多元函数极值

无约束条件

定义

极限判断

2. 已知函数$f(x,y)$在点(0,0)的某邻域内连续，且

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{f(x,y)}{1-\cos(x+y)}=-1,\text{则}\ (\ D\ ).$$

(A)点(0,0)不是$f(x,y)$的驻点.

(B)点(0,0)是$f(x,y)$的驻点,但不是极值点.

(C)点(0,0)是$f(x,y)$的驻点,且是极小值点.

(D)点(0,0)是$f(x,y)$的驻点,且是极大值点.

Taylor展开：一阶偏导数=0；Hf为正定取极小值，或负定取极大值，Hf为不定则不是极值，=0，去邻域中的点或者用定义判断

解法：依次对各个变量求偏导，偏导数=0，解出驻点，再判断驻点是否为极值点

隐函数则要先依次对各个变量求偏导数，把偏导数解出来之后令偏导数=0解x，y（5.9 T2）

有界区域内

1.求出区域内的驻点

2.求出边界上的最大最小值

3.比较求出最值

有约束条件

判断：n元函数+m个约束条件-->n-m元函数

1.先代入消元

2.无法代入时n元有约束-->把约束条件引入函数中，变成n-1元无约束

构造拉格朗日函数，偏导=0解出驻点

3.检验是不是极值点

求目标函数$u=f(x,y)$在条件$\varphi(x,y)=0$下的极值.

分析: 设$M_0(x_0,y_0)$为所求的极值点且在$M_0(x_0,y_0)$的某邻域内f和φ有一阶连续的偏导数,且$\varphi_y(x_0,y_0)\neq 0$.

(1) $\varphi(x,y)=0\begin{cases}\varphi(x_0,y_0)=0\\ \varphi_x,\varphi_y\text{在}M_0\text{连续}\\ \varphi_y(x_0,y_0)\neq 0\end{cases}\Rightarrow\varphi(x,y)=0$确定了单值可导函数$y=y(x)$, $y_0=y(x_0)$且$\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=x_0}=-\dfrac{\varphi_x(x_0,y_0)}{\varphi_y(x_0,y_0)}$

$$\Leftrightarrow\varphi_x(x_0,y_0)+\varphi_y(x_0,y_0)\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0}=0$$

(2) 将$y=y(x)$代入$u=f(x,y)$得: $u=f(x,y(x))$在x_0处取极值

$$\begin{tikzcd}[row sep=small] & x \arrow[dr] & \\ u \arrow[ur] \arrow[dr] & & x \\ & y \arrow[ur] & \end{tikzcd}\Rightarrow\left.\frac{du}{dx}\right|_{x=x_0}=f_x(x_0,y_0)+f_y(x_0,y_0)\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0}=0$$

约束条件确定了x与y的关系

1.看作一元函数，用一元显到二元隐的求导法则（u取极值时，偏导数=0，dy/dx!=0，不是y取极值）

2.看作链式

令$\alpha=(f_x,f_y),\beta=(\varphi_x,\varphi_y),\gamma=(1,\dfrac{dy}{dx})$:

$$\left.\left\{\begin{aligned}&f_x(x_0,y_0)+f_y(x_0,y_0)\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0}=0\Leftrightarrow(\alpha,\gamma)=0\Leftrightarrow\alpha\perp\gamma\\&\varphi_x(x_0,y_0)+\varphi_y(x_0,y_0)\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0}=0\Leftrightarrow(\beta,\gamma)=0\Leftrightarrow\beta\perp\gamma\end{aligned}\right.\right\}\Rightarrow\alpha\,//\,\beta$$

$$\Leftrightarrow\alpha=-\lambda\beta\Leftrightarrow(f_x,f_y)=-\lambda(\varphi_x,\varphi_y)\Leftrightarrow\begin{cases}f_x=-\lambda\varphi_x\\f_y=-\lambda\varphi_y\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}f_x+\lambda\varphi_x=0\\f_y+\lambda\varphi_y=0\end{cases}$$

b.拉格朗日乘数法 $(\varphi(x_0,y_0)=0)$

构造函数: $F(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y)$

$$\Rightarrow\begin{cases}F_x=f_x+\lambda\varphi_x=0\\F_y=f_y+\lambda\varphi_y=0\Leftrightarrow\nabla F=0\Rightarrow(x_0,y_0)\\F_\lambda=\varphi=0\end{cases}$$

就是可能的极值点.

b. 拉格朗日乘数法

$F(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y)$称为拉格朗日函数，

λ称为拉格朗日乘数.

推广：求函数$u=f(x,y,z)$在条件$\varphi(x,y,z)=0,\psi(x,y,z)=0$下的极值.

构造函数：$F(x,y,z,\lambda,\mu)=f(x,y,z)+\lambda\varphi(x,y,z)+\mu\psi(x,y,z)$

(其中λ,μ均为常数).

令$\nabla F=0\Rightarrow$可能极值点的坐标(x_0,y_0,z_0)

eg努力转化成好求导的函数，目标函数改变，极值改变，但是极值点不变

取对数，化积为和

(2) 在条件 $\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}+\frac{z_0^2}{c^2}=1$下求 $V=\frac{a^2b^2c^2}{6x_0y_0z_0}$ 的最小值：

方法1：令$u=x_0y_0z_0$ （目标函数）

$$F(x_0,y_0,z_0,\lambda)=x_0y_0z_0+\lambda\left(\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}+\frac{z_0^2}{c^2}-1\right)$$

在条件 $\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}+\frac{z_0^2}{c^2}=1$下求$V=\frac{a^2b^2c^2}{6x_0y_0z_0}$ 的最小值：

方法2：令$u=\ln x_0+\ln y_0+\ln z_0$ （目标函数）

$$G(x_0,y_0,z_0,\lambda)=\ln x_0+\ln y_0+\ln z_0+\lambda\left(\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}+\frac{z_0^2}{c^2}-1\right)$$

$u=f(x,y,z)$的极值点 $\longleftrightarrow$ $v=g(x,y,z)$的极值点

($u=f(x,y,z)$的极值 $\not\longleftrightarrow$ $v=g(x,y,z)$的极值)

例：$y=f(x)=|x|+1=\sqrt{x^2}+1$的极小值点$x$=0

$\longleftrightarrow$ $y=g(x)=x^2$的极小值点x=0

思想：化不可导为可导,化不易求导为易求导,

化不易计算为易计算

应用：动态规划

例12　求实二次型$f(x_1,x_2,\cdots x_n)=\sum\limits_{i,j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j(a_{ij}=a_{ji})$在约束条件$\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2=1$下的最大值与最小值.

解　(1).令 $F(x_1,x_2,\cdots x_n,\lambda)=\sum\limits_{i,j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j+\lambda(1-\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2)$

$$\Rightarrow\begin{cases}F_{x_1}=2[(a_{11}-\lambda)x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n]=0,\\ F_{x_2}=2[a_{12}x_1+(a_{22}-\lambda)x_2+\cdots+a_{1n}x_n]=0,\\ \qquad\cdots\cdots\qquad\cdots\cdots\\ F_{x_n}=2[a_{1n}x_1+a_{2n}x_2+\cdots+(a_{nn}-\lambda)x_n]=0,\\ F_\lambda=1-(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)=0.\end{cases}$$

$x_1,x_2,\cdots x_n$不全为0 $\Rightarrow$ 前n个方程有非零解

$x_1, x_2, \cdots x_n$不全为0 $\Rightarrow$ 前n个方程有非零解

$$\Leftrightarrow \det(A - \lambda I) = 0$$

($A=(a_{ij})_{n\times n}$, I为n阶单位矩阵)

$\Rightarrow \lambda$是二次型矩阵A的特征值, 即 $Ax = \lambda x$.

($x=(x_1, x_2, \cdots x_n)^T$是$A$的属于特征值$\lambda$的单位特征向量)

即 $f(x_1, x_2, \cdots x_n) = x^T A x = x^T(\lambda x) = \lambda x^T x = \lambda.$

$$\Rightarrow \begin{cases} f\text{的最大值是}A\text{的最大特征值}\lambda_{\max}. \\ f\text{最小值是}A\text{的最小特征值}\lambda_{\min}. \end{cases}$$