曲线和曲面的积分

曲线积分

例3 求星形线$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}(a>0)$的全长.

解 星形线的参数方程为 $\begin{cases} x=a\cos^3 t \\ y=a\sin^3 t \end{cases}$ $(0\le t\le 2\pi)$

根据对称性 $s=4s_1$ 第一象限部分的弧长

$$=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{(x')^2+(y')^2}\,\mathrm{d}t \quad =4\int_0^{\frac{\pi}{2}}3a\sin t\cos t\,\mathrm{d}t \quad =6a.$$

例4 证明正弦线 $y=a\sin x\ (0\le x\le 2\pi)$ 的弧长

等于椭圆 $\begin{cases} x=\cos t \\ y=\sqrt{1+a^2}\sin t \end{cases}$ $(0\le t\le 2\pi)$ 的周长.

证 设正弦线的弧长等于s_1 则$s_1=\int_0^{2\pi}\sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}x$

$$=\int_0^{2\pi}\sqrt{1+a^2\cos^2 x}\,\mathrm{d}x \ =2\int_0^{\pi}\sqrt{1+a^2\cos^2 x}\,\mathrm{d}x,$$

设椭圆的周长为s_2， $s_2=\int_0^{2\pi}\sqrt{(x')^2+(y')^2}\,\mathrm{d}t,$

根据椭圆的对称性知

$$s_2=2\int_0^{\pi}\sqrt{(\sin t)^2+(1+a^2)(\cos t)^2}\,\mathrm{d}t$$

$$=2\int_0^{\pi}\sqrt{1+a^2\cos^2 t}\,\mathrm{d}t=2\int_0^{\pi}\sqrt{1+a^2\cos^2 x}\,\mathrm{d}x=s_1,$$

M1换元法令y $=x-\pi$

M2周期函数 ① $\int_a^{a+T}f(x)dx=\int_0^T f(x)dx$

曲面积分

z=z(x,y)是Dxy上的单值函数才能直接投影，否则先分割，球面-->两个半球面，柱面-->沿着底面直径切开，投影形成矩形区域

6.5 T6(5)

曲面--极限近似-->切平面--投影，乘放大率-->坐标平面

投影，投到xoy平面为例，想原理，用一束光垂直于xoy平面照射，得到阴影，是空间几何体的最外圈

z=f(x,y)被z=g(x,y)所割下的部分，找两个曲面相交形成的的空间曲线，空间曲线投影到xoy平面（一般就是最外圈）-->先消去z（不是先令z=0），再在方程中加上z=0就得到投影曲线方程

6.5 T1（3）

代入的时候代z=f(x,y)，被割曲线的方程

步骤

1.写出投影的区域

2.计算放大率，求导的时候如果不方便直接求导，可以转化成隐函数求导，x，y，z相互独立，但是求导完要代入函数，化成自变量

3.积分

skill

投影：如果x，y的地位对等，一般投影到xoy平面上

提出常数，得到投影面积或者曲面面积

柱面，球面——沿（底面）直径切开分成两半，所以是两倍的在投影上的积分

看到球面就想对称性，轮换对称性

多重积分的几何意义

投影，消元再固定，用点密度代替线密度或面密度

$$\iint_{\sigma} \mathrm{f}(x,y)dxdy$$

几何：曲顶柱体的体积

物理：点密度为f(x,y)，厚度不计的板的质量

$$\iiint_{v} f(x,y,z)dxdydz$$

点密度为f(x,y,z)的空间几何体的质量

$$\int_{L} dL$$

$$\int_{L} f(x,y)ds$$

曲线的弧长

点密度为f(x,y)的平面曲线的质量

每点对应的高为f(x,y)的柱面的侧面积（Viviani）

$$\iint\limits_{s} ds$$

$$\iint\limits_{s} f(x,y,z)dS$$

曲面的面积

点密度为f(x,y,z)的空间曲面的质量

！！！不要混淆了第一类曲线、曲面积分和二、三重积分

曲线，曲面积分有方程约束，涉及代入消元，最终是n-1元函数的积分。曲线积分最终化成一元函数的积分，曲面积分投影之后化成二重积分

始终要明确有什么约束，有几个自由变量（积分变量），谁是函数，可以被代入表示

因为曲线，曲面方程可以代入，所以经常用轮换对称性来凑定值，也要注意代入的是被割的

n重积分的被积函数也是n元，所以相当于求一个面或者一个立体物体的质量，是给定的一个范围（平面或者空间），不涉及代入消元

第一类曲线积分，平面曲线的方程是一元显函数（二元隐函数），最后ds转化成一元的积分，代入y=y(x)转化成一元；第一类曲面积分实际上是三元隐函数，最后可以消成二元积分

二维空间的极坐标，二重积分，r，θ互不相关

曲线积分r=r(θ)

参数方程，用t表示x，y，三元两个方程，消去t可得到y=y(x)

求质心和转动惯量时，厚度不计的薄板--二重积分，空间立体图形--三重积分，曲线--第一类曲线积分，曲面--第一类曲面积分

求质心

类似地,设物体分布在几何体Ω上,其密度函数为$\mu(M)$,它在Ω上连续,可得物体质心坐标的计算公式

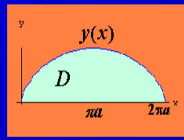
$$\bar{x}=\frac{\int_\Omega x\mu(M)\mathrm{d}\Omega}{\int_\Omega \mu(M)\mathrm{d}\Omega},\quad \bar{y}=\frac{\int_\Omega y\mu(M)\mathrm{d}\Omega}{\int_\Omega \mu(M)\mathrm{d}\Omega},\quad \bar{z}=\frac{\int_\Omega z\mu(M)\mathrm{d}\Omega}{\int_\Omega \mu(M)\mathrm{d}\Omega}.$$

特别的,当物体密度函数$\mu(M)$为常数,即密度均匀时,则得到几何形体Ω的形心的计算公式

$$\bar{x}=\frac{\int_\Omega x\mathrm{d}\Omega}{\int_\Omega \mathrm{d}\Omega},\quad \bar{y}=\frac{\int_\Omega y\mathrm{d}\Omega}{\int_\Omega \mathrm{d}\Omega},\quad \bar{z}=\frac{\int_\Omega z\mathrm{d}\Omega}{\int_\Omega \mathrm{d}\Omega}.$$

均匀物体Ω的形心由物体的几何形体Ω的形状所确定.

例2 设平面薄板由$\begin{cases} x = a(t-\sin t) \\ y = a(1-\cos t) \end{cases}$,$(0 \le t \le 2\pi)$与$x$轴围成，



求形心的坐标.

解 先求区域D的面积A. $\because 0 \le t \le 2\pi \therefore 0 \le x \le 2\pi a$

$$A = \int_0^{2\pi a} y(x)\mathrm{d}x = \int_0^{2\pi} a(1-\cos t)\mathrm{d}[a(t-\sin t)]$$

$$= \int_0^{2\pi} a^2(1-\cos t)^2 \mathrm{d}t = 3\pi a^2.$$

由于区域关于直线$x = \pi a$对称，所以形心在 $x = \pi a$

即 $\bar{x} = \pi a$, $\bar{y} = \dfrac{1}{A}\iint\limits_D y\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \dfrac{1}{A}\int_0^{2\pi a}\mathrm{d}x\int_0^{y(x)} y\mathrm{d}y$

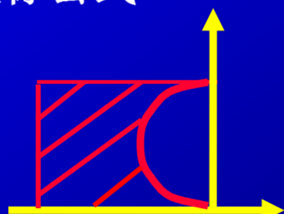
$$= \frac{1}{6\pi a^2}\int_0^{2\pi a}[y(x)]^2\mathrm{d}x = \frac{a}{6\pi}\int_0^{2\pi}[1-\cos t]^3\mathrm{d}t = \frac{5\pi}{6}.$$

所求形心坐标为$(\pi a, \dfrac{5}{6}\pi)$.

先注意对称性，质心一定在对称轴（面）上

例5 $I = \iint\limits_D y\mathrm{d}\sigma$. $D: x = -2, y = 0, y = 2, x = -\sqrt{2y - y^2}$

解 视该平面薄片为密度为1的物体,由质心坐标公式



$$\because \bar{y} = \frac{\iint\limits_D y\mathrm{d}\sigma}{\iint\limits_D \mathrm{d}\sigma} \quad \therefore \iint\limits_D y\mathrm{d}\sigma = \bar{y}\cdot\iint\limits_D \mathrm{d}\sigma$$

又 $\because \bar{y} = 1$, $\iint\limits_D \mathrm{d}\sigma = 2\times 2 - \frac{1}{2}\pi = 4 - \frac{1}{2}\pi$

$$\therefore \iint\limits_D y\mathrm{d}\sigma = \bar{y}\cdot\iint\limits_D \mathrm{d}\sigma = 1\cdot(4-\frac{\pi}{2}) = 4 - \frac{\pi}{2}$$

注：凡遇到x, y的一次积分时，可以考虑用质心简化计算.

(Ex) 证明$\iint\limits_S (x+y+z+\sqrt{3}a)dS \ge 12\pi a^3 (a>0)$,其中$S$:

$$(x-a)^2 + (y-a)^2 + (z-a)^2 = a^2.$$

求转动惯量

z=xy