Izreki o povprečni vrednosti

Urša Kumelj

December 2022

Univerza *v Ljubljani*
Fakulteta za *matematiko in fiziko*

Kazalo

1 Uvod

V tem članku se bomo osredotočili na povprečno vrednost funkcije na zaprtem intervalu. V izrekih je prisotna zveznost, odvedljivost ter določeni integral. Da bomo vse skupaj lažje razumeli, se za začetek spomnimo definicij zveznosti, odvedljivosti in kaj nam podaja določeni integral.

Definicija 1.1. Naj bo $D \subseteq \mathbb{R}$ in $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ funkcija. Funkcija f je zvezna v $a \in D$, če za vsak $\epsilon > 0$ obstaja tak $\delta > 0$, da za vse $x \in D$, ki zadoščajo $|x - a| < \delta$, velja $|f(x) - f(a)| < \epsilon$.

Definicija 1.2. Naj bo f definirana v okolici točke $a \in \mathbb{R}$. Odvod funkcije f v točki a je

$$f'(a) := \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a},$$

če ta limita obstaja. Tako pravimo, da je funkcija f odvedljiva v točki a.

Pomemben del razumevanja nadaljnih izrekov je geometrijski pomen odvoda. Torej naj bo funkcija f odvedljiva v točki a. Skozi točki $(a, f(a))$ in $(x, f(x))$ določimo sekanto grafa funkcije f. Njen smerni koeficient bo enak $k = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$, enačba sekante pa je tako

$$y - f(a) = k(x - a). \tag{1}$$

Ko gre $h \to 0$ oziroma $x \to a$ sekanta preide v tangento na graf funkcije f v točki $(a, f(a))$. Smerni koeficient pa je tako enak $f'(a)$. Torej preurejena enačba (1) je sedaj enaka

$$y - f(a) = f'(a)(x - a).$$

Določeni integral nenegativne funkcije f na intervalu $[a, b]$ predstavlja ploščino pod grafom. Oznaka:

$$\int_a^b f(x)dx$$

Newton-Leibnizova formula pa nam omogoča točen izračun le-te.

Izrek 1.3. ***(Osnovni izrek analize)*** *Naj bo $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ integrabilna funkcija, ki ima primitivno funkcijo F na $[a, b]$, tj. $F'(x) = f(x)$ za vsak $x \in [a, b]$. Tedaj velja Newton-Leibnizeva formula*

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

2 Izreki o povprečjih povezani z odvodi

2.1 Lagrangeev in Rolleov izrek

Motivacijski zgled 2.1. Recimo, da zapustite hišo in se peljete do svojega prijatelja, ki živi 100 kilometrov stran. Pot opravite v dveh urah. Ali je med potovanjem nujno trenutek, ko peljete natanko 50 kilometrov na uro? Odgovor je da. Poglejmo si zakaj.

Pri odgovoru na to vprašanje je jasno, da je povprečna hitrost za celotno potovanje 50 $\frac{km}{h}$ (tj. 100 kilometrov v 2 urah), vendar je vprašanje, ali je vaša trenutna hitrost kdaj točno 50 $\frac{km}{h}$. Nekoliko bolj preprosteje, ali vaš merilnik hitrosti kdaj kaže točno 50 $\frac{km}{h}$? Pretvorimo zgoraj povedano z matematičnimi simboli in poskušajmo najti odgovor.

Naj bo $y = f(t)$ funkcija prepotovane razdalje (km) v odvisnosti od časa (t) in naj velja $t \in [0,2]$. Iz besedila lahko takoj zapišemo, da velja $f(0) = 0$ in $f(2) = 100$. Skozi točki $(0, f(0))$ in $(2, f(2))$ naredimo sekanto, katere naklon bo ravno

$$k = \frac{\triangle f}{\triangle x} = \frac{f(2) - f(0)}{2 - 0} = \frac{100 - 0}{2} = 50\frac{km}{h}$$

Torej naklonski koeficient k za katerokoli točko $c \in [0,2]$, je enak odvodu funkcije f v točki c.

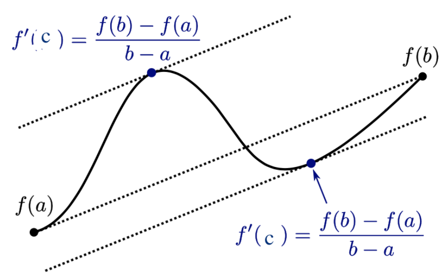
$$f'(c) = \frac{f(2) - f(0)}{2 - 0} = 50\frac{km}{h}$$

Novo vprašanje pa je sedaj ali to velja za katerokoli funkcijo f na intervalu $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$, kjer sta $a, b \in \mathbb{R}$?

Izrek 2.2**.** *Naj bo $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ funkcija, ki je na $[a,b]$ zvezna in na (a,b) odvedljiva. Tedaj obstaja točka $c \in (a,b)$, da velja*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

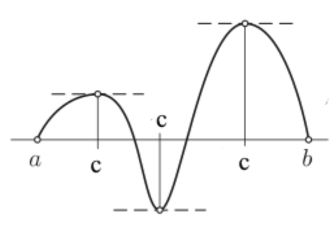
Lagrangeev izrek nam pove, da ima funkcija f vsaj v eni točki tangento, ki je vzporedna s sekanto, ki gre skozi točki $(a, f(a))$ in $(b, f(b))$.



Slika 1: Grafični prikaz Lagrangeevega izreka

Izrek 2.3**.** *Naj bo $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ funkcija, ki je na $[a,b]$ zvezna in na (a,b) odvedljiva. Poleg tega naj velja še $f(a) = f(b)$. Tedaj obstaja takšna točka $c \in (a,b)$, da je*

$$f'(c) = 0.$$



Slika 2: Grafični prikaz Rolleovega izreka

Lema 2.4. ***(Fermatova lema)*** *Naj bo* $f : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ *odvedljiva funkcija, ki ima v* c *lokalni ekstrem. Potem velja* $f'(c) = 0$.

DOKAZ. Naj ima funkcija f v točki c maksimum. Za x-e blizu c velja $f(c) \geq f(x)$ in za nek $h \in \mathbb{R}$ blizu c velja $f(c) \geq f(c+h)$. Če nekoliko preuredimo, dobimo

$$f(c+h) - f(c) \leq 0 \tag{2}$$

Sedaj pa obravnavajmo dva primera in sicer, ko je $h > 0$ in $h < 0$.

1. $h > 0$: Sprva neenakost 2 iz obeh strani delimo s h in dobimo $\frac{f(c+h)-f(c)}{h} \leq 0$. Nato pošljemo limito z desne iz obeh strani

$$\lim_{h \downarrow 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \leq \lim_{h \downarrow 0} 0 \iff f'(x) \leq 0.$$

2. $h < 0$: Sedaj pa zgornji postopek ponovimo, le da tokrat delimo z negativnim število, kar nam da obrnjen neenačaj $\frac{f(c+h)-f(c)}{h} \geq 0$. Ponovno pošljemo limito z leve iz obeh strani

$$\lim_{h \uparrow 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \geq \lim_{h \uparrow 0} 0 \iff f'(x) \geq 0.$$

Ker morata oba pogoja $f'(x) \leq 0$ in $f'(x) \geq 0$ veljati, je edina rešitev $f'(x) = 0$. □

DOKAZ. **(Rolleov izrek)** Ker je f zvezna doseže na intervalu $[a,b]$ svoj minimum in maksimum. Naj bo m minimum ter M maksimum te funkcije f. Ločimo sedaj dva primera:

1. Velja $f(m) = f(M)$, kar pomeni, da funkcija f zavzame tako maksimum kot minimum v isti točki, to pa se lahko zgodi samo v primeru, ko je funkcija konstantna. Vemo pa, da je odvod konstantne funkcije enak 0 oziroma $f'(x) = 0$ za vsak $x \in [a,b]$. Tako lahko izberemo poljuben $c \in (a,b)$, saj bo izrek vedno veljal.

2. Naj sedaj v točki $M \in (a,b)$ funkcija zavzame maksimum. Ker po Fermatovi lemi velja $f'(M) = 0$, je izrek izpolnjen.

□

S pomočjo Rolleovega izreka dokažimo še Lagrangeev izrek.

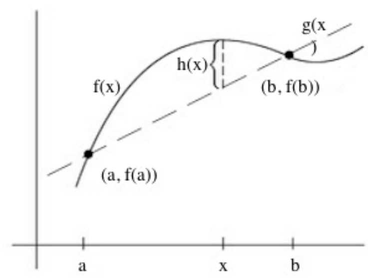
DOKAZ. **(Lagrangeev izrek)** Naj bo $g(x)$ linearna funkcija, ki poteka skozi točki $(a, f(a))$ in $(b, f(b))$.

$$g(x) - f(a) = \tfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$$

$$g(x) = \tfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) + f(a)$$

Definirajmo novo funkcijo $h = f - g$ na $[a,b]$.

$$h(x) = f(x) - \left(\frac{f(b) - f(a)}{b-a}(x-a) + f(a)\right)$$



Slika 3: Grafični prikaz dokaza Lagrangeevega izreka

Opazimo, da velja $h(a) = h(b) = 0$ ter, da je h zvezna na $[a, b]$ in odvedljiva na (a, b). Tako lahko uporabimo Rollov izrek. Obstaja $c \in (a, b)$, kjer je $h'(c) = 0$.

$$h'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0$$

Iz zadnje enačbe direktno sledi

$$f'(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

□

2.2 Cauchyjev izrek o povprečni vrednosti

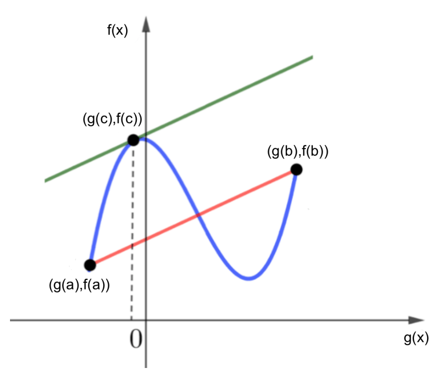
Do sedaj smo videli, da iz Rolleovega izreka pridemo do Lagrangeevega izreka. V nadaljevanju pa bomo videli, da iz Cauchyjevega izreka, v posebnem primeru, pridemo tudi do Lagrangeevega izreka.

Izrek 2.5**.** *Naj bosta f in g zvezni na $[a, b]$ ter odvedljivi na (a, b). Prav tako naj za vsak $x \in (a, b)$ velja, da $g'(x) \neq 0$ ter $g(a) \neq g(b)$. Tedaj obstaja točka $c \in (a, b)$, kjer je*

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

Takoj lahko opazimo, da v primeru, ko je $g(x) = x$, je njen odvod enak $g'(x) = 1$ ter, ko je $g(b) = b$ in $g(a) = a$, kar pa vidimo, da je ravno Lagrangeev izrek.

Dokaz. Izrek bomo dokazali geometrijsko.



Slika 4: Grafični prikaz Cauchyjevega izreka

Naj x os predstavlja funkcijo $g(x)$, y os pa funkcija $f(x)$. Sedaj so vse točke na grafu oblike $(g(x), f(x))$. Omejimo se na interval $[a, b]$. Med točkama $(g(a), f(a))$ in $(g(b), f(b))$ naredimo sekanto, katere naklonski koeficient je enak

$$k_s = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}. \tag{3}$$

Ker je funkcija med tema dvema točkama povsod zvezna in odvedljiva obstaja točka $(g(c), f(c))$, katere naklonski koeficient je po Lagrangeevem izreku enak naklonskemu koeficientu sekante. Po drugi strani pa vemo, da nam odvod poda naklonski koeficient tangente v tej točki $(g(c), f(c))$.

$$k = \frac{f'(x)}{g'(x)}\Big|_{x=c} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \tag{4}$$

Sedaj enačimo k_s (3) in k (4) ter dobimo

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

$\square$

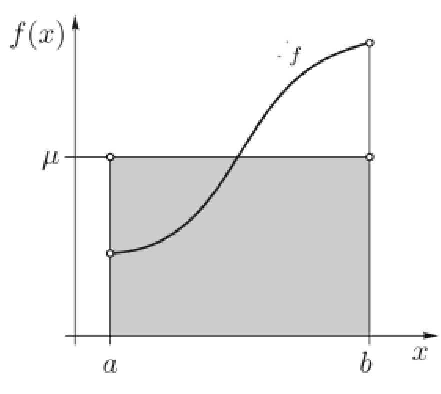
3 Izrek o povprečju z integrali

Pri integralih se prav tako lahko vprašamo o njegovi povprečni vrednosti, zato jo kar definiramo.

Definicija 3.1. Naj bo funkcija f integrabilna na $[a, b]$ in predpostavimo $a < b$. Število

$$\xi := \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

imenujemo povprečna vrednost funkcije f na intervalu $[a, b]$.



Slika 5: Grafični prikaz povprečja funkcije

Iz definicije pa direktno pride izrek o povprečni vrednosti.

Izrek 3.2. *Naj bo funkcija f zvezna na intervalu $[a, b]$. Potem obstaja taka točka $c \in [a, b]$, da velja*

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx.$$

Grafično bi si to lahko predstavljali tudi kot, da je ploščina pravokotnika $f(c)(b-a)$ enaka ploščini pod grafom, ki ga predstavlja integral $\int_a^b f(x)dx$.

Dokaz. Pri dokazu si bomo pomagali z Lagrangeevim izrekom. Definirajmo funkcijo

$$g(x) = \int_a^x f(t)dt.$$

Opazimo lahko, da je

$$\begin{aligned} g(a) &= \int_a^a f(t)dt = 0, \\ g(b) &= \int_a^b f(t)dt, \\ g'(x) &= f(x) \text{ (sledi po osnovnem izreku analize).} \end{aligned}$$

Po Lagrangeeu obstaja tak $c \in [a, b]$, da je

$$g'(c) = \frac{g(b) - g(a)}{b-a}.$$

To enačbo nadomestimo z zgoraj ugotovljenimi dejstvi in dobimo

$$f(c) = \frac{\int_a^b f(t)dt - 0}{b-a} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t)dt.$$

□

4 Viri

- Analiza 1, *Jospi Globevnik, Miha Brojan*, https://users.fmf.uni-lj.si/globevnik/skripta.pdf
- The Mean Value Theorem, https://sites.und.edu/timothy.prescott/apex/web/apex.Ch3.S2.html
- The Mean Value Theorems, *Lecture 14, Charles Li*, https://www.math.cuhk.edu.hk/course_builder/1718/math1010j/1010lect14.pdf
- Proof of the Mean Value Theorem for Integrals, *Linda Green*, https://www.youtube.com/watch?v=GGVGnQimTxI
- Proof of the Mean Value Theorem, *Mathispower4u* https://www.youtube.com/watch?v=0iHj0yyMdeI
- Cauchy's Mean Value Theorem, *slcmath@pc*, https://www.youtube.com/watch?v=k_LU2hVokXE
- Mean value theorem, *Wikipedia, The Free Encyclopedia*, https://en.wikipedia.org/wiki/Mean_value_theorem