Задача 1

По известным значениям z_1 и z_2 найти значения w_a, w_b, w_c

1. $z_1 = 1 - i\sqrt{3},\ z_2 = \sqrt{3} + i;\quad w_a = z_1\bar{z}_2,\ w_b = \left(\dfrac{\bar{z}_1}{z_2}\right)^2,\ w_c = \sqrt[3]{\bar{z}_2}.$

2. $z_1 = 1 + i,\ z_2 = 3 - i;\quad w_a = \bar{z}_1\bar{z}_2,\ w_b = \dfrac{z_1}{z_2^2},\ w_c = \sqrt[4]{z_1^3}.$

3. $z_1 = 1 + i\sqrt{3},\ z_2 = 2 - i\sqrt{3};\quad w_a = \bar{z}_1 z_2,\ w_b = \dfrac{z_1^2}{\bar{z}_2},\ w_c = \sqrt[3]{(\bar{z}_1)^2}.$

4. $z_1 = 2 - 2i,\ z_2 = 1 + 3i;\quad w_a = \bar{z}_1 z_2,\ w_b = \left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)^2,\ w_c = \sqrt[3]{(\bar{z}_1)^4}.$

5. $z_1 = 3 + 2i,\ z_2 = 2 + 2i;\quad w_a = z_1\bar{z}_2,\ w_b = \dfrac{(\bar{z}_1)^2}{z_2},\ w_c = \sqrt[5]{(\bar{z}_2)^4}.$

6. $z_1 = 7 + i,\ z_2 = 3 - 3i;\quad w_a = \bar{z}_1(\bar{z}_2)^2,\ w_b = \dfrac{\bar{z}_1}{z_2},\ w_c = \sqrt[3]{(\bar{z}_2)^2}.$

7. $z_1 = 5 - 5i,\ z_2 = 2 - i;\quad w_a = \bar{z}_1 z_2^2,\ w_b = \left(\dfrac{z_1}{\bar{z}_2}\right)^2,\ w_c = \sqrt[4]{\bar{z}_1}.$

8. $z_1 = 4 + 4i,\ z_2 = 4 - 3i;\quad w_a = z_1 z_2,\ w_b = \frac{\bar{z}_1}{z_2},\ w_c = \sqrt[5]{(\bar{z}_1)^2}.$

9. $z_1 = 2 - 2i\sqrt{3},\ z_2 = \sqrt{3} + 2i;\quad w_a = z_1 z_2^2,\ w_b = \left(\dfrac{\bar{z}_1}{z_2}\right)^2,\ w_c = \sqrt[3]{(\bar{z}_1)^2}.$

10. $z_1 = 2\sqrt{3} + 2i,\ z_2 = 1 + i\sqrt{3};\quad w_a = z_1(\bar{z}_2)^2,\ w_b = \dfrac{\bar{z}_2}{z_1},\ w_c = \sqrt[5]{z_1^3}.$

11. $z_1 = -4 - 4i,\ z_2 = 3 + 2i;\quad w_a = z_1^2\bar{z}_2,\ w_b = \dfrac{z_2}{\bar{z}_1},\ w_c = \sqrt[5]{(\bar{z}_1)^3}.$

12. $z_1 = -3 + 3i,\ z_2 = 2 + i;\quad w_a = z_2^3,\ w_b = \dfrac{z_1^2}{\bar{z}_2},\ w_c = \sqrt[3]{\bar{z}_1}.$

13. $z_1 = 4 - 3i,\ z_2 = 1 + 7i;\quad w_a = z_1^2\bar{z}_2,\ w_b = \dfrac{z_2}{\bar{z}_1},\ w_c = \sqrt{z_1 z_2}.$

14. $z_1 = 5 - 12i,\ z_2 = 2 + 2i;\quad w_a = z_1(\bar{z}_2)^2,\ w_b = \dfrac{\bar{z}_1}{z_2^2},\ w_c = \sqrt[4]{(\bar{z}_2)^3}.$

15. $z_1 = \dfrac{7 + 24i}{5},\ z_2 = -5 + 5i;\quad w_a = z_1(\bar{z}_2)^2,\ w_b = \dfrac{z_2}{z_1},\ w_c = \sqrt[3]{\bar{z}_2}.$

16. $z_1 = -3 - 4i,\ z_2 = -4 + 4i;\quad w_a = z_1\bar{z}_2,\ w_b = \left(\dfrac{\bar{z}_1}{z_2}\right)^2,\ w_c = \sqrt[3]{\dfrac{-\bar{z}_2}{2}}.$

17. $z_1 = 1 + i\sqrt{3},\ z_2 = 2\sqrt{3} + 2i;\quad w_a = z_1^2\bar{z}_2,\ w_b = \dfrac{z_2}{\bar{z}_1},\ w_c = \sqrt[3]{z_1 z_2}.$

18. $z_1 = 2\sqrt{3} - 2i,\ z_2 = 3 - 3i\sqrt{3};\quad w_a = \overline{z_1 z_2},\ w_b = \dfrac{z_1^2}{z_2},\ w_c = \sqrt[4]{z_2^2}.$

19. $z_1 = 3\sqrt{3} + 3i,\ z_2 = 1 + i\sqrt{3};\quad w_a = z_1(\bar{z}_2)^2,\ w_b = \dfrac{3z_2}{\bar{z}_1},\ w_c = \sqrt[3]{(\bar{z}_1)^2}.$

20. $z_1 = -4 - 4i,\ z_2 = 2 + 3i;\quad w_a = \bar{z}_1 z_2^2,\ w_b = \left(\dfrac{z_2}{z_1}\right)^2,\ w_c = \sqrt[5]{(\bar{z}_1)^3}.$

21. $z_1 = -\sqrt{2} + i\sqrt{2},\ z_2 = \sqrt{8} - i\sqrt{8};\quad w_a = z_1^2\bar{z}_2,\ w_b = \dfrac{\bar{z}_2}{z_1},\ w_c = \sqrt[3]{(\bar{z}_2)^2}.$

22. $z_1 = 4 + 3i,\ z_2 = 3 + 4i;\quad w_a = z_1\bar{z}_2,\ w_b = \left(\dfrac{z_2}{z_1}\right)^2,\ w_c = \sqrt[4]{z_1 z_2}.$

23. $z_1 = 7 + 24i,\ z_2 = 24 - 7i;\quad w_a = z_1\bar{z}_2,\ w_b = \left(\dfrac{\bar{z}_1}{z_2}\right),\ w_c = \sqrt[5]{\dfrac{z_1}{z_2}}.$

24. $z_1 = 2 + i,\ z_2 = 1 - 2i;\quad w_a = z_1(\bar{z}_2)^2,\ w_b = \left(\dfrac{\bar{z}_1}{z_2}\right)^2,\ w_c = \sqrt[4]{\dfrac{\bar{z}_2}{z_1}}.$

25. $z_1 = 3 + i,\ z_2 = 1 - 3i;\quad w_a = z_1^2\bar{z}_2,\ w_b = \dfrac{\bar{z}_2}{z_1},\ w_c = \sqrt{z_1\bar{z}_2}.$

26. $z_1 = 7 + i,\ z_2 = 1 + 7i;\quad w_a = z_1\bar{z}_2,\ w_b = \left(\dfrac{z_2}{\bar{z}_1}\right)^2,\ w_c = \sqrt[4]{\dfrac{z_1}{\bar{z}_2}}.$

27. $z_1 = 1 - 2i,\ z_2 = 4 - 2i;\quad w_a = z_1^2 z_2^2,\ w_b = \dfrac{z_1}{z_2},\ w_c = \sqrt[3]{\dfrac{z_2}{\bar{z}_1}}.$

28. $z_1 = 3 - 4i,\ z_2 = -4 + 3i;\quad w_a = (\bar{z}_1 z_2)^2,\ w_b = \dfrac{z_2}{\bar{z}_1},\ w_c = \sqrt{z_1 z_2}.$

29. $z_1 = 4 + 4i,\ z_2 = 2 - 2i;\quad w_a = z_1 z_2^2,\ w_b = \dfrac{z_1^2}{\bar{z}_2},\ w_c = \sqrt[3]{\dfrac{z_1}{\bar{z}_2}}.$

30. $z_1 = 1 + i\sqrt{3},\ z_2 = 2\sqrt{3} + 2i;\quad w_a = z_1^2\bar{z}_2,\ w_b = \left(\dfrac{z_2}{\bar{z}_1}\right)^2,\ w_c = \sqrt[4]{\bar{z}_2}.$

Задача 2

Вычислить указанные значения функций.

1. $\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4} + i\right),\ \ln(2 - 3i).$

2. $\operatorname{ch}\left(2 - \dfrac{\pi i}{2}\right),\ e^{2+\frac{\pi i}{3}}.$

3. $\sin\left(\dfrac{\pi}{3} + 2i\right),\ \ln(3 - 4i).$

4. $\operatorname{th}\left(1 - \dfrac{\pi i}{2}\right),\ e^{-1-\frac{2\pi i}{3}}.$

5. $\cos\left(\dfrac{\pi}{6} + i\right),\ \ln(-3 + i).$

6. $\operatorname{sh}\left(1 + \dfrac{\pi i}{4}\right),\ e^{0,5+\pi i}.$

7. $\operatorname{ctg}\left(\dfrac{\pi}{3} - i\right),\ \ln(-2 - 2i).$

8. $\operatorname{ch}\left(1 + \dfrac{\pi i}{4}\right),\ e^{-0,5-\frac{\pi i}{2}}.$

9. $\sin\left(\dfrac{\pi}{2} + i\right),\ \ln(-5 + 12i).$

10. $\operatorname{cth}\left(-1 + \dfrac{\pi i}{3}\right),\ e^{-1+\frac{\pi i}{3}}.$

11. $\cos\left(\dfrac{\pi}{2} + 3i\right),\ \ln(-4 - 3i).$

12. $\operatorname{sh}\left(2 - \dfrac{\pi i}{2}\right),\ e^{1-\frac{\pi i}{4}}.$

13. $\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{6} + 2i\right),\ \ln(-3 - 3i).$

14. $\operatorname{sh}\left(2 + \dfrac{\pi i}{4}\right),\ e^{-0,5+\frac{3\pi i}{4}}.$

15. $\cos\left(\dfrac{\pi}{2} + 3i\right),\ \operatorname{Ln}(2 - 4i).$

16. $\operatorname{cth}\left(1 - \dfrac{\pi i}{4}\right),\ e^{0,1+\frac{\pi i}{2}}.$

17. $\sin\left(\dfrac{\pi}{6} - i\right),\ \ln(-3 + i).$

18. $\operatorname{ch}\left(2 - \dfrac{\pi i}{6}\right),\ e^{2(1+i)}.$

19. $\operatorname{th}\left(1 + \dfrac{\pi i}{3}\right),\ \operatorname{Ln}\left(\dfrac{1 + i}{1 - i}\right).$

20. $\sin\left(\dfrac{\pi}{2} + 2i\right),\ e^{\frac{\pi(1-i)}{2}}.$

21. $\operatorname{ch}(2 - \pi i),\ \operatorname{Ln}\left(\dfrac{2 - i}{2 + i}\right).$

22. $\operatorname{ctg}\left(\dfrac{\pi}{4} + 2i\right),\ e^{-(1+2i)\frac{\pi}{2}}.$

23. $\operatorname{sh}\left(\dfrac{1 + \pi i}{2}\right),\ \ln\left(\dfrac{1 + 2i}{-1 + 2i}\right).$

24. $\cos\left(\dfrac{\pi + 2i}{2}\right),\ e^{-1-\frac{3\pi i}{4}}.$

25. $\operatorname{cth}(2 - \pi i),\ \operatorname{Ln}(5 - 12i).$

26. $\sin\left(\dfrac{\pi}{4} + i\right),\ e^{2+\frac{\pi i}{3}}.$

27. $\operatorname{sh}\left(2 + \dfrac{\pi i}{4}\right),\ \operatorname{Ln}(24 - 7i).$

28. $\operatorname{ctg}\left(\dfrac{\pi}{2} + 2i\right),\ e^{-2+\frac{\pi i}{6}}.$

29. $\operatorname{ch}\left(1 - \dfrac{\pi i}{3}\right),\ \ln(3 + 4i).$

30. $\cos\left(\dfrac{\pi}{3} - i\right),\ e^{1,5+\frac{\pi i}{2}}.$

Задача 3

Проверить, будет ли аналитической заданная функция.

1. $\dfrac{1}{1 + z}.$

2. $\sin\left(z + \dfrac{\pi}{4}\right).$

3. $\ln(1 + z).$

4. $\dfrac{1}{1 + \bar{z}}.$

5. $\operatorname{ch}(\bar{z} - 2).$

6. $\ln(1 + \bar{z}).$

7. $\operatorname{sh}(z + 1).$

8. $e^{1+z}.$

9. $e^{(\bar{z})^2}.$

10. $\cos\left(z - \dfrac{\pi}{4}\right).$

11. $e^{\bar{z}-1}.$

12. $\dfrac{1}{1 - z}.$

13. $\ln(\bar{z} - 1).$

14. $e^{z^2}.$

15. $z + 1.$

16. $1 + \dfrac{1}{\bar{z}}.$

17. $\dfrac{1}{\bar{z} - 1}.$

18. $(1 + \bar{z})^3.$

19. $\sin\left(2\bar{z} + \dfrac{\pi}{4}\right).$

20. $\ln\dfrac{\bar{z}}{z}.$

21. $z^2 + (\bar{z})^2.$

22. $z + \dfrac{1}{z}.$

23. $\bar{z} + \dfrac{1}{z}.$

24. $z\bar{z}.$

25. $\dfrac{\bar{z}}{z}.$

26. $\sin 2z.$

27. $\operatorname{ch}\dfrac{z}{2}.$

28. $\ln(z - 1).$

29. $1 - \dfrac{1}{z}.$

30. $\dfrac{1}{z} - \dfrac{1}{\bar{z}}.$

Задача 4

Установить, может ли данная функция служить вещественной или мнимой частью некоторой аналитической функции и, если может, восстановить эту аналитическую функцию. Убедиться в том, что найденная функция аналитична и удовлетворяет заданному условию. Ниже через $u(x,y)$ обозначена вещественная часть искомой аналитической функции, а через $v(x,y)$ — мнимая часть.

1. $u(x,y) = \sin y\ \mathrm{ch}\, x$.

2. $v(x,y) = \cos y\ \mathrm{ch}\, x$.

3. $v(x,y) = e^x\ \mathrm{ch}\, y$.

4. $u(x,y) = e^{-x} \sin y$.

5. $v(x,y) = e^y \sin x$.

6. $u(x,y) = e^{-y} \cos x$.

7. $u(x,y) = e^y\ \mathrm{sh}\, x$.

8. $v(x,y) = \mathrm{sh}\, y \sin x$.

9. $v(x,y) = \mathrm{ch}\, x\ \mathrm{sh}\, y$.

10. $u(x,y) = -\,\mathrm{sh}\, x \sin y$.

11. $u(x,y) = e^{-2x} \sin 2y$.

12. $v(x,y) = \mathrm{sh}\, 2x \cos 2y$.

13. $v(x,y) = \mathrm{ch}\, 2x \cos 2y$.

14. $v(x,y) = \mathrm{sh}\, 3x \sin 3y$.

15. $u(x,y) = e^{2y} \sin 2x$.

16. $v(x,y) = e^{-2y} \cos 2x$.

17. $u(x,y) = \mathrm{arctg}\, \dfrac{y}{x}$.

18. $v(x,y) = -\ln(x^2+y^2)$.

19. $v(x,y) = x^3 - 3xy^2$.

20. $u(x,y) = \dfrac{y}{(x^2+y^2)}$.

21. $v(x,y) = \dfrac{x}{(x^2+y^2)}$.

22. $v(x,y) = \dfrac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$.

23. $u(x,y) = -\dfrac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$.

24. $u(x,y) = 3x^2y - y^3$.

25. $u(x,y) = -\dfrac{x}{x^2+y^2}$.

26. $v(x,y) = e^{2x} \cos 2y$.

27. $v(x,y) = -e^{x/2} \sin \dfrac{y}{2}$.

28. $u(x,y) = \mathrm{sh}\, \dfrac{x}{2} \sin \dfrac{y}{2}$.

29. $u(x,y) = e^{x-y}$.

30. $v(x,y) = -\dfrac{y}{x^2+y^2}$.

Задача 5

Определить круг сходимости заданного степенного ряда. Выяснить, сходится ли ряд в заданной точке z_1, z_2, z_3 (если сходится, то как: абсолютно или условно). Сделать рисунок.

Вар.	Ряд	z_1	z_2	z_3
1	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(z-i)^{2n-1}}{2^n(n+\ln n)}$	$2i$	$3i$	$\sqrt{2}+i$
2	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(z+1-i)^{2n}}{3^n(n^2+n\ln n)}$	0	$\sqrt{3}-1+i$	$2+i$
3	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(z-1-i)^{n}}{2^n(n+1)\ln(n+1)}$	0	$3+i$	$1+3i$
4	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(z-2i)^{2n-1}}{(n+1)^2\ln(n+1)}$	0	$3i$	$1+2i$
5	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(z+1-2i)^{n}}{2^n(n+1)\ln^2(n+1)}$	0	$1+2i$	-1
6	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(2/3)^n(z-1+i)^{n}}{n+\sin(n\pi/2)}$	0	$\dfrac{5}{2}-i$	$1+\dfrac{i}{2}$
7	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(3/4)^n(z+2i)^{2n}}{\sqrt{n+\ln n}}$	0	$\dfrac{2}{\sqrt{3}}-2i$	$\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}-2\right)i$
8	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(z-i)^{n}}{(2i)^n(n+1+arctgz)}$	0	$3i$	$2+i$
9	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(z+1+2i)^{2n}}{(4i)^n(n+1)\sqrt{\ln(n+1)}}$	0	$1-2i$	-1
10	$\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(z-2+i)^{2n+1}}{3^n\big((n+1)^2+\ln^2(n+1)\big)}$	0	$2+\sqrt{2}$	$2+i(\sqrt{3}-1)$
11	$\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(z+1-2i)^{n}}{(2i)^n\sqrt{(n+1)^3+2n\ln n}}$	0	$1+2i$	$-1+4i$
12	$\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\dfrac{3}{2}\right)^n \dfrac{(z-2i)^{n}}{n+1+\sin n\alpha}$	1	$\dfrac{2}{3}+2i$	$\dfrac{8}{3}i$

Вар.	Ряд	z_1	z_2	z_3
13	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(2i)^n(z+1)^{2n}}{\sqrt{n+1+\arcsin(1/n)}}$	0	$-1+\dfrac{i}{\sqrt{2}}$	$-\dfrac{3}{2}$
14	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{i^n(z+3i)^n}{3^n(n^2+1)}$	0	$3-3i$	i
15	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n(z-1+i)^{2n}}{4^n n\sqrt{n+1}}$	0	$3-i$	$1+i$
16	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(z-2+2i)^n}{3^n\sqrt{n^3+1}}$	0	$2+i$	$-1-3i$
17	$\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n(z+1+i)^{2n}}{9^n\sqrt{n+1}}$	0	$2-i$	$-1+2i$
18	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n(z-i\sqrt{2})^{2n}}{2^n\sqrt[3]{n^2+n\ln n}}$	0	$\sqrt{2}(1+i)$	1
19	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(z+i\sqrt{3})^{2n-1}}{3^n(n+1)\ln^{3/2}(n+1)}$	0	$\sqrt{3}(1-i)$	-1
20	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n(z-1+i)^{2n-1}}{2^n(n+1)\ln(n+1)}$	0	$1+i$	$1-2i$
21	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{i^n(z+1+i/2)^n}{2^n(n+1)\sqrt{\ln(n+1)}}$	0	$-1+\dfrac{3}{2}i$	$1-i/2$
22	$\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n(z-2+3i)^{2n}}{4^n(n+1+\ln^2(n+1))}$	$2-i$	$4-3i$	$1-2i$
23	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(z+1-2i)^{2n-1}}{5^n(n+1)\ln^3(n+1)}$	0	$1+i$	1
24	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n(z-2+2i)^n}{3^n(1+1/n)^n}$	0	$-1-2i$	$5-i$
25	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{i^n n^2(z+3-i)^n}{3^n\ln(n+1)}$	0	$-3-2i$	$-1+i$
26	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\ln(n+1)(z-2)^{2n}}{2^n(1+\sin^2 n\alpha)}$	0	$2+\sqrt{2}$	$2+i$
27	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(n+\ln n)(z-1+i)^{2n}}{2^n}$	0	1	$1+\sqrt{2}-i$
28	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(n+1)\ln(n+1)(z-1)^{2n-1}}{3^n}$	$1+\sqrt{3}$	$1+i\sqrt{3}$	0
29	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n(z+2i)^n 2^{2n}}{3^n(n+\sqrt{n})}$	0	$\dfrac{3}{4}-2i$	$-\dfrac{5}{4}i$
30	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{i^n(z-i\sqrt{2})^{2n}}{2^n\sqrt{n^2+1}}$	0	$2\sqrt{2}$	$\sqrt{3}+i\sqrt{2}$

Задача 6

Найти все разложения заданной функции $f(z)$ по степеням $z-a$ и указать области этих разложений.

Замечания. 1. Для многозначной функции $\sqrt[3]{z}$ рассматривается та ее ветвь, которая на положительной части действительной оси принимает действительные значения.

2. Для многозначной функции $\mathrm{arctg}\, z$ рассматривается та ее ветвь, которая на положительной части действительной оси принимает действительные значения. При этом имеет место представление $\mathrm{arctg}\, z = \displaystyle\int\limits_0^z \frac{dz}{1+z^2} = \frac{\pi}{2} + \int\limits_{\infty}^z \frac{dz}{1+z^2}$.

1. $f(z) = \dfrac{1}{z^2(z-1)}$ по степ. $(z-1)$.

2. $f(z) = \dfrac{z}{z^2-5z+4}$ по степ. $(z-2)$.

3. $f(z) = \dfrac{z+2}{(z^2+2z+5)^2}$ по степ. $(z+1)$.

4. $f(z) = \dfrac{\sin z}{z-\pi/4}$ по степ. $(z-\pi/4)$.

5. $f(z) = \dfrac{z-1}{\sqrt[3]{z^3-3z^2+3z}}$ по степ. $(z-1)$.

6. $f(z) = \dfrac{1}{z(z^2-1)}$ по степ. $(z+1)$.

7. $f(z) = \dfrac{z+4}{(z^3+6z^2+12z)^2}$ по степ. $(z+2)$.

8. $f(z) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{(16-12z+6z^2-z^3)^2}}$ по степ. $(z-2)$.

9. $f(z) = \dfrac{z}{(z^2-4)^2}$ по степ. $(z-2)$.

10. $f(z) = \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1+z}{1-z}$ по степ. (z).

11. $f(z) = \operatorname{arctg} z$ по степ. (z).

12. $f(z) = \dfrac{1}{(z+1)(z+2)^3}$ по степ. $(z+1)$.

13. $f(z) = \dfrac{\cos z}{(z+\pi/4)^2}$ по степ. $(z+\pi/4)$.

14. $f(z) = (z-1)^2\sin^2\dfrac{1}{z-1}$ по степ. $(z-1)$.

15. $f(z) = \dfrac{\sin z}{(z-3\pi/4)^3}$ по степ. $(z-3\pi/4)$.

16. $f(z) = \left(\dfrac{\sin z}{z}\right)^3$ по степ. (z).

17. $f(z) = \dfrac{z}{\sqrt[3]{z^3+3z^2+3z}}$ по степ. $(z+1)$.

18. $f(z) = \dfrac{z}{(z^2-1)^3}$ по степ. $(z+1)$.

19. $f(z) = \dfrac{\sqrt[3]{7+3z-3z^2+z^3}}{z-1}$ по степ. $(z-1)$.

20. $f(z) = \dfrac{1}{z(z^2-4)}$ по степ. $(z+2)$.

21. $f(z) = \dfrac{\sin^2 z}{(z-\pi/8)^2}$ по степ. $(z-\pi/8)$.

22. $f(z) = \dfrac{1}{(z-1)(z^2+4)}$ по степ. (z).

23. $f(z) = \dfrac{\cos^2 z}{(z+\pi/8)^2}$ по степ. $(z+\pi/8)$.

24. $f(z) = \dfrac{1}{(z+1)(z^2-4)}$ по степ. (z).

25. $f(z) = \dfrac{1}{1+z+z^2}$ по степ. (z).

26. $f(z) = \dfrac{1}{z+1}\cos^2\dfrac{1}{z+1}$ по степ. $(z+1)$.

27. $f(z) = \left(\dfrac{\cos z}{z}\right)^3$ по степ. (z).

28. $f(z) = \dfrac{1}{1-z+z^2}$ по степ. (z).

29. $f(z) = \dfrac{z+2}{(z^3+3z^2+3z)^2}$ по степ. $(z+1)$.

30. $f(z) = \dfrac{z}{(z^2-2z)^3}$ по степ. $(z-1)$.

Задача 7

Найти все особые точки заданной функции $f(z)$, определить их характер и найти вычеты в них. Установить характер бесконечно удаленной точки и найти вычет в ней.

1. $f(z) = \dfrac{e^z}{(z^2+\pi^2)^2}$.

2. $f(z) = \dfrac{\operatorname{sh} z}{(z^2+\pi^2)^2}$.

3. $f(z) = \dfrac{\sin z}{(z^2-\pi^2)^2}$.

4. $f(z) = \dfrac{\operatorname{ch} z}{(z^2+\pi^2)^3}$.

5. $f(z) = \dfrac{\cos z}{(z^2-\pi^2)^3}$.

6. $f(z) = \dfrac{z^2+4}{(z^2+3z+2)^2}$.

7. $f(z) = \dfrac{(z+1)^2}{(z^2-3z+2)^2}$.

8. $f(z) = \dfrac{e^{iz}}{(z^2-\pi^2)^2}$.

9. $f(z) = z^3 e^{-1/z^2}$.

10. $f(z) = z^3\cos\dfrac{1}{z^2}$.

11. $f(z) = z^5\sin\dfrac{1}{z^2}$.

12. $f(z) = \dfrac{e^{1/z}}{1-z}$.

13. $f(z) = \dfrac{1}{1-z}\sin\dfrac{1}{z}$.

14. $f(z) = \dfrac{1}{1+z}\operatorname{sh}\dfrac{1}{z}$.

15. $f(z) = \dfrac{1}{(1-z)^2}e^{1/z}$.

16. $f(z) = \dfrac{1}{1-z^2}e^{1/z}$.

17. $f(z) = \dfrac{1}{1+z^2}\sin\dfrac{1}{z}$.

18. $f(z) = \dfrac{z}{1-z^2}\operatorname{ch}\dfrac{1}{z}$.

19. $f(z) = \dfrac{z}{1+z^2}\cos\dfrac{1}{z}$.

20. $f(z) = \dfrac{1}{(1-z)^2}\operatorname{sh}\dfrac{1}{z}$.

21. $f(z) = \dfrac{1}{(1+z)^2}\cos\dfrac{1}{z}$.

22. $f(z) = \dfrac{1}{(1-z)^2}\sin\dfrac{1}{z}$.

23. $f(z) = \dfrac{1}{z(1-z^2)}\cos\dfrac{1}{z}$.

24. $f(z) = \dfrac{1}{z(1+z^2)}\operatorname{ch}\dfrac{1}{z}$.

25. $f(z) = \dfrac{1}{1+z^2}\operatorname{sh}\dfrac{1}{z}$.

26. $f(z) = \dfrac{z}{1-z}\sin\dfrac{1}{z}$.

27. $f(z) = \dfrac{1}{z(1+z)}\cos\dfrac{1}{z}$.

28. $f(z) = \dfrac{1}{1+z}\operatorname{ch}\dfrac{1}{z}$.

29. $f(z) = \dfrac{1}{z(1-z)}\operatorname{sh}\dfrac{1}{z}$.

30. $f(z) = \dfrac{z}{1+z}e^{-1/z}$.

Задача 8

Вычислить интеграл.

1. $\displaystyle\oint\limits_C \frac{dz}{(z^2+1)^2}$, $C\colon |z+i|=1$.

2. $\displaystyle\oint\limits_C \frac{dz}{(z^2-1)^3}$, $C\colon |z-1|=1$.

3. $\displaystyle\oint\limits_C \frac{(z^2+1)}{z^3+1}\,dz$, $C\colon |z|=2$.

4. $\displaystyle\oint\limits_C z^2 e^{-1/z}dz$, $C\colon |z|=1$.

5. $\displaystyle\oint\limits_C z^2\operatorname{sh}\frac{1}{z}\,dz$, $C\colon |z|=2$.

6. $\displaystyle\oint\limits_C z\cos\frac{1}{z}\,dz$, $C\colon |z|=2$.

7. $\displaystyle\oint\limits_C \frac{(z^3+1)\,dz}{(z^2+1)^2}$, $C\colon |z|=2$.

8. $\displaystyle\oint\limits_C \frac{e^z dz}{(z^2-1)^2}$, $C\colon |z+1|=1$.

9. $\displaystyle\oint\limits_C \frac{e^{iz}dz}{z^2+1}$, $C\colon |z|=2$.

10. $\displaystyle\oint\limits_C \frac{\operatorname{ch} z\,dz}{(z^2+\pi^2)^2}$, $C\colon |z-\pi i|=\pi$.

11. $\displaystyle\oint\limits_C \frac{\sin z\,dz}{(z^2-\pi^2/4)^2}$, $C\colon |z-\pi/2|=1$.

12. $\displaystyle\oint\limits_C \frac{\ln z\,dz}{(z^2+1)^2}$, $C\colon |z-i|=0{,}5$.

13. $\displaystyle\oint\limits_C \frac{\ln(z+1)\,dz}{(z^2-1)^2}$, $C\colon |z-1|=1$.

14. $\displaystyle\oint\limits_C \frac{e^{-z}dz}{z(z-1)^3}$, $C\colon |z-1|=2$.

15. $\displaystyle\oint\limits_C \frac{\cos z\,dz}{z^2(z-\pi)^2}$, $C\colon |z-\pi|=4$.

16. $\displaystyle\oint\limits_C \frac{(z+2)^2 e^z\sin\pi z\,dz}{z-2}$, $C\colon |z-2|=1$.

17. $\displaystyle\oint\limits_C \frac{z^3\,dz}{(z+1)^3(z-2)}$, $C\colon |z-2|=2$.

18. $\displaystyle\oint\limits_C \frac{(z^2+1)\,dz}{z^2(z+2)^2}$, $C\colon |z|=1$.

19. $\displaystyle\oint\limits_C \frac{z^3\,dz}{(z-1)^3(z+2)}$, $C\colon |z-1|=2$.

20. $\displaystyle\oint\limits_C \frac{e^{iz}z\,dz}{z^2+1}$, $C\colon |z-i|=1$.

21. $\displaystyle\oint\limits_C \frac{e^{-iz}(1-z^2)\,dz}{1+z^2}$, $C\colon |z+i|=1$.

22. $\displaystyle\oint\limits_C \frac{\operatorname{sh} z\,dz}{(z^2+\pi^2)^2}$, $C\colon |z-\pi i|=\pi$.

23. $\displaystyle\oint\limits_C \frac{\sin^2 z\;dz}{(z^2-\pi^2/4)^2}$, $C\colon |z+\pi/2|=1$.

24. $\displaystyle\oint\limits_C \frac{\operatorname{tg} z\,dz}{(z-\pi/4)^3}$, $C\colon |z-\pi/4|=0{,}5$.

25. $\displaystyle\oint\limits_C \frac{\operatorname{ch}\pi z\,dz}{(z^2+1)^3}$, $C\colon |z-i|=1$.

26. $\displaystyle\oint\limits_C \frac{\ln(1+z)\,dz}{(z^2-1)^3}$, $C\colon |z-1|=1$.

27. $\displaystyle\oint\limits_C \frac{e^z\ln(z+1)\,dz}{(z-1)^2}$, $C\colon |z-1|=1$.

28. $\displaystyle\oint\limits_C \frac{dz}{(z^4-16)^2}$, $C\colon |z-2i|=2$.

29. $\displaystyle\oint\limits_C \frac{\operatorname{th}(\pi z/4)}{(z^2+1)^2}\,dz$, $C\colon |z-i|=0{,}5$.

30. $\displaystyle\oint\limits_C \frac{e^{iz}\cos z\,dz}{(z-\pi)^3}$, $C\colon |z-\pi|=\pi$.