izuzimajući središnji koeficijent vrednosti $1/2$, koji se može realizovati pomeranjem u desno, filter projektovan Remezovim algoritmom ima 9 različitih koeficijenata, dok filter projektovan Kajzerovom prozorskom funkcijom ima 10 različitih koeficijenata.



Poluopsežni filter sa kauzalnim odzivom se može dobiti kašnjenjem odbiraka impulsnog odziva nekauzalnog filtra:

$$H_{HB}(z) = z^{-N/2} H_{HB,z}(z). \quad (8.62)$$

8.2.2 Polifazna dekompozicija HB filtra

U efikasnim realizacijama interpolatora i decimatora se koristi polifazna dekompozicija filtra kako bi se izbegle nepotrebne operacije. Poluopsežni filter se koristi u sekcijama

sa odnosom promene učestanosti od $M = 2$ puta, i stoga je od interesa proučiti svojstva polifazne dekompozicije na dve polifazne komponente.

Polifazna dekompozicija FIR filtra na dve komponente je oblika

$$H(z) = H_0(z) + z^{-1}H_1(z), \quad (8.63)$$

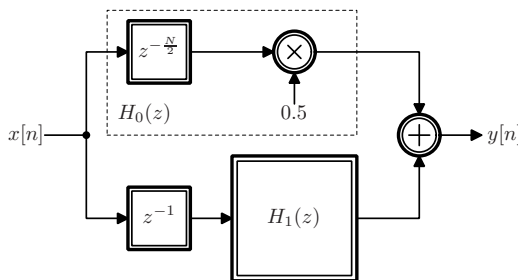
gde polifazna komponenta $H_0(z)$ sadrži koeficijente $H(z)$ sa parnim indeksima, dok $H_1(z)$ sadrži koeficijente sa neparnim indeksima. Koeficijenti nekauzalnog impulsnog odziva poluopsežnog filtra sa parnim indeksima su nule, osim za $n = 0$ kada je $h(0) = 0.5$. Kauzalni impulsni odziv je zakašnjen za $z^{-N/2}$ odakle je:

$$H_{HB}(z) = \frac{1}{2}z^{-N/2} + z^{-1}H_1(z). \quad (8.64)$$

Polifazna dekompozicija poluopsežnog filtra (8.64), koja je prikazana na slici 8.22, ima interesantnu osobinu da su svi nenulti koeficijenti, osim središnjeg koji je uvek 0.5, u polifaznoj komponenti $H_1(z)$. Polifazna komponenta $H_1(z)$ je uvek FIR filter tipa II sa koeficijentima

$$H_1(z) = 0.5 \cdot G(z), \quad (8.65)$$

gde je $G(z)$ dobijen projektovanjem poluopsežnog filtra Remezovim algoritmom.



Slika 8.22: Polifazna dekompozicija poluopsežnog filtra.

Poluopsežni filter propusnik visokih učestanosti se naziva komplementarnim filtrom $\overline{H}_{HB}(z)$. Iz osobine simetrije frekvencijskog odziva poluopsežnog filtra oko polovine opsega sledi:

$$\overline{H}_{HB,z}(z) = 1 - H_{HB,z}(z). \quad (8.66)$$

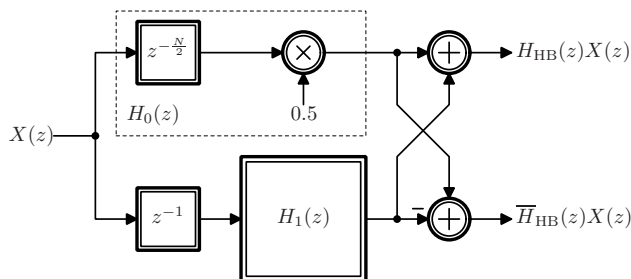
Granice propusnih F_{pass} i nepropusnih F_{stop} opsega $H_{HB,z}(z)$ i $\overline{H}_{HB,z}(z)$ su jednake, samo su njihove uloge zamenjene. Odbirci komplementarnog filtra su

$$\overline{h}[n] = \delta[n] - h[n] = \begin{cases} 0.5, & n = 0, \\ -h[n], & \text{inače} \end{cases}. \quad (8.67)$$

Pošto svi nenulti odbirci poluopsežnog filtra, osim srednjeg, pripadaju polifaznoj komponenti $H_1(z)$ sledi:

$$\overline{H}_{HB}(z) = H_0(z) - z^{-1}H_1(z) = \frac{1}{2}z^{-N/2} - z^{-1}H_1(z). \quad (8.68)$$

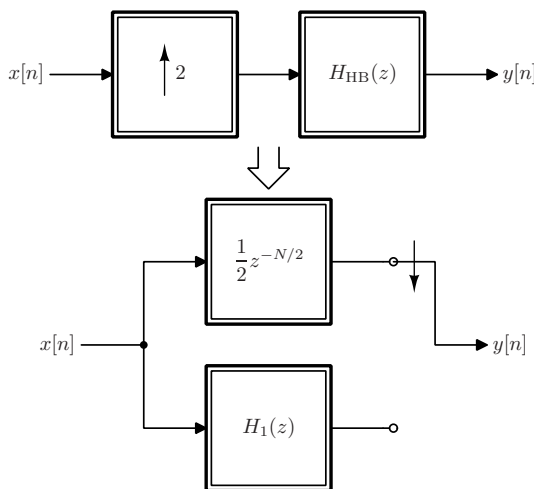
Upoređivanjem (8.64) i (8.68) sledi da se poluopsežni filter i njegov komplement mogu izračunati sabiranjem ili oduzimanjem izlaza polifaznih komponenti, što je prikazano na slici 8.23. Komplementarni filter se koristi u filterima sa maskiranim odzivom, koji se razmatraju u odeljku 8.4.



Slika 8.23: Polifazna realizacija poluopsežnog filtra i njegovog komplementa.

8.2.3 Polifazni interpolator sa HB filtrom

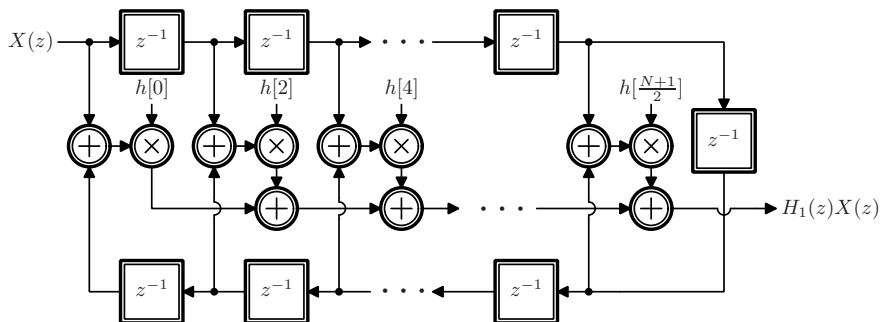
Interpolator sa promenom učestanosti odabiranja od $M = 2$ puta i poluopsežnim filtrom je prikazan na slici 8.24. Primenom transformacija opisanih u odeljku 7.7 dobija se polifazni interpolator sa komutatorom.



Slika 8.24: Polifazna realizacija interpolatora sa poluopsežnim filtrom.

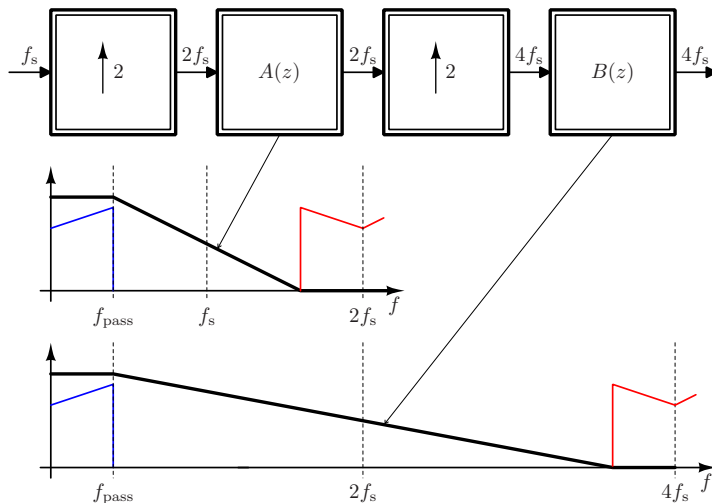
U prethodnom odeljku o polifaznoj dekompoziciji poluopsežnog filtra je pokazano da polifazna komponenta $H_0(z)$ sadrži samo koeficijent 0.5 dok su ostali nenulti koeficijenti u $H_1(z)$. Polifazna komponenta $H_1(z)$ je uvek FIR filter tipa II i broj računskih operacija se može prepoloviti korišćenjem svojstva simetrije koeficijenata, kao što je pokazano na

slici 8.25. Za red poluopsežnog filtra $N = 4k + 2$ potrebno je ukupno $k + 1$ množača, ne računajući središnji koeficijent 0.5 koji se može realizovati pomeranjem u desno za jedan bit, zbog čega je polifazni interpolator sa poluopsežnim filtrom veoma efikasan.



Slika 8.25: Efikasna realizacija polifazne komponente $H_1(z)$.

Frekvencijski odziv poluopsežnog filtra je takav da je on pogodan samo za promenu učestanosti odabiranja od $M = 2$ puta. Veći odnosi promene učestanosti odabiranja se mogu dobiti višestepenom interpolacijom uz ograničenje $M = 2^p$. Gabariti poluopsežnih filtara u višestepenom interpolatoru se mogu odrediti iz primera dvostepenog interpolatora prikazanog na slici 8.26.



Slika 8.26: Višestepeni interpolator sa poluopsežnim filterima.

Pretpostavimo da je na ulazu višestepenog interpolatora sa slike 8.26 signal učestanosti odabiranja f_s i maksimalne učestanosti korisnog signala $f_{\text{pass}} < f_s/2$. Povećanjem učestanosti odabiranja od dva puta prvim ekspanderom pojavljuje se spektralna replika signala koji je potrebno potisnuti poluopsežnim filtrom $A(z)$. Granična učestanost pro-

pusnog opsega $A(z)$ je:

$$F_{\text{pass,A}} = \frac{f_{\text{pass}}}{f_{s,A}} = \frac{F_{\text{pass}}}{2}, \quad (8.69)$$

gde je $F_{\text{pass}} = f_{\text{pass}}/f_s$. Širina prelazne zone filtra $A(z)$ je

$$\Delta F_A = \frac{1}{2} - 2F_{\text{pass,A}} = \frac{1}{2} - F_{\text{pass}}. \quad (8.70)$$

U sledećem stepenu se učestanost odabiranja povećava još dva puta i filtrom $B(z)$ se potiskuju spektralne replike. Granična učestanost filtra $B(z)$ je

$$F_{\text{pass,B}} = \frac{f_{\text{pass}}}{f_{s,B}} = \frac{F_{\text{pass}}}{4}, \quad (8.71)$$

dok je širina prelazne zone

$$\Delta F_B = \frac{1}{2} - 2F_{\text{pass,B}} = \frac{1}{2} - \frac{F_{\text{pass}}}{2}. \quad (8.72)$$

Upoređivanjem izraza za granične učestanosti filtara (8.69) i (8.71) se vidi da se ona smanjuje sa povećanjem učestanosti odabiranja i važi:

$$F_{\text{pass,B}} = \frac{F_{\text{pass,A}}}{2}. \quad (8.73)$$

Iz (8.70) i (8.75) se vidi da se sa povećanjem učestanosti odabiranja povećava i širina prelazne zone.

U opštem slučaju granična učestanost propusnog opsega n -tog stepena, gde je $1 \leq n \leq N$, višestepenog interpolatora sa poluopsežnim filtrima je

$$F_{\text{pass,n}} = \frac{f_{\text{pass}}}{f_{s,n}} = \frac{F_{\text{pass}}}{2^n}, \quad (8.74)$$

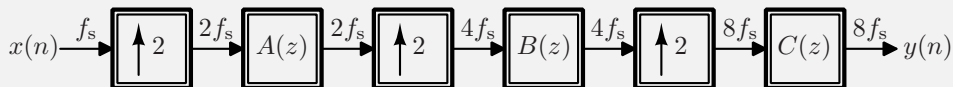
Širina prelazne zone n -tog stepena je

$$\Delta F_n = \frac{1}{2} - \frac{F_{\text{pass}}}{2^{n-1}}. \quad (8.75)$$

Svi poluopsežni filtri u višestepenom interpolatoru se projektuju za isto talasanje u propusnom opsegu, a samim tim i potiskivanje u nepropusnom opsegu. Razlikuju se samo po graničnoj učestanosti propusnog opsega $F_{\text{pass,n}}$ i širini prelazne zone $\Delta F_n = 0.5 - 2F_{\text{pass,n}}$. Za isto talasanje i potiskivanje, proizvod reda n -tog filtra N_n i širine prelazne zone ΔF_n je približno konstantan. Pošto u višestepenom interpolatoru širine prelaznih zona poluopsežnih filtara rastu sa porastom učestanosti odabiranja, red filtra se smanjuje. Smanjivanje reda filtra sa porastom učestanosti odabiranja je poželjna osobina jer se smanjuje broj računskih operacija po odbirku izlaznog signala.

Primer 8.7: Trostepeni interpolator sa poluopsežnim filtrima

Efikasnost višestepenog interpolatora sa poluopsežnim filtrima se može pokazati na primeru povećanja učestanosti odabiranja od $M = 2^3 = 8$ puta. Jedan stepen interpolatora sa poluopsežnim filtrom povećava učestanost odabiranja dva puta, odakle sledi da je potrebno projektovati trostepeni interpolator, koji je prikazan na slici.



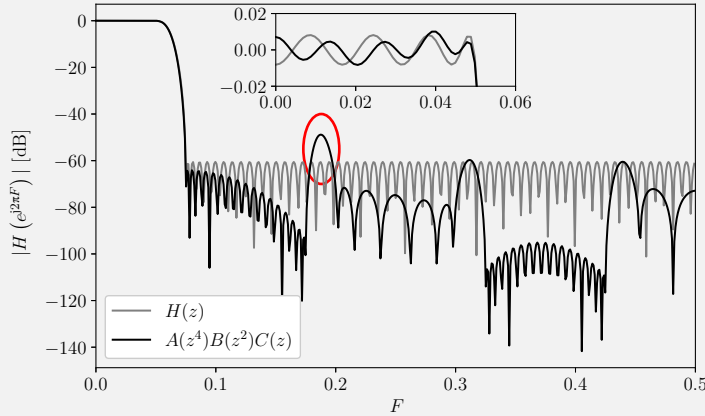
Pretpostavimo da spektar ulaznog signala zauzima opseg učestanosti $F = [0, 0.4)$ i da je potrebno obezbediti potiskivanje spektralnih replika od $A_{dB} = 60$ dB, koje odgovara talasanju

$$\delta = 10^{-A_{dB}/20} = 10^{-3}.$$

Korišćenjem izraza za graničnu učestanost propusnog opsega poluopsežnog filtra u n -tom stepenu interpolatora (8.74) dobijaju vrednosti predstavljene u tabeli. U tabeli su dati i red N i broj različitih koeficijenata, osim središnjeg koeficijenta 0.5, projektovanih poluopsežnih filtara.

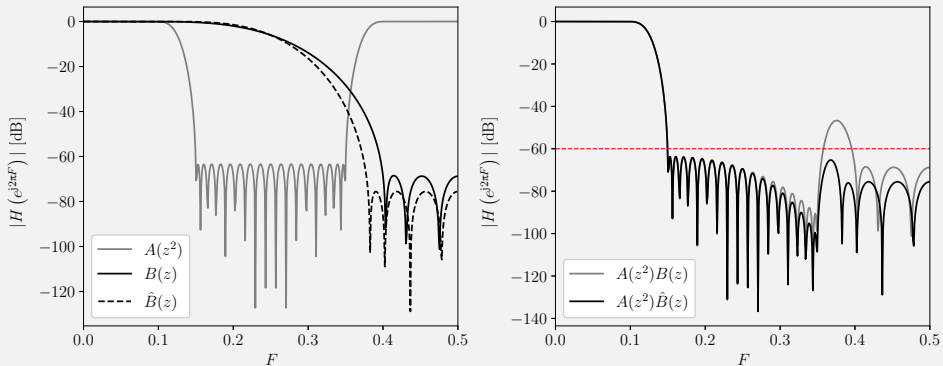
	F_{pass}	F_{stop}	ΔF	N	# koef.
$A(z)$	0.2	0.3	0.1	34	9
$B(z)$	0.1	0.4	0.3	10	3
$C(z)$	0.05	0.45	0.4	6	2

Radi poredjenja projektovan je jednostepeni polifazni interpolator sa FIR filtrom propusnikom niskih učestanosti $H(z)$, koji se rastavlja na osam polifaznih komponenti. Gabariti filtra sa jednostepenu interpolaciju su: $F_{\text{pass}} = 0.05$, $F_{\text{stop}} = 0.075$ i talasanje δ u propusnom i nepropusnom opsegu, za koje se dobija filter 134. reda. Poređenje frekvencijskih odziva jednostepenog polifaznog interpolatora sa filtrom $H(z)$ i trostepenog interpolatora sa poluopsežnim filtrima projektovanim sa gabaritima iz tabele je prikazano na slici.



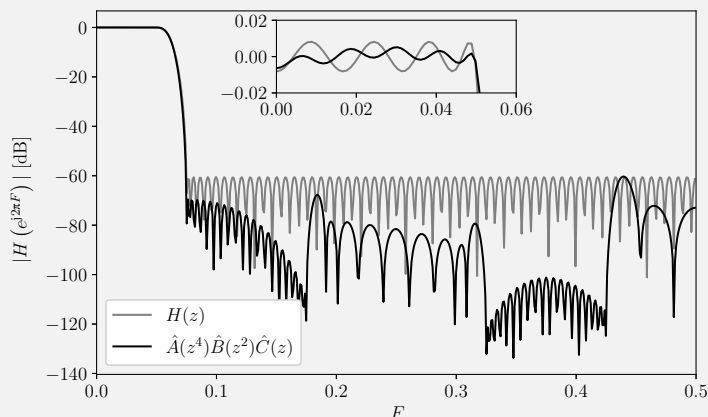
Sa slike levo se može videti da trostepeni interpolator ima neželjeni bočni luk koji je značajno iznad zadatog potiskivanja od 60 dB, koji je posledica preklapanja prelaznih zona filtra u drugom stepenu $B(z)$ i prve spektralne replike filtra iz prvog stepena $A(z)$. Pored toga, talasanje u propusnom opsegu je neznatno veće od željenog.

Frekvencijski odziv na izlazu drugog stepena $A(z^2)$ i $B(z)$ je prikazan na slici levo, dok je ukupan frekvencijski odziv prikazan na slici desno. Bočni luk sa amplitudom iznad zadatog potiskivanja je posledica preklapanja prelaznih zona $A(z^2)$ i $B(z)$. Potiskivanje neželjenog bočnog luka se može postići povećanjem granične učestanosti propusnog opsega $B(z)$, čime se istovremeno smanjuje granična učestanost nepropusnog opsega. Poluopsežni filter $\hat{B}(z)$ je projektovan sa $\hat{F}_{\text{pass}} = 0.12$, što je za 0.02 veća učestanost od vrednosti date u tabeli. Povećanje granične učestanosti propusnog opsega $\hat{B}(z)$ rezultuje značajnim potiskivanjem bočnog luka i frekvencijski odziv filtra zadovoljava zadate gabarite. Filter $\hat{B}(z)$ je 38. reda, u odnosu na 34. red $B(z)$, ali ima samo jedan koeficijent više.



Povećano talasanje u propusnom opsegu je posledica proizvoda frekvencijskog

odziva tri poluopsežna filtra, i može se smanjiti projektovanjem filtera sa manjim talasanjem od željenom, odnosno većim slabljenjem u nepropusnom opsegu. Frekvencijska karakteristika interpolatora sa filterima projektovanim za $A_{dB} = 63$ dB je prikazana na slici. Filtri $\hat{A}(z)$ i $\hat{B}(z)$ imaju po jedan koeficijent više u odnosu na probitno projektovane poluopsežne filtre, dok je $\hat{C}(z)$ istog reda kao $C(z)$.



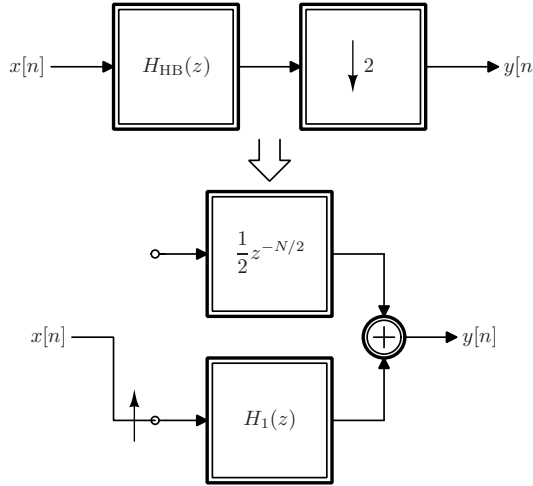
Broj operacija množenja polifaznog interpolatora po ulaznom odbirku je jednak broju koeficijenata i iznosi $N_{mul,H} = 135$, dok je kod višestepenog interpolatora $N_{mul,ABC} = N_{mul,A} + 2N_{mul,B} + 4N_{mul,C} = 26$. Višestepenim interpolatorom se više od pet puta smanjuje broj operacija, i pri tome ima ukupno samo 16 različitih koeficijenata.

8.2.4 Polifazni decimator sa HB filtrom

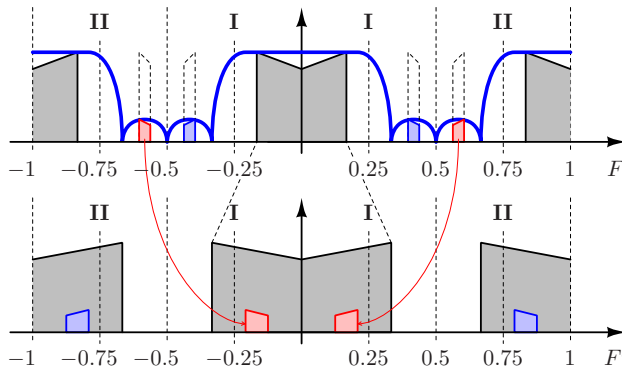
Decimator sa promenom učestanosti odabiranja od $M = 2$ puta i poluopsežnim filtrom je prikazan na slici 8.27. Primenom transformacija opisanih u odeljku 7.4 dobija se polifazni decimator sa komutatorom. Kao i u slučaju interpolatora, polifazna komponenta $H_1(z)$ se može efikasno realizovati strukturom sa slike 8.25 korišćenjem svojstva simetrije koeficijenata.

Pri smanjivanju učestanosti odabiranja uvek dolazi do preklapanja potisnute spektralne replike i korisnog signala, kao što je prikazano na slici 8.28. Preklapanje korisnog signala sa potisnutom spektralnom replikom se može svesti na zanemarljivo poluopsežnim filtrom adekvatnih gabarita.

U slučaju smanjenja učestanosti odabiranja od $M = 2$ puta spektar signala iz opsega učestanosti $F = [-0.25, 0.25]$ ($\Omega = [-\pi/2, \pi/2]$) se slika u opseg učestanosti $F' = [-0.5, 0.5]$ ($\Omega' = [-\pi, \pi]$), dok se spektralne komponente iz opsega $|F| = [0.25, 0.5]$ ($|\Omega| = [\pi/2, \pi]$), potisnute filtrom ispred kompresora, preklapaju u opseg $F = [-0.25, 0.25]$. Pre-



Slika 8.27: Polifazna realizacija decimatora sa poluopsežnim filtrom.



Slika 8.28: Preklapanja spektra pri decimaciji sa poluopsežnim filtrom.

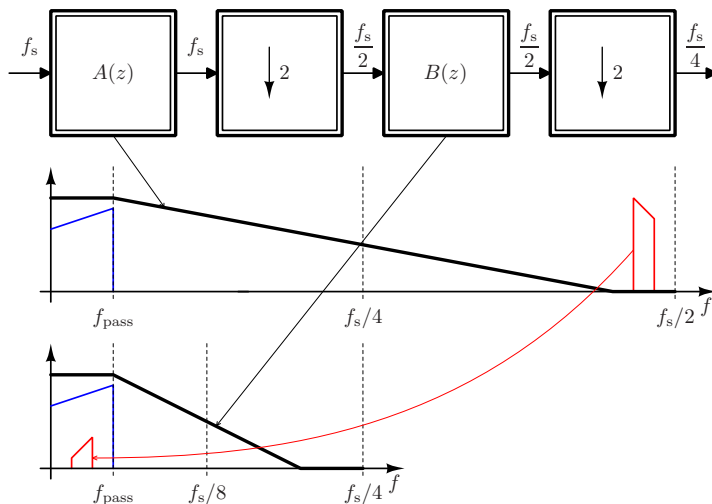
klopljene spektralne komponente imaju invertovan i konjugovano-kompleksan spektar pošto potiču iz druge Nikvistove zone.

Širine propusnog $[0, F_{\text{pass}}]$ i nepropusnog $[F_{\text{stop}}, 0.5]$ opsega poluopsežnog filtra su uvek iste pošto važi $F_{\text{pass}} + F_{\text{stop}} = 0.5$. Spektralne komponente koje se preklapaju sa korisnim signalom u propusnom opsegu poluopsežnog filtra potiču iz nepropusnog opsega učestanosti i potisnute su za slabljenje filtra. Stoga je potrebno izabrati slabljenje filtra kako bi degradacija signala bila zanemarljiva.

Aдекватno slabljenje filtra u nepropusnom opsegu zavisi od očekivanog spektra ulaznog signala. Na primer, ukoliko ulazni signal nema značajnih spektralnih komponenti u opsegu učestanosti $|F| = [0.25, 0.5]$ ($|\Omega| = [\pi/2, \pi]$) slabljenje filtra u nepropusnom opsegu će pretežno biti određeno maksimalnim dozvoljenim talasanjem u propusnom opsegu, pošto su talasanja u propusnom i nepropusnom opsegu poluopsežnog filtra jednaka.

Kada ulazni signal ima spektralne komponente velike snage u opsegu učestanosti koji se preklapa sa željenim signalom, potrebno je izabrati slabljenje koje dovoljno potiskuje preklapljenе komponente, npr. ispod nivoа kvantizacionog šuma.

Frekvencijski odziv poluopsežnog filtra je pogodan za promenu učestanosti od $M = 2$ puta. Višestepenom arhitekturom se može postići decimacija većim faktorom uz ograničenje $M = 2^p$. Gabariti poluopsežnih filtara u višestepenom decimatoru se mogu odrediti iz primera dvostepenog decimatora prikazanog na slici 8.29.



Slika 8.29: Dvostepeni decimator sa poluopsežnim filtrima.

Granična učestanost propusnog opsega poluopsežnih filtara f_{pass} u dvostepenom decimatoru sa slike 8.29 je jednaka maksimalnoj učestanosti signala od interesa f_{max} i ista je u oba stepena. Razlika je u tome što je učestanost odabiranja u drugom stepenu dvostruko manja. Širina propusnog opsega poluopsežnog filtra u i -tom stepenu, iskazana u digitalnoj učestanosti je:

$$F_{\text{pass},i} = \frac{f_{\text{pass}}}{f_{s,i}} = \frac{f_{\text{max}}}{f_s 2^{-(i-1)}} = 2^{i-1} F_{\text{max}}, \quad (8.76)$$

Iz (8.76) sledi da se širina propusnog opsega poluopsežnog filtra udvostručava u svakom stepenu.

Maksimalna širina spektra ulaznog signala u p -to stepeni decimator sa odnosom promene učestanosti odabiranja $M = 2^p$ za koju ne dolazi do preklapanja spektralnih replika je

$$F_{\text{max}} = \frac{F_{\text{pass},p}}{2^{p-1}}, \quad (8.77)$$

gde je $F_{\text{pass},p}$ granična učestanost propusnog opsega filtra u poslednjem stepenu decimatora. Za $F_{\text{pass},p} = 0.25$, što odgovara idealnom filtru u poslednjem stepenu, dobija se:

$$F_{\text{max}} < 2^{-(p+1)}. \quad (8.78)$$

Za graničnu učestanost propusnog opsega realno ostvarivih filtara sa malo koeficijenata se često koristi vrednost $F_{\text{pass}} \approx 0.2$.

Širina prelazne zone i -tog poluopsežnog filtra p -to stepenog decimatora se može izraziti preko granične učestanosti propusnog opsega poslednjeg stepena:

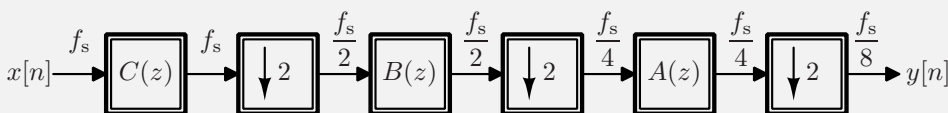
$$\Delta F_i = \frac{1}{2} - 2F_{\text{pass},i} = \frac{1}{2} - 2^{i-p+1} F_{\text{pass},p}, \quad (8.79)$$

odakle sledi da je širina propusne zone prvog stepena najveća i progresivno se smanjuje. Samim tim, poluopsežni filter u prvom stepenu decimatora, koji radi na najvećoj učestanosti odabiranja, ima najmanje koeficijenata. Svaki naredni filter radi na dvostruko manjoj učestanosti odabiranja od prethodnog, ali ima više koeficijenata. Osobina da filteri koji rade na višim učestanostima odabiranja imaju manje koeficijenata je poželjna sa stanovišta broja računskih operacija.

Primer 8.8: Trostepeni decimator sa poluopsežnim filtrom

Gabariti poluopsežnih filtara u trostepenom decimatoru su identični onima iz trostepenog interpolatora, samo su u obrnutom redosledu. Kod interpolatora je filter sa najužom prelaznom zonom $A(z)$ prvi, dok je u decimatoru on poslednji filter u nizu.

Trostepeni decimator prikazan na slici ima identičan ukupan frekvencijski odziv kao trostepeni interpolator iz primera, samo je učestanost odabiranja izlaznog signala osam puta manja umesto veća. Struktura decimatora se može dobiti zamenu ulaza i izlaza, smeru toka signala i ekspandera kompresorima, analogno transformaciji direktne forme FIR filtra u transponovanu.



Broj računskih operacija množenja decimatora po *izlaznom* odbirku je jednak broju računskih operacija množenja interpolatora po *ulaznom* odbirku i iznosi 26. Polifazni decimator sa komutatorom za promenu učestanosti odabiranja u jednom stepenu od $M = 8$ puta bi imao iste koeficijente kao u primeru interpolatora i isti broj računskih operacija.

8.3 Interpolirani FIR filter (IFIR)

Filteri propusnici niskih učestanosti sa bliskim učestanostima propusnog F_{pass} i nepropusnog F_{stop} opsega se često koriste u interpolatorima, decimatorima i drugim primenama gde je potrebna velika selektivnost. Osnovni problem pri projektovanju filtara sa uskom prelaznom zonom $\Delta F = F_{\text{stop}} - F_{\text{pass}}$ je veoma veliki red filtra, odnosno veliki broj

nenultih koeficijenata. Red filtra se može proceniti iz gabarita filtra, na primer izrazom:

$$N \approx \frac{A_{\text{dB}}}{22\Delta F} = \frac{A_{\text{dB}}}{22(F_{\text{stop}} - F_{\text{pass}})}, \quad (8.80)$$

odakle sledi da je za n puta manju širinu prelazne zone ΔF red filtra n puta veći. Izraz (8.80) se može preurediti i u oblik

$$N\Delta F \approx \frac{A_{\text{dB}}}{22}, \quad (8.81)$$

iz kojeg se eksplicitno vidi da je proizvod reda filtra N i širine prelazne zone ΔF konstantan i određen potiskivanjem u nepropusnom opsegu A_{dB} .

Kao rešenje problema projektovanja filtera sa uskom prelaznom zonom, u literaturi [45] je predložen filter oblika

$$H(z) = P(z^M)G(z), \quad (8.82)$$

koji se naziva interpolirani FIR filter. Filter $P(z^M)$ se naziva prototipnim filtrom, i njime je određen frekvencijski odziv ukupnog filtra, dok se $G(z)$ naziva interpolacionim filtrom. Generalizacija na slučaj gde $G(z)$ takođe ima formu višestepenog interpoliranog FIR filtra je razmatrana u [46], dok su dalja poboljšanja predstavljena u [47]. Način rada interpoliranog FIR filtra se može razumeti razmatranjem frekvencijskog odziva pojedinačnih filtera $P(z^M)$ i $G(z)$.

Pretpostavimo da je

$$H(z) = \sum_{n=0}^N h[n]z^{-n} \quad (8.83)$$

filter propusnik niskih učestanosti, i da se filter $H_M(z)$ dobija smenom $z \rightarrow z^M$

$$H_M(z) = H(z^M). \quad (8.84)$$

odnosno da je

$$H_M(z) = \sum_{n=0}^N h[n]z^{-Mn}. \quad (8.85)$$

Odbirci impulsnog odziva $H_M(z)$ su jednaki odbircima impulsnog odziva $H(z)$ za indekse $k = nM$

$$h_M[nM] = h[n], \quad (8.86)$$

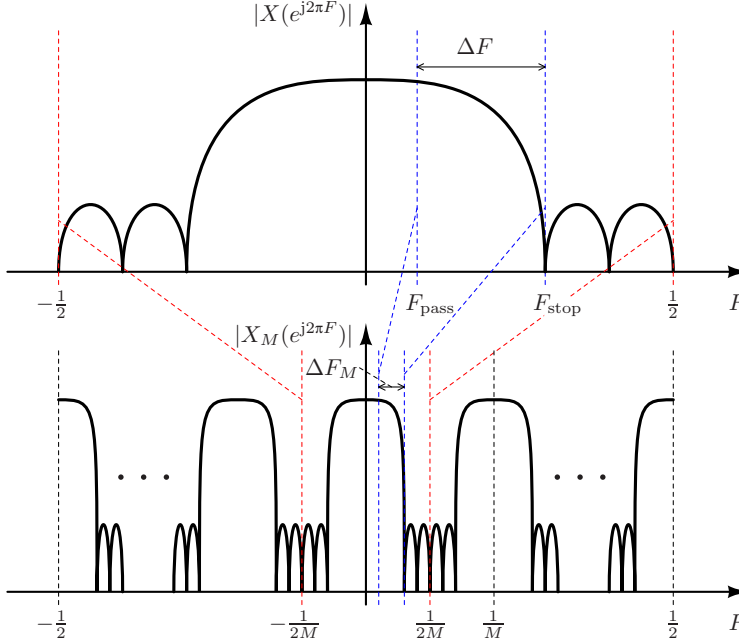
dok su za ostale indekse nula. Smena $z \rightarrow z^M$ je ekvivalenta umetanju $M - 1$ nula između odbiraka impulsnog odziva $h[n]$, kao što bi se dobilo propuštanjem impulsnog odziva kroz ekspander, ali bez promene učestanosti odabiranja.

Frekvencijska karakteristika filtra $H_M(z)$ se može izraziti preko frekvencijske karakteristike početnog filtra $H(z)$:

$$H_M(e^{j\Omega}) = H(e^{j\Omega M}) = H(e^{jM\Omega}) \quad (8.87)$$

$$H_M(\Omega) = H(M\Omega) \quad (8.88)$$

Smenom $z \rightarrow z^M$ odziv filtra $H(z)$ iz opsega učestanosti $F = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ se slika u opseg u $F = (-\frac{1}{2M}, \frac{1}{2M})$ filtra $H_M(z) = H(z^M)$. Zbog periodičnosti odziva digitalnih filtara pojavljuju se spektralne replike koje su su centrirane oko učestanosti $F_k = \pm k/M$. Frekvencijska karakteristika filtra pre i posle smene $z \rightarrow z^M$, odnosno umetanja $M - 1$ nula između odbiraka impulsnog odziva, je prikazana na slici 8.30.



Slika 8.30: Frekvencijski odzivi filtara $H(z)$ i $H_M(z) = H(z^M)$.

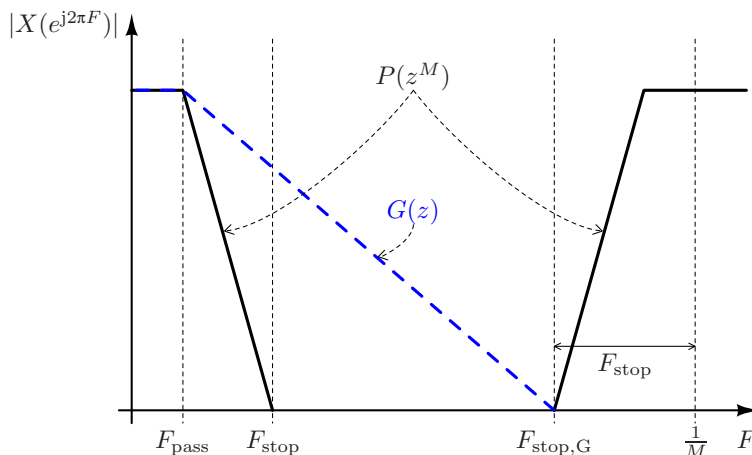
Frekvencijski odziv $H_M(z)$ dobijen je skaliranjem učestanosti filtra $H(z)$ faktorom ekspanzije M , i kao posledica širina prelazne zone je M puta manja:

$$H_M(z) = H(z^M) \Rightarrow \Delta F_M = \frac{\Delta F}{M}. \quad (8.89)$$

Iz navedenih osobina se može zaključiti da se filtar $P(z^M)$ sa zadatim graničnim učestanostima F_{pass} i F_{stop} , i širinom prelazne zone ΔF , može dobiti projektovanjem filtra $P(z)$ sa graničnim učestanostima MF_{pass} i MF_{stop} i širinom prelazne zone $M\Delta F$. Smenom $z \rightarrow z^M$ se učestanost skalira M puta, i dobija se filtar sa zadatim graničnim učestanostima i širinom prelazne zone. Važno je uočiti da se smenom $z \rightarrow z^M$ red filtra povećava M puta, ali se broj nenultih koeficijenata, odnosno broj množača potrebnih za realizaciju filtra, ne menja. Kako se filtar $P(z)$ projektuje za M puta širu prelaznu zonu, koja se zatim sužava M puta na zadatu širinu smenom $z \rightarrow z^M$, njegov red je M puta manji u odnosu na filtar projektovan sa zadatim gabaritima F_{pass} i F_{stop} , odnosno ΔF .

Filtar $P(z^M)$ zadovoljava zadate gabarite u pogledu graničnih učestanosti F_{pass} i F_{stop} , talasanja u propusnom i potiskivanja u nepropusnom opsegu, ali sadrži neželjene spek-

tralne replike centrirane oko $F_k = \pm k/M$. Neželjene spektralne replike se mogu potisnuti interpolacionim filtrom $G(z)$, kao što je prikazano na slici 8.31.



Slika 8.31: Frekvencijski odzivi filtera $P(z^M)$ i $G(z)$.

Prva spektralna replika je centrirana oko $F_1 = 1/M$ i granica njenog nepropusnog opsega je na učestanosti

$$F_{\text{stop},1} = \frac{1}{M} - F_{\text{stop}}, \quad (8.90)$$

što je ujedno i željena granična učestanost interpolacionog filtra $F_{\text{stop,G}}$. Interpolacioni filter ne bi trebalo da menja frekvencijski odziv prototipnog filtra, tako da granična učestanost propusnog opsega $G(z)$ mora zadovoljavati uslov:

$$F_{\text{pass,G}} \geq F_{\text{pass}}. \quad (8.91)$$

Širina prelazne zone interpolacionog filtra je

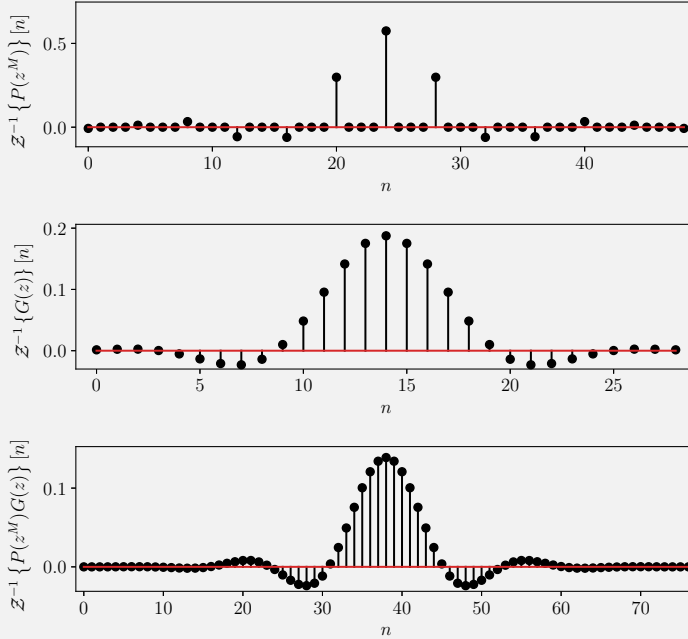
$$\Delta F_G = \frac{1}{M} - F_{\text{stop}} - F_{\text{pass}}, \quad (8.92)$$

i za zadate gabarite se smanjuje sa povećanjem faktora ekspanzije M .

Primer 8.9: Interpolirani FIR filter

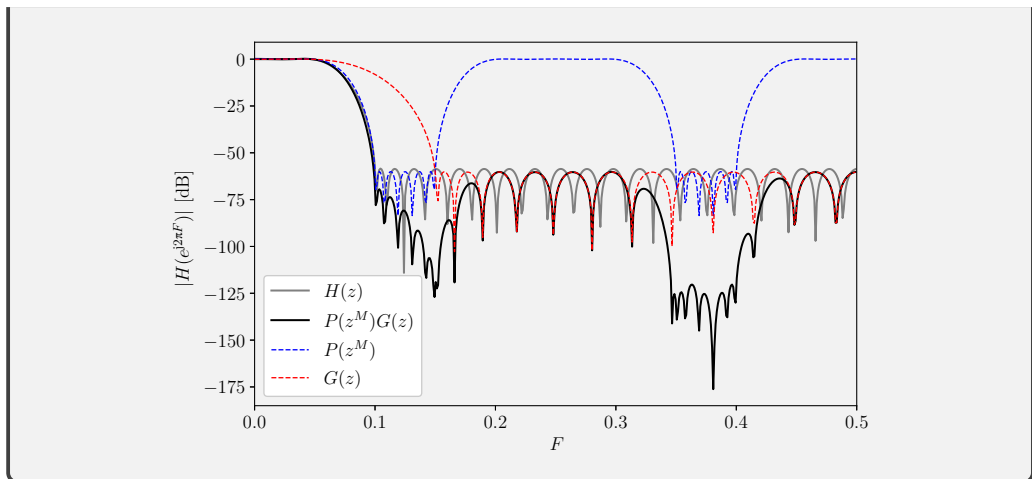
Princip rada interpoliranog FIR filtra se može demonstrirati na primeru sa faktorom ekspanzije $M = 4$. Filter je projektovan za granične učestanosti $F_{\text{pass}} = 0.05$ i $F_{\text{stop}} = 0.10$, sa dozvoljenim talasanjem u propusnom opsegu $\delta_{\text{pass}} = 0.213$ (± 0.2 dB) i potiskivanjem u nepropusnom opsegu $\delta_{\text{stop}} = 10^{-3}$ ($A_{\text{dB}} = 60$ dB). Prototipni filter $P(z)$ se projektuje sa zadatim vrednostima talasanja i graničnim učestanostima $MF_{\text{pass}} = 0.2$ i $MF_{\text{stop}} = 0.4$, koje se mogu postići filtrom $N_P = 12$ reda. Interpolacioni filter $G(z)$ se projektuje zadatim vrednostima talasanja, graničnom učestanošću propusnog opsega F_{pass} i nepropusnog opsega $F_{\text{stop,G}} =$

$M^{-1} - F_{\text{stop}} = 0.15$, širine prelazne zone $\Delta F_G = 0.1$, koje se mogu postići filtrom $N_G = 28$ reda. Na slici su prikazani impulsni odzivi projektovanih filtara $P(z^M)$, $G(z)$ i ukupnog filtra $P(z^M)G(z)$.



U impulsnom odzivu $P(z^M)$ svaki M -ti odbirak je nenulti, što je posledica smene $z \rightarrow z^M$. Impulsni odziv ukupnog filtra je konvolucija impulsnih odziva $P(z^M)$ i $G(z)$, koja se dobija superpozicijom zakašnjenog i skaliranog impulsnog odziva $G(z)$ oko nenulatih odbiraka impulsnog odziva $P(z^M)$. U širem smislu može se reći da impulsni odziv $G(z)$ interpolira impulsni odziv $P(z^M)$ između nenulatih odbiraka i zbog toga se naziva interpolacionim filtrom.

Na slici ispod su prikazani frekvencijski odzivi prototipnog $P(z^M)$, interpolacionog $G(z)$ i ukupnog $P(z^M)G(z)$ filtra. Radi poredjenja, prikazan je i filter $H(z)$ projektovan Remezovim algoritmom sa istim gabaritima, koji je $N_H = 46$ reda. Može se videti da interpolacioni filter $G(z)$ potiskuje spektralne replike odziva $P(z)$ u skladu sa zadatim potiskivanjem u nepropusnom opsegu, i da oba filtra zadovoljavaju gabarite. Ukupan broj koeficijenata interpoliranog FIR filtra je 42, dok direktna realizacija ima 47 koeficijenata.



Ukupan frekvencijski odziv interpoliranog FIR filtra je proizvod frekvencijskih odziva prototipnog $P(z^M)$ i interpolacionog $G(z)$ filtra. Pošto frekvencijski odziv $P(z^M)$ sadrži spektralne replike propusnog opsega filtra, potrebno je da interpolacioni filtar $G(z)$ ima slabljenje u nepropusnom opsegu koje je jednako ili bolje od slabljenja ukupnog filtra. Talasanje interpoliranog FIR filtra u propusnom opsegu učestanosti je u najgorem slučaju, kada se maksimumi $P(z^M)$ i $G(z)$ poklapaju:

$$(1 + \delta_G)(1 + \delta_P) = 1 + \delta_G + \delta_P + \delta_G \delta_P \approx 1 + \delta_G + \delta_P, \quad (8.93)$$

gde su δ_P i δ_G dozvoljena talasanja u propusnom opsegu $P(z)$ i $G(z)$, respektivno. Izborom $\delta_P = \delta_G = \delta/2$ će talasanje u propusnom opsegu biti manje od δ , a biće približno jednako u slučaju da se maksimumi talasanja oba filtra poklope. Drugi način projektovanja interpoliranog FIR filtra je da se prvo projektuje $G(z)$ sa zadatim talasanjem δ , a da se $P(z)$ zatim optimizuje tako da ne povećava talasanje u propusnom opsegu.

Faktor ekspanzije M se ne može proizvoljno povećavati, pošto granična učestanost filtra $P(z)$, koja je MF_{stop} , mora biti manja od $1/2$, odakle je:

$$M \leq \left\lfloor \frac{1}{2F_{\text{stop}}} \right\rfloor. \quad (8.94)$$

8.3.1 Optimalni faktor ekspanzije IFIR-a

Maksimalni faktor ekspanzije dat sa (8.94) u opštem slučaju ne rezultuje najmanjim brojem množača. Povećanjem M se red prototipnog filtra $P(z)$ smanjuje pošto je širina prelazne zone $M(F_{\text{stop}} - F_{\text{pass}})$ sve veća, ali se red interpolacionog filtra $G(z)$ povećava, pošto se širina njegove prelazne zone $1/M - F_{\text{stop}} - F_{\text{pass}}$ smanjuje. Postoji optimalan faktor ekspanzije M_{opt} za koji interpolirani FIR filtar ima najmanje množača, što je pokazano u [48]. Ukupan broj množača N_{mult} je zbir broja množača u prototipnom filtru $N_{\text{mult,P}}$ i interpolacionom filtru $N_{\text{mult,G}}$:

$$N_{\text{mult}} = N_{\text{mult,P}} + N_{\text{mult,G}} \quad (8.95)$$

Broj množača u FIR filtru je u opštem slučaju jednak broju koeficijenata, ali se korišćenjem svojstva simetrije koeficijenata broj množača može prepoloviti. Pri izvođenju u [48] se koristi Kajzerova procena reda filtra, koja uzima u obzir dozvoljeno talasanje u propusnom opsegu δ_{pass} , slabljenje u nepropusnom opsegu δ_{stop} i granične učestano-
sti propusnog F_{pass} i nepropusnog F_{stop} opsega. Procena reda filtra se može napisati u obliku:

$$N \approx \frac{f(\delta_{\text{pass}}, \delta_{\text{stop}})}{\Delta F} = \frac{f(\delta_{\text{pass}}, \delta_{\text{stop}})}{F_{\text{stop}} - F_{\text{pass}}}. \quad (8.96)$$

Funkcija $f(\delta_{\text{pass}}, \delta_{\text{stop}})$ ne zavisi od faktora ekspanzije M , pošto se pri njenoj promeni ne menjaju zahtevi za talasanjem u propusnom i nepropusnom opsegu, već samo širina prelazne zone filtra $\Delta F = F_{\text{stop}} - F_{\text{pass}}$.

Širina prelazne zone prototipnog filtra pre ekspanzije $P(z)$ je M puta veća od širine prelazne zone ukupnog filtra:

$$\Delta F_P = M(F_{\text{stop}} - F_{\text{pass}}). \quad (8.97)$$

Ekspanzijom impulsnog odziva filtra se ne povećava broj nenultih koeficijenata, tako da je broj potrebnih množača za realizaciju $P(z)$ i $P(z^M)$ je isti i iznosi:

$$N_{\text{mult}, P} = f(\delta_{\text{pass}}, \delta_{\text{stop}}) [M(F_{\text{stop}} - F_{\text{pass}})]^{-1}. \quad (8.98)$$

Granična učestanost propusnog opsega interpolacionog filtra je jednaka graničnoj učestano-
sti ukupnog filtra F_{pass} , dok je granična učestanost nepropusnog opsega određena granicom nepropusnog opsega prve spektralne replike prototipnog filtra. Prva spektralna replika prototipnog filtra je centrirana oko $F_1 = 1/M$ i granica njenog nepropusnog opsega je na učestano-
sti datoj u (8.90), što je ujedno i granica nepropusnog opsega interpolacionog filtra. Broj potrebnih množača za realizaciju interpolacionog filtra je:

$$N_{\text{mult}, G} = f(\delta_{\text{pass}}, \delta_{\text{stop}}) \left[\left(\frac{1}{M} - F_{\text{stop}} \right) - F_{\text{pass}} \right]^{-1}. \quad (8.99)$$

Ukupan broj množača za realizaciju $P(z^M)G(z)$ je:

$$N_{\text{mult}} = f(\delta_{\text{pass}}, \delta_{\text{stop}}) \left(\frac{1}{M(F_{\text{stop}} - F_{\text{pass}})} + \frac{M}{1 - M(F_{\text{stop}} + F_{\text{pass}})} \right) \quad (8.100)$$

Faktor ekspanzije M_{opt} za koji filter ima minimalni broj množača se može dobiti diferenciranjem (8.100) po M , izjednačavanjem parcijalnog izvoda sa nulom i rešavanjem po M :

$$\frac{\partial}{\partial M} N_{\text{mult}} = 0, \quad (8.101)$$

i iznosi [48]:

$$M_{\text{opt}} = \frac{1}{F_{\text{pass}} + F_{\text{stop}} + \sqrt{F_{\text{stop}} - F_{\text{pass}}}}. \quad (8.102)$$

Ukupan broj koeficijenata interpoliranog FIR filtra sa optimalnim faktorom ekspanzije M_{opt} je za iste gabarite značajno manji od broja koeficijenata filtra projektovanog Re-
mezovim algoritmom u slučajevima kada je širina prelazne zone mala. Kriterijum "mala

širina prelazne zone” za koju se postiže ušteda resursa u odnosu na filter projektovan Remezovim algoritmom je definisan u [48]:

$$\Omega_{\text{stop}} < 0.5 + \left(1 - \frac{1}{\pi}\right) \Omega_{\text{pass}}, \quad (8.103)$$

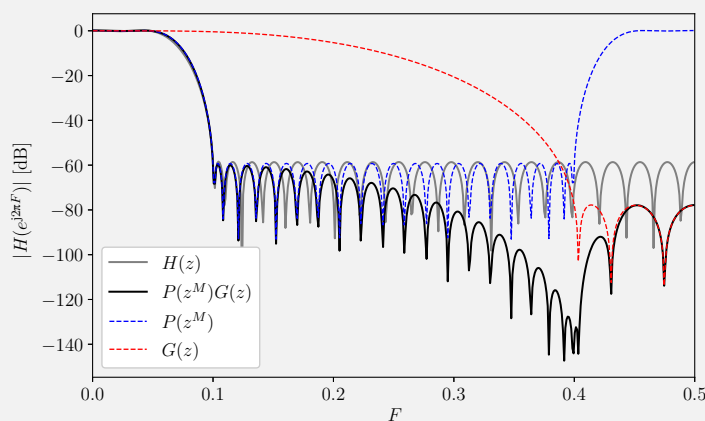
uz očigledno ograničenje $\Omega_{\text{stop}} > \Omega_{\text{pass}}$.

Faktor ekspanzije se u nekim slučajevima ne može proizvoljno izabrati, npr. kada se interpolirani FIR filter koristi u interpolatoru ili decimatoru sa odnosom promene učestanosti odabiranja od M puta. U tim slučajevima je potrebno izvršiti analizu da li je upotreba interpoliranog FIR filtra opravdana.

Primer 8.10: Interpolirani FIR filter sa optimalnim faktorom ekspanzije

Za iste specifikacije kao u prethodnom primeru optimalni faktor ekspanzije (8.102), za koji se očekuje najveća ušteda u broju množača, iznosi $M_{\text{opt}} = 2$. Postupak projektovanja je ponovljen za $M = M_{\text{opt}} = 2$, i dobijeni su filteri $P(z)$ sa 27 koeficijenata i $G(z)$ sa 9 koeficijenata, ukupno 36 koeficijenata.

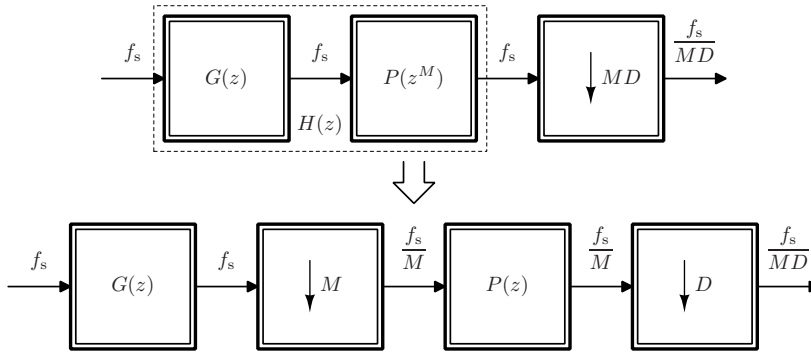
Poređenjem ukupnog broja koeficijenata interpoliranog FIR filtra za $M = 2$, koji iznosi 36, sa slučajem $M = 4$, kada je ukupan broj koeficijenata 42, i direktne realizacije koja ima 47 koeficijenata, sledi da se interpoliranim FIR filtrom može smanjiti broj operacija. Najveća ušteda u broju računskih operacija se postiže kada se interpolirani FIR filter projektuje sa optimalnim faktorom ekspanzije datim u (8.102).



8.3.2 Dvostepena promena učestanosti odabiranja

Interpolirani FIR filter ima formu koja je pogodna za dvostepenu interpolaciju ili decimaciju signala pošto je prototipni filter po promenljivoj z^M . Na slici 8.32 prikazana je transformacija decimatora sa odnosom promene učestanosti odabiranja MD u dvostepeni decimator. Kompresor sa promenom učestanosti odabiranja MD se može razdvojiti na

dva redno povezana kompresora odnosa promene učestanosti odabiranja M i D . Zatim se redosled prototipnog filtra $P(z^M)$ i kompresora sa odnosom promene učestanosti odabiranja M može razmeniti primenom plemenitog identiteta, čime se dobija dvostepena struktura. Ekvivalentne transformacije se mogu primeniti i u slučaju interpolatora.



Slika 8.32: Primena interpoliranog FIR filtra u dvostepenom decimatoru.

Za iste gabarite, broj računskih operacija interpoliranog FIR filtra je manji od broja računskih operacija filtra projektovanog Remezovim algoritmom u slučajevima kada je (8.103) zadovoljena. Međutim, ukupan broj računskih operacija po izlaznom odbirku ne mora biti manji kada se vrši promena učestanosti odabiranja, kao što će biti pokazano u sledećem primeru.

Primer 8.11: Dvostepeni decimator sa IFIR-om

Pretpostavimo da se sistem na slici 8.32 gore realizuje jednim filtrom $H(z)$, koji je projektovan Remezovim algoritmom, i kompresorom sa odnosom promene učestanosti odabiranja MD . Korišćenjem polifaznog decimatora sa komutatorom broj množenja za izračunavanje izlaznog odbirka je jednak broju koeficijenata bez obzira na odnos promene učestanosti odabiranja.

U slučaju dvostepene decimacije interpoliranim FIR filtrom - sistem na slici 8.32 dole - broj množenja zavisi od faktora ekspanzije M iz dva razloga. Prvo, za iste gabarite filtra broj koeficijenata $G(z)$ i $P(z)$ zavisi od faktora ekspanzije M , kao što je pokazano u prethodnim primerima. Drugo, odbirci filtra $G(z)$ se izračunavaju na D puta većoj učestanosti odabiranja od izlazne. Pod pretpostavkom da se koriste polifazni decimatori sa komutatorima, broj množenja po izlaznom odbirku je:

$$N_{\text{mult}} = DN_{\text{mult,G}} + N_{\text{mult,P}}.$$

U opštem slučaju primena polifazne dekompozicije rezultuje polifaznim komponentama $H_i(z)$ koje nemaju simetrične koeficijente, i ne može se koristiti jedan množač za dva koeficijenta. Međutim, simetrija koeficijenata polifaznih komponenti $H_i(z)$ je očuvana u specijalnom slučaju kada filter $H(z)$ ima neparan broj koeficijenata i deli se na dve polifazne komponente. U tom slučaju se $H_0(z)$ može rea-

lizovati sa $(N_{\text{mult}} - 1)/4 + 1$ množača, dok se $H_1(z)$ može realizovati sa $(N_{\text{mult}} - 1)/4$ množača, tako da je broj množenja po izlaznom odbirku $(N_{\text{mult}} - 1)/2 + 1$.

Poređenje broja računskih operacija množenja po izlaznom odbirku, i broja potrebnih množača za odnos promene učestanosti $MD = 8$ je dat u tabeli. Iz tabele se može videti da broj računskih operacija množenja interpoliranog FIR filtra može biti veći ili jednak broju računskih operacija FIR filtra projektovanog Remez algoritmom. Broj potrebnih množača je u oba slučaja veći.

				N_{coef}	N_{mult}	Potrebno množača
Remez				47	47	$\lceil \frac{N_{\text{coef}}}{MD} \rceil = 6$
M	D	G	P			
4	2	29	13	$GD + \frac{P-1}{2} + 1 = 65$		$\lceil \frac{G}{M} \rceil + \frac{P-1}{2D} + 1 = 12$
2	4	9	27	$(\frac{G-1}{2} + 1)D + P = 47$		$\frac{G-1}{2M} + 1 + \lceil \frac{P}{D} \rceil = 10$

Interesantno je razmotriti broj operacija i potrebnih množača kada je širina prelazne zone mnogo manja, npr. $F_{\text{pass}} = 0.09$, $F_{\text{stop}} = 0.01$, za koje je $M_{\text{opt}} = 4$. Filter projektovan Remezovim algoritmom u tom slučaju ima 231 koeficijent, dok se interpolirani FIR filter može napraviti filtrom $G(z)$ sa 45 koeficijenata i filtrom $P(z)$ sa 65 koeficijenata. Broj računskih operacija množenja i potrebnih množača je sumiran u tabeli.

				N_{coef}	N_{mult}	Potrebno množača
Remez				231	231	$\lceil \frac{N_{\text{coef}}}{MD} \rceil = 29$
M	D	G	P			
4	2	45	65	$GD + \frac{P-1}{2} + 1 = 123$		$\lceil \frac{G}{M} \rceil + \frac{P-1}{2D} + 1 = 29$

U ovom slučaju je broj računskih operacija množenja u interpoliranom FIR filtru skoro dvostruko manji u odnosu na direktnu promenu učestanosti od $MD = 8$ puta. Obe varijante se mogu napraviti sa 29 množača.

8.4 Maskirajući filter (MASK)

U prethodnom odeljku je pokazano kako se filter sa uskom prelaznom zonom može efikasno realizovati interpoliranim FIR filtrom. Osnovna ideja interpoliranog FIR filtra je da se smenom $P(z) \rightarrow P(z^M)$ širina prelazne zone protipnog filtra $P(z)$ smanjuje M puta, a da pri tome broj koeficijenata ostaje isti. Pored željenog efekta smanjivanja širine prelazne zone, smenom $P(z) \rightarrow P(z^M)$ nastaju i nepoželjne spektralne replike koje se potiskuju interpolacionim filtrom $G(z)$. Princip rada interpoliranog FIR filtra ograničava izbor granične učestanosti propusnog opsega $F_{\text{pass}} < \frac{1}{2M}$, koja i za najmanju vrednost faktora ekspanzije $M = 2$ mora biti $F_{\text{pass}} < 0.25$.

Maskirajući filtar predložen u [49], sa nekim poboljšanjima u [50], takođe koristi smenu $P(z) \rightarrow P(z^M)$ za smanjenje širine prelazne zone, ali prevazilazi ograničenja granične učestanosti propusnog opsega korišćenjem komplementarnih filtara. Razmatranja o višestepenim maskirajućim filtrima se mogu naći u literaturi [51].

Koncept komplementarnog filtra je uveden u odeljku 8.2 o poluopsežnim filtrima. Filtar $H_c(z)$ je komplementaran filtru $H(z)$ ako za svako Ω važi

$$|H(e^{j\Omega}) + H_c(e^{j\Omega})| = 1. \quad (8.104)$$

Pošto se kauzalni FIR filtar N -og reda tipa I ili II se može predstaviti kao [43]

$$H(e^{j\Omega}) = e^{j\Omega N/2} H_z(e^{j\Omega}), \quad (8.105)$$

gde je $H_z(e^{j\Omega})$ odziv nekauzalnog filtra sa nultim kašnjenjem, koji je uvek realan i ima parnu simetriju po Ω , iz (8.104) i (8.105) sledi da je frekvencijski odziv komplementarnog filtra

$$H_c(e^{j\Omega}) = e^{j\Omega N/2} (1 - H_z(e^{j\Omega})), \quad (8.106)$$

odnosno u z domenu

$$H_c(z) = z^{-N/2} (1 - H_z(z)) = z^{-N/2} - H(z). \quad (8.107)$$

Poslednja jednakost pokazuje da se komplementarni filtar može realizovati oduzimanjem izlaza filtra $H(z)$ od zakašnjenih odbiraka ulaznog signala.

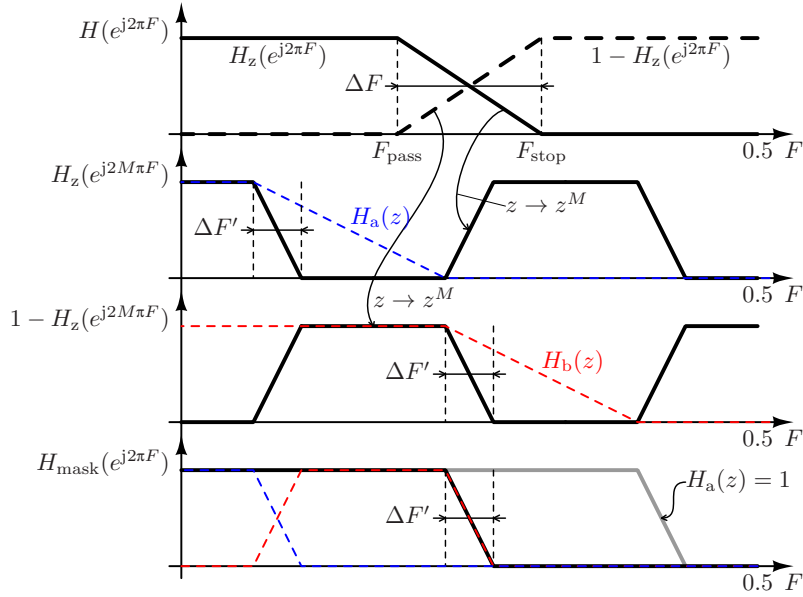
Princip rada maskirajućeg filtra je prikazan na slici 8.33. Širina prelazne zone ΔF propusnika niskih učestanosti $H_z(z)$ i komplementarnog filtra $1 - H_z(z)$ smanjuje se na $\Delta F' = \Delta F/M$ smenom $z \rightarrow z^M$. Pored smanjivanja širine prelazne zone, smenom $z \rightarrow z^M$ se granične učestanosti propusnog F_{pass} i nepropusnog F_{stop} opsega takođe skaliraju M puta, i pojavljuju se spektralne replike frekvencijskog odziva. Sve navedene osobine se koriste u interpoliranom FIR filtru, i razlika je u tome što se u maskirajućem filtru koristi i komplementarni filtar.

Maskirajući filtar koristi osobinu da se komplementarnost filtara ne narušava smenom $z \rightarrow z^M$ pošto su prenosne funkcije periodične po Ω sa periodom od 2π . Zahvaljujući toj osobini moguće je proširiti propusni opseg sabiranjem sa filtriranim odzivom komplementarnog filtra. Prenosna funkcija ukupnog filtra je

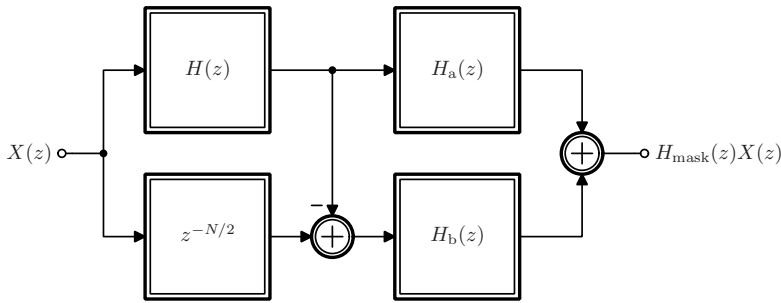
$$H_{\text{mask}}(z) = H(z^M)H_a(z) + (1 - H_z(z^M))H_b(z), \quad (8.108)$$

gde su $H_a(z)$ i $H_b(z)$ inteprolacioni filtri za potiskivanje neželjenih spektralnih replika koje nastaju usled smene $z \rightarrow z^M$. Blok dijagram maskirajućeg filtra je dat na slici 8.34.

Na primeru sa slike 8.33 interpolacioni filtar $H_b(z)$ se projektuje da potiskuje spektralnu repliku, dok se $H_a(z)$ može projektovati da potiskuje spektralnu repliku, ili kao $H_a(z) = 1$. U slučaju kada $H_a(z)$ potiskuje spektralnu repliku širina propusnog opsega ukupnog filtra $H_{\text{mask}}(z)$ je određena komplementarnim filtrom, dok je u slučaju $H_a(z) = 1$ širina propusnog opsega određena spektralnom replikom $H(z^M)$. Širina prelazne zone je ista u oba slučaja i iznosi $\Delta F/M$.



Slika 8.33: Princip rada maskirajućeg filtra.



Slika 8.34: Maskirajući filter.

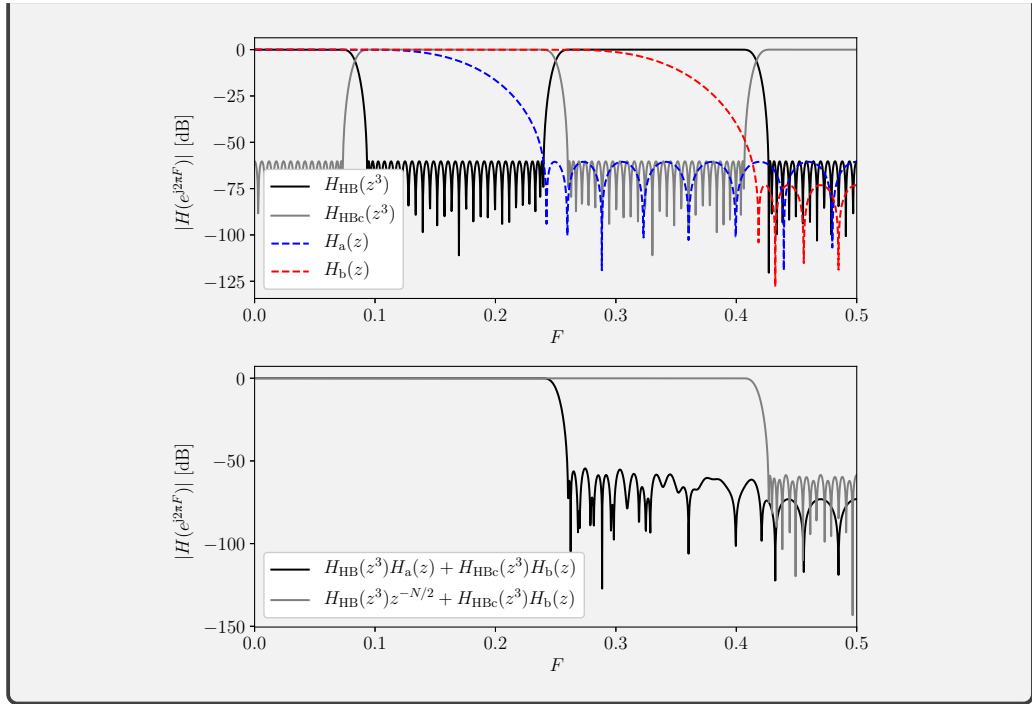
Primer 8.12: Maskirajući filter

a

a

a

a



8.5 Poboljšanje selektivnosti FIR filtra (SHARP)

Poboljšanje selektivnosti FIR filtra (engl. filter sharpening - "zaoštavanje filtra") se koristi u slučajevima kada je dostupna efikasna realizacija FIR filtra, ili se koeficijenti filtra ne mogu menjati, ali frekvencijski odziv nije dovoljno selektivan.

Selektivnost filtra se ogleda u širini prelazne zone i potiskivanja u nepropusnom opsegu učestanosti, koji pored talasanja u propusnom opsegu učestanosti, određuju red filtra projektovanog Remezovim algoritmom. Najjednostavniji način za poboljšanje potiskivanja u nepropusnom opsegu učestanosti je dvostruko filtriranje istim filtrom

$$H_2(z) = H(z)^2. \quad (8.109)$$

U nepropusnom opsegu učestanosti je amplitudski odziv filtra $|H(e^{j\Omega})| \leq \delta_{\text{stop}}$, koje se dvostrukim filtriranjem smanjuje na $|H_2(e^{j\Omega})| \leq \delta_{\text{stop}}^2$. Amplitudski odziv filtra u propusnom opsegu učestanosti

$$1 - \delta_{\text{pass}} \leq |H(e^{j\Omega})| \leq 1 + \delta_{\text{pass}} \quad (8.110)$$

se dvostrukim filtriranjem menja u

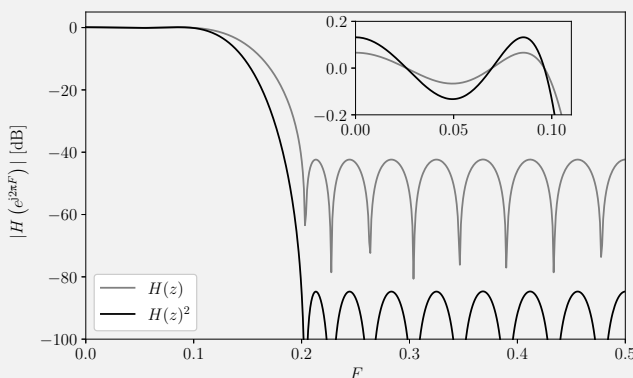
$$1 - 2\delta_{\text{pass}} \leq |H(e^{j\Omega})|^2 \leq 1 + 2\delta_{\text{pass}}, \quad (8.111)$$

zbog toga što je $(1 \pm \delta_{\text{pass}})^2 \approx 1 \pm 2\delta_{\text{pass}}$ za $\delta_{\text{pass}} \ll 1$. Dvostruko veće talasanje u propusnom opsegu može biti prihvatljivo u nekim primenama, ali ne i u opštem slučaju,

i potrebno je razmotriti kako se može poboljšati selektivnost bez povećanja talasanja u propusnom opsegu učestanosti. Filtar $H_2(z)$ ima linearnu fazu pošto dvostruko, ili u opštem slučaju višestruko, filtriranje filtrom sa linearnom fazom $H(z)$ i dalje ima linearnu fazu.

Primer 8.13: Frekvencijska karakteristika dvostrukog filtriranja signala

Na slici je prikazano poređenje frekvencijskih karakteristika filtra $H(z)$ i $H(z)^2$. Dvostrukim filtriranjem je potiskivanje u nepropusnom opsegu poboljšano, ali je povećano i talasanje u propusnom opsegu.



Ideja o poboljšanju selektivnosti FIR filtra je prvi put predstavljena u [52], i u daljem tekstu će biti izložena u obliku iz literature [47]. Pretpostavimo da se filtarska poboljšana selektivnošću $H_s(z)$ može dobiti iz

$$H_s(z) = f(H(z)), \quad (8.112)$$

gde je $f(x)$ polinom trećeg reda:

$$f(x) = a + bx + cx^2 + dx^3. \quad (8.113)$$

Oblik filtra $H_s(z)$ u (8.112) se može shvatiti kao linearna kombinacija jednostruko, dvostruko i trostruko filtriranog signala filtrom $H(z)$, ali takav rezon ne pruža uvid u način određivanja optimalnih koeficijenata $f(x)$.

Drugi način sagledavanja (8.112) je da polinom $f(x)$ menja amplitudsku karakteristiku filtra $H(z)$. Cilj je odrediti koeficijente polinoma $f(x)$ tako da se potiskivanje u nepropusnom opsegu poboljša, a da se pri tome ne poveća, ili čak i smanji, talasanje u propusnom opsegu učestanosti. Koeficijenti polinoma $f(x)$ se mogu odrediti iz sledećih uslova:

- I Frekvencijski odziv $f(H(z))$ bi trebalo da bude oblika filtra propusnika niskih učestanosti, odnosno da u istim opsezima učestanosti propušta i potiskuje signal. Amplitudska karakteristika filtra u propusnom opsegu talasa oko jednične vrednosti $|H(e^{j\Omega})| \approx 1$ za $\Omega < \Omega_{\text{pass}}$, dok u nepropusnom opsegu talasa oko nule

$|H(e^{j\Omega})| \approx 0$ za $\Omega > \Omega_{\text{stop}}$. Oblik amplitudske karakteristike će biti očuvan ako su zadovoljeni uslovi:

$$f(1) = 1 \quad \text{i} \quad f(0) = 0$$

II Talasanje u propusnom i nepropusnom opsegu se može smanjiti ako se $f(x)$ sporo menja oko tačaka $x = 1$ i $x = 0$, koje odgovaraju vrednosti amplitudskog odziva $|H(e^{j\Omega})| \approx 1$ u propusnom i $|H(e^{j\Omega})| \approx 0$ nepropusnom opsegu. Minimalna promena vrednosti $f(x)$ oko $x = 1$ i $x = 0$ se ostvaruje ako je izvod u tim tačkama nula:

$$\left. \frac{d}{dx} f(x) \right|_{x=0} = 0 \quad \text{i} \quad \left. \frac{d}{dx} f(x) \right|_{x=1} = 0$$

Iz uslova $f(0) = 0$ direktno sledi $a = 0$, dok iz uslova $df(x)/dx = 0$ za $x = 0$

$$\left. \frac{d}{dx} f(x) \right|_{x=0} = (b + 2cx + 3dx^2) \Big|_{x=0} = 0 \quad (8.114)$$

direktno sledi $b = 0$. Preostala dva uslova formiraju sistem jednačina

$$\begin{aligned} c + d &= 1 \\ 2c + 3d &= 0 \end{aligned} \quad (8.115)$$

čije rešenje je $c = 3$ i $d = -2$.

Prenosna funkcija filtra sa zaoštrenim odzivom $H_s(z)$ je

$$H_s(z) = f(H(z)) = 3H(z)^2 - 2H(z)^3 = (3 - 2H(z))H(z)^2. \quad (8.116)$$

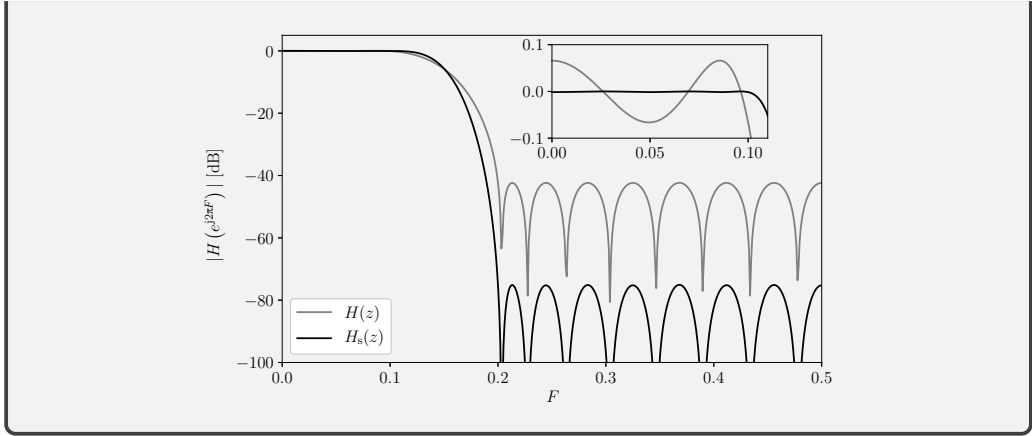
Pri izvođenju (8.116) je implicitno uvedena pretpostavka da filter $H(z)$ nema kašnjenja, odnosno da nije kauzalan, što se može videti iz $3H(z)^2 - 2H(z)^3$, kao i iz člana $3 - 2H(z)$. Uvođenjem kašnjenja $z^{-\frac{N}{2}}$ se može kompenzovati kašnjenje kauzalnog filtra N -tog reda, i u tom slučaju prenosna funkcija $H_s(z)$ je

$$H_s(z) = 3z^{-\frac{N}{2}} H(z)^2 - 2H(z)^3 = (3z^{-\frac{N}{2}} - 2H(z))H(z)^2. \quad (8.117)$$

Kašnjenje $z^{-\frac{N}{2}}$ uvodi uslov da red filtra mora biti paran, a pošto je $H(z)$ filter propusnik niskih učestanosti, izbor se svodi na FIR filtre tipa I.

Primer 8.14: Frekvencijska karakteristika filtra sa zaoštrenim odzivom

Filter $H(z)$ iz primera 8.13 je upotrebljen u (8.117) i frekvencijski odzivi $H(z)$ i $H_s(z)$ su prikazani na slici. Talasanje $H_s(z)$ u propusnom opsegu je gotovo 100 puta manje od talasanja $H(z)$, dok je potiskivanje u nepropusnom opsegu dvostruko veće u decibelima.



CIC sharpening [53]

Izraz za zaoštavanje filtra (8.117) se ne može primeniti direktno na CIC filter u obliku iz odeljka 8.1 pošto je pojačanje CIC filtra N (8.13). Skaliranjem prenosne funkcije CIC filtra faktorom N^{-1}

$$\overline{H}_{\text{CIC,R}}(z) = \left(\frac{1}{N} \frac{1 - z^{-N}}{1 - z^{-1}} \right)^R \quad (8.118)$$

dobija se filter sa jediničnim pojačanjem na koji se može primeniti (8.117).

$$|H(e^{j\Omega})| = \left| 3 \left(\frac{\sin(\frac{\Omega N}{2})}{N \sin(\frac{\Omega}{2})} \right)^2 - 2 \left(\frac{\sin(\frac{\Omega N}{2})}{N \sin(\frac{\Omega}{2})} \right)^3 \right| \quad (8.119)$$