向量值第二类积分

曲线积分

注:1.计算$\int_L P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$时，将$P(x,y),Q(x,y)$

中的$x,y \xrightarrow{\text{换为曲线}L\text{的参数方程}} x \Rightarrow x(t), y=y(t)$

$\mathrm{d}x=x'(t)\mathrm{d}t, \mathrm{d}y=y'(t)\mathrm{d}t$,

2. 起点对应的参数$t=\alpha \Rightarrow$ 下限;

终点对应的参数$t=\beta \Rightarrow$ 上限.

第二类曲线积分α和β对应起点和终点，不用严格上限大于下限

x,y要是t的单值函数，不单值就要分段，两段用不同的方程

曲面积分

内侧，外侧，把球面分成上下两部分，下半部分，z取负，指向上侧的向量就是指向球的内侧

(4) 若$\vec{F}$ 在有界光滑或分片光滑的有向曲面上连续，则第二型曲面积分一定存在.

若用 $-S$ 表示曲面S 的另一侧，则

$$\iint_S \vec{F}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}S} = -\iint_{-S} \vec{F}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}S}.$$

分面投影

当积分曲面为母线平行于坐标轴的柱面（平面）或积分只有一项,适宜选用坐标形式计算。

注意顺序对应，$Pdydz$，$Qdxdz$，$Rdxdy$

圆柱面：$x^2+y^2=1(0<z<h)$，$Rdxdy=0$，因为母线垂直于xoy平面的圆柱面投影到xoy平面上不是圆面，而是圆形，圆形的面积是0，在该区域内的积分也是0。也不能合一后投影到xoy平面，z无法表示成x，y的函数，无法代入

合一投影

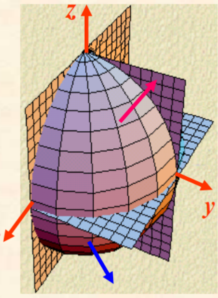
S 在xoy 面的投影区域为 D_{xy} , 则

$$\iint_S \vec{F}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}S} = \iint_S P\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + Q\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + R\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$= \iint_{D_{xy}} \vec{F}[x,y,z(x,y)]\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y. \quad \text{——向量形式}$$

例3 计算$\iint_S xyz\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, 其中$S$是球面$x^2+y^2+z^2=1$

的外侧在$x\geq 0, y\geq 0$的部分.

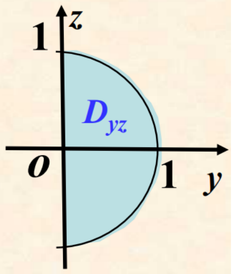


解1 $S: x=\sqrt{1-y^2-z^2}$ 的前侧,

法向量为: $\vec{n}=(1,-x_y,-x_z)$

$$=\left(1,\frac{y}{\sqrt{1-y^2-z^2}},\frac{z}{\sqrt{1-y^2-z^2}}\right),$$

$$\vec{F}=(0,0,xyz)=(0,0,yz\sqrt{1-y^2-z^2})$$



$$\text{原式}=\iint_{D_{yz}}\vec{F}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=\iint_{D_{yz}}yz^2\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^4\cos\theta\sin^2\theta\,\mathrm{d}r=\frac{2}{15}.$$

中

用合一法，选向哪个面投影很重要，最好是方程统一不用分区，法向量指向同侧，所以这里选x=x(y,z)最合适

化为第一类曲面积分

例5 计算向量场 $\vec{r}=(x,y,z)$ 对有向曲面S 的通量.

（1）S 为球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 的外侧；

（2）S 为锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与平面 $z=1$ 所围锥体表面的外侧.

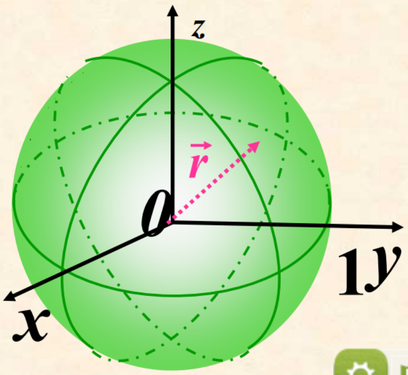
解 所求通量为 $\Phi=\iint\limits_S \vec{r}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}S}=\iint\limits_S \vec{r}\cdot\vec{n}_0\,\mathrm{d}S$

(1) 当S 为单位球面时， 由于

$$\vec{r}=(x,y,z)=\vec{n}_0$$

$$\therefore \vec{r}\cdot\vec{n}_0=\|\vec{r}\|^2=1,$$

$$\Phi=\oiint\limits_S \mathrm{d}S=4\pi$$



思考： 什么条件下适宜将第二型的曲面积分转换为第一型的曲面积分作计算？

由 $\iint\limits_S \vec{F}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}S}=\iint\limits_S \vec{F}\cdot\vec{n}_0\,\mathrm{d}S$ 知，当$\vec{F}\cdot\vec{n}_0$为常数时最好.

每次S变成Dxy时，要代入z=z(x,y)，要注意ds到dxdy的转化

两种表示形式：分坐标

小结

性质

线性

可分区

不同方向/不同侧

表示形式

第一类曲线/曲面积分形式，向量值函数与向量微元（曲线用切向量，曲面用法向量）的乘积

分坐标形式

第二类曲面积分在这两种形式的基础上衍生出了两种算法

计算方法

投影-->转化成一重积分，平面区域内的二重积分的时候

1.代入2.乘放大率3.换积分微元

Distinguish

第二类曲线积分α和β对应起点和终点，不用严格上限大于下限

没有积分保序和保号性，因为积分值与方向有关

$dxdy$是第二类积分的一项，有±，是二重积分中的面积微元则恒大于0

skill

分区（隐式化成显式，方程形式不同），分侧（法向量的±不同）

对称性

image-20210621220131392

研究第二类积分的对称性要在第一类的基础上考虑方向，dx的±，关于x=0（y轴或者yoz平面）对称，考虑关于x奇偶性和dx，dy或者ds（曲面）的方向，对称点的符号相同就是二倍，相反就抵消=0

第二型曲线积分的对称性

(1) AMB关于x轴对称

$$\int_{AMB} f(x,y)dx=\begin{cases}2\int_{AM} f(x,y)dx & f(x,y)\text{关于}y\text{为奇函数}\\ 0 & f(x,y)\text{关于}y\text{为偶函数}\end{cases}$$

$$\int_{AMB} f(x,y)dy=\begin{cases}0 & f(x,y)\text{关于}y\text{为奇函数}\\ 2\int_{AM} f(x,y)dx & f(x,y)\text{关于}y\text{为偶函数}\end{cases}$$

(2) AMB关于y轴对称

$$\int_{AMB} f(x,y)dx=\begin{cases}0 & f(x,y)\text{关于}x\text{为奇函数}\\ 2\int_{AM} f(x,y)dx & f(x,y)\text{关于}x\text{为偶函数}\end{cases}$$

$$\int_{AMB} f(x,y)dy=\begin{cases}2\int_{AM} f(x,y)dy & f(x,y)\text{关于}x\text{为奇函数}\\ 0 & f(x,y)\text{关于}x\text{为偶函数}\end{cases}$$

记忆方法：积分曲线关于x(或y)轴对称，就看被积函数关于y(或x)的对称性。若关于y(或x)为奇函数，且积分变量为dy(或dx)，结果则为0；若为偶函数，但积分变量为dx(或dy)，结果为0.（奇函数一致为0，偶函数不一致为0）

第二型曲面积分的对称性

若Σ关于xOy面对称

$$\iint_{\Sigma} F(x,y,z)dxdy=\begin{cases}2\iint_{\Sigma_1} F(x,y,z)dxdy & F(x,y,z)\text{关于}z\text{为奇函数}\\ 0 & F(x,y,z)\text{关于}z\text{为偶函数}\end{cases}$$

$$\iint_{\Sigma} F(x,y,z)dydz=\begin{cases}0 & F(x,y,z)\text{关于}z\text{为奇函数}\\ 2\iint_{\Sigma_1} F(x,y,z)dydz & F(x,y,z)\text{关于}z\text{为偶函数}\end{cases}$$

$$\iint_{\Sigma} F(x,y,z)dxdz=\begin{cases}0 & F(x,y,z)\text{关于}z\text{为奇函数}\\ 2\iint_{\Sigma_1} F(x,y,z)dxdz & F(x,y,z)\text{关于}z\text{为偶函数}\end{cases}$$

记忆方法：积分曲面关于xOy(或yOz,或xOz)面对称，就看被积函数关于z(或x,或y)的对称性。若关于z(或x,或y)为偶函数，且积分形式与对称面一致，结果则为0；若关于z(或x,或y)为奇函数，但积分形式与对称面不一致，结果为0.（偶函数一致为0，奇函数不一致为0）