积分计算和积分不等式

一、预备知识与小结论

1. 黎曼积分转化。

$$\int_0^1 \ln x = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{n}\ln\frac{i}{n}$$

可以去尝试拆出来1/n的结构，是否能这样计算。

下面几个也是相似的做法。

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\sin\frac{k}{n},\quad \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k},\quad \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^3}{n^4}$$

2.

2. $f(x)\geqslant g(x),\int_a^b f(x)\,dx\geqslant\int_a^b g(x)\,dx$从积分的几何意义显然。

进而，常有结合最大值和最小值的不等式。

$$\text{设 } m=\min_{a\leqslant x\leqslant b}\{f(x)\},M=\max_{a\leqslant x\leqslant b}\{f(x)\}\text{，则：}$$
$$\int_a^b M dx\geqslant\int_a^b f(x)\,dx\geqslant\int_a^b m dx$$

3.（关于绝对值）从积分几何意义可知：

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right|\leqslant\int_a^b |f(x)|\,dx$$

4.（关于绝对值）三角不等式：

$$\text{结论：}\int_a^b|f(x)+g(x)|\,dx-\int_a^b|f(x)-g(x)|\,dx\leqslant\int_a^b|f(x)|\,dx\leqslant\int_a^b|f(x)+g(x)|\,dx+\int_a^b|f(x)-g(x)|\,dx$$
$$\begin{aligned}\text{证明：}\int_a^b|f(x)|\,dx&=\frac{1}{2}\int_a^b|f(x)+g(x)+f(x)-g(x)|\,dx\\&\leqslant\frac{1}{2}\int_a^b|f(x)+g(x)|+|f(x)-g(x)|\,dx\\&\leqslant\int_a^b|f(x)+g(x)|\,dx+\int_a^b|f(x)-g(x)|\,dx\end{aligned}$$
$$\text{同理：}\int_a^b|f(x)+g(x)|\,dx-\int_a^b|f(x)-g(x)|\,dx\leqslant\frac{1}{2}\int_a^b|f(x)+g(x)|-|f(x)-g(x)|\,dx\leqslant\int_a^b|f(x)|\,dx$$
$$\therefore$$

5.柯西不等式的积分形式。

$$(\int_a^b f(x)\,g(x)\,\mathrm{d}x)^2 \leqslant \int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x \cdot \int_a^b g^2(x)\,\mathrm{d}x$$

可以把dy_1, dy_2看成是两个无穷维向量的分量，那么数量积小于等于模的积。

$$\int_a^b [f(x)+tg(x)]^2 dx \geqslant \int_a^b 0dx = 0$$

$$\therefore \int_a^b [f(x)+tg(x)]^2 dx = \int_a^b \left[t^2 g^2(x) + 2tf(x)g(x) + f^2(x)\right] dx$$

$$= t^2 \int_a^b g^2(x)dx + 2t\int_a^b f(x)g(x)dx + \int_a^b f^2(x)dx \geqslant 0$$

$$\therefore \text{关于}t\text{的二元一次方程的判别式}\,\varDelta = \left[2\int_a^b f(x)g(x)dx\right]^2 - 4\int_a^b f^2(x)dx\int_a^b g^2(x)dx \leqslant 0$$

6.常数化成积分，利用柯西不等式降次。

设 $f(x)$ 在 [0,1] 上连续可微， $f(0)=f(1)=0,$ 求证 对 $\forall t \in [0,1],$ 都有 $f^2(t) \leq \frac{1}{4}\int_0^1 [f'(x)]^2 dx$
证明 :
设 t_0 为 $f^2(t)$ 在 $[0,,1]$取最大值的点，则只需证 :

$$f^2(t_0) \leq \frac{1}{4}\left(\int_0^{t_0} [f'(x)]^2 dx + \int_{t_0}^1 [f'(x)]^2 dx\right)$$

再分别变形 $\frac{1}{4} = \int_0^{t_0} \frac{1}{4t_0} dx$ 及 $\frac{1}{4} = \int_{t_0}^1 \frac{1}{4(1-t_0)} dx$

就可以通过柯西不等式降次。

$$\because \frac{1}{4} = \int_0^{t_0} \frac{1}{4t_0} dx,\ \ \frac{1}{4} = \int_{t_0}^1 \frac{1}{4(1-t_0)} dx$$

$$\therefore \frac{1}{4}\left(\int_0^{t_0} [f'(x)]^2 dx + \int_{t_0}^1 [f'(x)]^2 dx\right) = \int_0^{t_0} [f'(x)]^2 dx \int_0^{t_0} \frac{1}{4t_0} dx + \int_{t_0}^1 [f'(x)]^2 dx \int_{t_0}^1 \frac{1}{4(1-t_0)} dx$$

$$\geqslant \left[\int_0^{t_0} \frac{f'(x)}{2\sqrt{t_0}} dx\right]^2 + \left[\int_{t_0}^1 \frac{f'(x)}{2\sqrt{1-t_0}} dx\right]^2 = \frac{1}{4t_0}\left[\int_0^{t_0} f'(x)dx\right]^2 + \frac{1}{4(1-t_0)}\left[\int_{t_0}^1 f'(x)dx\right]^2$$

$$= \frac{1}{4t_0}(f(t_0)-f(0))^2 + \frac{1}{4(1-t_0)}(f(t_0)-f(1))^2 = [f(t_0)]^2\left(\frac{1}{4t_0} + \frac{1}{4(1-t_0)}\right)$$

$$\geqslant [f(t_0)]^2\left(\frac{\left(\sqrt{1}+\sqrt{1}\right)^2}{4t_0+4(1-t_0)}\right) = [f(t_0)]^2$$

7.做成变上限积分，直接求导。其中可能会用到拉格朗日来比较函数值和导数的大小（凹凸函数性质常用）。

例　(Hadamard 定理)设 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上连续的凸函 数，即$f''(x) \geqslant 0$.试证: , 有

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \leqslant \frac{1}{x_2-x_1}\int_{x_1}^{x_2} f(t)\mathrm{d}t \leqslant \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$$

法一:

视 x_1 为常数， $x=x_2$.

$g(x)=\int_{x_1}^{x} f(t)\mathrm{d}t-(x-x_1)\frac{f(x_1)+f(x)}{2}, h(x)=\int_{x_1}^{x} f(t)\mathrm{d}t-(x-x_1) f\left(\frac{x_1+x}{2}\right), x>x_1$

$g'(x)=f(x)-\frac{f(x_1)+f(x)}{2}-(x-x_1)\frac{f'(x)}{2}=\frac{f(x)-f(x_1)}{2}-(x-x_1)\frac{f'(x)}{2}$

$=(x-x_1)\frac{f'(\xi_1)}{2}-(x-x_1)\frac{f'(x)}{2}=(x-x_1)\left(\frac{f'(\xi_1)}{2}-\frac{f'(x)}{2}\right)\leqslant 0.$其中 $\xi_1\in[x_1,x]$

$\therefore g(x)$单调递减 , $\int_{x_1}^{x} f(t)\mathrm{d}t-(x_2-x_1)\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}=g(x_2)\leqslant g(x_1)=0.$

同理： $h'(x)=f(x)-f\left(\frac{x_1+x}{2}\right)-\frac{1}{2}(x-x_1) f'\left(\frac{x_1+x}{2}\right)$

$=\frac{1}{2}(x-x_1) f'(\xi_2)-\frac{1}{2}(x-x_1) f'\left(\frac{x_1+x}{2}\right)=\frac{1}{2}(x-x_1)\left(f'(\xi_2)-f'\left(\frac{x_1+x}{2}\right)\right)\geqslant 0.$ 其中 $\xi_2\in\left[\frac{x_1+x}{2}, x\right]$

$\therefore h(x)$ 单调递增。 $\int_{x_1}^{x_2} f(t)\mathrm{d}t-(x_2-x_1) f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)=h(x_2)\geqslant h(x_1)=0.$

8.做成线性组合，换元再积分（常把被积函数放缩成线性）。

法二:

证　令　$t=x_1+\lambda(x_2-x_1), \lambda\in(0,1)$, 则

$$\frac{1}{x_2-x_1}\int_{x_1}^{x_2} f(t)\mathrm{d}t=\int_0^1 f[x_1+\lambda(x_2-x_1)]\mathrm{d}\lambda$$

同理,令 $t=x_2-\lambda(x_2-x_1)$, 亦有

$$\frac{1}{x_2-x_1}\int_{x_1}^{x_2} f(t)\mathrm{d}t=\int_0^1 f[x_2-\lambda(x_2-x_1)]\mathrm{d}\lambda$$

从而

$$\begin{aligned}&\frac{1}{x_2-x_1}\int_{x_1}^{x_2} f(t)\mathrm{d}t\\=&\frac{1}{2}\int_0^1(f[x_1+\lambda(x_2-x_1)]+f[x_2-\lambda(x_2-x_1)])\mathrm{d}\lambda\end{aligned}$$

注意 $x_1+\lambda(x_2-x_1)$ 与 $x_2-\lambda(x_2-x_1)$ 关于中点 $\frac{x_1+x_2}{2}$ 对称.
由于 $f(x)$ 是凸函数,

$$\frac{1}{2}\left(f[x_1+\lambda(x_2-x_1)]+f[x_2-\lambda(x_2-x_1)]\geqslant f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\right.$$

故由(2)得

$$\frac{1}{x_2-x_1}\int_{x_1}^{x_2} f(t)\mathrm{d}t\geqslant f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$$

另外,由 (1), 应用 $f(x)$ 的凸性,

$$\begin{aligned}\frac{1}{x_2-x_1}\int_{x_1}^{x_2} f(t)\mathrm{d}t&=\int_0^1 f[\lambda x_2+(1-\lambda)x_1]\mathrm{d}\lambda\\&\leqslant\int_0^1[\lambda f(x_2)+(1-\lambda)f(x_1)]\mathrm{d}\lambda\\&=f(x_2)\cdot\left.\frac{\lambda^2}{2}\right|_0^1+f(x_1)\cdot\left.\left[-\frac{(1-\lambda)^2}{2}\right]\right|_0^1\\&=\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}\end{aligned}$$

9.拆分以及对阶的感知

设 $f'(x)\in C[a,b]$, 且 $f(a)=f(b)=0$, 证明： $|f(x)|\leq\frac{1}{2}\int_a^b|f'(x)|\mathrm{d}x$

$$\frac{1}{2}\int_a^b|f'(x)|\mathrm{d}x \geqslant \frac{1}{2}\left|\int_a^b f'(x)\mathrm{d}x\right| = \frac{1}{2}(f(a)-f(b))=0,\text{行不通，又存在任取的 } x\text{，我们不妨令 } |f(t_0)|=\max\{|f(x)|\},$$

$$\text{拆分：}\frac{1}{2}\int_a^b|f'(x)|\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_a^{t_0}|f'(x)|\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int_{t_0}^b|f'(x)|\mathrm{d}x\geqslant\frac{1}{2}\left|\int_a^{t_0}f'(x)\mathrm{d}x\right|+\frac{1}{2}\left|\int_{t_0}^b f'(x)\mathrm{d}x\right|$$
$$=\frac{1}{2}|f(t_0)-f(a)|+\frac{1}{2}|f(b)-f(t_0)|=|f(t_0)|$$

再来看一道题：

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\geqslant 0$$

求证：$\phi\left(\sum_{i=1}^N p_i x_i\right)\leq\sum_{i=1}^N p_i\phi(x_i)$
其中 $p_i\geq 0,\quad \sum_{i=1}^N p_i=1$, 且 $x_i\in I,(i=1,\ldots,N)$
证明: 令 $A=\sum_{i=1}^N p_i x_i$, 显然 $A\in I$ 。取 $S=\sum_{i=1}^N p_i\phi(x_i)-\phi(A)$
$=\sum_{i=1}^N p_i[\phi(x_i)-\phi(A)]$
$=\sum_{i=1}^N p_i\int_A^{x_i}\phi'(x)dx$
若 $A\leq x_i$, 因为 $\phi'(x)$ 在区间 I 是递增的, 可以得到 $\int_A^{x_i}\phi'(x)dx\geq\phi'(A)(x_i-A)$, 同样可以证明 $A>x_i$ 的情形前式也是成立的。那

$$\begin{aligned}S&\geq\sum_{i=1}^N p_i\phi'(A)(x_i-A)\\&=\phi'(A)\left[\sum_{i=1}^N p_i(x_i-A)\right]\\&=\phi'(A)(A-A)\\&=0\end{aligned}$$

证毕。

再来看一道题目：

$$\begin{aligned}&\text{eg. } f(x)\text{在 }[a,b]\text{连续可微，求证}\\&\forall t\in[a,b],\quad |f(t)|\leq\frac{1}{b-a}\left|\int_a^b f(x)dx\right|+\int_a^b|f'(x)|dx\\&\text{证明}:\exists\xi\in[a,b]\quad \mathrm{s.t.}\left|\int_a^b f(x)dx\right|=(b-a)|f(\xi)|\\&\text{再将 }\int_a^b|f'(x)|dx\text{ 拆分为 }\int_a^\xi\int_\xi^t\quad\int_t^b(\text{不妨 }t\geq\xi)\end{aligned}$$

它很好的体现了阶的感觉，函数，原函数和导函数跨了三层。

$$\because\exists\xi\in[a,b]\quad\mathrm{s.t.}\left|\int_a^b f(x)dx\right|=(b-a)|f(\xi)|,\ \text{设 }|f(t_0)|=\max\{f(t)\}$$
$$\begin{aligned}\therefore\frac{1}{b-a}\left|\int_a^b f(x)dx\right|+\int_a^b|f'(x)|dx&=(b-a)|f(\xi)|+\int_a^b|f'(x)|dx\\&=(b-a)|f(\xi)|+\int_a^\xi|f'(x)|dx+\int_\xi^{t_0}|f'(x)|dx+\int_{t_0}^b|f'(x)|dx\\&\geqslant(b-a)|f(\xi)|+\int_\xi^{t_0}|f'(x)|dx\\&\geqslant(b-a)|f(\xi)|+|\int_\xi^{t_0}f'(x)dx|\\&=(b-a)|f(\xi)|+(b-a)|f(t_0)-f(\xi)|\\&\geqslant(b-a)|f(t_0)|\end{aligned}$$

11.多重积分化简：

$$\int_0^x\left[\int_0^t f(x)\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}t=\int_0^x f(t)\cdot(x-t)\mathrm{d}t$$

12.x与三角函数的乘积：

$$\int_0^\pi xf(\sin x)\mathrm{d}x=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\sin x)\mathrm{d}x$$

13.周期函数的积分:

设函数 $f(x)$ 在 R上连续,以 T 为周期期,证明:
(1) 函数

$$F(x)=\frac{x}{T}\int_0^T f(t)\mathrm{d}t-\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$$

也是以T为周期的周期函数。

$$\begin{gathered}F(x)=\frac{x}{T}\int_0^T f(t)\mathrm{d}t-\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\\ F(x+T)=\frac{x+T}{T}\int_0^T f(t)\mathrm{d}t-\int_0^{x+T} f(t)\mathrm{d}t=\frac{x}{T}\int_0^T f(t)\mathrm{d}t-\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+\int_0^T f(t)\mathrm{d}t-\int_0^T f(t)\mathrm{d}t\\ =F(x).\end{gathered}$$

(2)证明:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{T}\int_0^T f(t)\mathrm{d}t$$

$$\begin{gathered}\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{T}\int_0^T f(t)\mathrm{d}t\\ \lim_{x\to+\infty}\frac{F(x)}{x}=\frac{1}{T}\int_0^T f(t)\mathrm{d}t-\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\\ \text{又显然}F(x)\text{有界,所以}\lim_{x\to+\infty}\frac{F(x)}{x}=\frac{1}{T}\int_0^T f(t)\mathrm{d}t-\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=0\end{gathered}$$

14.旋转体面积:

设 $y=f(x)$ 在区间 $[a,b](a>0)$ 上连续且不取负值,试用微元法推导 : 由曲线 $y=f(x)$, 直线 $x=a,x=b$ 及 x 轴围成的平面图形绕 y 轴旋转所成立体的体积为

$$V=2\pi\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x$$

注:可以作减法,也可以视为一层一层的圆柱面的沿着半径的累积。