15. Košijeva nejednakost

Teorema 1 (Koši-Švarc-Bunjakovski) *Za sve $n \in N$ i sve $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n \in R$ važi:*

$$(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2) \geq (a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots a_n b_n)^2.$$

Jednakost važi akko je $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \ldots = \frac{a_n}{b_n}$.

Vektorska verzija: $|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}| \geq \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}$. Jednakost važi akko su $\overrightarrow{a}$ i $\overrightarrow{b}$ kolinearni.

1. Ako je $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ i $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, dokazati da je $|ax + by + cz| \leq 1$.
2. Ako $a_i \in R^+$, dokazati: $(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}) \geq n^2$.
3. Ako su svi x_i pozitivni, dokazati: $(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2)^2 \leq (x_1 + x_2 + \ldots + x_n)(x_1^3 + x_2^3 + \ldots + x_n^3)$.
4. Dokazati da za uglove trougla važi $\mathrm{tg}^2 \frac{\alpha}{2} + \mathrm{tg}^2 \frac{\beta}{2} + \mathrm{tg}^2 \frac{\gamma}{2} \geq 1$. Za kakve trouglove važi jednakost?
5. Neka su $x, y, z \in R$ veći od 1 i važi $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 2$. Dokazati da je $\sqrt{x + y + z} \geq \sqrt{x - 1} + \sqrt{y - 1} + \sqrt{z - 1}$.
6. Ako $x, y, z \in R^+$ i $x + y + z \geq 1$, dokazati: $\frac{x\sqrt{x}}{y+z} + \frac{y\sqrt{y}}{z+x} + \frac{z\sqrt{z}}{x+y} \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$.
7. Neka su a, b, c pozitivni realni brojevi takvi da je $abc = 1$. Dokazati da je $\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2}$.
8. Ako su a, b, c stranice nekog trougla, dokazati: $a^2 b(a - b) + b^2 c(b - c) + c^2 a(c - a) \geq 0$. Kada važi jednakost?
9. Neka su x, y, z nenegativni realni brojevi za koje važi $x+y+z = 1$. Dokazati nejednakost $0 \leq xy+yz+zx-2xyz \leq \frac{7}{27}$.
10. Dokazati da je $-\frac{1}{2} \leq \frac{(x+y)(1-xy)}{(1+x^2)(1+y^2)} \leq \frac{1}{2}$ za sve $x, y \in R$.
11. Neka je $n \geq 3$ i $t_1, \ldots, t_n \in R^+$ takvi da je $n^2 + 1 \geq (t_1 + \ldots + t_n)(\frac{1}{t_1} + \ldots + \frac{1}{t_n})$. Dokazati da su za sve $1 \leq i < j < k \leq n$ t_i, t_j, t_k dužine stranica nekog trougla.
12. Ako su $x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_n$ realni brojevi, dokazati: $(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |x_i - x_j|)^2 \leq \frac{2(n^2-1)}{3} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (x_i - x_j)^2$. Dokazati da jednakost važi akko je $\langle x_k : 1 \leq k \leq n \rangle$ aritmetička n-torka.
13. Neka su $x_1, x_2, \ldots, x_n$ realni brojevi za koje je $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = 1$. Dokazati da za svaki prirodan broj $k \geq 2$ postoje celi brojevi $a_1, a_2, \ldots, a_n$ koji nisu svi jednaki nuli, takvi da važi $|a_i| \leq k - 1$ za $i = 1, 2, \ldots, n$ i $|a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n| \leq \frac{(k-1)\sqrt{n}}{k^n - 1}$.
14. Neka je $n \in N \setminus \{1\}$ i $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n \in R^+$. Dokazati: $(\sum_{i \neq j} a_i b_j)^2 \geq (\sum_{i \neq j} a_i a_j)(\sum_{i \neq j} b_i b_j)$.