多元函数相关定理

二元Taylor，Lagrange

连续性+Lagrange：

可微的充分条件

高阶偏导数连续，则求导顺序可交换

含参变量积分

分析清楚是关于什么的函数

积分上限函数是积分上限的变量的函数

含参变量的积分（上下限都是常数时）是参变量的函数

y是积分变量，最后会替换成常值，留下x才是变量，认清是谁的函数才能方便构造φ(x)，方便求导

$$\varphi(x)=\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}\,y$$

矩形区域上的性质

连续性

求极限与积分运算可以交换次序

可导性

求导与积分运算可以交换次序

偏微分方程

把偏导数换成导数就可以移项积分了

证明 设$x, x+\Delta x\in[a,b]$,则有

$$\varphi(x+\Delta x)-\varphi(x)=\int_c^d[f(x+\Delta x,y)-f(x,y)]\mathrm{d}y$$

$$=\Delta x\int_c^d f_x(x+\theta\Delta x,y)\mathrm{d}y,\ \theta\in(0,1)$$

(微分中值定理)

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\varphi(x+\Delta x)-\varphi(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\int_c^d f_x(x+\theta\Delta x,y)\mathrm{d}y=\int_c^d f_x(x,y)\mathrm{d}y$$

$$\| $$

$$\varphi'(x)$$

($f_x(x,y)$的连续性及定理1)

即$\varphi(x)$在$[a,b]$上可导,且 $\varphi'(x)=\int_c^d f_x(x,y)\mathrm{d}y$,

由$f_x(x,y)$在D连续性知$\varphi'(x)$在$[a,b]$上连续,

即$\varphi(x)$在$[a,b]$上有连续的导数.

6.设函数$f(x,y)$可微,$\dfrac{\partial f}{\partial x}=-f(x,y)$,$f(0,\dfrac{\pi}{2})=1$,且满足

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{f(0,y+\frac{1}{n})}{f(0,y)}\right)^n=e^{\cot y}$$,求函数$f(x,y)$.

解 $$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{f(0,y+\frac{1}{n})}{f(0,y)}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{f(0,y+\frac{1}{n})-f(0,y)}{f(0,y)}\right)^n$$

$$=\exp\left(\lim_{n\to\infty}\frac{f(0,y+\frac{1}{n})-f(0,y)}{\frac{1}{n}f(0,y)}\right)=\exp\left(\frac{f_y(0,y)}{f(0,y)}\right)$$

$$\therefore \exp\left(\frac{f_y(0,y)}{f(0,y)}\right) = \exp(\cot y) \quad 即 \frac{f_y(0,y)}{f(0,y)} = \cot y$$

两边同时对y积分 $\ln f(0,y) = \ln\sin y + \ln C$,

即 $f(0,y) = C\sin y$. $\because f(0,\frac{\pi}{2}) = 1, \therefore C = 1$,

$\therefore f(0,y) = \sin y$. 又 $\frac{\partial f}{\partial x} = -f(x,y)$,

$\Rightarrow \ln f(x,y) = -x + \ln C(y)$. $f(x,y) = C(y)e^{-x}$.

$\because f(0,y) = \sin y$. $\therefore f(x,y) = e^{-x}\sin y$.

$$\int \frac{\partial f}{\partial x} dy = -\int f(x,y) dy$$

$$\frac{d[\int f\, dy]}{dx} = -\int f\, dy$$

$$\frac{d[\int f(x,y) dy]}{\int f(x,y) dy} = -dx$$

$$\ln f(x,y) = -x + \ln C(y)$$

Leibniz公式

含参变量积分上下限不是常数，是关于参变量的函数，看作中间变量求导，求导就是把被积函数中的积分变量换成积分上限，再对上限求导。

积分交换次序

定理3 设函数$f(x,y)$在矩形区域 $D=\{(x,y)\,|\,a\le x\le b, c\le y\le d\}$上连续,则

$$\int_c^d \mathrm{d}y\int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x=\int_a^b \mathrm{d}x\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y.$$

证 设 $I(t)=\int_c^t \mathrm{d}y\int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x-\int_a^b \mathrm{d}x\int_c^t f(x,y)\mathrm{d}y$

$\Downarrow$ (对变量t求导, 由定理2可得)

$$I'(t)=\int_a^b f(x,t)\mathrm{d}x-\int_a^b \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\int_c^t f(x,y)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x$$
$$=\int_a^b f(x,t)\mathrm{d}x-\int_a^b f(x,t)\mathrm{d}x\equiv 0.$$

$\therefore I(t)\equiv C$,又$\because I(c)=0$,故$I(t)\equiv 0$.令$t=d$时,得证.#

《书》p142 例4，例5

M1：构造积分变成二重积分，交换积分次序就可求了

p148 T2

M2：两个参数，一个看作主元，I(a)=0, I(b)=I(b)-I(a)=$\int_0^1 I'(x)dx$可计算

构造二重积分：1）直接根据形式构造

2）利用定积分与积分变量无关，**定积分的平方，把其中一个变量换成另外一个变量就变成了二重积分**

(1).设$f(x)$在$[a,b]$上连续且$f(x)>0$,则

$$\int_a^b f(x)dx\int_a^b \frac{1}{f(x)}dx\ge(b-a)^2;$$

证:(1) $\because I=\int_a^b f(x)dx\int_a^b \frac{1}{f(x)}dx=\iint_D \frac{f(y)}{f(x)}dxdy=\iint_D \frac{f(x)}{f(y)}dxdy$

$$I=\int_a^b f(y)dy\int_a^b \frac{1}{f(x)}dx=\int_a^b f(x)dx\int_a^b \frac{1}{f(y)}dy$$

$$\therefore I=\frac{1}{2}\iint_D\left[\frac{f(y)}{f(x)}+\frac{f(x)}{f(y)}\right]dxdy\ge\frac{1}{2}\iint_D 2dxdy=(b-a)^2.$$

p148 T3：证明cauthy的积分形式，换成二重积分后两个函数就可以合并成乘积的形式

构造二重积分的好处：1.可交换积分次序，如$e^{(x^2)}$积分

2.轮换对称性用基本不等式

阶的性质

积分上限函数是f(x)的原函数，利用“阶”，设F(x)=$\int_0^x f(t)dt$，然后分部积分再把F(x)导成f(x)

轮换对称性

p148 T6,T7，看着就解不出来的用轮换对称性凑

期中考试证明题小结

1.轮换对称性

2.二重积分交换积分顺序

3.Lagrange和连续性

4.阶变换

5.定积分，不管几重都是定值，直接换元成常数K，之后带进去积分求导，最后解出来

6.拉格朗日乘数法，梯度相关