

第十八章 动态优化模型

动态过程的另一类问题是所谓的动态优化问题,这类问题一般要归结为求最优控制函数使某个泛函达到极值。当控制函数可以事先确定为某种特殊的函数形式时,问题又简化为求普通函数的极值。求解泛函极值问题的方法主要有变分法和最优控制理论方法。

§1 变分法简介

变分法是研究泛函极值问题的一种经典数学方法,有着广泛的应用。下面先介绍变分法的基本概念和基本结果,然后介绍动态系统最优控制问题求解的必要条件和最大值原理。

1.1 变分法的基本概念

1.1.1 泛函

设 S 为一函数集合,若对于每一个函数 $x(t) \in S$ 有一个实数 J 与之对应,则称 J 是对应在 S 上的泛函,记作 $J(x(t))$ 。 S 称为 J 的容许函数集。

通俗地说,泛函就是“函数的函数”。

例如对于 xy 平面上过定点 $A(x_1, y_1)$ 和 $B(x_2, y_2)$ 的每一条光滑曲线 $y(x)$,绕 x 轴旋转得一旋转体,旋转体的侧面积是曲线 $y(x)$ 的泛函 $J(y(x))$ 。由微积分知识不难写出

$$J(y(x)) = \int_{x_1}^{x_2} 2\pi y(x) \sqrt{1 + y'^2(x)} dx \quad (1)$$

容许函数集可表示为

$$S = \{y(x) \mid y(x) \in C^1[x_1, x_2], y(x_1) = y_1, y(x_2) = y_2\} \quad (2)$$

最简单的一类泛函表为

$$J(x(t)) = \int_{t_1}^{t_2} F(t, x, \dot{x}) dt \quad (3)$$

被积函数 F 包含自变量 t , 未知函数 x 及导数 \dot{x} 。(1) 式是最简泛函。

1.1.2 泛函的极值

泛函 $J(x(t))$ 在 $x_0(t) \in S$ 取得极小值是指,对于任意一个与 $x_0(t)$ 接近的 $x(t) \in S$, 都有 $J(x(t)) \geq J(x_0(t))$ 。所谓接近,可以用距离 $d(x(t), x_0(t)) < \varepsilon$ 来度量,而距离定义为

$$d(x(t), x_0(t)) = \max_{t_1 \leq t \leq t_2} \{ |x(t) - x_0(t)|, |\dot{x}(t) - \dot{x}_0(t)| \}$$

泛函的极大值可以类似地定义。 $x_0(t)$ 称为泛函的极值函数或极值曲线。

1.1.3 泛函的变分

如同函数的微分是增量的线性主部一样,泛函的变分是泛函增量的线性主部。作为泛函的自变量,函数 $x(t)$ 在 $x_0(t)$ 的增量记为

$$\delta x(t) = x(t) - x_0(t)$$

也称函数的变分。由它引起的泛函的增量记作

$$\Delta J = J(x_0(t) + \delta x(t)) - J(x_0(t))$$

如果 ΔJ 可以表为

$$\Delta J = L(x_0(t), \delta x(t)) + r(x_0(t), \delta x(t))$$

其中 L 为 δx 的线性项, 而 r 是 δx 的高阶项, 则 L 称为泛函在 $x_0(t)$ 的变分, 记作 $\delta J(x_0(t))$ 。用变动的 $x(t)$ 代替 $x_0(t)$, 就有 $\delta J(x(t))$ 。

泛函变分的一个重要形式是它可以表为对参数 α 的导数:

$$\delta J(x(t)) = \left. \frac{\partial}{\partial \alpha} J(x(t) + \alpha \delta x(t)) \right|_{\alpha=0} \quad (4)$$

这是因为当变分存在时, 增量

$$\Delta J = J(x(t) + \alpha \delta x) - J(x(t)) = L(x(t), \alpha \delta x) + r(x(t), \alpha \delta x)$$

根据 L 和 r 的性质有

$$\begin{aligned} L(x(t), \alpha \delta x) &= \alpha L(x(t), \delta x) \\ \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{r(x(t), \alpha \delta x)}{\alpha} &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{r(x(t), \alpha \delta x)}{\alpha \delta x} \delta x = 0 \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial}{\partial \alpha} J(x + \alpha \delta x) \right|_{\alpha=0} &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{J(x + \alpha \delta x) - J(x)}{\alpha} \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{L(x, \alpha \delta x) + r(x, \alpha \delta x)}{\alpha} = L(x, \delta x) = \delta J(x) \end{aligned}$$

1.1.4 极值与变分

利用变分的表达式 (4) 可以得到泛函极值与变分的关系。

若 $J(x(t))$ 在 $x_0(t)$ 达到极值 (极大或极小), 则

$$\delta J(x_0(t)) = 0 \quad (5)$$

这是因为对任意给定的 δx , $J(x_0 + \alpha \delta x)$ 是变量 α 的函数, 该函数在 $\alpha = 0$ 处达到极值。根据函数极值的必要条件知

$$\left. \frac{\partial}{\partial \alpha} J(x_0 + \alpha \delta x) \right|_{\alpha=0} = 0$$

于是由 (4) 式直接得到 (5) 式。

1.1.5. 变分法的基本引理

引理 $\varphi(x) \in C[x_1, x_2]$, $\forall \eta(x) \in C^1[x_1, x_2]$, $\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0$, 有

$$\int_{x_1}^{x_2} \varphi(x) \eta(x) dx \equiv 0,$$

则 $\varphi(x) \equiv 0$, $x \in [x_1, x_2]$ 。

1.2 无约束条件的泛函极值

求泛函

$$J = \int_{t_0}^{t_f} F(t, x(t), \dot{x}(t)) dt \quad (6)$$

的极值, 一般是用泛函极值的必要条件去寻找一条曲线 $x(t)$, 使给定的二阶连续可微函数 F 沿该曲线的积分达到极值。常称这条曲线为极值曲线 (或轨线), 记为 $x^*(t)$ 。

1.2.1 端点固定的情况

设容许曲线 $x(t)$ 满足边界条件

$$x(t_0) = x_0, \quad x(t_f) = x_f \quad (7)$$

且二次可微。

首先计算 (6) 式的变分:

$$\begin{aligned} \delta J &= \frac{\partial}{\partial \alpha} J(x(t) + \alpha \delta x(t)) \Big|_{\alpha=0} \\ &= \int_{t_0}^{t_f} \frac{\partial}{\partial \alpha} F(t, x(t) + \alpha \delta x(t), \dot{x}(t) + \alpha \delta \dot{x}(t)) \Big|_{\alpha=0} dt \\ &= \int_{t_0}^{t_f} [F_x(t, x, \dot{x}) \delta x + F_{\dot{x}}(t, x, \dot{x}) \delta \dot{x}] dt \end{aligned} \quad (8)$$

对上式右端第二项做分部积分, 并利用 $\delta x(t_0) = \delta x(t_f) = 0$, 有

$$\int_{t_0}^{t_f} F_{\dot{x}}(t, x, \dot{x}) \delta \dot{x} dt = - \int_{t_0}^{t_f} \frac{d}{dt} F_{\dot{x}}(t, x, \dot{x}) \delta x dt,$$

再代回到 (8) 式, 并利用泛函取极值的必要条件, 有

$$\delta J = \int_{t_0}^{t_f} [F_x - \frac{d}{dt} F_{\dot{x}}] \delta x dt = 0$$

因为 δx 的任意性, 及 $\delta x(t_0) = \delta x(t_f) = 0$, 所以由基本引理得到著名的欧拉方程

$$F_x - \frac{d}{dt} F_{\dot{x}} = 0 \quad (9)$$

它是这类最简泛函取极值的必要条件。

(9) 式又可记作

$$F_x - F_{t\dot{x}} - F_{x\ddot{x}} \dot{x} - F_{\dot{x}\ddot{x}} \ddot{x} = 0 \quad (10)$$

通常这是 $x(t)$ 的二阶微分方程, 其通解的两个任意常数由 (7) 式中的两个端点条件确定。

1.2.2 最简泛函的几种特殊情形

(i) F 不依赖于 \dot{x} , 即 $F = F(t, x)$

这时 $F_{\dot{x}} \equiv 0$, 欧拉方程为 $F_x(t, x) = 0$, 这个方程以隐函数形式给出 $x(t)$, 但它一般不满足边界条件, 因此, 变分问题无解。

(ii) F 不依赖 x , 即 $F = F(t, \dot{x})$

欧拉方程为

$$\frac{d}{dt} F_{\dot{x}}(t, \dot{x}) = 0$$

将上式积分一次, 便得首次积分 $F_{\dot{x}}(t, \dot{x}) = c_1$, 由此可求出 $\dot{x} = \varphi(t, c_1)$, 积分后得到可能的极值曲线族

$$x = \int \varphi(t, c_1) dt$$

(iii) F 只依赖于 \dot{x} , 即 $F = F(\dot{x})$

这时 $F_x = 0, F_{t\dot{x}} = 0, F_{x\ddot{x}} = 0$, 欧拉方程为

$$\ddot{x} F_{\dot{x}\ddot{x}} = 0$$

由此可设 $\ddot{x} = 0$ 或 $F_{\dot{x}\ddot{x}} = 0$, 如果 $\ddot{x} = 0$, 则得到含有两个参数的直线族 $x = c_1 t + c_2$ 。

另外若 $F_{\ddot{x}} = 0$ 有一个或几个实根时, 则除了上面的直线族外, 又得到含有一个参数 c 的直线族 $x = kt + c$, 它包含于上面含有两个参数的直线族 $x = c_1 t + c_2$ 中, 于是, 在 $F = F(\dot{x})$ 情况下, 极值曲线必然是直线族。

(iv) F 只依赖于 x 和 \dot{x} , 即 $F = F(x, \dot{x})$

这时有 $F_{\ddot{x}} = 0$, 故欧拉方程为

$$F_x - \dot{x}F_{x\dot{x}} - \ddot{x}F_{\dot{x}\dot{x}} = 0$$

此方程具有首次积分为

$$F - \dot{x}F_{\dot{x}} = c_1$$

事实上, 注意到 F 不依赖于 t , 于是有

$$\frac{d}{dt}(F - \dot{x}F_{\dot{x}}) = F_x \dot{x} + F_{x\dot{x}} \ddot{x} - \ddot{x}F_{\dot{x}\dot{x}} - \dot{x} \frac{d}{dt}F_{\dot{x}} = \dot{x}(F_x - \frac{d}{dt}F_{\dot{x}}) = 0。$$

例 1 (最速降线问题)最速降线问题是历史上变分法开始发展的第一个问题。它是约翰·贝努里 (J. Bernoulli) 于 1696 年提出的。问题的提法是这样的: 设 A 和 B 是铅直平面上不在同一铅直线上的两点, 在所有连结 A 和 B 的平面曲线中, 求一曲线, 当质点仅受重力作用, 且初速为零, 沿此曲线从 A 滑行至 B 时, 使所需时间最短。

解 将 A 点取为坐标原点, x 轴水平向右, y 轴垂直向下, B 点为 $B(x_2, y_2)$ 。根据能量守恒定律, 质点在曲线 $y(x)$ 上任一点处的速度 $\frac{ds}{dt}$ 满足 (s 为弧长)

$$\frac{1}{2}m\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = mgy$$

将 $ds = \sqrt{1 + y'^2} dx$ 代入上式得

$$dt = \sqrt{\frac{1 + y'^2}{2gy}} dx$$

于是质点滑行时间应表为 $y(x)$ 的泛函

$$J(y(x)) = \int_0^{x_2} \sqrt{\frac{1 + y'^2}{2gy}} dx = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^{x_2} \sqrt{\frac{1 + y'^2}{y}} dx$$

端点条件为

$$y(0) = 0, y(x_2) = y_2$$

最速降线满足欧拉方程, 因为

$$F(y, y') = \sqrt{\frac{1 + y'^2}{y}}$$

不含自变量 x , 所以方程 (10) 可写作

$$F_y - F_{yy'} y' - F_{y'y'} y'' = 0$$

等价于

$$\frac{d}{dx}(F - y' F_{y'}) = 0$$

作一次积分得

$$y(1+y'^2) = c_1$$

令 $y' = \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2}$, 则方程化为

$$y = \frac{c_1}{1+y'^2} = c_1 \sin^2 \frac{\theta}{2} = \frac{c_1}{2}(1 - \cos \theta)$$

又因

$$dx = \frac{dy}{y'} = \frac{c_1 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} d\theta}{\operatorname{ctg} \frac{\theta}{2}} = \frac{c_1}{2}(1 - \cos \theta) d\theta$$

积分之, 得

$$x = \frac{c_1}{2}(\theta - \sin \theta) + c_2$$

由边界条件 $y(0) = 0$, 可知 $c_2 = 0$, 故得

$$\begin{cases} x = \frac{c_1}{2}(\theta - \sin \theta) \\ y = \frac{c_1}{2}(1 - \cos \theta). \end{cases}$$

这是摆线(圆滚线)的参数方程, 其中常数 c_1 可利用另一边界条件 $y(x_2) = y_2$ 来确定。

例 2 最小旋转面问题

$$J(y(x)) = 2\pi \int_{x_1}^{x_2} y(x) \sqrt{1+y'^2(x)} dx$$

$$S = \{y \mid y \in C^1[x_1, x_2], y(x_1) = y_1, y(x_2) = y_2\}$$

解 因 $F = y\sqrt{1+y'^2}$ 不包含 x , 故有首次积分

$$F - y' F_{y'} = y\sqrt{1+y'^2} - y' y \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} = c_1$$

化简得

$$y = c_1 \sqrt{1+y'^2}$$

令 $y' = \operatorname{sh} t$, 代入上式得

$$y = c_1 \sqrt{1+\operatorname{sh}^2 t} = c_1 \operatorname{ch} t$$

由于 $dx = \frac{dy}{y'} = \frac{c_1 \operatorname{sh} t dt}{\operatorname{sh} t} = c_1 dt$, 积分之, 得 $x = c_1 t + c_2$, 消去 t , 就得到

$$y = c_1 \operatorname{ch} \frac{x - c_2}{c_1}.$$

这是悬链线方程。

1.2.3 最简泛函的推广

最简泛函取极值的必要条件可以推广到其它情况。

(i) 含多个函数的泛函
使泛函

$$J(y(x), z(x)) = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y', z, z') dx$$

取极值且满足固定边界条件

$$y(x_1) = y_1, y(x_2) = y_2, z(x_1) = z_1, z(x_2) = z_2.$$

的极值曲线 $y = y(x), z = z(x)$ 必满足欧拉方程组

$$\begin{cases} F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = 0 \\ F_z - \frac{d}{dx} F_{z'} = 0 \end{cases}$$

(ii) 含高阶导数的泛函
使泛函

$$J(y(x)) = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y', y'') dx$$

取极值且满足固定边界条件

$$y(x_1) = y_1, y(x_2) = y_2, y'(x_1) = y'_1, y'(x_2) = y'_2$$

的极值曲线 $y = y(x)$ 必满足微分方程

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} + \frac{d^2}{dx^2} F_{y''} = 0$$

(iii) 含多元函数的泛函

设 $z(x, y) \in C^2, (x, y) \in D$, 使泛函

$$J(z(x, y)) = \iint_D F(x, y, z, z_x, z_y) dx dy$$

取极值且在区域 D 的边界线 l 上取已知值的极值函数 $z = z(x, y)$ 必满足方程

$$F_z - \frac{\partial}{\partial x} F_{z_x} - \frac{\partial}{\partial y} F_{z_y} = 0$$

上式称为奥式方程。

1.2.4 端点变动的情况 (横截条件)

设容许曲线 $x(t)$ 在 t_0 固定, 在另一端点 $t = t_f$ 时不固定, 是沿着给定的曲线 $x = \psi(t)$ 上变动。于是端点条件表示为

$$\begin{cases} x(t_0) = x_0 \\ x(t) = \psi(t) \end{cases}$$

这里 t 是变动的, 不妨用参数形式表示为

$$t = t_f + \alpha dt_f$$

寻找端点变动情况的必要条件, 可仿照前面端点固定情况进行推导, 即有

$$0 = \delta J = \frac{\partial}{\partial \alpha} \int_{t_0}^{t_f + \alpha dt_f} F(t, x + \alpha \delta x, \dot{x} + \alpha \delta \dot{x}) dt \Big|_{\alpha=0}$$

$$= \int_{t_0}^{t_f} (F_x - \frac{d}{dt} F_{\dot{x}}) \delta x dt + F_{\dot{x}} \delta x \Big|_{t=t_f} + F \Big|_{t=t_f} dt_f \quad (11)$$

再对 (11) 式做如下分析:

(i) 对每一个固定的 t_f , $x(t)$ 都满足欧拉方程, 即 (11) 式右端的第一项积分为零;

(ii) 为考察 (11) 式的第二、第三项, 建立 dt_f 与 $\delta x \Big|_{t=t_f}$ 之间的关系, 因为

$$x(t_f + \alpha dt_f) + \alpha \delta x(t_f + \alpha dt_f) = \psi(t_f + \alpha dt_f)$$

对 α 求导并令 $\alpha=0$ 得

$$\dot{x}(t_f) dt_f + \delta x \Big|_{t=t_f} = \dot{\psi}(t_f) dt_f$$

即

$$\delta x \Big|_{t=t_f} = [\dot{\psi}(t_f) - \dot{x}(t_f)] dt_f \quad (12)$$

把 (12) 代入 (11) 并利用 dt_f 的任意性, 得

$$[F + (\dot{\psi} - \dot{x}) F_{\dot{x}}] \Big|_{t=t_f} = 0 \quad (13)$$

(13) 式就是确定欧拉方程通解中另一常数的定解条件, 称为横截条件。

横截条件有两种常见的特殊情况:

(i) 当 $x = \psi(t)$ 是垂直横轴的直线时, t_f 固定, $x(t_f)$ 自由, 并称 $x(t_f)$ 为自由端点。此时 (11) 式中 $dt_f = 0$ 及 $\delta x \Big|_{t=t_f}$ 的任意性, 使得自由端点的横截条件

$$F_{\dot{x}} \Big|_{t=t_f} = 0 \quad (14)$$

(ii) 当 $x = \psi(t)$ 是平行横轴的直线时, t_f 自由, $x(t_f)$ 固定, 并称 $x(t_f)$ 为平动端点。此时 $\dot{\psi} = 0$, (13) 式的横截条件变为

$$F - \dot{x} F_{\dot{x}} \Big|_{t=t_f} = 0 \quad (15)$$

注意, 横截条件与欧拉方程联立才能构成泛函极值的必要条件。

1.3 有约束条件的泛函极值

在最优控制系统中, 常常要涉及到有约束条件泛函的极值问题, 其典型形式是对动态系统

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)) \quad (16)$$

寻求最优性能指标 (目标函数)

$$J(u(t)) = \varphi(t_f, x(t_f)) + \int_{t_0}^{t_f} F(t, x(t), u(t)) dt \quad (17)$$

其中 $u(t)$ 是控制策略, $x(t)$ 是轨线, t_0 固定, t_f 及 $x(t_f)$ 自由, $x(t) \in R^n$, $u(t) \in R^m$

(不受限, 充满 R^m 空间), f, φ, F 连续可微。

下面推导取得目标函数极值的最优控制策略 $u^*(t)$ 和最优轨线 $x^*(t)$ 的必要条件。

采用拉格朗日乘子法, 化条件极值为无条件极值, 即考虑

$$J_1(x, u, \lambda) = \varphi(t_f, x(t_f)) + \int_{t_0}^{t_f} [F(t, x, u) + \lambda^T(t)(f(t, x, u) - \dot{x})] dt \quad (18)$$

的无条件极值, 首先定义 (16) 式和 (17) 式的哈密顿 (Hamilton) 函数为

$$H(t, x, u, \lambda) = F(t, x, u) + \lambda^T(t) f(t, x, u) \quad (19)$$

将其代入 (18) 式, 得到泛函

$$J_1(x, u, \lambda) = \varphi(t_f, x(t_f)) + \int_{t_0}^{t_f} [H(t, x, u, \lambda) - \lambda^T \dot{x}] dt \quad (20)$$

下面先对其求变分

$$\begin{aligned} \delta J_1 &= \frac{\partial}{\partial \alpha} \{ \varphi(t_f + \alpha dt_f, x(t_f) + \alpha \delta x(t_f)) \\ &\quad + \int_{t_0}^{t_f + \alpha dt_f} [H(t, x + \alpha \delta x, u + \alpha \delta u, \lambda + \alpha \delta \lambda) - (\lambda + \alpha \delta \lambda)^T (\dot{x} + \alpha \delta \dot{x})] dt \} \Big|_{\alpha=0} \\ &= [\delta x(t_f)]^T \varphi_{x(t_f)} + (dt_f)^T \varphi_{t_f} + (dt_f)^T H(t, x, u, \lambda) \Big|_{t=t_f} - (dt_f)^T (\lambda^T \dot{x}) \Big|_{t=t_f} \\ &\quad + \int_{t_0}^{t_f} [(\delta x)^T H_x + (\delta u)^T H_u + (\delta \lambda)^T H_\lambda - (\delta \lambda)^T \dot{x} - \lambda^T \delta \ddot{x}] dt \\ &= (dt_f)^T [\varphi_{t_f} + F(t, x, u, t)] \Big|_{t=t_f} + [\delta x(t_f)]^T \varphi_{x(t_f)} \\ &\quad + \int_{t_0}^{t_f} [(\delta x)^T H_x + (\delta u)^T H_u + (\delta \lambda)^T H_\lambda - (\delta \lambda)^T \dot{x}] dt - \lambda^T(t_f) \delta x \Big|_{t=t_f} + \int_{t_0}^{t_f} (\delta x)^T \dot{\lambda} dt \end{aligned}$$

注意到 $\delta x \Big|_{t=t_f} \neq \delta x(t_f)$, $\delta x \Big|_{t=t_f} = \delta x(t_f) - \dot{x}(t_f) dt_f$, 因而

$$\begin{aligned} \delta J_1 &= (dt_f)^T [\varphi_{t_f} + H(t, x, u, \lambda) \Big|_{t=t_f}] + [\delta x(t_f)]^T (\varphi_x - \lambda) \Big|_{t=t_f} \\ &\quad + \int_{t_0}^{t_f} [(\delta x)^T (H_x + \dot{\lambda}) + (\delta \lambda)^T (H_\lambda - \dot{x}) + (\delta u)^T H_u] dt \end{aligned}$$

再令 $\delta J_1 = 0$, 由 $dt_f, \delta x(t_f), \delta x, \delta u, \delta \lambda$ 的任意性, 使得

(i) x^*, λ^* 必满足正则方程:

① 状态方程 $\dot{x} = H_\lambda = f(t, x, u)$

② 协态方程 $\dot{\lambda} = -H_x$ 。

(ii) 哈密顿函数 $H(t, x^*, u, \lambda^*)$ 作为 u 的函数, 也必满足

$$H_u = 0$$

并由此方程求得 u^* 。

(iii) 求 x^*, λ^*, u^* 时, 必利用边界条件

① $x(t_0) = x_0$, (用于确定 x^*)

② $\lambda(t_f) = \varphi_{x(t_f)}$, (用于确定 λ^*)

③ $\varphi_{t_f} = -H(t, x, u, \lambda) \Big|_{t=t_f}$, (确定 t_f)

1.4 最大(小)值原理

如果受控系统

$$\dot{x} = f(t, x, u), \quad x(t_0) = x_0$$

其控制策略 $u(t)$ 的全体构成有界集 U , 求 $u(t) \in U$, 使性能指标

$$J(u(t)) = \varphi(t_f, x(t_f)) + \int_{t_0}^{t_f} F(t, x, u) dt$$

达到最大（小）值。

最大（小）值原理：如果 $f(t, x, u)$, $\varphi(t_f, x(t_f))$ 和 $F(t, x, u)$ 都是连续可微的，那么最优控制策略 $u^*(t)$ 和相应的最优轨线 $x^*(t)$ 由下列的必要条件决定：

(i) 最优轨线 $x^*(t)$ ，协态向量 $\lambda^*(t)$ 由下列的必要条件决定：

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= f(t, x, u), \quad u(t) \in U, \\ \frac{d\lambda}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial x}.\end{aligned}$$

(ii) 哈密顿函数

$$H(t, x^*, u, \lambda^*) = F(t, x^*, u) + \lambda^{*T}(t) f(t, x^*, u)$$

作为 $u(t)$ 的函数，最优策略 $u^*(t)$ 必须使

$$H(t, x^*, u^*, \lambda^*) = \max_{u \in U} H(t, x^*, u, \lambda^*)$$

或使

$$H(t, x^*, u^*, \lambda^*) = \min_{u \in U} H(t, x^*, u, \lambda^*) \text{ (最小值原理)}$$

(iii) 满足相应的边界条件

① 若两端点固定，则正则方程的边界条件为

$$x(0) = x_0, \quad x(t_f) = x_f.$$

② 若始端固定，终端 t_f 也固定，而 $x(t_f)$ 自由，则正则方程的边界条件为

$$x(0) = x_0, \quad \lambda(t_f) = \varphi_{x(t_f)}(t_f, x(t_f)).$$

③ 若始端固定，终端 $t_f, x(t_f)$ 都自由，则正则方程的边界条件为

$$x(0) = x_0, \quad \lambda(t_f) = \varphi_{x(t_f)}(t_f, x(t_f)),$$

$$H(t_f, x(t_f), u(t_f), \lambda(t_f)) + \varphi_{t_f}(t_f, x(t_f)) = 0.$$

§2 生产设备的最大经济效益

某工厂购买了一台新设备投入到生产中。一方面该设备随着运行时间的推移其磨损程度愈来愈大，因此其转卖价将随着使用设备的时间增加而减小；另一方面生产设备总是要进行日常保养，花费一定的保养费，保养可以减缓设备的磨损程度，提高设备的转卖价。那么，怎样确定最优保养费和设备转卖时间，才能使这台设备的经济效益最大。

2.1 问题分析与假设

(i) 设备的转卖价是时间 t 的函数，记为 $x(t)$ 。 $x(t)$ 的大小与设备的磨损程度和保养费的多少密切相关。记初始转卖价 $x(0) = x_0$ 。

(ii) 设备随其运行时间的推移，磨损程度越来越大。 t 时刻设备的磨损程度可以用 t 时刻转卖价的损失值来刻画，常称其为磨损函数或废弃函数，记为 $m(t)$ 。

(iii) 保养设备可以减缓设备的磨损速度，提高转卖价。如果 $u(t)$ 是单位时间的保养费， $g(t)$ 是 t 时刻的保养效益系数（每用一元保养费所增加的转卖价），那么单位时间的保养效益为 $g(t)u(t)$ 。另外，保养费不能过大（如单位时间保养费超过单位时间产值时，保养失去了意义），只能在有界函数集中选取，记有界函数集为 W ，则 $u(t) \in W$ 。

(iv) 设单位时间的产值与转卖价的比值记为 p ，则 $px(t)$ 表示在 t 时刻单位时间的产值，即 t 时刻的生产率。

(v) 转卖价 $x(t)$ 及单位时间的保养费 $u(t)$ 都是时间 t 的连续可微函数。为了统一标准，采用它们的贴现值。对于贴现值的计算，例如转卖价 $x(t)$ 的贴现值计算，如果它的贴现因子为 δ （经过单位时间的单位费用贴现），那么由

$$\begin{cases} \frac{dx(t_1)}{dt_1} = \delta x(t_1) \\ x(t) = 1 \end{cases}$$

解得

$$x(t_1) = e^{-\delta(t-t_1)}$$

令 $t_1 = 0$ ，便得 t 时刻单位费用的贴现（称贴现系数）为 $e^{-\delta t}$ ，所以设备在 t 时刻转卖价 $x(t)$ 的贴现为 $x(t)e^{-\delta t}$ 。仿此计算， $u(t)$ 的贴现为 $u(t)e^{-\delta t}$ ，单位时间产值的贴现为 $px(t)e^{-\delta t}$ 。

(vi) 欲确定的转卖时间 t_f 和转卖价 $x(t_f)$ 都是自由的。

2.2 模型构造

根据以上的分析与假设可知：考察的对象是设备在生产中的磨损—保养系统；转卖价体现了磨损和保养的综合指标，可以选作系统的状态变量；在生产中设备磨损的不可控性强，其微弱的可控性也是通过保养体现，加之保养本身具有较强的可控性，所以选单位时间的保养费 $u(t)$ 作为控制策略。这样，生产设备的最大经济效益模型可以构成在设备磨损—保养系统的（转卖价）状态方程

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = -m(t) + g(t)u(t) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (21)$$

之下，在满足 $0 \leq u(t) \leq U$ 的函数集 W 中寻求最优控制策略 $u^*(t)$ ，使系统的经济效益这一性能指标

$$J(u(t)) = x(t_f)e^{-\delta t_f} + \int_0^{t_f} [px(t) - u(t)]e^{-\delta t} dt \quad (22)$$

为最大，其中 $t_f, x(t_f)$ 都是自由的。

2.3 模型求解

首先写出问题的哈密顿函数

$$H = [px(t) - u(t)]e^{-\delta t} + \lambda[-m(t) + g(t)u(t)] \quad (23)$$

再由协态方程及边界条件求出 $\lambda(t)$ ，即由

$$\begin{cases} \frac{d\lambda(t)}{dt} = -H_x = -pe^{-\delta t} \\ \lambda(t_f) = \varphi_{x(t_f)} = e^{-\delta t_f} \end{cases}$$

解得

$$\lambda(t) = (1 - \frac{p}{\delta})e^{-\delta t_f} + \frac{p}{\delta}e^{-\delta t}$$

下面利用最大值原理求 $u^*(t)$ 。先将 (23) 式改变为

$$H = px(t)e^{-\delta t} - \lambda m(t) + [\lambda g(t) - e^{-\delta t}]u(t)$$

显然, H 是对 u 的线性函数, 因此得到

$$u^*(t) = \begin{cases} U, & \lambda g(t) - e^{-\delta t} > 0 \\ 0, & \lambda g(t) - e^{-\delta t} < 0 \end{cases} \quad (24)$$

或

$$u^*(t) = \begin{cases} U, & [(1 - \frac{p}{\delta})e^{-\delta t_f} + \frac{p}{\delta}e^{-\delta t}]g(t) - e^{-\delta t} > 0 \\ 0, & [(1 - \frac{p}{\delta})e^{-\delta t_f} + \frac{p}{\delta}e^{-\delta t}]g(t) - e^{-\delta t} < 0 \end{cases} \quad (25)$$

在上式中, 还需解决两个问题: 一是 $u^*(t) = U$ 与 $u^*(t) = 0$ 的转换点 t_s 在什么位置, 即 t_s 等于多少? 二是 $u^*(t)$ 是由 U 到 0, 还是由 0 到 U 。

转换点 t_s 应满足

$$[(1 - \frac{p}{\delta})e^{-\delta t_f} + \frac{p}{\delta}e^{-\delta t}]g(t) - e^{-\delta t} = 0$$

即

$$[\frac{p}{\delta} - (\frac{p}{\delta} - 1)e^{\delta(t-t_f)}]g(t) - 1 = 0 \quad (26)$$

从而可解出 t_s 。

因为 $g(t)$ 是时间 t 的减函数, 所以 (26) 式的左端也是时间 t 的减函数, 也就是说 $u^*(t)$ 随时间应由 U 到 0。于是最优控制策略的具体表达式为

$$u^* = \begin{cases} U, & 0 \leq t < t_s \\ 0, & t_s < t \leq t_f \end{cases}$$

至于 t_f , $x(t_f)$ 的求法, 请见下面的例子。

例 3 在生产设备的最大经济效益的问题中, 设 $x(0) = 100$, $U = 1$, $m(t) = 2$, $p = 0.1$, $\delta = 0.05$, $g(t) = \frac{2}{(1+t)^{\frac{1}{2}}}$, 试求 t_f , $x(t_f)$ 和 $u^*(t)$ 。

解 由 (26) 式可得求 t_s 的公式

$$(1+t_s)^{\frac{1}{2}} = 4 - 2e^{0.05(t_s-t_f)} \quad (27)$$

当 $t < t_s$ 时, $u^*(t) = U = 1$, 状态方程为

$$\frac{dx}{dt} = -2 + \frac{2}{(1+t)^{\frac{1}{2}}}$$

当 $t > t_s$ 时, $u^*(t) = 0$, 状态方程为

$$\frac{dx}{dt} = -2$$

于是 $t > t_s$ 时, 有

$$\int_0^t \frac{dx}{dt} dt = \int_0^{t_s} \left[-2 + \frac{2}{(1+t)^{\frac{1}{2}}}\right] dt + \int_{t_s}^t (-2) dt$$

解得

$$x(t) = 4(1+t_s)^{\frac{1}{2}} + 96 - 2t \quad (28)$$

由自由边界条件 $H\Big|_{t=t_f} = -\varphi_{t_f}$ 及 $\lambda(t_f) = e^{-\delta t_f}$, 得

$$-px(t_f)e^{-\delta t_f} + 2e^{-\delta t_f} = -\delta e^{-\delta t_f} x(t_f)$$

于是

$$x(t_f) = \frac{2}{p-\delta} = 40$$

当 $t = t_f$ 时, 由 (28) 式有

$$40 = 4(1+t_s)^{\frac{1}{2}} + 96 - 2t_f$$

即

$$t_f = 2(1+t_s)^{\frac{1}{2}} + 28 \quad (29)$$

将 (27) 和 (29) 联立求解, 编写如下 Matlab 程序

```
[x,y]=solve('(1+ts)^(1/2)=4-2*exp(0.05*(ts-tf))','tf=2*(1+ts)^(1/2)+28')
```

求得

$$t_s = 10.6, \quad t_f = 34.8$$

于是, 最优控制策略 (保养费) 为

$$u^*(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < 10.6 \\ 0, & 10.6 < t \leq 34.8 \end{cases}$$

§ 3 产品最佳价格调整问题

3.1 问题提出

物价管理部门根据市场预测和经济协调发展的需要, 决定将 A 产品的单位价格 $p(t)$ 由现在的 $p_0 = 70$ 元调整到 $p_1 = 100$ 元, 并要求各公司自行在一年内完成这一调价任务。某公司经营 A 产品多年, 深知每周 A 产品的销售量 s 与其价格 p 和价格变化率 \dot{p} 有着密切的联系, 公司想利用这种关系制定一个 A 产品的调价方案, 使全年经营 A 产品的总利润最大。在如下假设条件下:

(1) 物价部门对 A 产品的调价决策是积极的、正确的, 在一年内 (调价期) 不会发生对 A 产品的其它调价决策, A 产品在市场上的供求矛盾不会出现大的变化;

(2) 公司多年经营 A 产品关于“每周销售量 s 与其价格 p 和价格变化率 \dot{p} 的关系”的信息是可靠的, 不妨假设 $s = s(p, \dot{p})$;

(3) 公司生产 A 产品的能力足以满足市场需求。设每周生产 s 件 A 产品的生产费用是 $c(s)$;

(4) 函数 $s(p, \dot{p})$ 和 $c(s)$ 由统计方法拟合连续可微函数。现查阅统计资料得到

$$s = s(p, \dot{p}) = -p + 100\dot{p} + 100,$$

$$c(s) = \frac{1}{2}s^2 + 2s + 40$$

经过核实, 这两个具体函数符合公司的实际情况;

(5) 约定一年以 52 周计。在调价期资金流动的时间价值忽略不计。

试建立合理的数学模型为该公司的 A 产品制定最佳调价方案, 并计算在最佳调价方案下的全年最大利润值。

3.2 模型的建立与求解

根据建模假设, 不难构造该问题的数学模型是: 在固定边界条件

$$p(0) = p_0 = 70, \quad p(52) = p_f = 100 \quad (30)$$

之下, 求 A 产品价格 $p(t)$, 使其总利润

$$\begin{aligned} J(p) &= \int_0^{52} [sp - c(s)]dt \\ &= \int_0^{52} \left[-\frac{3}{2}p^2 + 202p - 5000\dot{p}^2 - 10200\dot{p} + 200p\dot{p} - 5240\right]dt \end{aligned} \quad (31)$$

最大。这是固定边界条件下的泛函极值问题。因为满足极值必要条件的欧拉方程为

$$-3p + 202 + 200\dot{p} - \frac{d}{dt}(-1000\dot{p} - 10200 + 200p) = 0$$

化简得到

$$10000\ddot{p} - 3p + 202 = 0$$

再利用边界条件 (30) 式, 得到最佳调整价格函数 (方案) 是

$$p^*(t) = 15.3694e^{0.0173t} - 12.7023e^{-0.0173t} + 67.3333 \quad (32)$$

把 (32) 式代入 (31) 式进行积分, 可得到全年最大利润值约为 170021.48 元。

计算的 Matlab 程序如下:

```
p=dsolve('10000*D2p-3*p+202','p(0)=70,p(52)=100');
ps=vpa(p,6)
dp=diff(p);s=-p+100*dp+100;c=1/2*s^2+2*s+40;
J=int(s*p-c,0,52);J=vpa(J,8)
```

习 题 十 八

1. 求自原点 (0,0) 到直线 $x + y - 1 = 0$ 的最速降线。
2. 求概率密度函数 $\varphi(x)$, 使得信息量

$$J = -\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) \ln[\varphi(x)] dx$$

取最大值, 且满足等周条件

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) dx = 1, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \varphi(x) dx = \sigma^2 \quad (\text{常数}).$$

3. 在生产设备或科学仪器中长期运行的零部件, 如滚珠、轴承、电器元件等会突然发生故障或损坏, 即使是及时更换也已经造成了一定的经济损失。如果在零部件运行一定时期后, 就对尚属正常的零件做预防性更换, 以避免一旦发生故障带来的损失, 从

经济上看是否更为合算？如果合算，做这种预防性更换的时间如何确定呢？

4. 渔场中的鱼的数量由鱼的自然增长和捕捞量决定。设鱼的自然增长服从 **logistic** 模型，而单位时间的捕捞量是当时鱼的总数的一个确定的函数。设 $1t$ 鱼的价格为 p ，捕捞 $1t$ 鱼的费用是鱼总数的一个已知函数，鱼越多费用越省。试建立数学模型求使渔场长期效益最好的捕捞策略。