

ПИТАГОРИНА ТЕОРЕМА

задачи за вежбање

1 Питагорина теорема

Нека је ABC правоугли троугао са правим углом код темена C . У задацима који следе, уколико није другачије наглашено, користимо следеће ознаке: a и b - катете, c - хипотенуза, h - висина која одговара хипотенузи, r - полупречник уписане кружнице, R - полупречник описане кружнице, t_a - тежишна дуж која одговара катети a , t_b - тежишна дуж која одговара катети b и t_c - тежишна дуж која одговара хипотенузи c тог правоуглог троугла. Примењиваћемо и следеће формуле:

$$O = a + b + c, P = \frac{a \cdot b}{2} = \frac{c \cdot h}{2}, c^2 = a^2 + b^2, r = \frac{a + b - c}{2}, R = \frac{c}{2},$$
$$t_a^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + b^2, t_b^2 = a^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2, t_c = \frac{c}{2}.$$

1. Израчунај обим, површину и висину која одговара хипотенузи правоуглог троугла, ако је једна његова катета 6 cm , а друга за 2 cm дужа од ње.
2. Хипотенуза правоуглог троугла је $1,3\text{ dm}$, а једна катета је за 1 cm краћа од ње. Израчунај другу катету, обим, површину и све три тежишне дужи тог троугла.
3. Израчунај обим, површину, а затим и полупречник уписане и полупречник описане кружнице правоуглог троугла, ако је једна његова катета 6 cm , а збир полупречника уписане и описане кружнице 7 cm .
4. Тежишна дуж која одговара хипотенузи правоуглог троугла је 10 cm . Ако је једна катета четири трећине пута дужа од друге, израчунај обим, површину и висину која одговара хипотенузи тог троугла.
5. Израчунај хипотенузу правоуглог троугла, ако је једна његова катета 10 dm , а њој одговарајућа тежишна дуж 13 dm .

2 Примена Питагорине теореме

2.1 Примена Питагорине теореме на правоугаоник

Нека је $ABCD$ правоугаоник. У задацима који следе, уколико није другачије наглашено, користимо следеће ознаке: a и b - странице (ивице), d - дијагонала и R - полупречник описане кружнице тог правоугаоника. Примењиваћемо и следеће формуле:

$$O = 2(a + b), P = ab, d^2 = a^2 + b^2, R = \frac{d}{2}.$$

6. Једна страница правоугаоника је 4 cm , а друга је за 1 cm краћа од ње. Израчунај обим, површину, дијагоналу и полупречник описане кружнице тог правоугаоника.

7. Израчунај површину и дијагоналу правоугаоника, ако је његов обим $2,8\text{ dm}$, а дужина једне ивице 6 cm .
8. Полупречник описане кружнице око правоугаоника износи $\frac{\sqrt{52}}{2}\text{ dm}$, а једна страница 4 dm . Израчунај обим и површину тог правоугаоника.
9. Ивице правоугаоника су, редом, решења једначине $(a-3)^2 - 4 = 12$ и $6b^2 = 90$. Израчунај обим, површину и растојање $d(A, BD)$ тачке A од праве одређене теменима B и D тог правоугаоника.

2.2 Примена Питагорине теореме на квадрат

Нека је $ABCD$ квадрат. У задацима који следе, уколико није другачије наглашено, користимо следеће ознаке: a - страница (ивица), d - дијагонала, r - полупречник уписане кружнице и R - полупречник описане кружнице тог квадрата. Примењиваћемо и следеће формуле:

$$O = 4a, P = a^2 = \frac{d^2}{2}, d = a\sqrt{2}, r = \frac{a}{2}, R = \frac{d}{2}.$$

10. Ако је страница квадрата 4 cm израчунај обим, површину, дијагоналу а затим и полупречник описане и уписане кружнице тог квадрата.
11. У кружницу полупречника 8 dm уписан је квадрат. Израчунај обим и површину тог квадрата.
12. Вредност израза $\sqrt{\sqrt{64} - 2\sqrt{9}} + (-2)^2$ је мерни број дужине дијагонале квадрата изражене у дециметрима. Израчунај обим, површину, полупречник уписане и полупречник описане кружнице тог квадрата.
13. Решење једначине $2\sqrt{P-3} + 1 = 73$ је мерни број површине квадрата изражене у центиметрима квадратним. Израчунај полупречник уписане и полупречник описане кружнице тог квадрата.
14. Докажи да се дијагонала квадрата израчунава по формули $d = a\sqrt{2}$.

2.3 Примена Питагорине теореме на једнакокراки троугао

Нека је ABC једнакокраки троугао са углом при врху код темена A . У задацима који следе, уколико није другачије наглашено, користимо следеће ознаке: $BC = a$ - основица, $AB = AC = b$ - краци, h_a - висина која одговара основици a и h_b - висина која одговара краку b тог троугла. Примењиваћемо и следеће формуле:

$$O = a + 2b, P = \frac{a \cdot h_a}{2} = \frac{b \cdot h_b}{2}, b^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + h_a^2.$$

15. Основица једнакокраког троугла је 18 cm , а њој одговарајућа висина је два пута краћа од ње. Израчунај обим, површину и висину која одговара краку тог троугла.
16. Израчунај површину и висину која одговара краку једнакокраког троугла, ако је његов обим $3,6\text{ dm}$, а основица је за 3 cm краћа од крака.
17. Основица једнакокраког троугла је 6 cm , а њој одговарајућа висина је за 1 cm краћа од крака. Израчунај обим, површину и висину која одговара основици тог троугла.

18. Површина једнакокраког троугла је 480 cm^2 , а висина која одговара основици је 30 cm . Израчунај висину која одговара краку.

2.4 Примена Питагорине теореме на једнакостранични троугао

Нека је ABC једнакостранични троугао. У задацима који следе, уколико није другачије наглашено, користимо следеће ознаке: a - страница (ивица), h - висина, r - полупречник уписане кружнице и R - полупречник описане кружнице тог троугла. Примењиваћемо и следеће формуле:

$$O = 3a, P = \frac{a \cdot h}{2} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}, h = \frac{a \sqrt{3}}{2}, r = \frac{1}{3}h = \frac{a \sqrt{3}}{6}, R = \frac{2}{3}h = \frac{a \sqrt{3}}{3}.$$

19. Странаца једнакостраничног троугла је 5 cm . Израчунај висину, обим, површину, полупречник уписане и полупречник описане кружнице тог троугла.
20. Израчунај површину, висину, као и полупречник уписане кружнице једнакостраничног троугла, ако је његов обим $12\sqrt{3} \text{ cm}$.
21. Површина једнакостраничног троугла износи $9\sqrt{3} \text{ cm}^2$. Израчунај обим, висину, полупречник уписане и полупречник описане кружнице тог троугла.
22. Израчунај збир свих ивица једнакостраничног троугла, ако је производ полупречника уписане и описане кружнице тог троугла 48 cm^2 .
23. Висина једнакостраничног троугла износи 6 cm . Израчунај обим, површину и полупречник описане кружнице тог троугла.
24. Полупречник уписане кружнице једнакостраничног троугла је 5 dm . Израчунај његову површину.
25. Докажи да се висина једнакостраничног троугла израчунава по формули $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

2.5 Примена Питагорине теореме на ромб

Нека је $ABCD$ ромб. У задацима који следе, уколико није другачије наглашено, користимо следеће ознаке: a - страница (ивица), d_1 и d_2 - дијагонале, h - висина и r - полупречник уписане кружнице тог ромба. Примењиваћемо и следеће формуле:

$$O = 4a, P = ah = \frac{d_1 \cdot d_2}{2}, a^2 = \left(\frac{d_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{d_2}{2}\right)^2, r = \frac{h}{2}.$$

26. Израчунај обим и површину ромба, ако је једна његова дијагонала 10 cm , а друга 12 cm .
27. Једна дијагонала ромба је 24 cm , а основица 15 cm . Одреди другу дијагоналу, обим, површину, висину, као и полупречник уписане кружнице тог ромба.
28. Израчунај обим, површину и полупречник уписане кружнице ромба, ако је једна дијагонала ромба $6\sqrt{3} \text{ dm}$, а ивица је за $\sqrt{3} \text{ dm}$ краћа од ње.
29. У ромб је уписан круг пречника $19,2 \text{ dm}$. Ако је ивица ромба 20 dm , и једна од дијагонала 32 dm , израчунати висину, обим и површину тог ромба.
30. Израчунај обим ромба, ако је његова површина 36 cm^2 , а једна дијагонала је три четвртине друге.
31. Површина ромба је 600 dm^2 , а једна дијагонала 30 dm . Израчунај висину тог ромба.

2.6 Примена Питагорине теореме на једнакократи трапез

Нека је $ABCD$ једнакократи трапез. У задацима који следе, уколико није другачије наглашено, користићемо следеће ознаке: $AB = a$ и $CD = b$ - основице, $BC = DA = c$ - краци, h - висина, m - средња линија и d - дијагонала тог трапеза. Примењиваћемо и следеће формуле:

$$O = a + b + 2c, P = \frac{a+b}{2} \cdot h, c^2 = \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 + h^2, d^2 = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + h^2, m = \frac{a+b}{2}.$$

32. Израчунај обим и површину једнакократног трапеза чије су основице 14 dm и 4 dm , а дијагонала 15 dm .
33. Површина једнакократног трапеза је 24 cm^2 , а његове основице су 9 cm и 3 cm . Израчунај обим и средњу линију тог трапеза.
34. Израчунај обим и површину једнакократног трапеза, ако је његова висина 12 cm , крак 13 cm и дијагонала 20 cm .
35. Краћа основица једнакократног трапеза је 16 dm , а крак је за 1 dm дужи од ње. Ако је његова висина 15 dm , израчунај обим, површину и дијагоналу тог трапеза.

2.7 Примена Питагорине теореме на правоугли трапез

Нека је $ABCD$ правоугли трапез са правим углом код темена A . У задацима који следе, уколико није другачије наглашено, користићемо следеће ознаке: $AB = a$ и $CD = b$ - основице, $BC = c$ и $DA = d$ - краци, h - висина, m - средња линија и d_1 и d_2 - дијагонале тог трапеза. Примењиваћемо и следеће формуле:

$$O = a + b + c + d, P = \frac{a+b}{2} \cdot h, c^2 = (a-b)^2 + h^2, d_1^2 = b^2 + h^2, d_2^2 = a^2 + h^2, m = \frac{a+b}{2}.$$

36. Израчунај обим и површину правоуглог трапеза, ако је његова висина 5 cm , једна основица 8 cm , а друга основица два пута краћа од ње.
37. Основице правоуглог трапеза су 11 cm и 8 cm , а крак је за 1 cm дужи од висине. Израчунај обим, површину и обе дијагонале тог трапеза.

2.8 Правоугли троугао чији су оштри углови 30° и 60° , односно 45° . Једнакократи-правоугли троугао

У правоуглом троуглу чији су оштри углови 30° и 60° , краћа катета (наспрам угла од 30°) је једнака половини хипотенузе, а дужа катета (наспрам угла од 60°) је једнака производу дужине хипотенузе и броја $\frac{\sqrt{3}}{2}$. У правоуглом троуглу чији су оштри углови по 45° , катете (наспрам углова од 45°) су једнаке, док је хипотенуза једнака производу дужине једне катете и броја $\sqrt{2}$.

38. Израчунај обим и површину једнакократног троугла, ако његов крак са основицом гради угао од 30° , а висина која одговара основици је 4 dm .
39. Угао при врху једнакократног троугла је 45° , а катета је 12 dm . Израчунај његову површину.

40. Ивица ромба је дужине 5 dm . Ако је збир два угла ромба 120° , израчунај обим, површину и полупречник уписане кружнице тог ромба.
41. Једна основица једнакокраког трапеза је 10 cm , а друга је за 4 cm краћа од ње. Ако је збир углова на основици тог трапеза 60° , израчунај обим и површину датог трапеза.
42. Израчунај висину, обим и површину правоуглог трапеза, ако је његов дужи крак 6 cm , дужа основица 12 cm и оштар угао тог трапеза 60° .
43. Краћа основица правоуглог трапеза је 5 cm , висина 7 cm и један његов угао је 45° . Израчунај обим, површину и дужу дијагоналу тог трапеза.

2.9 Примена Питагорине теореме у конструктивним задацима

44. Конструирај дуж чија је дужина:
- а) $\sqrt{13}$; б) $2\sqrt{21}$; в) $3\sqrt{20} - 1$; г) $6 - \sqrt{27}$.
45. Прво конструирај дуж чија је дужина $\sqrt{17}$, а затим на бројевној правој нацртај тачке чије су координате:
- а) $2\sqrt{17}$; б) $-3\sqrt{17}$; в) $\sqrt{17} + 2$; г) $5 - \sqrt{17}$.
46. На бројевној правој нацртај тачке:
- а) $A(2\sqrt{5} + 1)$; б) $B(6 - 2\sqrt{3})$; в) $C(\sqrt{32})$; г) $D(1 + \sqrt{18})$.

2.10 Обрат Питагорине теореме

Нека је ABC произвољан троугао и a , b и c дужине његових страница. Ако је:

- $c^2 = a^2 + b^2$, тада је тај троугао правоугли са правим углом код темена C ;
- $c^2 < a^2 + b^2$ и c најдужа страница, тада је тај троугао оштроугли;
- $c^2 > a^2 + b^2$ и c најдужа страница, тада је тај троугао тупоугли.

47. Испитај да ли је троугао правоугли, тупоугли или оштроугли, ако су дужине његових страница:
- а) 5 cm , 12 cm и 13 cm ; б) 15 dm , 7 dm и 17 dm ;
- в) 1 cm , $\sqrt{2}\text{ cm}$ и $\sqrt{3}\text{ cm}$; г) 8 dm , 9 dm и 12 dm .

3 Разни задаци

48. Израчунај хипотенузу правоуглог троугла, ако је $t_a = 7\text{ cm}$ и $t_b = 4\text{ cm}$.
49. Ако странице AB и CD квадрата $ABCD$ продужимо преко темена B , односно C за 3 dm добијемо правоугаоник чији је обим 54 dm . Израчунај дијагоналу полазног квадрата.
50. Нека је $MNPQ$ квадрат. Ако ивицу MN продужимо преко темена N за 3 cm , а ивицу MQ продужимо преко темена Q за 1 cm добијемо правоугаоник чија је површина 15 cm^2 . Израчунај полупречник уписане и полупречник описане кружнице полазног квадрата.

51. Израчунај обим и површину правоугаоника, ако се његове дијагонале дужине 16 dm секу се под углом од 60° .
52. Једна дијагонала ромба је 10 cm , а друга за 2 cm дужа од ње. Израчунај обим, дијагоналу и полупречник описане кружнице правоугаоника, ако је његова краћа основица 5 cm , а површина једнака површини ромба.
53. Збир дужина основица једнакокраког трапеза је $24\sqrt{2}\text{ dm}$, а разлика $16\sqrt{2}\text{ dm}$. Ако је крак $10\sqrt{2}\text{ dm}$, израчунај површину тог трапеза.
54. Дијагонала једнакокраког трапеза је 8 cm и са катетом дужине 6 cm гради прав угао. Израчунај средњу линију, обим и површину тог трапеза.
55. Основица правоуглог трапеза је 20 cm . Ако је једна дијагонала 20 cm , а друга 13 cm , израчунај обим и површину тог трапеза.