PHYSIK ANWENDUNGEN FÜR INFORMATIK

Henrik Nordborg, mit Ergänzungen von Urs Forrer

1. Juli 2017, aktualisiert am 23. August 2017

PHYSIKALISCHE GRÖSSEN

Physikalische Grössen setzen sich aus einem Zahlenwert und einer physikalischen Einheit zusammen

$$G = \{G\}[G]$$

Beipiel: $m = 5.6$ kg

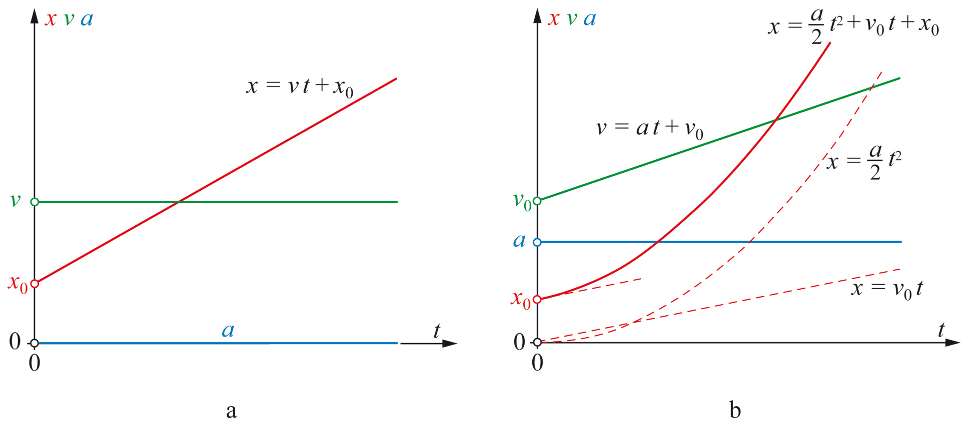
Physikalische Dimension: Masse, Länge, Zeit, Temperatur, Stromstärke, Lichtstärke, Stoffmenge.

Umwandlung von Einheiten

$$1\frac{km}{h} = \frac{1000\ m}{3600\ s} = \frac{5}{18}\frac{m}{s}$$

$$1\ kWh = 1000\ W \cdot 3600\ s = 3.6{\times}10^6\ Ws = 3.6\ MJ$$

KINEMATIK



$$x(t) = x_0 + v_0 \cdot t + \frac{a}{2} \cdot t^2$$

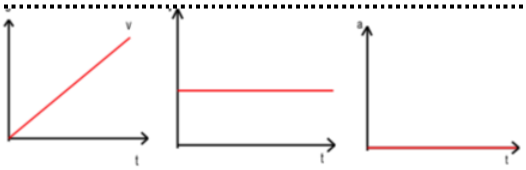
$$v(t) = v_0 + a \cdot t$$

Beschreibt den Ablauf eine Bewegung x ist gleichbedeutend mit s. x(t) steht s.

GLEICHFÖRMIGE, GERADLINIGE BEWEGUNG

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$



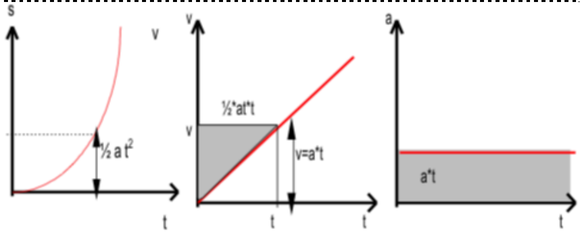
v	:Geschwindigkeit	[m/s]
s	:Weg	[m]
t	:Zeit	[s]
a	:Beschleunigung	[m/s^2]

Simple ist dies a = v/t bzw. v = s/t bzw. s = v * t.

GLEICHMÄSSIG BESCHLEUNIGTE BEWEGUNG OHNE ANFANGSGESCHWINDIGKEIT

$$s = \frac{a \cdot t^2}{2}$$

$$v = a \cdot t$$



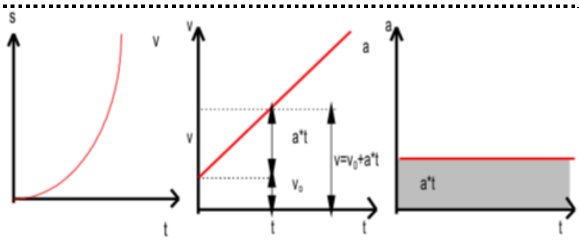
v	:Geschwindigkeit	[m/s]
s	:Weg	[m]
t	:Zeit	[s]
a	:Beschleunigung	[m/s^2]

s = v^2 / w * a = v = Wurzel (2 * a * s), ➔ a = v^2/ 2 *s == v = Wurzel (2 * g * h).

GLEICHMÄSSIG BESCHLEUNIGE BEWEGUNG MIT ANFANGSGESCHWINDIGKEIT

$$s = s_0 + v_0 \cdot t + \frac{a \cdot t^2}{2}$$

$$v = v_0 + a \cdot t$$



v	:Geschwindigkeit	[m/s]
s	:Weg	[m]
t	:Zeit	[s]
a	:Beschleunigung	[m/s^2]

Bremsung
s (t) = v0 * t – 0.5 * a * t
V (t) = v0 – a * t ➔ wenn Endgeschwindigkeit v(t) = 0,
dann kann wie folgt gearbeitet werden:
0 = v0 – a * t ➔ t = v0/a
s(t) = v0 * v0/a – 0.5 * v0^2/a
= v0^2/a – (1 * v0^2)/(2 * a)
= (2 * v0^2 – v0^2) / 2 ➔ s(t) = v0^2 / 2a ➔ a = v^2/2s

V-T DIAGRAMME

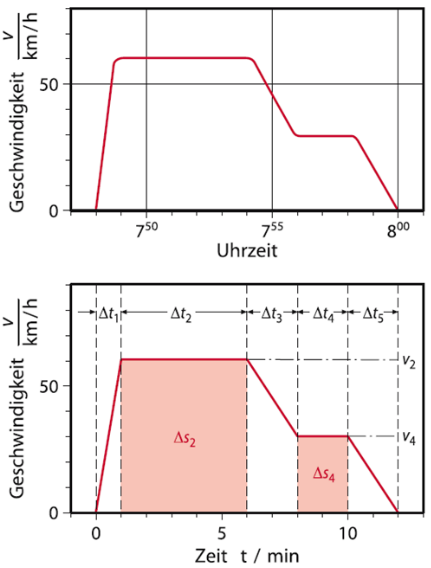
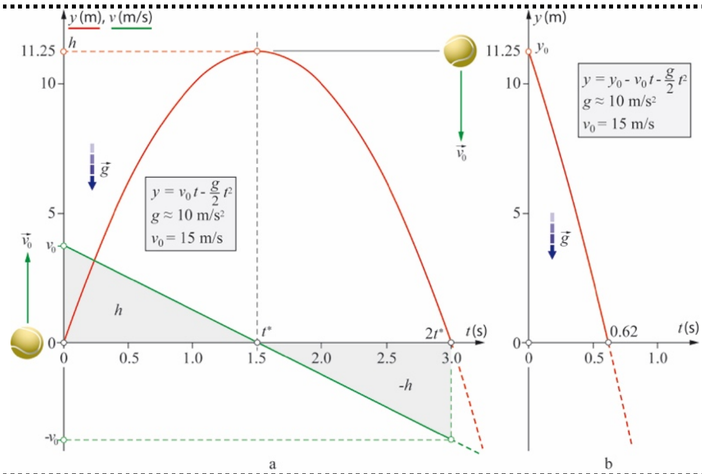


Abb. 2.1. Geschwindigkeit-Zeit-Diagramm eines hypothetischen Vorortzuges (*oberes Teilbild*) und seine graphische Integration zur Bestimmung des Position-Zeit-Diagrammes (*unteres Teilbild*); Einzelheiten im Text

Die meisten Kinematikaufgaben können am einfachsten mit einem v-t Diagramm gelöst werden. Die Fläche unter der Kurve stellt die Geschwindigkeit dar. Die Steigung der Kurve ist die Beschleunigung. Die Aufgabe kann somit grafisch gelöst werden.

SENKRECHTER WURF

Wurf und Freier Fall sind sozusagen das gleiche. Der einzige Unterschied ist, dass der Freie Fall keine Anfanggeschwindigkeit aufweist.



Steigzeit:

$$t = \left|\frac{v_0}{g}\right|$$

Flugzeit:

$$t'' = \left|\frac{2 \cdot v_0}{g}\right|$$

Flugzeit ist doppelt, da zuerst hoch und dann wieder hinunter.

Maximale Wurfhöhe

$$h = \frac{v_0^2}{2g} ==> v = \sqrt{2 * g * h}$$

Momentangeschwindigkeit zur Zeit t $v_y = v_0 - g * t$

Vertikalbeschleunigung : $a_y = -g$

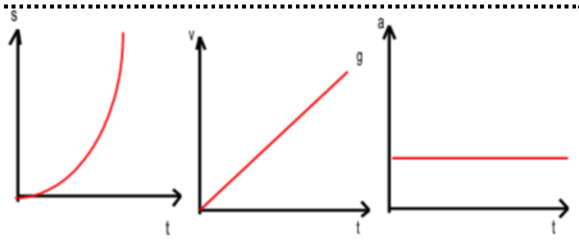
Höhe zur Zeit t $h_t = v_0 * t - \frac{g}{2} * t^2$

FREIER FALL (FALL NACH UNTEN)

Objekt wird durch die Erdanziehungskraft alleine beschleunigt. Daher gelten volgende Formeln.

$$s = \frac{g \cdot t^2}{2}$$

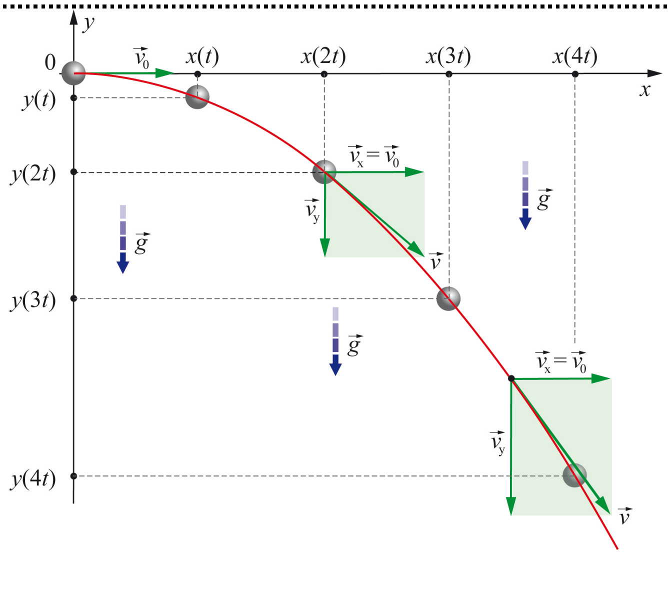
$$v = g \cdot t$$



v	:Geschwindigkeit	[m/s]
s	:Weg	[m]
t	:Zeit	[s]
g	:9.91	[m/s²]

HORIZONTALER WURF

Objekt wird gerade nach vorne geworfen und nur durch die Gewichtskraft nach unten gedrückt. Z.B. ein Schuss aus einer Pistole, welche ganz genau gerade nach vorne abgefeuert wird.



Wurfweite und **Fallzeit**

$$x = v_0 t \Rightarrow t = x/v_0$$

Wurfhöhe, bestimmt mit y = 0

y-Position zur Zeit t

$$y = -\frac{g}{2}t^2 = -\frac{g}{2v_0^2}x^2$$

Die **y-Position** bei einer bekannten x-Position berechnen

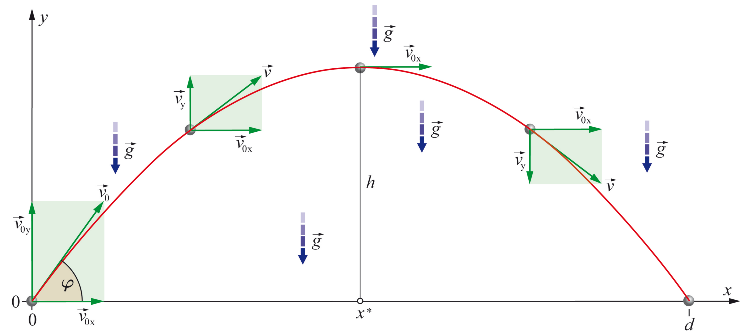
$$y = -\frac{g}{2v_0^2}x^2$$

Vertikalbeschleunigung

$$a_y = -g$$

SCHIEFER WURF

Körper wird unter einem bestimmen Winken zur Horizontalen Ebene geworfen (➔ Vorlesungsbeispiel mit den Kanonenkugeln).



Höhe bei einer bestimmen **Weite (y Pos aus einer bekannten x Pos berechnen)**

$$y(x) = x \tan \phi - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \phi} x^2$$

Maximale **Wurfhöhe**

$$y_{max} = \frac{v_0^2 \sin^2 \phi}{2g}$$

Wurfweite

$$d = \frac{v_0^2 \sin(2\phi)}{g}$$

Distanz bis zur maximalen Höhe

$$x_{ymax} = \frac{\mathrm{d}}{2}$$

Vertikalgeschwindigkeit zur Zeit t

$$v_y = \mathrm{v0} * \sin(\propto) - g * t$$

Horizontale Geschwindigkeit (nur x Anteil)

$$v_x = \mathrm{v0} * \cos(\propto)$$

Horizontale Distanz zur Zeit t

$$x_t = \mathrm{v0} * \cos(\propto) * t$$

Vertikale Distanz zur Zeit t

$$y_t = \mathrm{v0} * \mathrm{t} * \sin(\propto) - \frac{g * t\hat{}2}{2}$$

BEWEGUNG IN 3 DIMENSIONEN

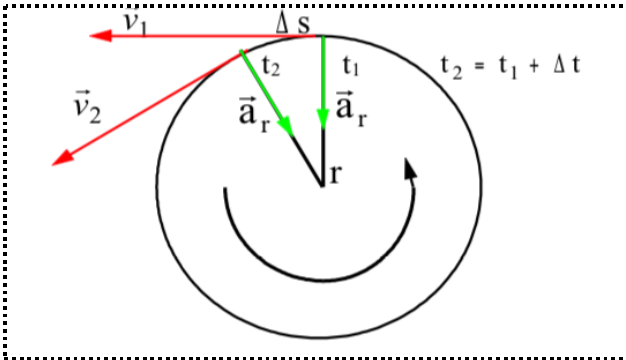
$$\vec{r}(t) = [x(t), y(t), z(t)]$$

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

KINEMATIK DER DREHBEWEGUNGEN

RADIAL- UND TANGENTIALBESCHLEUNIGUNG

Wichtig bei Kurvenfahren. A(t) kst am Kreis entlang und a(r) geht in den Kreis hinein.



$$\vec{a}(t) = \vec{a}_t(t) + \vec{a}_r(t)$$

$$a_r = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r$$

Die Radialbeschleunigung der Kreisbewegung steht immer senkrecht auf der Bahngeschwindigkeit und zeigt in radialer Richtung auf den Kreismittelpunkt.

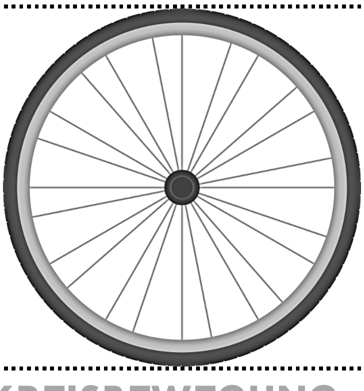
WINKELBESCHLEUNIGUNG

$$\omega = 2\pi f$$

FREQUENZ UND PERIODE

f = Anzahl der Umdrehungen pro Sekunde, T = Zeit für eine Umdrehung

➔ f = Anzahl der Umdrehungen total / Zeit



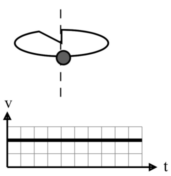
$$f = \frac{1}{T}$$

Winkelgeschwindigkeit $v = \omega r$

KREISBEWEGUNG

Konstante Geschwindigkeit

$t = \frac{\varphi}{\omega}$ $\omega = \frac{\varphi}{t}$ $\varphi = \omega \cdot t$ $\omega = 2 \cdot \pi \cdot f$



t = Zeit [s]

J = Winkelweg [rad]

W = WInkelgeschwindigkeit [1/s] [Umdr./s]

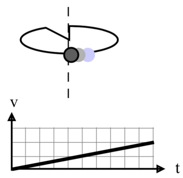
Mit konstanter Beschleunigung

$\alpha = \frac{2 \cdot \varphi}{t^2}$ $t = \sqrt{\frac{2 \cdot \varphi}{\alpha}}$ $\omega = \alpha \cdot t$

$\alpha = \frac{\omega}{t}$ $t = \frac{\omega}{\alpha}$ $\varphi = \frac{\omega \cdot t}{2}$

$\varphi = \frac{\alpha}{2} \cdot t^2$

$\varphi = \frac{\alpha}{2} \cdot t^2 + \omega_0 \cdot t + \varphi_0$



A = Winkelbeschleunigung [1/s2]

GLEICHGEWICHT EINES MASSENPUNKTES
KRÄFTEGLEICHGEWICHT

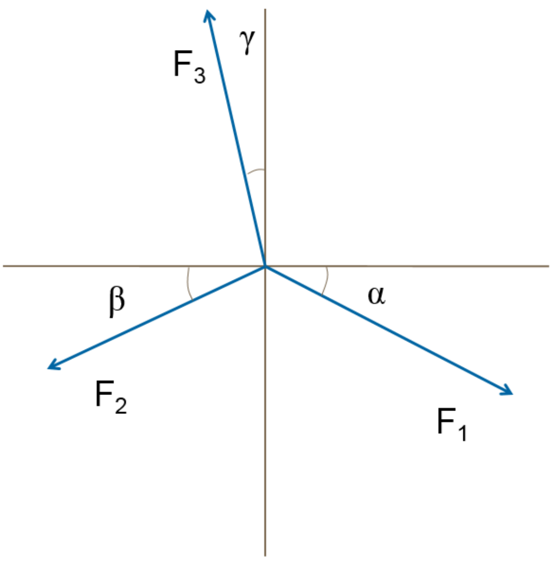
Ein Massenpunkt ist im Gleichgewicht wenn die Summe der Kräfte gleich null ist.

$$\sum_n \vec{F}_n = 0$$

Die Summe muss mit Vektoraddition ausgerechnet werden. Nach Festlegung eines Koordinatensystems kann mit Komponenten der Vektoren gerechnet werden:

$\sum_n F_{x,n} = 0 \qquad \sum_n F_{y,n} = 0 \qquad \sum_n F_{z,n} = 0$

In zwei Dimensionen erhalten wir somit zwei Gleichungen und können maximal zwei Unbekannte bestimmen.



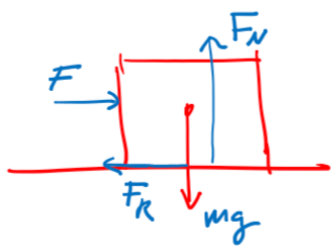
Alle x Teile zusammen gezählt

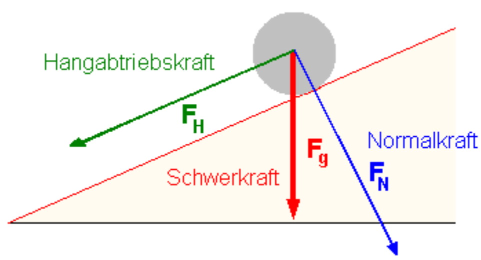
X: $F_1 \cos\alpha - F_2 \cos\beta - F_3 \sin\gamma = 0$

Alle y Teile zusammengezählt.

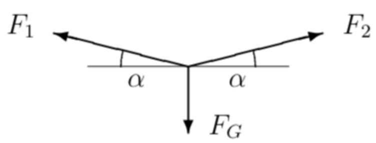
Y: $-F_1 \sin\alpha - F_2 \sin\beta + F_3 \cos\gamma = 0$

➔ Man spricht hier allgemein von einem Kräftegleichgewicht.





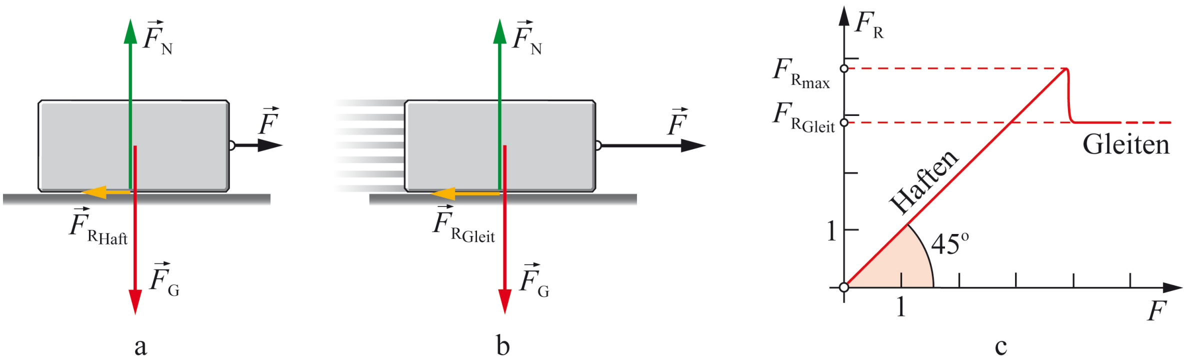
Seilkräfte (Strassenlampe)



$$\begin{aligned} -F_1 \cos\alpha + F_2 \cos\alpha + 0 &= 0 \\ F_1 \sin\alpha + F_2 \sin\alpha - F_G &= 0 \end{aligned}$$

REIBUNG

Die Reibungskraft ist proportional zur Normalkraft Fn und ist unabhängig von der Auflagefläche. Das Gleiten ist ebenfalls proportional zur Normalkraft N und hängt nicht von der Geschwindigkeit ab.

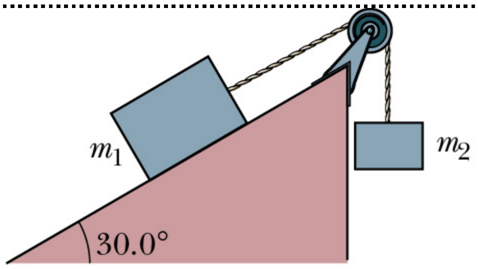


Maximale Haftreibung: $F = F_{R,\max} = \mu_H F_N$ ➔ Bleibt solange haften, bis diese Kraft erreicht ist, nachher kommt das Gleiten zu Stande.

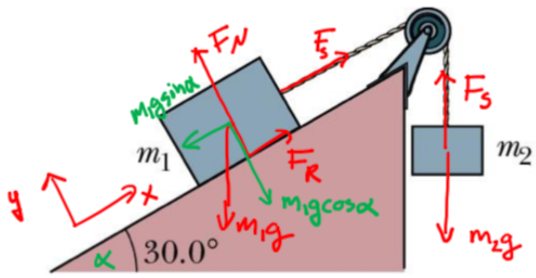
Gleitreibung: $F = \mu_G F_N$

Rollreibung: $Fn = \mu_r F_N$

BEISPIEL ZUR ROLLREIBUNG, HAFTREIBUNG



Es herrschen folgende Kräfte in diesem Beispiel.



$$F_N = m_1 g \cos 30$$

$$m_1 g \sin 30 - m_2 g \pm \mu_H m_1 g \cos 30 = 0$$

DREHMOMENT

Das Drehmoment gibt an, wie stark eine Kraft auf einen drehbaren gelagerten Körper wirkt. Einheit ist Nm.

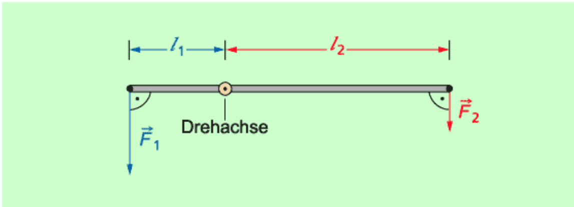
Drehbar gelagerte Körper befinden sich im Gleichgewicht, wenn das links drehbare Drehmoment gleich dem rechts drehenden Drehmoment ist. Siehe Beispiel unten.

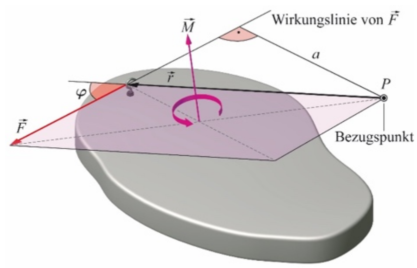
Uhrzeigersinn der Kraft ist **negativ**, **Gegenuhrzeigersinn** der Kraft ist **positiv**.

$M_l = M_r$

M_l linksdrehendes Drehmoment

M_r rechtsdrehendes Drehmoment



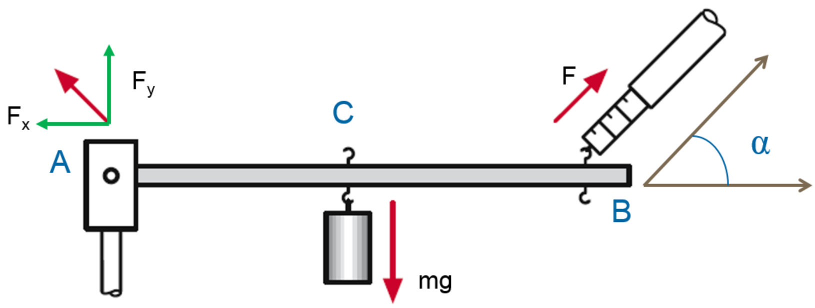


$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$$

$$|\mathbf{M}| = |\mathbf{r}||\mathbf{F}|\sin\varphi$$

oder anders → M = F * s

BEISPIEL HEBEL



Gegeben seien α, und mg. Gesucht: F $(Was\ zeigt\ die\ Federwage\ für\ eine\ Kraft\ an)$.

X-Komponenten $F\cos\alpha - F_x = 0$

Y-Komponenten $F\sin\alpha + F_y - mg = 0$

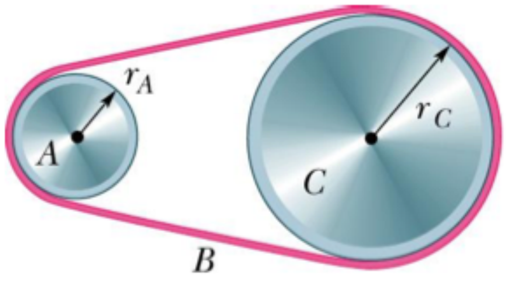
M_z (Gesamter Drehmoment) $F\sin\alpha \cdot L - mg \cdot \frac{L}{2} = 0$

Daraus folgt:

$$F = \frac{mg}{2\sin\alpha}$$

BEISPIEL FAHRRADKETTE

Auf das Rad C wirkt ein Drehmoment von 10Nm. Wie gross ist das Drehmoment auf das Rad A?. Rc = 6cm, Ra = 3cm

	Formel für M: M = F * r Ma = F * ra Mc = F * rc Wa = 2wc Ma = ½ * Mc

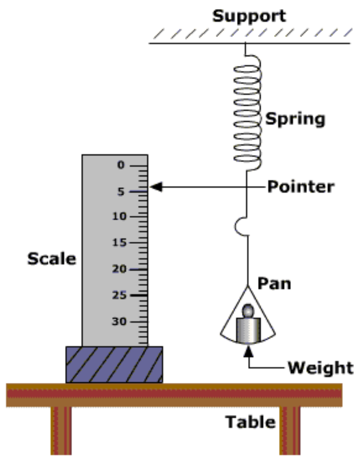
SCHWERPUNKT

Wenn ein Körper im Schwerpunkt aufgehängt wird, ist er im Gleichgewicht. Somit ist das Drehmoment um den Schwerpunkt = 0. Die Schwerkraft, welche auf einen starren Körper wirkt, kann durch eine Kraft im Schwerpunkt ersetzt werden.

$$\boldsymbol{r}_p \sum_i m_i = \sum_i m_i \boldsymbol{r}_i$$

Gewichtskraft greift grundsätzlich eigentlich immer in der Mitte des Objektes an. Dies gilt es vor allem auf beim Drehmoment zu beachten.

FEDERKONSTANTE (HOOKE)



Die Ausdehnung ist proportional zur Kraft

$$F = -k(x - x_0)$$

Federkonstante

$$[k] = \frac{N}{m}$$

STARRER KÖRPER

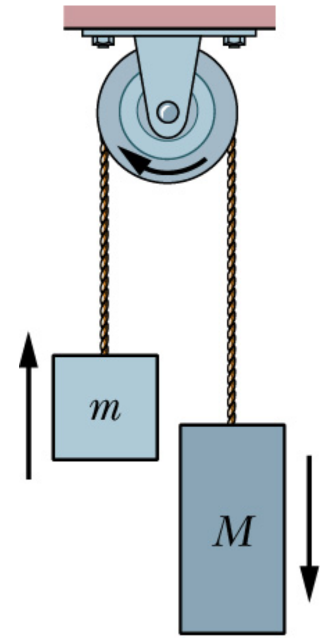
Ein starrer Körper kann nicht deformiert werden. Die einzigen möglichen Bewegungen sind Translation und Rotation. Die Gleichgewichtsbedingungen sind deshalb

$$\vec{F}_{tot} = 0$$

$$\vec{M}_{tot} = 0$$

DYNAMIK

Statik: Gleichgewicht (Kräfte und Drehmoment), Dynamik (Bewegung unter Einfluss von Kräften, dafür wird der Begriff der Masse gebraucht).



Newton: $\vec{F} = m\vec{a}$

F = Kraft [N], m = Masse [kg]

Beispiel

$$Ma = Mg - F_s$$

$$ma = F_s - mg$$

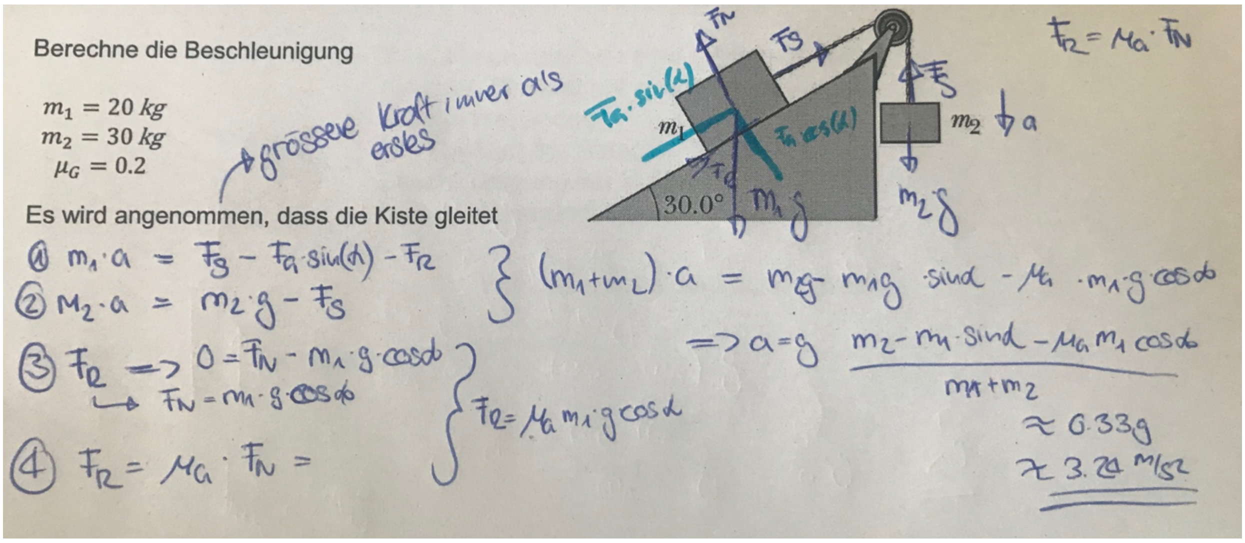
Daraus folgt

$$(m + M)a = g(M - m)$$

TRÄGHEITSGESETZ

Die Masse eines Körpers definiert dessen Trägheit. Es braucht mehr Kraft um einen schwereren Körper zu bewegen. Gleiches gilt auch bei Richtungsänderungen.

SCHIEFE EBENE



GEWICHTSKRAFT

Fg = m * g ➔ Fg ist die Gewichtskraft.

Der Normwert ist die Normalfallbeschleunigung g = 9.80665 m/s^2 (9.81).

Wichtig. Die Gewichtskraft greift immer senkrecht zum Boden an. Meist kommen dann Rechnungen mit Sinus und Cosinus zum Einsatz.

ARBEIT UND ENERGIE

Die Arbeit ist gegeben durch

$$W = \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{s}, \quad wobei\ s\ f\text{ür}\ die\ Streckte\ steht.$$

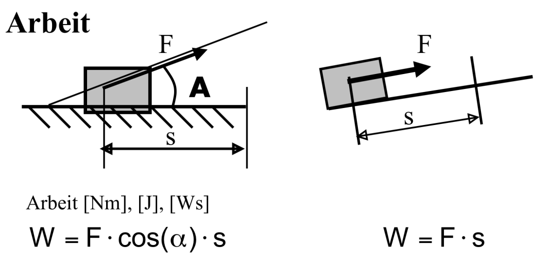
Die Einheit der Arbeit $[W] = \mathrm{N} \cdot \mathrm{m} = \mathrm{J}$

Umwandlung von 1kWh zu J

1 kWh = 3.6 * 10^6 J = 3.6 MJ

Die Arbeit verändert die Energie eines Systems. Dabei gibt es zwei Formen von Enerige. Die Mechanische Energie (Pot, Kin und Federenergie) sowie die innere (thermische) Energie. Die Gesamtenergie eines abgeschlossenen Systems bleibt erhalten. Energie kann nur umgewandelt werden. Meist in Wärmeengerie.

ARBEIT IN DER SCHIEFEN EBENE UND ARBEIT GANZ ALLGEMEIN



POTENTIELLE ENERGIE (ARBEIT UM ETWAS HOCHZUHEBEN)

$$E_{pot} = mgh$$

FEDERENERGIE (ENERGIE BEI FEDERN)

Dies ist auch eine potentielle Energie ➔ k/2 (l-b)^2

$$E_{Feder} = \frac{1}{2}kx^2 \ldots\ldots k = Federkonstante\ [\frac{N}{m}]$$

$$E_{Feder} = \frac{1}{2}c\Delta s^2 \ldots\ldots\ c = Federkonstante\ [\frac{N}{m}]$$

$$c = \frac{F}{s}$$

KINETISCHE ENERGIE (UM ETWAS ZU BESCHLEUNIGEN, BEWEGUNG)

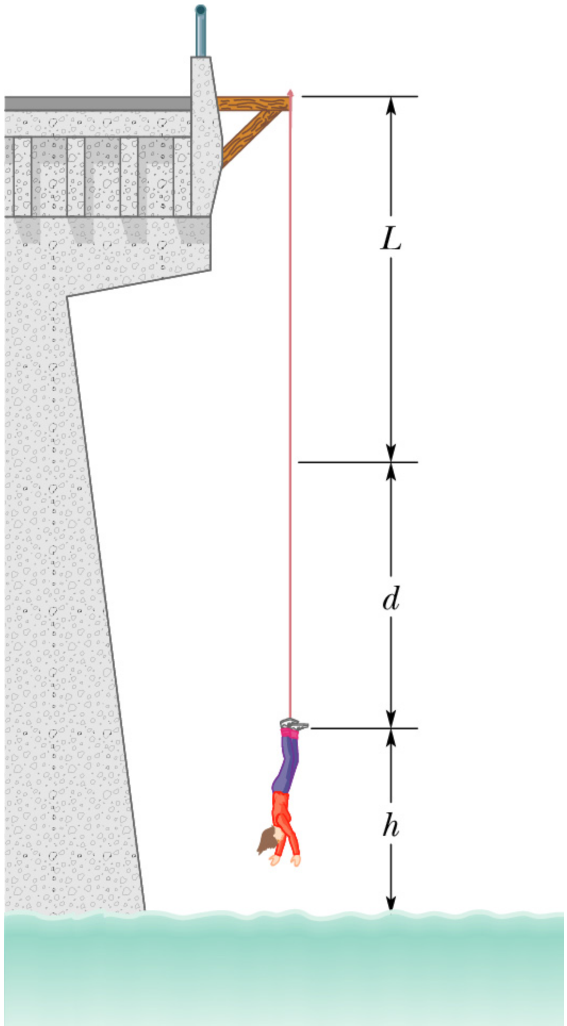
$$E_{kin} = \frac{1}{2} m v^2 \quad \Delta E_{kin} = \frac{1}{2} m {v_{end}}^2 - \frac{1}{2} m {v_{Anfang}}^2$$

WEITERE ENERGIEN

$$E \quad = m * c^2$$

$$E \quad = P * t$$

BEISPIEL "BUNGEE JUMPING"



$$mg(L+d) = \frac{k}{2} d^2 + \frac{m}{2} v^2$$

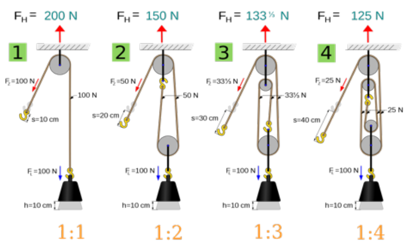
Im Kehrpunkt ist die Geschwindigkeit = 0

$$d^2 - \frac{2mg}{k} d - \frac{2mg}{k} L = 0$$

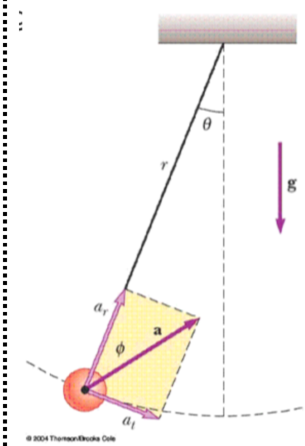
$$d = \frac{mg}{k} + \sqrt{\frac{2mg}{k} + \left(\frac{mg}{k}\right)^2}$$

FLASCHENZUG

Die Gesamtkraft wird beim Flaschenzug durch die Anzahl Seile dazwischen geteilt. Das äusserste Seil wo daran gezogen wird zählt nicht zu den Seilen.

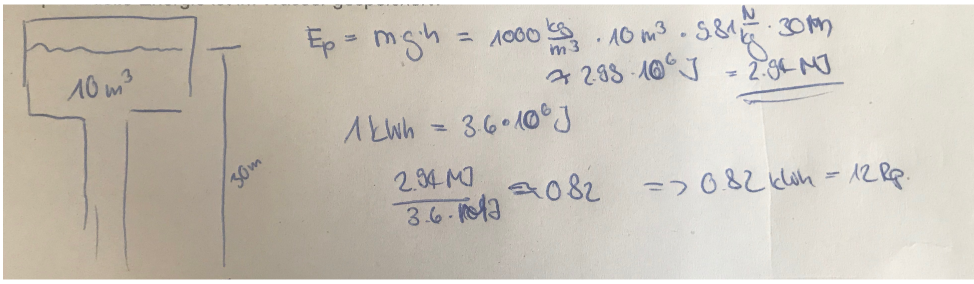


ARBEIT BEI EINER KREISBEWEGUNG



BEISPIEL "WASSERTRUM"

Ein Wasserturm hat ein Volumen von 10 m^3 und eine Höhe von 30 Meter. Wie viel potentielle Energie ist im Wasser gespeichert.



QUADRATISCHE GLEICHUNG

Eine quadratische Gleichung in allgemeiner Form $ax^2 + bx + c = 0$ *hat die Lösungen:*

$$x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

LEISTUNG

Leistung ist Arbeit pro Zeiteinheit

$$P = \frac{W}{t}$$

Einheit Watt

$$[P] = 1\ \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{s}} = 1\ \mathrm{W} \quad 1\ \mathrm{kw} = 1.36\ \mathrm{PS}\ (1\ \mathrm{PS} = 0.735\ \mathrm{kW})$$

Wirkungsgrad

$$\eta = \frac{P_{\text{nutzbar}}}{P_{\text{zugeführt}}} < 1$$

Bei **Translation** (Bewegung auf der Ebene)

$$P = \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{v}\ weil\ W = F * s\ somit\ P = F * \frac{s}{t} = F * v\ (v = a * t)$$

BEISPIEL „BREMSEN EINES AUTO“

Auto mit Masse 1500kg und v = 90km/h muss plötzlich bremsen. Bremsspuren sind 50m. Gesucht ist Gleitreibung zwischen Strasse und Auto.

Energieerhaltung. Kinetische Energie wird zu Bremnsenergie
m * v^2/ 2 = F * s (F = mühq * m * g). so ergibt dies mühg = v^2/2 * g * s.

LEISTUNG BEI VOLUMEN

$$\frac{m}{t} = p * \frac{V}{t}, Volumen * Dichte\ ergibt\ die\ Masse$$

ROTATION UND LEISTUNG

Massenträgheitsmoment

$$J = \sum_i m_i r_i^2$$

Einheit

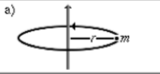
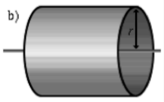
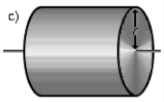
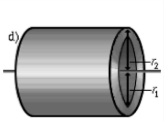
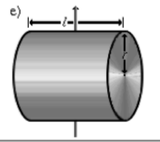
$$[J] = 1\ \mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^2$$

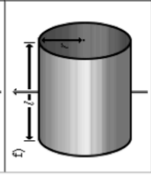
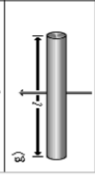
Rotationsenergie

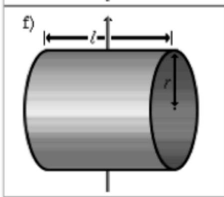
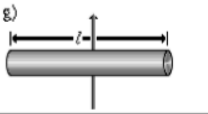
$$Erot = \frac{1}{2}\, J\, \omega^2$$

Leistung bei Rotation

$$P = \boldsymbol{M}\ \cdot, beachte\ Formeln\ von\ früher$$

Abbildung	Beschreibung	Trägheitsmoment
a) 	Eine Punktmasse im Abstand r um eine Drehachse.	$J = m \cdot r^2$
b) 	Ein Zylindermantel, der um seine Symmetrieachse rotiert.	$J = m \cdot r^2$
c) 	Ein Vollzylinder, der um seine Symmetrieachse rotiert.	$J = \frac{1}{2} m \cdot r^2$
d) 	Ein Hohlzylinder, der um seine Körperachse rotiert. Das „+“ sieht zunächst verblüffend aus, doch die Masse ist nicht wie beim Vollzylinder homogen verteilt, sondern liegt ausschließlich im Außenbereich. Ein Hohlzylinder hat also, bei gleicher Masse, im Vergleich zum Vollzylinder ein größeres Trägheitsmoment.	$J = \frac{1}{2} m \cdot (r_2^2 + r_1^2)$
e) 	Ein Vollzylinder, der um eine Achse rotiert, die senkrecht zur Symmetrieachse liegt.	$J = \frac{1}{4} m \cdot r^2 + \frac{1}{12} m \cdot l^2$

f) 	Ein Zylindermantel der senkrecht zu seiner Körperachse rotiert.	$J = \frac{1}{2} m \cdot r^2 + \frac{1}{12} m \cdot l^2$
g) 	Ein dünner Stab, der senkrecht zur Symmetrieachse rotiert. Diese Formel ist eine Näherung für einen Zylinder mit $r \ll l$.	$J = \frac{1}{12} m \cdot l^2$
	Dünner Stab, der senkrecht zu seiner Körperachse um ein Ende rotiert. Diese Formel ist die Anwendung der Steiner-Regel auf den dünnen Stab.	$J = \frac{1}{3} m \cdot l^2$

f) 	Ein Zylindermantel der senkrecht zu seiner Körperachse rotiert.	$J = \frac{1}{2} m \cdot r^2 + \frac{1}{12} m \cdot l^2$
g) 	Ein dünner Stab, der senkrecht zur Symmetrieachse rotiert. Diese Formel ist eine Näherung für einen Zylinder mit $r \ll l$.	$J = \frac{1}{12} m \cdot l^2$
	Dünner Stab, der senkrecht zu seiner Körperachse um ein Ende rotiert. Diese Formel ist die Anwendung der Steiner-Regel auf den dünnen Stab.	$J = \frac{1}{3} m \cdot l^2$

IMPULS UND IMPULSERHALTUNG

Impuls vor dem Stoss = Impuls nach dem Stoss.

Definition des Impulses

$$p = mv$$

Newton mit Impuls

$$\frac{dp}{dt} = F \; (p = Puls\ddot{a}nderung, t = Wirkungsdauer, F = Kraft)$$

Wenn nur Kräfte zwischen zwei Körpern wirken (Kraft = Gegenkraft) bleibt der Impuls erhalten. Die Bewegung des Schwerpunktes ändert sich nicht durch die Kollision

Geschwindigkeit des Schwerpunktes (wenn Objekte dann zusammen sind).

$$\boldsymbol{u} = \frac{m_1 \boldsymbol{v}_1 + m_2 \boldsymbol{v}_2}{m_1 + m_2}$$

Vor dem Stoss

$$v_1 = u + (v_1 - u) = u + v_1^{rel}$$

$$v_2 = u + (v_2 - u) = u + v_2^{rel}$$

ELASTISCHER STOSS

Keine Verformung, Enegie wird jeweils an das nächste Objekt weitergegeben.

Nach dem Stoss

$$v_1 = u - (v_1 - u) = u - v_1^{rel}$$

$$v_2 = u - (v_2 - u) = u - v_2^{rel}$$

Die kinetische Energie ist unverändert

$$E = \frac{m_1 + m_2}{2} u^2 + \frac{m_1}{2} (v_1 - u)^2 + \frac{m_2}{2} (v_2 - u)^2$$

INELASTISCHER STOSS

Energieerhaltung ist nicht garantiert. Meist kommt es hier zu Verformungen (zwei Autos, welche aufeinanderprallen. Beide haben dann die gleiche Geschwindigkeit.

Nach dem Stoss

$$v_1 = u$$

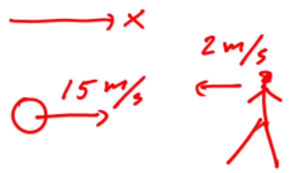
$$v_2 = u$$

Die kinetische Energie ist kleiner

$$E = \frac{m_1 + m_2}{2} u^2$$

BEISPIEL "KOPFBALL"

Wieso kriegen Fussballspieler beim Kopfballspiel keine Hinerschütterung. m1 = 0.45 kg, m2 = 80kg. Vor dem Stoss v1 = 15 m/s und v2 = -2m/s. Wir nehmen an, dass der Stoss elastisch ist.



Die Geschwindigkeitsänderung des Spielers ist sehr gering.

$$u = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} = \frac{0.45 \times 15 + 80 \times (-2)}{0.45 + 80}\ \mathrm{m/s} \approx -1.9\ \mathrm{m/s}$$

$$v_1 = 15\ \mathrm{m/s} = -1.9\ \mathrm{m/s} + 16.9\ \mathrm{m/s} \qquad v_1' = -1.9\ \mathrm{m/s} - 16.9\ \mathrm{m/s} = -18.8\ \mathrm{m/s}$$

$$v_2 = -1.9\ \mathrm{m/s} - 0.1\ \mathrm{m/s} \quad \Longrightarrow \quad v_2' = -1.9\ \mathrm{m/s} + 0.1\ \mathrm{m/s} = -1.8\ \mathrm{m/s}$$

$$\Delta v_1 = -2 \times 16.9\ \mathrm{m/s} = -33.8\ \mathrm{m/s}$$

$$\Delta v_2 = 2 \times 0.1\ \mathrm{m/s} = 0.2\ \mathrm{m/s}$$

DEFORMATIONSARBEIT

Gilt eigentlich nur für den Inelastischen Stoss. Ist eigentlich immer vorhanden. Ausser bei Explosionen. Dann ist Q < 0.

$$\begin{aligned} Q &= E_{kin} - E'_{kin} \\ &= \frac{m_1}{2}(v_1 - u)^2 + \frac{m_2}{2}(v_2 - u)^2 \\ &= \frac{m_1}{2}v_1^2 + \frac{m_2}{2}v_2^2 - \frac{m_1 + m_2}{2}u^2 \end{aligned}$$

DREHIMPULS

Definition

$$L = J\omega$$

Dynamisches Gesetz der Rotation

$$\frac{dL}{dt} = M$$

Wenn keine externe Momente wirken, bleibt der Gesamtdrehimpuls konstant.

Beispiel:

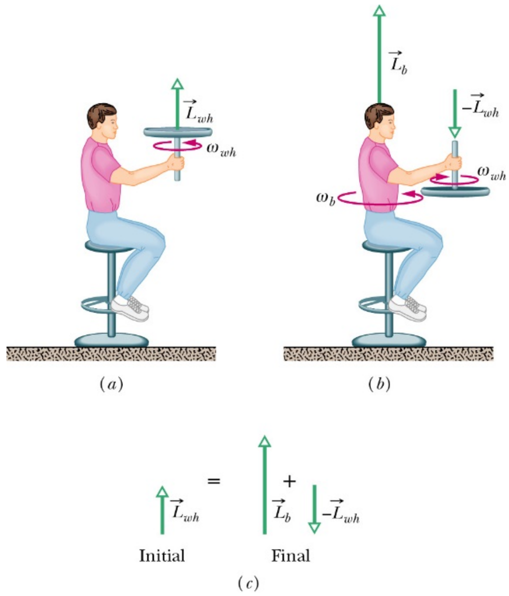
$$L_b = J_b \omega_b$$

$$L_{wh} = J_{wh}\omega_{wh}$$

$$L_{wh} = L_b - L_{wh}$$

$$J_{wh}\omega_{wh} = J_b\omega_b - J_{wh}\omega_{wh}$$

$$\omega_b = \frac{2J_{wh}}{J_b}\omega_{wh}$$



HYDROSTATIK

Druck ist Kraft pro Fläche

$$p = \frac{F}{A}$$

Einheit Pascal: $[p] = \mathrm{Pa} = \mathrm{N}\, m^{-2} = \mathrm{kg\, m^{-1}\, s^{-2}}$

Weitere Einheiten: $1\ \mathrm{bar} = 10^5\ \mathrm{Pa}$

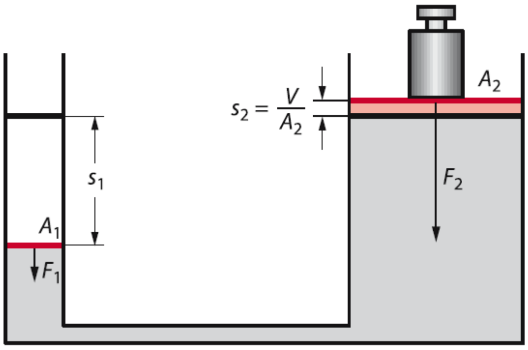
Das Gesetz von Pascal: Der Druck ist eine skalare Grösse und auf jede Fläche gleich.

Hydraulische Presse: Der Druck ist überall gleich. Die Kraft auf den Kolben ist proportional zur Fläche:

$$F_1 = p\, A_1$$

$$F_2 = p\, A_2$$

$$\frac{F_1}{A_1} = \frac{F_2}{A_2} \Rightarrow F_2 = \frac{A_2}{A_1}\, F_1$$



HYDROSTATISCHER DRUCK

Der Druck nimmt mit der Wassertiefe zu

$$dp = \rho\, g\, dh$$

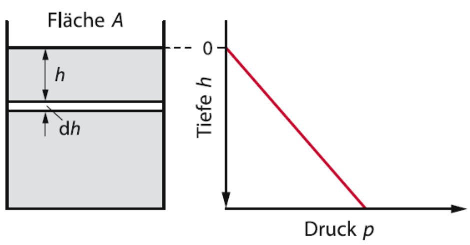


Abb. 3.13. Zur Herleitung der Formel für den Schweredruck; bei einer inkompressiblen Flüssigkeit ($\rho = \mathrm{const.}$) steigt er proportional zur Wassertiefe *h* an

Wenn die Dichte konstant ist, gilt für den Überdruck

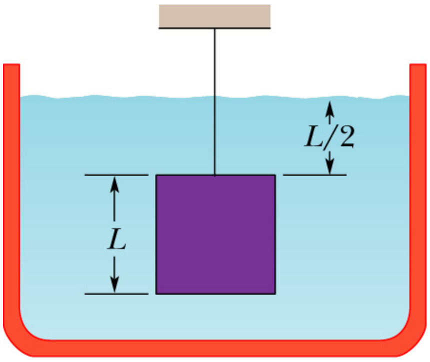
$$p = \rho g h$$

STATISCHER AUFTRIEB

Die Druckverteilung auf einen Körper erzeugt Auftrieb. Die benötigte Seilkraft, um ein Gewicht zu halten, ist somit.

$$F_s = mg - \rho_f V g = (\rho - \rho_f) V g$$

Wenn die Dichte des Körpers kleiner als die des Fluids (Holzklotz im Wasser) wird die Kraft negativ, d.h. die Gewichtskraft ist nicht gross genug damit der Klotz untertaucht.



Der statische Auftrieb ist nur vom Volumen des Körpers abhängig und von der

$$F_A = \rho_f V g$$

Alternative Formulierung: «Der Auftrieb ist gleich dem Gewicht des verdrängten Wassers».

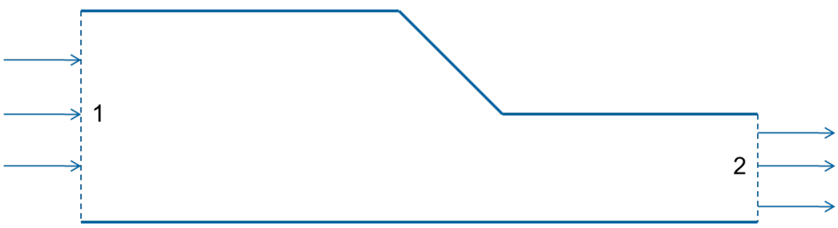
KONTINUITÄTSGLEICHUNG – MASSENERHALTUNG

Der Massenfluss einer Strömung ist erhalten. Somit gilt

$$\dot{m} = \rho_1 v_1 A_1 = \rho_2 v_2 A_2$$

Wenn die Dichte konstant ist, ist der Volumenstrom auch erhalten

$$\dot{V} = v_1 A_1 = v_2 A_2$$

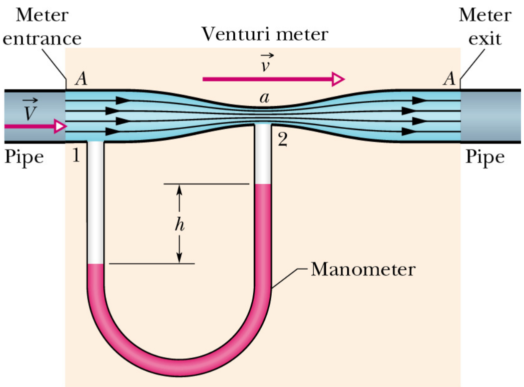


ENERGIEERHALTUNG – BERNOULLI

Der Totaldruck ist entlang einer Stromlinie erhalten

$$p_1 + \frac{\rho}{2} v_1^2 + \rho g h_1 = p_2 + \frac{\rho}{2} v_2^2 + \rho g h_2$$

Typisches Beispiel:



$$V = \sqrt{\frac{2a^2\, \Delta p}{\rho(A^2 - a^2)}} = \sqrt{\frac{2a^2\, \rho_w g h}{\rho(A^2 - a^2)}}$$

TURBULENZ

Die dimensionslose Reynolds-Zahl entscheidet, ob eine Strömung Laminar oder Viskos ist. Für eine Rohrströmung gilt

$$Re = \frac{\rho v D}{\mu}$$

mit der Dichte ρ, Geschwindigkeit v, Durchmesser D und dynamischen Viskosität μ. Eine Rohrströmung ist laminar für $Re < 2400$.

ROHRSTRÖMUNG

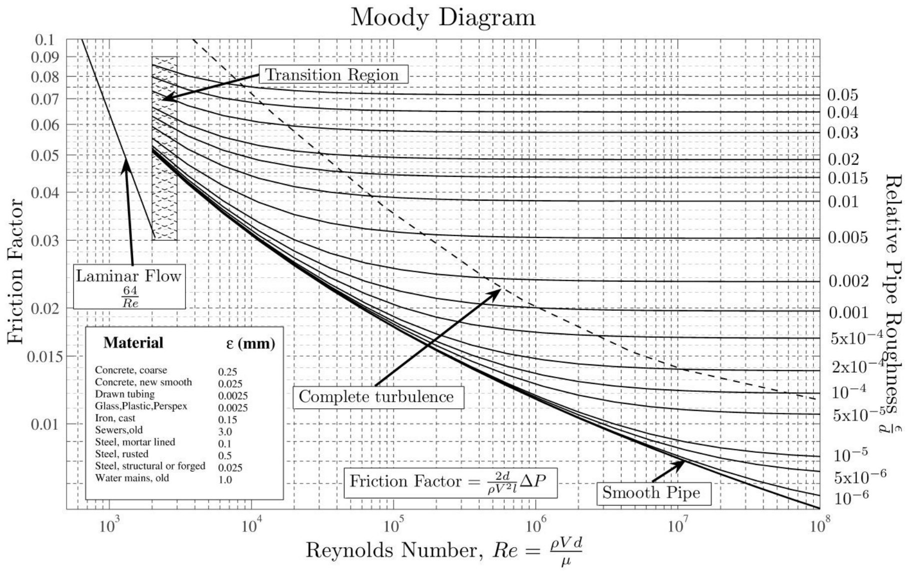
Der Druckabfall in einem Rohr kann wie folgt geschrieben werden

$$\Delta p = \lambda(Re)\frac{\rho v^2}{2}\frac{l}{D}$$

Die Reibungszahl kann wie folgt angenähert werden

$$\lambda(Re) = \begin{cases} 64/Re & \text{laminar} \\ 0.316/Re^{\frac{1}{4}} & \text{turbulent} \end{cases}$$

Die Reibungszahl kann auch aus einem Moody-Diagramm abgelesen werden.



LUFTWIDERSTAND

Der Luftwiderstand eines Körpers wird ähnlich geschrieben

$$F_D = c_W \frac{\rho}{2} v^2 A$$

A ist die projizierte Fläche senkrecht zur Strömung und c_W ist eine dimensionslose Zahl, welche die aerodynamischen Eigenschaften des Körpers beschreibt. Diese Zahl wird z.B. für Autos angegeben. Beispiele:

1. Kugel
2. Quader
3. Tropfen

TRAGFLÜGEL

Der Widerstand und der Auftrieb eines Tragflügels sind von der Form des Flügels uns von dem Anstellwinkel α abhängig. Die Formeln sind

$$F_W = c_W(\alpha)\frac{\rho}{2}\, v^2\, A$$

$$F_A = c_A(\alpha)\frac{\rho}{2}\, v^2\, A$$

Der Gleitwinkel ϕ gibt an, wie schnell das Flugzeug im Gleitflug an Höhe verliert. Es gilt

$$\tan\phi = \frac{c_W}{c_A}$$

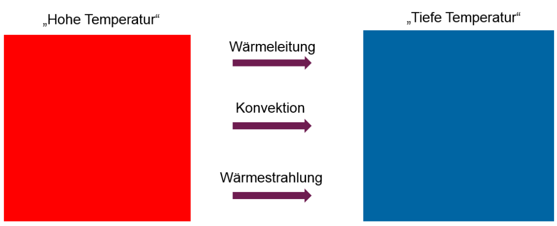
Hauptsätze der Thermodynamik

1. Hauptsatz: Die Energie eines abgeschlossenen Systems ist erhalten.
2. Hauptsatz: Die Entropie eines abgeschlossenen Systems kann nie abnehmen

Klassifizierung thermodynamischer Systeme

Bezeichnung	**Systemgrenze ist offen für**	**Beispiele**
Offen	Energie und Materie	Verbrennung
Geschlossen	Energie	Wärmepumpe
Abgeschlossen	nichts	Thermosflasche
Adiabatisch	Mechanische Arbeit (aber keine Wärme)	Schnelle Vorgänge (z.B. Kompression)

WÄRMEAUSTAUSCH



Temperatur und Temperaturskalen

	Celsius	Kelvin	Fahrenheit
Gefrierpunkt	0 °C	273.15 K	32 F
Siedepunkt	100 °C	373.15 K	212 F

STOFFMENGE

Avogadrozahl: 1 Mol $= N_A = 6.02214179(30) \cdot 10^{23}$

Das Gewicht von Atomen und Molekülen wird in atomic mass units (1 u) angegeben.

$$1\ \mathrm{u} = 1.660\,538\,782(83) \cdot 10^{-27}\ \mathrm{kg}$$

Es gilt

$$N_A \cdot \mathrm{u} = 1\ \mathrm{g}$$

Bsp: Die Masse eines Kohlenstoffatoms (C) ist etwa 12 u. Somit wiegt ein Mol Kohlenstoff etwa 12 g.

Thermische Zustandsgleichung des idealen Gases

Es gilt

$$pV = nRT$$

oder

$$pV = Nk_BT$$

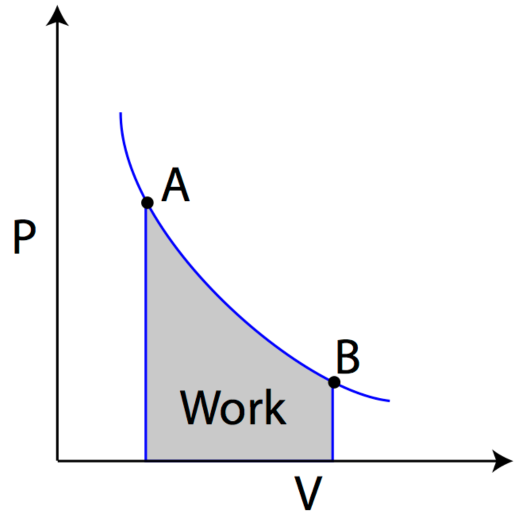
Dabei bezeichnen p den Absolutdruck, V das Volumen, N die Anzahl Teilchen, n die Molzahl und T die Temperatur in Kelvin. Ferner sind

Bolztmannkonstante: $k_B = 1.381 \times 10^{-23}\ \mathrm{J/K}$

Gaskonstante: $R = k_B \cdot N_A \approx 8.314\ \mathrm{J/mol\,K}$

ARBEIT IN EINEM P-V DIAGRAMM

Die Kompression eines Gases erfordert Arbeit.



$$dW = -p\,dV$$

$$W = -\int_{V_1}^{V_2} p\,dV$$

Um das Integral berechnen zu können, brauchen wir den Druck in Abhängigkeit vom Volumen. Bei einer isothermen Kompression bleibt die Temperatur konstant. Aus dem idealen Gasgesetz haben wir

$$p(V) = \frac{nRT}{V}$$

Somit ist die Arbeit

$$W = nRT \ln\frac{V_1}{V_2}$$

WÄRMEKAPAZITÄT

Die Wärmekapazität gibt an, wie viel Wärme benötigt wird um Materie zu erwärmen. Es gilt

$$\delta Q = C\ dT$$

Dabei ist dT die Änderung der Temperatur und δQ die benötigte Wärmemenge. Die Wärmekapazität wird mit C bezeichnet und hat die Einheit

$$[C] = J \cdot K^{-1}$$

Häufig macht es mehr Sinn, eine spezifische oder eine molare Wärmekapazität zu definieren

$$C_m = \frac{C}{n}$$

$$c = \frac{C}{m}$$

Die Wärmekapazität ist von der Anzahl Freiheitsgrade abhängig. In der klassischen Physik gilt (Äquipartionstheorem):

$$C = \frac{f}{2}\ N\ k_B$$

Wo f die Anzahl Freiheitsgrade pro Teilchen und N die Anzahl Teilchen (Atome oder Moleküle) bezeichnet.

WÄRMEKAPAZITÄT VON GASEN

Wenn ein Gas erwärmt wird, dehnt es sich aus. Ein Teil der zugeführten Energie wird deshalb für die Expansionsarbeit aufgewendet. Somit braucht die Erwärmung eines Gases mehr Energie:

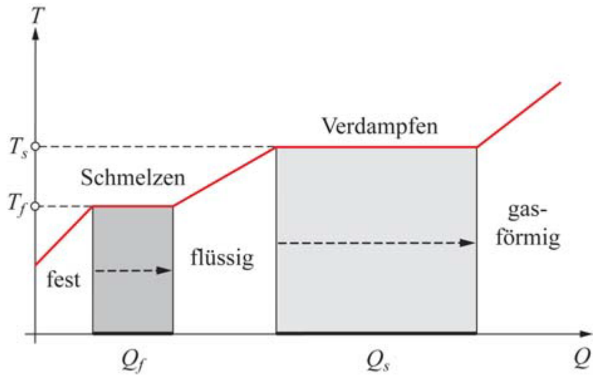
$$C_p = C_v + nR$$

Der Unterschied zwischen C_p (Wärmekapazität bei konstantem Druck) und C_v (Wärmekapazität bei konstantem Volumen) kann auch mit Hilfe des Adiabatenexponenten geschrieben werden

$$\kappa = \frac{C_p}{C_v}$$

PHASENÜBERGÄNGE

Die meisten Substanzen kommen in unterschiedlichen Aggregatszuständen (Phasen) vor: Fest, Flüssig und Gas. Mit den Phasenübergängen ist eine latente Wärme verbunden



Beispiel: Wasser

Für Wasser gilt

Wärmekapazität: $C_v = 4.187\ \mathrm{kJ/kg \cdot K}$

Schmelzwärme: $Q_f = 334\ \mathrm{kJ/kg}$

Verdampfungswärme: $Q_s = 2256\ \mathrm{kJ/kg}$

DAMPFDRUCK

Die der Dampfdruck von Wasser ist eine eindeutige Funktion der Temperature $p_S(T)$. Der Dampfdruck entscheidet, wann Wasser kocht und definiert den Sättigungsdruck für Wasserdampf. Somit kann auch der Taupunkt berechnet werden.

Taupunkt: $f_r \cdot p_s(T) = p_s(T_t)$

Dabei ist f_r die relative Luftfeuchtigkeit und T_t die Temperatur des Taupunktes.

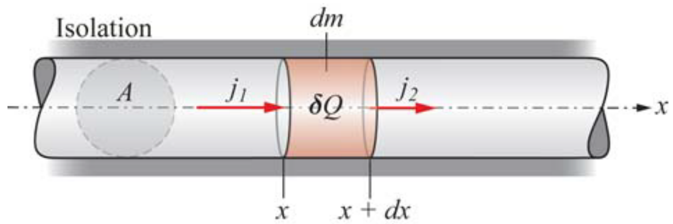
WÄRMELEITUNG

Die Wärmestromdichte ist gegeben durch

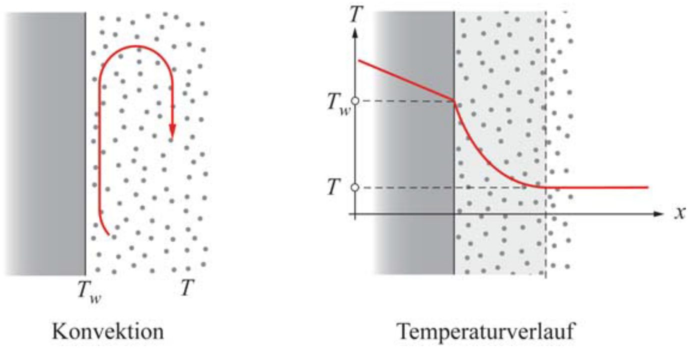
$$j_q = -\lambda \frac{dT}{dx}$$

Wärmestromdichte: $[j_q] = \frac{W}{m^2}$

Wärmeleitfähigkeit: $[\lambda] = \frac{W}{m \cdot K}$



WÄRMEÜBERGANG (DURCH KONVEKTION)

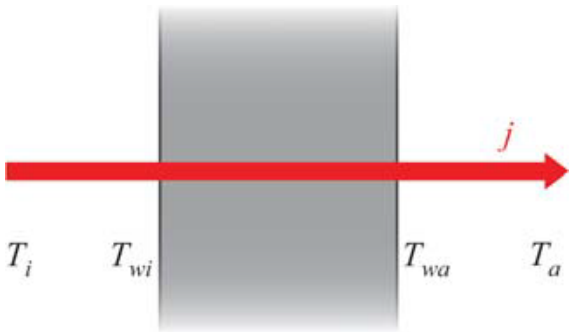


Der Wärmeübergang von einer Wand in die Luft ist geben durch

$$j_q = \alpha(T - T_w)$$

Wärmeübergangskoeffizient: $[\alpha] = \frac{W}{m^2 \cdot K}$

Wärmedurchgangszahl einer Wand



Die Wärmestromdichte ist geben durch

$$j_q = k\,(T_i - T_a)$$

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{\alpha_i} + \frac{d}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_a}$$

HEIZBEDARF EINE GEBÄUDES

Die benötigte Heizleistung eines Hauses ist gegeben durch

$$\dot{Q} = \dot{Q}_w + \dot{Q}_L = \left(\sum_q A_q k_q + \rho c_p \dot{V}\right) \Delta T$$

Der Wärmeverlust durch Wände, Fenster ist von den Wandflächen A_q und deren Wärmedurchgangzahlen k_q gegeben. Der andere Beitrag kommt vom Luftaustausch.

WÄRMESTRAHLUNG

Die Wärmeabgabe einer Fläche durch Strahlung ist gegeben durch

$$E(T) = \varepsilon K_s(T)$$

Das Emissionsvermögen eines schwarzen Körpers ist

$$K_s(T) = \sigma_{SB} T^4$$

Die Konstante ist die Stephan-Boltzmann-Konstante

$$\sigma_{SB} = \frac{2\pi^5 k_B^4}{15c^2h^3} \approx 5.6704 \cdot 10^{-8} \ \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2\ \mathrm{K}^4}$$

Das Emissionsverhältnis des Körpers wird durch ε bezeichnet. Aus thermodynamischen Überlegungen gilt: Absorption = Emission

$$\varepsilon = \alpha$$

Das Emissionsverhältnis und Absorptionsverhältnis sind beide im Bereich [0,1]

ZUSTANDSÄNDERUNGEN

Der 1. Hauptsatz gilt immer

$$dU = \delta Q + \delta W = \delta Q - pdV$$

Die innere Energie eines idealen Gases ist nur von der Temperaturänderungen abhängig

$$dU = m\, c_v\, dT$$

ISOTHERME ZUSTANDSÄNDERUNG

$$W = nRT \ln \frac{V_1}{V_2}$$

$$dU = 0$$

ISOCHORE ZUSTANDSÄNDERUNG

$$\delta W = 0$$

$$\delta Q = dU$$

ISOBARE ZUSTANDSÄNDERUNG

$$W = p(V_1 - V_2)$$

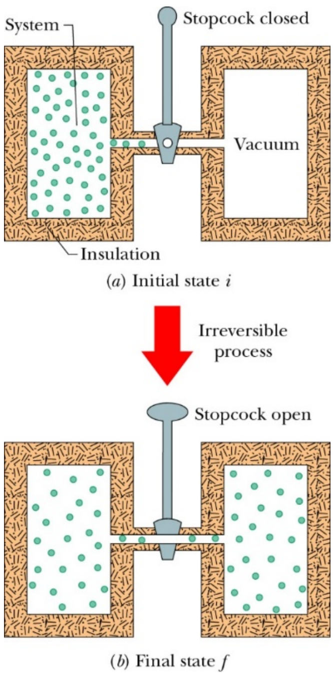
$$Q = m\, c_p\, (T_2 - T_1)$$

ADIABATISCHE ZUSTANDSÄNDERUNG

$$\delta Q = 0$$

$$p\, V^\kappa = konst.$$

ENTROPIE

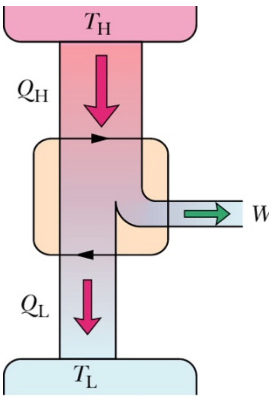


Bei diesem Experiment ändert sich die Energie des Systems nicht. Die Entropie nimmt aber zu. Deshalb ist das Experiment irreversibel: Das Gas wird nicht von sich aus zurückfliessen. Dies ist ein statistischer Effekt.

Die Entropieänderung eines Systems ist

$$dS = \frac{\delta Q}{T}$$

CARNOT MASCHINE



Wir betrachten einen Maschine, welche Wärme von einem heissen Reservoir transportiert und gleichzeitig Arbeit leistet (Dampfmaschine, Stirling-Motor)

Es gilt

Erster Hauptsatz:

$$W = Q_H - Q_L$$

Zweiter Hauptsatz:

$$\frac{Q_L}{T_L} \geq \frac{Q_H}{T_H}$$

Daraus folgt für den Wirkungsgrad

$$\eta = \frac{W}{Q_H} = \frac{Q_H - Q_L}{Q_H} = 1 - \frac{Q_L}{Q_H} \leq 1 - \frac{T_L}{T_H}$$

Der maximale Wirkungsgrad ist der Carnot Wirkungsgrad

$$\eta_C = 1 - \frac{T_L}{T_H}$$

Beispiel: Wir wollen einen Dampfmaschine mit einer Temperatur von $T_H = 120°C$ betreiben. Das Kühlwasser hat eine Temperatur von $T_L = 10°C$. Der maximale Wirkungsgrad ist dann

$$\eta = 1 - \frac{283\ K}{393\ K} \approx 0.25$$