IZREKI O POVPREČNI VREDNOSTI

Urša Kumelj

Fakulteta za matematiko in fiziko,

uk6584@student.uni-lj.si

20. december 2022

Pregled

- Ogled že spoznanih definicij

Pregled

- Ogled že spoznanih definicij
- Motivacijski primer

Pregled

- Ogled že spoznanih definicij
- Motivacijski primer
- Lagrangeev izrek in ideja dokaza

Pregled

- Ogled že spoznanih definicij
- Motivacijski primer
- Lagrangeev izrek in ideja dokaza
- Rolleov izrek in ideja dokaza

Pregled

- Ogled že spoznanih definicij
- Motivacijski primer
- Lagrangeev izrek in ideja dokaza
- Rolleov izrek in ideja dokaza
- Cauchyjev izrek in dokaz

Pregled

- Ogled že spoznanih definicij
- Motivacijski primer
- Lagrangeev izrek in ideja dokaza
- Rolleov izrek in ideja dokaza
- Cauchyjev izrek in dokaz
- Izrek o povprečju z integrali in dokaz

Pregled

- Ogled že spoznanih definicij
- Motivacijski primer
- Lagrangeev izrek in ideja dokaza
- Rolleov izrek in ideja dokaza
- Cauchyjev izrek in dokaz
- Izrek o povprečju z integrali in dokaz
- Primeri uporabe le-teh v vsakdanjem življenju

Zvezност in odvod

Definicija zveznosti

Naj bo $D \subseteq \mathbb{R}$ in $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ funkcija. Funkcija f je zvezna v $a \in D$, če za vsak $\epsilon > 0$ obstaja tak $\delta > 0$, da za vse $x \in D$, ki zadoščajo $|x - a| < \delta$, velja $|f(x) - f(a)| < \epsilon$.

Zveznost in odvod

Definicija zveznosti

Naj bo $D \subseteq \mathbb{R}$ in $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ funkcija. Funkcija f je zvezna v $a \in D$, če za vsak $\epsilon > 0$ obstaja tak $\delta > 0$, da za vse $x \in D$, ki zadoščajo $|x - a| < \delta$, velja $|f(x) - f(a)| < \epsilon$.

Definicija odvoda

Naj bo f definirana v okolici točke $a \in \mathbb{R}$. Odvod funkcije f v točki a je

$$f'(a) := \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a},$$

če ta limita obstaja. Tako pravimo, da je funkcija f odvedljiva v točki a. Geometrijsko nam to pove, da imamo v točki $x = a$ tangento na graf funkcije f.

Določeni integral

Določeni integral

Določeni integral funkcije f na intervalu $[a, b]$ predstavlja ploščino pod grafom. Oznaka:

$$\int_a^b f(x)dx$$

Določeni integral

Določeni integral

Določeni integral funkcije f na intervalu $[a, b]$ predstavlja ploščino pod grafom. Oznaka:

$$\int_a^b f(x)dx$$

Osnovni izrek analize

Naj bo $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ integrabilna funkcija, ki ima primitivno funkcijo F na $[a, b]$, tj. $F'(x) = f(x)$ za vsak $x \in [a, b]$. Tedaj velja Newton-Leibnizeva formula

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Motivacijski primer

Recimo, da zapustite hišo in se peljete do svojega prijatelja, ki živi 100 kilometrov stran. Pot opravite v dveh urah. Ali je med potovanjem nujno trenutek, ko peljete natanko 50 kilometrov na uro?

Motivacijski primer

Recimo, da zapustite hišo in se peljete do svojega prijatelja, ki živi 100 kilometrov stran. Pot opravite v dveh urah. Ali je med potovanjem nujno trenutek, ko peljete natanko 50 kilometrov na uro?

Ali to velja za katerokoli funkcijo f na intervalu $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$, kjer sta $a, b \in \mathbb{R}$?

Joseph-Louis de Lagrange

Grof Joseph-Louis de Lagrange je bil italijansko-francoski plemič, matematik, astronom in mehanik, rojen leta 1736 v Torinu. Mnogi ga imajo za največjega matematika 18. stoletja. Postal je svetovno znan zaradi svojega dela o valovni mehaniki in ekstremih funkcij.

Lagrangeev izrek

Lagrangeev izrek

Naj bo $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ funkcija, ki je na $[a, b]$ zvezna in na (a, b) odvedljiva. Tedaj obstaja točka $c \in (a, b)$, da velja

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Lagrangeev izrek

Lagrangeev izrek

Naj bo $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ funkcija, ki je na $[a, b]$ zvezna in na (a, b) odvedljiva. Tedaj obstaja točka $c \in (a, b)$, da velja

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

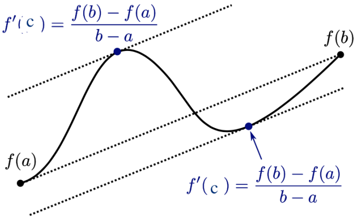

Figure: Grafični prikaz Lagrangeevega izreka

Michel Rolle

Michel Rolle je bil francoski matematik, rojen leta 1652 v Ambertu (osrednja Francija). Najbolj znan je po Rolleovem izreku, je pa tudi eden od so-izumiteljev Gausove eliminacije v evropi.

Rolleov izrek in ideja dokaza

Rolleov izrek

Naj bo $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ funkcija, ki je na $[a, b]$ zvezna in na (a, b) odvedljiva. Poleg tega naj velja še $f(a) = f(b)$. Tedaj obstaja takšna točka $c \in (a, b)$, da je

$$f'(c) = 0.$$

Rolleov izrek in ideja dokaza

Rolleov izrek

Naj bo $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ funkcija, ki je na $[a, b]$ zvezna in na (a, b) odvedljiva. Poleg tega naj velja še $f(a) = f(b)$. Tedaj obstaja takšna točka $c \in (a, b)$, da je

$$f'(c) = 0.$$

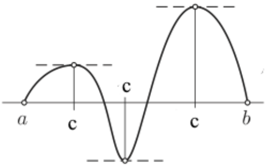

Figure: Grafični prikaz Rolleovega izreka

Rolleov izrek in ideja dokaza

Ideja dokaza

Ker je f zvezna doseže na intervalu $[a, b]$ svoj minimum m in maksimum M. Potem pa obrvnavamo dva primera:

- Velja $f(m) = f(M)$, kar pomeni, da je funkcija f konstantna. Velja $f'(x) = 0$ za vsak $x \in [a, b]$. Tako lahko izberemo poljuben $c \in (a, b)$, saj bo izrek vedno veljal.

Rolleov izrek in ideja dokaza

Ideja dokaza

Ker je f zvezna doseže na intervalu $[a, b]$ svoj minimum m in maksimum M. Potem pa obrvnavamo dva primera:

- Velja $f(m) = f(M)$, kar pomeni, da je funkcija f konstantna. Velja $f'(x) = 0$ za vsak $x \in [a, b]$. Tako lahko izberemo poljuben $c \in (a, b)$, saj bo izrek vedno veljal.
- Naj sedaj v točki $M \in (a, b)$ funkcija zavzame maksimum. S pomočjo Fermatove leme velja $f'(M) = 0$ in je tako izrek izpolnjen.

Rolleov izrek in ideja dokaza

Ideja dokaza

Ker je f zvezna doseže na intervalu $[a, b]$ svoj minimum m in maksimum M. Potem pa obrvnavamo dva primera:

- Velja $f(m) = f(M)$, kar pomeni, da je funkcija f konstantna. Velja $f'(x) = 0$ za vsak $x \in [a, b]$. Tako lahko izberemo poljuben $c \in (a, b)$, saj bo izrek vedno veljal.
- Naj sedaj v točki $M \in (a, b)$ funkcija zavzame maksimum. S pomočjo Fermatove leme velja $f'(M) = 0$ in je tako izrek izpolnjen.

Fermatova lema

Naj bo $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ odvedljiva funkcija, ki ima v c lokalni ekstrem. Potem velja $f'(c) = 0$.

Ideja dokaza Lagrangeevega izreka

Ideja dokaza

Naj bo g linerna funkcija, ki poteka skozi točki $(a, f(a))$ in $(b, f(b))$.

$$g(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a)$$

Ideja dokaza Lagrangeevega izreka

Ideja dokaza

Naj bo g linerna funkcija, ki poteka skozi točki $(a, f(a))$ in $(b, f(b))$.

$$g(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a)$$

Potem definiramo novo funkcijo $h = f - g$.

$$h(x) = f(x) - \left(\frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a)\right)$$

Ideja dokaza Lagrangeevega izreka

Ideja dokaza

Naj bo g linerna funkcija, ki poteka skozi točki $(a, f(a))$ in $(b, f(b))$.

$$g(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a)$$

Potem definiramo novo funkcijo $h = f - g$.

$$h(x) = f(x) - \left(\frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a)\right)$$

Opazimo, da velja $h(a) = h(b) = 0$ ter, da je h zvezna na $[a, b]$ in odvedljiva na (a, b). Tako lahko uporabimo Rolleov izrek. Po odvajanju pa direktno sledi

$$f'(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

.

Slika

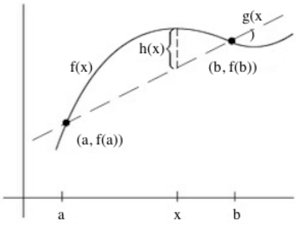

Figure: Grafični prikaz dokaza Lagrangeevega izreka

Augustin Louis Cauchy

Baron Augustin Louis Cauchy je bil francoski inženir in matematik, rojen leta 1789 v Parizu. Odkril je ogromno stvari, nekaj izmed njih:

Augustin Louis Cauchy

Baron Augustin Louis Cauchy je bil francoski inženir in matematik, rojen leta 1789 v Parizu. Odkril je ogromno stvari, nekaj izmed njih:

1. Postavil temelje k sodobni obravnavi konvergence.

Augustin Louis Cauchy

Baron Augustin Louis Cauchy je bil francoski inženir in matematik, rojen leta 1789 v Parizu. Odkril je ogromno stvari, nekaj izmed njih:

1. Postavil temelje k sodobni obravnavi konvergence.
2. Razvil kriterije za konvergenco neskončnih vrst.

Augustin Louis Cauchy

Baron Augustin Louis Cauchy je bil francoski inženir in matematik, rojen leta 1789 v Parizu. Odkril je ogromno stvari, nekaj izmed njih:

1. Postavil temelje k sodobni obravnavi konvergence.
2. Razvil kriterije za konvergenco neskončnih vrst.
3. Izdal tolmač infinitezimalnega računa na podlagi limite funkcije.

Augustin Louis Cauchy

Baron Augustin Louis Cauchy je bil francoski inženir in matematik, rojen leta 1789 v Parizu. Odkril je ogromno stvari, nekaj izmed njih:

1. Postavil temelje k sodobni obravnavi konvergence.
2. Razvil kriterije za konvergenco neskončnih vrst.
3. Izdal tolmač infinitezimalnega računa na podlagi limite funkcije.
4. Samostojno je osnoval kompleksno analizo.

Cauchyjev izrek

Cauchyjev izrek

Naj bosta f in g zvezni na $[a, b]$ ter odvedljivi na (a, b). Prav tako naj za vsak $x \in (a, b)$ velja, da $g'(x) \neq 0$ ter $g(a) \neq g(b)$. Tedaj obstaja točka $c \in (a, b)$, kjer je

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

Cauchyjev izrek

Cauchyjev izrek

Naj bosta f in g zvezni na $[a, b]$ ter odvedljivi na (a, b). Prav tako naj za vsak $x \in (a, b)$ velja, da $g'(x) \neq 0$ ter $g(a) \neq g(b)$. Tedaj obstaja točka $c \in (a, b)$, kjer je

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

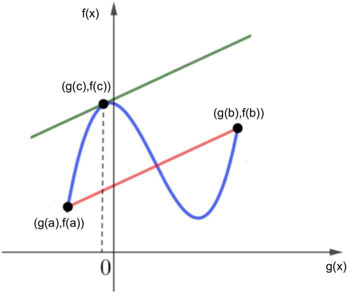

Figure: Grafični prikaz Cauchyjevega izreka

Dokaz Cauchyjevega izreka

Dokaz

Med točkama $(g(a), f(a))$ in $(g(b), f(b))$ naredimo sekanto, katere naklonski koeficient je enak

$$k_s = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}. \tag{1}$$

Dokaz Cauchyjevega izreka

Dokaz

Med točkama $(g(a), f(a))$ in $(g(b), f(b))$ naredimo sekanto, katere naklonski koeficient je enak

$$k_s = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}. \tag{1}$$

Ker je funkcija med tema dvema točkama povsod zvezna in odvedljiva obstaja točka $(g(c), f(c))$, katere naklonski koeficient je po Lagrangeevem izreku enak naklonskemu koeficientu sekante. Po drugi strani pa vemo, da nam odvod poda naklonski koeficient tangente v tej točki $(g(c), f(c))$.

Dokaz Cauchyjevega izreka

Dokaz

Med točkama $(g(a), f(a))$ in $(g(b), f(b))$ naredimo sekanto, katere naklonski koeficient je enak

$$k_s = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}. \tag{1}$$

Ker je funkcija med tema dvema točkama povsod zvezna in odvedljiva obstaja točka $(g(c), f(c))$, katere naklonski koeficient je po Lagrangeevem izreku enak naklonskemu koeficientu sekante. Po drugi strani pa vemo, da nam odvod poda naklonski koeficient tangente v tej točki $(g(c), f(c))$.

$$k = \frac{f'(x)}{g'(x)}\Big|_{x=c} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \tag{2}$$

Dokaz

Sedaj enačimo k_s (1) in k (2) ter dobimo

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

Povprečna vrednost

Definicija

Naj bo funkcija f integrabilna na $[a, b]$ in predpostavimo $a < b$. Število

$$\xi := \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx$$

imenujemo povprečna vrednost funkcije f na intervalu $[a, b]$.

Povprečna vrednost

Definicija

Naj bo funkcija f integrabilna na $[a, b]$ in predpostavimo $a < b$. Število

$$\xi := \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx$$

imenujemo povprečna vrednost funkcije f na intervalu $[a, b]$.

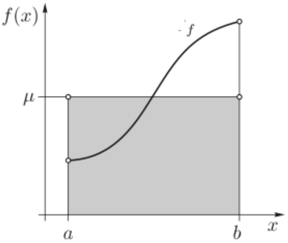

Figure: Grafični prikaz povprečja funkcije

Povprečna vrednost

Izrek o povprečni vrednosti

Naj bo funkcija f zvezna na intervalu $[a, b]$. Potem obstaja taka točka $c \in [a, b]$, da velja

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx.$$

Dokaz izreka

Dokaz

Pri dokazu si bomo pomagali z Lagrangeevim izrekom. Definirajmo funkcijo

$$g(x) = \int_a^x f(t)dt.$$

Dokaz izreka

Dokaz

Pri dokazu si bomo pomagali z Lagrangeevim izrekom. Definirajmo funkcijo

$$g(x) = \int_a^x f(t)dt.$$

Opazimo lahko, da je

$$\begin{aligned} g(a) &= \int_a^a f(t)dt = 0, \\ g(b) &= \int_a^b f(t)dt, \\ g'(x) &= f(x) \text{ (sledi po osnovnem izreku analize).} \end{aligned}$$

Dokaz izreka

Dokaz

Po Lagrangeeu obstaja tak $c \in [a, b]$, da je

$$g'(c) = \frac{g(b) - g(a)}{b - a}.$$

Dokaz izreka

Dokaz

Po Lagrangeeu obstaja tak $c \in [a, b]$, da je

$$g'(c) = \frac{g(b) - g(a)}{b - a}.$$

To enačbo nadomestimo z zgoraj ugotovljenimi dejstvi in dobimo

$$f(c) = \frac{\int_a^b f(t)dt - 0}{b - a} = \frac{1}{b - a} \int_a^b f(t)dt.$$

Primeri iz vsakdanjega življenja

- Ob vstopu na avtocesto so kamere, ki spremljajo registrske tablice in v trenutku zabeležijo čas, ki ste ga preživeli na cesti, ter kje in kdaj ste vstopili in izstopili. Policisti bi lahko določili povprečje med tema dvema točkama vstopa in izstopa. Tako bi morda velika večina dobila kazni.

Primeri iz vsakdanjega življenja

- Ob vstopu na avtocesto so kamere, ki spremljajo registrske tablice in v trenutku zabeležijo čas, ki ste ga preživeli na cesti, ter kje in kdaj ste vstopili in izstopili. Policisti bi lahko določili povprečje med tema dvema točkama vstopa in izstopa. Tako bi morda velika večina dobila kazni.
- Gledamo število bakterij v odvisnosti od časa. Iz dobljenih vrednosti lahko število bakterij delimo s časom in dobimo hitrost delitve le-teh. Z uporabo Lagrangeevega izreka bi tako ugotovili natančen čas, ko so se bakterije razmnožile z enako hitrostjo kot povprečna hitrost. To bi raziskovalcem koristilo, da bi določili značilnosti določenih bakterij.