线性代数期中试卷 答案

姓名________ 学号____________________专业__________ 考试时间 2018.5.5

一. 简答与计算题(本题共5小题，每小题8分，共40分)

1. 设 $A=\begin{pmatrix}0&-1&3\\1&2&0\\1&1&2\end{pmatrix}$. 求行列式 $|A|$，伴随矩阵 A^* 及逆 A^{-1}.

解：经计算得 $\begin{vmatrix}0&-1&3\\1&2&0\\1&1&2\end{vmatrix}\overset{r_3-r_2}{=}\begin{vmatrix}0&-1&3\\1&2&0\\0&-1&2\end{vmatrix}=-1$，$A^*=\begin{pmatrix}A_{11}&A_{21}&A_{31}\\A_{12}&A_{22}&A_{32}\\A_{13}&A_{23}&A_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&5&-6\\-2&-3&3\\-1&-1&1\end{pmatrix}$,

$A^{-1}=\dfrac{1}{|A|}A^*=\begin{pmatrix}-4&-5&6\\2&3&-3\\1&1&-1\end{pmatrix}$.

2. 设 $A=(a_{ij})_{3\times 3}$ 满足 $\mathrm{r}(A)=1,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是非齐次线性方程组 $Ax=b$ 的三个解向量，
且 $\alpha_1+\alpha_2=(1,2,3)^{\mathrm{T}},\alpha_2+\alpha_3=(0,2,-1)^{\mathrm{T}},\alpha_1+\alpha_3=(1,0,-1)^{\mathrm{T}}$，计算方程组的通解.

解：由题设得 α_1 是 $Ax=b$ 的特解，$\beta_1=\alpha_1-\alpha_2,\beta_2=\alpha_1-\alpha_3$ 是 $Ax=0$ 的解，
且 $\beta_1=(\alpha_1+\alpha_3)-(\alpha_2+\alpha_3)=(1,-2,0)^{\mathrm{T}},\beta_2=(\alpha_1+\alpha_2)-(\alpha_2+\alpha_3)=(1,0,4)^{\mathrm{T}}$，
$\alpha_1=\frac{1}{2}(\beta_1+(\alpha_1+\alpha_2))=(1,0,3/2)^{\mathrm{T}}$. 由 $\mathrm{r}(A)=1$ 可知 $Ax=0$ 的基础解系含两个向量.
易见 β_1 与 β_2 线性无关，所以构成 $Ax=0$ 的基础解系.
所以 $Ax=b$ 的通解为 $\alpha_1+k_1\beta_1+k_2\beta_2=(1+k_1+k_2,-2k_1,\frac{3}{2}+4k_3)^{\mathrm{T}}$，其中 k_1,k_2 为任意常数.

3. 设 A 是实方阵，证明：$\mathrm{r}(A)=\mathrm{r}(A^{\mathrm{T}}A)$. 举例说明对复方阵该结论不成立.

证：对实向量 x 有 $x^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}Ax=0$ 当且仅当 $Ax=0$，因此 $A^{\mathrm{T}}Ax=0$ 和 $Ax=0$ 在实数范围同解，故得证.
$A=\begin{pmatrix}1&i\\-i&1\end{pmatrix}$ 是复方阵不成立的例子.

4. 设 $A=\begin{pmatrix}1&-1&2\\0&1&-1\\0&-2&1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1&2\\0&1&-1\\0&-2&1\end{pmatrix}$，$f(x)=x^3-2x^2-x+2$. 求矩阵多项式 $f(A)$.

解：设 $P=\begin{pmatrix}1&-1&2\\0&1&-1\\0&-2&1\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$，则 $A=P^{-1}BP$ 且

$f(B)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&2\end{pmatrix}^3-2\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&2\end{pmatrix}^2-\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&2\end{pmatrix}+2E_3=\begin{pmatrix}f(1)&0&0\\0&f(-1)&0\\0&0&f(2)\end{pmatrix}=O.$

所以 $f(A)=P^{-1}f(B)P=O$.

5. 计算行列式 $D_n=\begin{vmatrix}a_1+a_0&a_2&\cdots&a_n\\a_1&a_2+a_0&\cdots&a_n\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a_1&a_2&\cdots&a_n+a_0\end{vmatrix}$.

解：$D_n\overset{\substack{r_i-r_1\\(2\le i\le n)}}{=}\begin{vmatrix}a_1+a_0&a_2&\cdots&a_n\\-a_0&a_0&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\-a_0&0&\cdots&a_0\end{vmatrix}\overset{c_1+\sum_{i=2}^n c_i}{=}\begin{vmatrix}a_0+\sum_{i=1}^n a_i&a_2&\cdots&a_n\\0&a_0&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\cdots&a_0\end{vmatrix}$

$$= (a_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i) a_0^{n-1}.$$

二.(12分) 已知矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & a \end{pmatrix}$，向量 $\beta = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ b \end{pmatrix}$. 问当 a, b 取何值时，线性方程组 $Ax = \beta$

(1) 无解；(2) 有唯一解；(3) 有无穷多解. 有解时，求出其解.

解：对增广矩阵 $B = (A, \beta)$ 做初等行变换得

$$B = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & a & b \end{array}\right) \xrightarrow{r} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & a+24 & b+2 \end{array}\right) \overset{\text{记为}}{=} C.$$

根据 a, b 的取值，结果如下：

(1) 当 $a = -24, b \neq -2$ 时，有 $\mathrm{r}(A) = 3 < \mathrm{r}(B) = 4$，所以方程组无解.

(2) 当 $a \neq -24$ 时，有 $\mathrm{r}(A) = \mathrm{r}(B) = 4$，所以方程组有唯一解. 对 C 做初等行变换得

$$C \xrightarrow{r} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1-3t_0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 6t_0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1+3t_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & t_0 \end{array}\right),$$

这里 $t_0 = \dfrac{b+2}{a+24}$. 所以方程组唯一解为 $x = (1-3t_0, 6t_0, 3t_0-1, t_0)^{\mathrm{T}}$.

(3) 当 $a = -24, b = -2$ 时，有 $\mathrm{r}(A) = \mathrm{r}(B) = 3 < 4$，所以方程组有无穷多组解.
方程组的一个特解为 $\eta = (1, 0, -1, 0)^{\mathrm{T}}$ 且对应齐次线性方程组的一个基础解系为
$\alpha = (-3, 6, 3, 1)^{\mathrm{T}}$. 所以方程组的通解为 $x = \eta + t\alpha = (1-3t, 6t, -1+3t, t)^{\mathrm{T}}$，其中 t 为常数.

三. (15分) 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -5 \\ 2 & -3 & -1 & -13 \\ -1 & 3 & 2 & 11 \end{pmatrix}$.

(1) 求行简化梯形矩阵 B 及可逆阵 P 使得 $PA = B$.

(2) 求 A 的秩及标准形.

(3) 设 $\alpha_1 = (1, 2, -1)^{\mathrm{T}}, \alpha_2 = (-1, -3, 3)^{\mathrm{T}}, \alpha_3 = (0, -1, 2)^{\mathrm{T}}, \alpha_4 = (-5, -13, 11)^{\mathrm{T}}$. 求向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 的一个极大无关组，并用此极大无关组线性表示其余向量.

解：对 (A, E_3) 做初等行变换得

$$\left(\begin{array}{cccc|ccc} 1 & -1 & 0 & -5 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & -1 & -13 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 2 & 11 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{r} \left(\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & 1 & -2 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 2 & 1 \end{array}\right).$$

(1) 令 $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$，则 B 为行简化梯形阵，P 为可逆阵且 $PA = B$.

(2) $\mathrm{r}(A) = \mathrm{r}(B) = 2$，$A$ 的标准形为 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(3) 注意到 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$. 将 B 按列分块 $B = (\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4)$，则 β_1, β_2 是 $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ 的一个极大无关组，且 $\beta_3 = \beta_1 + \beta_2, \beta_4 = -2\beta_1 + 3\beta_2$. 所以 α_1, α_2 是 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 的一个极大无关组，且 $\alpha_3 = \alpha_1 + \alpha_2, \alpha_4 = -2\alpha_1 + 3\alpha_2$.

四.(11分) 计算行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 5 & 8 & 18 \\ 4 & 9 & 25 & 64 & 164 \\ 8 & 27 & 125 & 512 & 1512 \\ 14 & 78 & 620 & 4088 & 14078 \end{vmatrix}$.

解：原行列式$=\begin{vmatrix}1&1&1&1&2\\2&3&5&8&18\\4&9&25&64&164\\8&27&125&512&1512\\14&78&620&4088&14078\end{vmatrix}\overset{c_5-c_4}{=}\begin{vmatrix}1&1&1&1&1\\2&3&5&8&10\\4&9&25&64&100\\8&27&125&512&1000\\14&78&620&4088&9990\end{vmatrix}$

$=\begin{vmatrix}1&1&1&1&1\\2&3&5&8&10\\2^2&3^2&5^2&8^2&10^2\\2^3&3^3&5^3&8^3&10^3\\2^4-2&3^4-3&5^4-5&8^4-8&10^4-10\end{vmatrix}\overset{r_5+r_2}{=}\begin{vmatrix}1&1&1&1&1\\2&3&5&8&10\\2^2&3^2&5^2&8^2&10^2\\2^3&3^3&5^3&8^3&10^3\\2^4&3^4&5^4&8^4&10^4\end{vmatrix}$

$=(3-2)\times(5-2)\times(8-2)\times(10-2)\times(5-3)\times(8-3)\times(10-3)\times(8-5)\times(10-5)\times(10-8)=302400.$

五.(10分) 设 $A=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix},B=\begin{vmatrix}a_{11}+k&a_{12}+k&\cdots&a_{1n}+k\\a_{21}+k&a_{22}+k&\cdots&a_{2n}+k\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a_{n1}+k&a_{n2}+k&\cdots&a_{nn}+k\end{vmatrix}$，其中 k 为任意常数.

求证：$\sum_{i,j=1}^n A_{ij}=\sum_{i,j=1}^n B_{ij}$，其中 A_{ij} 和 B_{ij} 分别为 A 和 B 的 (i,j) 位元素的代数余子式.

解：对任意 $1\le i\le n$ 有

$$\sum_{j=1}^n B_{ij}=\begin{vmatrix}a_{11}+k&a_{12}+k&\cdots&a_{1n}+k\\\vdots&\vdots&\vdots&\\a_{i-1,1}+k&a_{i-1,2}+k&\cdots&a_{i-1,n}+k\\1&1&\cdots&1\\a_{i+1,1}+k&a_{i+1,2}+k&\cdots&a_{i+1,n}+k\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\a_{n1}+k&a_{n2}+k&\cdots&a_{nn}+k\end{vmatrix}\overset{\substack{r_p-kr_i\\(p\neq i)}}{=}\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\\vdots&\vdots&\vdots&\\a_{i-1,1}&a_{i-1,2}&\cdots&a_{i-1,n}\\1&1&\cdots&1\\a_{i+1,1}&a_{i+1,2}&\cdots&a_{i+1,n}\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}$$

$$=\sum_{j=1}^n A_{ij}.$$

因此 $\sum_{i,j=1}^n B_{ij}=\sum_{i=1}^n(\sum_{j=1}^n B_{ij})=\sum_{i=1}^n(\sum_{j=1}^n A_{ij})=\sum_{i,j=1}^n A_{ij}$.

六.(12分) (1) 求证：任意 r 个线性无关的 n 维列向量都是某 n 元齐次线性方程组的基础解系.

(2) 求一个齐次线性方程组使得 $\alpha_1=(-1,1,1,0)^{\mathrm{T}}$ 和 $\alpha_2=(7,5,0,2)^{\mathrm{T}}$ 构成它的一个基础解系.

(1) 证明：设 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r$ 为线性无关的 n 维列向量. 设方程 $a_1x_1+\cdots+a_nx_n=0$ 有解 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r$，则 $(a_1,\cdots,a_n)\alpha_1=\cdots=(a_1,\cdots,a_n)\alpha_r=0$. 因此令 $B=(\alpha_1,\cdots,\alpha_r)^{\mathrm{T}}$，则 $(a_1,\cdots,a_n)^{\mathrm{T}}$ 为 $By=0$ 的解向量. 因为 $\mathrm{r}(B)=\mathrm{r}\{\alpha_1,\cdots,\alpha_r\}=r$，所以 $By=0$ 的基础解系含 $n-r$ 个向量. 设 $\beta_1,\cdots,\beta_{n-r}$ 为 $By=0$ 的一个基础解系. 令 $A=(\beta_1,\cdots,\beta_{n-r})^{\mathrm{T}}$，则 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r$ 是 $Ax=0$ 的线性无关解向量，并且 $n-\mathrm{r}(A)=n-\mathrm{r}\{\beta_1,\cdots,\beta_{n-r}\}=r$，所以 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r$ 是 $Ax=0$ 的一个基础解系.

(2) 解：令 $B=(\alpha_1,\alpha_2)^{\mathrm{T}}$ 并对其做初等行变换

$$B=\begin{pmatrix}-1&1&1&0\\7&5&0&2\end{pmatrix}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1&0&-\frac{5}{12}&\frac{1}{6}\\0&1&\frac{7}{12}&\frac{1}{6}\end{pmatrix},$$

得 $By=0$ 的一个基础解系为 $\beta_1=(\frac{5}{12},-\frac{7}{12},1,0)^{\mathrm{T}},\beta_2=(-\frac{1}{6},-\frac{1}{6},0,1)^{\mathrm{T}}$.

由(1)中构造得 α_1,α_2 构成线性方程组

$$\begin{cases}\frac{5}{12}x_1-\frac{7}{12}x_2+x_3&=0,\\-\frac{1}{6}x_1-\frac{1}{6}x_2+x_4&=0\end{cases}$$

的一个基础解系.