函数项级数

敛散性

函数x=x0，转化成常数项级数，判断常数项级数的敛散性。

也可以直接放缩证明不论x取任何值，级数都收敛或发散。

幂级数

幂级数的敛散性特点

幂级数在x=x0条件收敛，则收敛半径一定是x0

收敛半径

收敛区间

收敛域，收敛区间+端点单独判断

比值或者根值判敛法求收敛区间

n->无穷，极限值<1一定收敛，且为绝对收敛，解出x求出收敛区间；>1，un递增，违背一般项极限为0；=1，不在极限的条件下，单独比较un+1和un

绝对值的比值、根值判敛法<1绝对收敛，=1可能条件收敛（去掉极限再比较）或发散，>1发散

1.代数运算性质:

设 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 和 $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ 的收敛半径各为 R_1 和 R_2， $R=\min\{R_1,R_2\}$

(1) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \pm \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n. \ x \in (-R,R)$

(2) $(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n)\cdot(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n x^n. \quad x \in (-R,R)$

其中 $c_n = a_n \pm b_n, d_n = a_0 \cdot b_n + a_1 \cdot b_{n-1} + \cdots + a_n \cdot b_0)$

(3) $\dfrac{\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n}{\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n.$ (收敛域内 $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \neq 0$)

(相除后的收敛区间比原来两级数的收敛区间小得多)

求和函数

先对和函数进行积分或求导，消去系数an，再用几何级数求和，去极限$x^n=0$，再反求导积分算出和函数

连续时，积分，求导算子与累加算子的顺序可以交换，即可以逐项积分、求导

积分求导后的幂级数有与原级数相同的收敛半径，但是在端点处的敛散性可能改变，在端点收敛时，其端点的逐项积分或逐项求导公式成立

SKILL：

乘上或除几个x，凑出能消系数的求导或积分

可能要两次求导或积分，系数是多个n的乘积

换元变成标准的幂级数

系数拆分成常数和f(n)，常数直接算几何级数，f(n)先转化消去再算

求常数项级数的和函数-->构造函数项级数求和函数

13 单选 (2分) 利用幂级数的和函数计算级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)4^n}$ 的和为(　)

A. $\frac{1}{4}\ln 3$

B. $\frac{1}{4}$

C. 4

D. ln3

Taylor展开

(2)例如：$f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$

$\Rightarrow$ 在$x=0$点任意可导 且 $f^{(n)}(0)=0\ \ (n=0,1,2,\cdots)$

$\Rightarrow$ $f(x)$的麦氏级数为 $\sum_{n=0}^{\infty}0\cdot x^n$

$\Rightarrow$ 该级数在$(-\infty,+\infty)$内和函数$S(x)\equiv 0$.

可见:

除$x=0$外，$f(x)$的麦氏级数处处不收敛于$f(x)$.

定理3 设 $N(x_0,R)=(x_0-R,x_0+R)\subset D(f)$, $\exists M>0$, 对

$\forall x\in N(x_0,R)$, 恒有 $|f^{(n)}(x)|\le M(n=0,1,2,\cdots)$, 则:

$f(x)$在$N(x_0,R)$内可展开成点x_0的泰勒级数.

证明

$$|R_n(x)|=\left|\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}\right|\le M\frac{|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!},\quad x\in N(x_0,R)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!}\text{在}(-\infty,+\infty)\text{收敛}\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\frac{|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!}=0$$

$$\Rightarrow\lim_{n\to\infty}R_n(x)=0,\quad x\in N(x_0,R)$$

有Taylor级数-->收敛，能展开成Taylor级数，有Taylor展开式

f(x)有n阶连续导函数

定义，和函数=f(x)

充要条件，余项的极限=0，n阶导数<=M

求导任意次，级数的系数=n阶导数，所以Taylor展开式唯一

注意：I.
$$\begin{cases}(1)\ \text{在}x=\pm1\text{处收敛性与}\alpha\text{的取值有关.}\\(2)\ \ \alpha\le-1\ \ \text{收敛区间为}(-1,1).\\(3)\ \ -1<\alpha<0\text{时,收敛区间}(-1,1].\\(4)\ \ \alpha>0\text{时, 收敛区间}[-1,1].\end{cases}$$

II. 当$\alpha=-1,\pm\dfrac{1}{2}$时, 有

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+\cdots+(-1)^nx^n+\cdots\qquad x\in(-1,1)$$

$$\sqrt{1+x}=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{2\cdot4}x^2+\frac{1\cdot3}{2\cdot4\cdot6}x^3+\cdots+(-1)^n\frac{(2n-3)!!}{(2n)!!}x^n+\cdots$$
$$x\in[-1,1]$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}}=1-\frac{1}{2}x+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}x^2-\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}x^3+\cdots+(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^n+\cdots$$
$$x\in(-1,1]$$

直接法

间接法

逐项积分/求导

求出来之后在做逆运算

注意积分求导不改变收敛半径但会改变断点处的敛散性，要单独判断

变量代换

求在x=x0处的展开，令t=x-x0

四则运算

拆成一些级数的和函数

注意n的初始值

例5 将 $f(x)=x\arctan x-\ln\sqrt{1+x^2}$ 展开成麦克劳林级数.

解

(1) $\ln(1+x)=x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}-\cdots,$

$$\Rightarrow \ln(1+x^2)=x^2-\frac{x^4}{2}+\frac{x^6}{3}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n}}{n}+\cdots,$$

$$(-1\le x\le 1)$$

(2) $\arctan x=\displaystyle\int_0^x\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$

$$=\int_0^x[1-x^2+x^4-x^6+\cdots+(-1)^n x^{2n}+\cdots]\mathrm{d}x$$

$$=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\cdots$$

$$(-1\le x\le 1)$$

$$(-1 \le x \le 1)$$

n的初始值, x的次幂

$$\Rightarrow$$

$$x\arctan x - \ln\sqrt{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+2}}{2n+1} - \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n}}{n}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+2}}{2n+1} - \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+2}}{2n+2}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+2}}{(2n+1)(2n+2)}.$$

$$(-1 \le x \le 1)$$

构造微分方程

思考. 求$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}$的和函数.

解 易求收敛域为$(-\infty, +\infty)$.

$$令S(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots$$

$$\Rightarrow S'(x) = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \cdots$$

$$\Rightarrow \quad S(x) + S'(x)$$

$$= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^2}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots$$

$$= e^x$$

令$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}=1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots+\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\cdots$

$S'(x)+S(x)=e^x$ ------(一阶线性非齐次微分方程)

$$\Rightarrow \text{其通解}: \left.\begin{matrix} S(x)=Ce^{-x}+\frac{1}{2}e^x \\ S(0)=1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow C=\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \text{幂级数}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}=\frac{1}{2}e^{-x}+\frac{1}{2}e^x.$$

三角级数

线性表出的思想：

n维空间的基向量

任意两个不同函数的乘积在[-π，π]上的积分等于零

但不是单位基向量

傅里叶级数

1.具有傅里叶系数的三角级数称为$f(x)$的傅里叶级数:

$$\begin{cases} a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\mathrm{d}x, \\ a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\mathrm{d}x,\ (n=1,2,\cdots), \\ b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\mathrm{d}x,\ (n=1,2,\cdots). \end{cases}$$

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx).$$

！！！计算方法：

1.a0要单独求，n=0,1/n不存在

2.求的时候先不要把奇偶分开，先把n代入三角函数，好变成$(-1)^n$ 就变，不好变就保留

3.奇数项或者偶数项为0的时候可以直接把级数写成2n或者2n+1

4.先判断奇偶性简化运算

5.不是标准区间上的值，做平移变换，+T(+2π)

收敛条件

2. 狄利克雷(Dirichlet)充分条件(收敛定理)

$f(x)$是以2π为周期的周期函数,且满足$\begin{cases}(1)\text{在}[-\pi,\pi]\text{内连续} \\ \quad(\text{或只有有限个第一类间断点}) \\ (2)\text{至多有有限个极值点}\end{cases}$

则$\begin{cases}(1)\ f(x)\text{的傅里叶级数收敛,即} \\ \qquad \dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)=S(x). \\ (2)\ S(x)=\begin{cases}f(x), & x\text{为}f(x)\text{的连续点} \\ \dfrac{f(x-0)+f(x+0)}{2}, & x\text{为}f(x)\text{的第一类间断点}\end{cases}\end{cases}$

能展开=级数的和函数收敛于f(x)

间断点处的和函数不收敛于f(x)，所以间断点处不能展开，写范围要挖点

延拓

3.对于非周期函数,如果函数$f(x)$在$[-\pi,\pi]$上有定义,且满足狄利克雷充分条件,也可以展开成傅里叶级数.

作法:

(周期延拓)$\begin{cases}(1)\ F(x)=f(x)\quad x\in[-\pi,\pi)(\text{或}(-\pi,\pi]) \\ (2)\ F(x+T)=F(x),\ (T=2\pi) \\ (3)\ \text{端点处收敛于}\dfrac{1}{2}[f(\pi-0)+f(-\pi+0)] \\ (4)\ \underset{f(x)}{\underset{\parallel}{F(x)}}=\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx) \\ \qquad x\in[-\pi,\pi)(\text{或}(-\pi,\pi])\end{cases}$

奇延拓--傅立叶正弦系数

偶延拓--傅立叶余弦系数

！！！书写规范

级数展开要写范围，挖去间断点，延拓之后要限定到原来的范围上

说明周期延拓，奇偶延拓

满足Dirichlet条件

构造性证明

变量代换

平移，伸缩，换到[-π，π]上

18 单选 (2分）计算级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$ 在其收敛区间$(-1,1)$内的和函数为(　) 得分/总分

A. $\frac{1}{1-x}$ ✕0.00/2.00

B. $\frac{x}{1-x}$

C. $\frac{1}{(1-x)^2}$

D. $\frac{x}{(1-x)^3}$

19 单选 (2分）计算级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ 在其收敛区间$(-\infty,+\infty)$内的和函数为(　) 得分/总分

A. e^{x+1}

B. e^x ✕0.00/2.00

C. e^x+1

D. e^x-1

！！！注意是从哪一项开始展开，把初项带进去试一下

17 单选 (2分) 设函数$f(x)=x^2,\ 0\le x<1$, 而

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin n\pi x(-\infty<x<+\infty)$$, 其中

$$b_n=2\int_0^1 f(x)\sin n\pi x dx(n=1,2,\cdots)$$, 则$S(-\frac{1}{2})=$( )

- A. $-\frac{1}{4}$
- B. $\frac{1}{2}$
- C. $-\frac{1}{2}$
- D. $\frac{1}{4}$

提示了是奇函数！，和函数在非间断点处收敛域f(x)