Aproksimacija spodnjega dela krožnice s Hermiteovo interpolacijo

Poročilo o projektni nalogi pri predmetu
Matematično modeliranje

Urša Kumelj

10. maj 2024

Kazalo

1 Naloga

Denimo, da potuje kroglica pod vplivom gravitacije (brez trenja) iz točke $\boldsymbol{T}_1 = \frac{1}{\|(-1,b)\|}(-1,b)$ v točko $\boldsymbol{T}_2 = \frac{1}{\|(1,-b)\|}(1,-b)$, $b \in \mathbb{R}$, $b > 0$, po kubični Bézierjevi krivulji $\boldsymbol{p}$, ki aproksimira spodnji del krožnice, katera ima središče v izhodišču in gre skozi $\boldsymbol{T}_1$ ter $\boldsymbol{T}_2$. Določite iskani enostranski Hermiteov interpolant $\boldsymbol{p}$, tj. kubično Bézierovo krivuljo, ki zadošča Hermiteovim interpolacijskim pogojem in ima parameter $L = \frac{4}{3}\tan(\frac{1}{4}\alpha)$ ter odgovorite na naslednja vprašanja.

(a) Koliko je kroglica oddaljena od koordinatnega izhodišča pri parametru $t = \frac{1}{2}$?

(b) Katera je najnižja točka, ki jo doseže kroglica med potovanjem po $\boldsymbol{p}$?

(c) Kakšna je absolutna vrednost hitrosti kroglice, ki potuje po $\boldsymbol{p}$, ko pride v točko $\boldsymbol{T}_2$?

2 Matematično ozadje

2.1 Bézierjeve krivulje

Bézierjeve krivulje so parametrične krivulje, pomembne v računalniški grafiki. Določene so z zaporedjem kontrolnih točk. Osredotočili se bomo le na kubične Bézierjeve krivulje. Te so sestavljene iz štirih kontrolnih točk $\boldsymbol{P}_0, \boldsymbol{P}_1, \boldsymbol{P}_2, \boldsymbol{P}_3$ in imajo obliko

$$b(t) = P_0(1-t)^3 + 3P_1(1-t)^2t + 3P_2(1-t)t^2 + P_3t^3, \quad t \in [0,1]$$

Pomembne lastnonosti Bézierjevih krivulj so:

(i) Prva in zadnja kontrolna točka sta interpolacijski:

$$b(0) = P_0, \quad b(1) = P_3.$$

(ii) Tangentna vektorja v prvi in zadnji točki sta

$$b'(0) = 3(P_1 - P_0), \quad b' = 3(P_3 - P_2).$$

(iii) Krivulja leži v konvekcijski ovojnici kontrolnih točk.

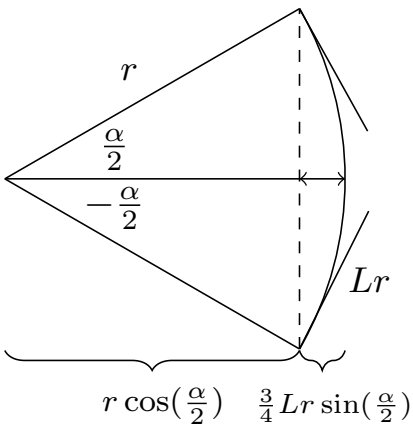
2.1.1 De Casteljaujev algoritem

Postopek vsaki vrednosti parametra $t \in [0,1]$ učinkovito priredi točko na Bézierjevi krivulji. Geometrijsko gledano je de Casteljajev algoritem ponavljanje linearnih interpolacij. Implementacija v Matlabu je naslednja:

```
function tocka = deCasteljau(b,t)
  n = size(b,2);
  for i = 2:n
  b = (1-t).*b(:,1:end-1) + t.*b(:,2:end);
  end
  tocka = b(:,end);
end
```

2.1.2 Enostranski Hermiteov interpolant

Za aproksimacijo krožnih lokov z enostranskim Hermiteovim interpolantom tipično določimo točke na krožnici, ki jih želimo interpolirati, in tangentne vektorje v teh točkah, ki so usmerjeni vzdolž tangent na krožnico v teh točkah. Ideja pri tej metodi je potisniti srednjo točko v 0. Vrednot parametra L, ki ustreza enostranskemu Hermiteovemu interpolantu, je tako $L = \frac{4}{3}\tan(\frac{1}{4}\alpha), \alpha \in [0, 2\pi]$. Kako dosežemo to vrednost?



Iz slike vidimo, da je razdalja od izhodišča do sredine loka enaka

$$r\cos(\frac{\alpha}{2}) + \frac{3}{4}Lr\sin(\frac{\alpha}{2}).$$

Mi bi želeli dobiti tak parameter L, da bo zgornja razdalja enaka radiju r.

$$\begin{aligned} r &= r\cos(\frac{\alpha}{2}) + \frac{3}{4}Lr\sin(\frac{\alpha}{2}) \\ L &= \frac{3}{4}\cdot\frac{1-\cos(\frac{\alpha}{2})}{\sin(\frac{\alpha}{2})} = \frac{3}{4}\tan(\frac{\alpha}{4}) \end{aligned}$$

3 Reševanje

3.1 Implementacija naloge

Začnimo z implementacijo same naloge in nato rešimo preostale podnaloge. Potrebujemo aproksimacijo spodnjega dela krožnice iz točke $\boldsymbol{T}_1$ do $\boldsymbol{T}_2$, ki sta normirani, kar pomeni, da ležita na enotski krožnici. Problem bomo rešili tako, da bomo aproksimirali lok krožnice iz točke, ki leži v četrtem kvadrantu do točke, ki leži v prvem kvadrantu. Dobljeno implementacijo bomo potem zarotirali za določen kot, da bomo dobili ravno željeno. Vmesni kot med točkama pa je vedno π.
Najprej potrebujemo določiti kontrolne točke kubične Bézierove krivulje. Torej za prvo kontrolno točko vzemimo $\boldsymbol{P}_0 = (-\cos(\varphi), -\sin(\varphi))$, ki je točka v četrtem kvadrantu na krožnici in $\boldsymbol{P}_3 = (\cos(\varphi), \sin(\varphi))$ kot zadnjo kontrolno točko, ki je v prvem kvadrantu. Kot φ je polovični kot med njima, zaradi simetrije. Da bo ta krivulja zadoščala enostranskemu Hermiteovemu pogoju, mora biti odvod usmerjena tangenta same krožnice. Tako bosta preostali dve kontrolni točki oblike $\boldsymbol{P}_1 = \boldsymbol{P}_0 + L\boldsymbol{P}'_0$ in $\boldsymbol{P}_2 = \boldsymbol{P}_3 - L\boldsymbol{P}'_3$, kjer je $\boldsymbol{P}'_0 = (\sin(\varphi), -\cos(\varphi))$, $\boldsymbol{P}'_3 = (-\sin(\varphi), \cos(\varphi))$ in $L = \frac{4}{3}\tan(\frac{1}{4}\pi)$, ki določa dolžino tangentnega vektorja v krajiščih.
Da dobimo spodnji del krožnice, je potrebna rotacija za kot $-\frac{\pi}{2}$, za pravilno postavitev točk $\boldsymbol{T}_1$ in $\boldsymbol{T}_2$ pa lahko kot dobimo na naslednji način. Ker poznamo koordinati točke, lahko preprosto s trigonometrijo dobimo

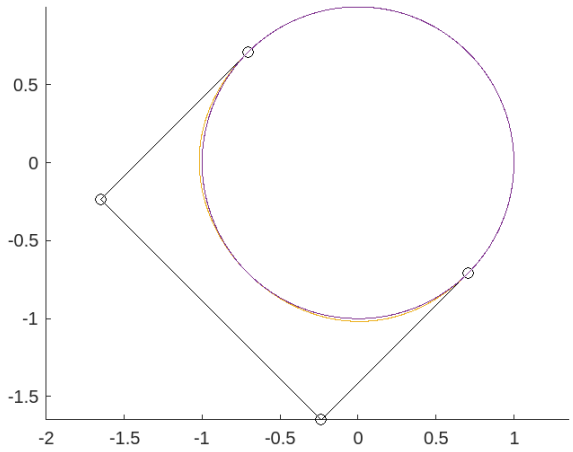
$$\tan(\phi) = \frac{y}{x} = \frac{b}{-1} \Leftrightarrow \phi = \arctan(-b).$$

Implementacija v Matlabu:

```
1 function c = aproksimacija_kroznice(b)
2  fi = pi/2;
3
4  T1 = [-cos(fi); -sin(fi)];
5  T2 = [cos(fi); sin(fi)];
6  dT1 = [sin(fi); -cos(fi)];
7  dT2 = [-sin(fi); cos(fi)];
```

```
8
9   L = 4/3*tan(pi/4);
10
11  c = [T1,T1+L*dT1,T2-L*dT2,T2];
12
13  kot_rotacije = atan(-b)-pi/2;
14  M = [cos(kot_rotacije),-sin(kot_rotacije);sin(
        kot_rotacije),cos(kot_rotacije)];
15  c = M*c;
16  plotBezier(c);
17  axis equal;
18 end
```

V implentaciji je uporabljena funkcija `plotBezier`, ki nam krivuljo izriše.



Slika 1: Primer aproksimacije spodnjega dela krožnice pri $b = 1$ ter hkrati izris enotske krožnice.

3.2 Rešitev točke a)

Glede na to, kako je izračunan parameter L, bo razdalja pri $t = \frac{1}{2}$ vedno enaka radiju krožnice, torej 1, saj smo na enotski krožnici. Rezultat pa lahko seveda preverimo v Matlabu. S pomočjo funkcije `deCasteljau` izračunamo točke na krivulji pri parametru t.

```
1  b = 1;
2  t = 1/2;
3  kontrolne_tocke = aproksimacija_kroznice(b);
4  tocka = deCasteljau(kontrolne_tocke,t);
```

```
5   razdalja = sqrt(tocka(1)^2 + tocka(2)^2)
```

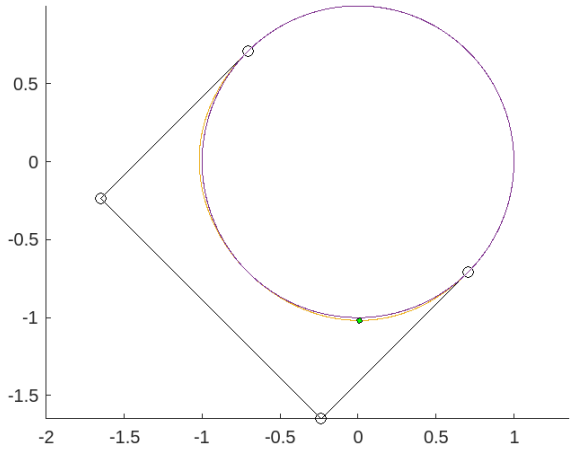
Seveda parameter b poljubno spreminjamo.

3.3 Rešitev točke b)

Najnižja točka, ki jo doseže kroglica med potovanjem po $\boldsymbol{p}$ izračunamo s pomočjo vgrajene funkcije `fminsearch`. Glede na to, da točke na Bézierjevi krivulji pridobivamo z De Casteljaujevim algoritmom, kjer parameter t točno določa posamezno točko, je potrebno poiskati, pri katerem t je dosežen minimum. Za iskanje minimuma pa so pomembne le ordinate kontrolnih točk, zato sem uporabila funkcijo `deCast`, ki deluje le na vektorju kontrolnih točk b velikosti $(n+1)$. Na koncu je potrebno dobljeni t vstaviti v De Casteljajev algoritem, da dobimo konkretno točko minimuma in jo na sliko tudi narišemo z ukazom `scatter`.

```
1  function tocke = deCast(b,t)
2   [~,n] = size(t);
3   [~,m] = size(b);
4   tocke = zeros(1,n);
5   b_nov = b;
6   for i=1:n
7     b_nov = b;
8     for j=1:m-1
9       [~,l] = size(b_nov);
10      b_nov = b_nov(1:l-1).*(1-t(i)) + b_nov(2:l).*t(i
          );
11    end
12  tocke(i) = b_nov;
13 end
```

```
1   kontrolne_tocke_y = kontrolne_tocke(2,:);
2   funkcija = @(t) deCast(kontrolne_tocke_y,t);
3   iskani_t = fminsearch(funkcija,0.7);
4   minimum = deCasteljau(kontrolne_tocke, iskani_t)
5   scatter(minimum(1), minimum(2), 10, 'filled', '
      MarkerEdgeColor', 'k', 'MarkerFaceColor', 'g')
```



Slika 2: Izris minimuma na aproksimacijo spodnjega dela krožnice pri $b = 1$ ter hkrati izris enotske krožnice.

3.4 Rešitev točke c)

Za izračun hitrosti velja enačba $v = \sqrt{2g(-y)}$, ki velja zaradi zakona o ohranitvi energije. Kot pri prejšnji točki tudi tukaj že iz enačbe vidimo, da potrebujemo zgolj y komponente točk na krivulji, zato bomo uporabili `deCast`. Vse y kontrolne točke sedaj enostavno vstavimo v enačbo za hitrost in jo izračunamo za vsak $t \in [0, 1]$. Na koncu vrnemo le absolutno vrednost zadnjega elementa vektorja, saj je pri $t = 1$ dosežena točka T_2.

```
g = 9.81;
t = linspace(0,1);
y_tocke_krivulje = deCast(kontrolne_tocke,t);
v = abs(sqrt(2*g*(-y_tocke_krivulje(end))))
```

4 Viri in literatura

- Zapiski s predvanj in vaj pri predmetu Matematično modeliranje, vse je dostopno na letošnji spletni učilnici kot tudi na učilnicah preteklih let.
- Wikipedia o Bézierjevih krivuljah, dostopno na Wikipedia.
- Calculate control points of cubic bezier curve approximating a part of a circle, dostopno na StackExchange.

- Git repozitorij Nika Erzetica, dostopno na GitHub.