

线性代数期中试卷 (2018.11.17)

一. 简答与计算题(本题共5小题, 每小题8分, 共40分)

1. 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -\lambda \end{pmatrix}$ 经过多次初等行变换和列变换得到 $B = \begin{pmatrix} -5 & 17 & 6 \\ -7 & 0 & 5 \\ 13 & 9 & -8 \end{pmatrix}$, 求参数 λ .

2. 设 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & n-1 \\ n & & & & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}$, 其中 $n \geq 2$, 求 C^{-1} .

3. 设 $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}, |A| \neq 0$, 且有 $A_{ij} = 2a_{ij}, i, j = 1, 2, 3$, 其中 A_{ij} 为矩阵元素 a_{ij} 的代数余子式, 求 $|A^*|$.

4. 设矩阵 $A = MN^T$, 其中 $M, N \in \mathbb{R}^{n \times r} (r \leq n), |N^T M| \neq 0$. 证明: $r(A^2) = r(A)$.

5. 计算行列式 $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n-1 \\ 3 & 4 & 5 & \cdots & n-2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ n & n-1 & n-2 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$. (D的元素 $a_{ij} = \begin{cases} i+j-1, & \text{当 } i+j \leq n+1, \\ 2n+1-i-j, & \text{当 } i+j > n+1. \end{cases}$)

二.(10分) 设有向量组

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \alpha_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \alpha_5 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

(1) 求一个极大无关组, 并用极大无关组表示其余向量;

(2) 在4维列向量组 e_1, e_2, e_3, e_4 中找出所有不能被向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$ 线性表示的向量, 其中 $e_1 = (1, 0, 0, 0)^T, e_2 = (0, 1, 0, 0)^T, e_3 = (0, 0, 1, 0)^T, e_4 = (0, 0, 0, 1)^T$.

三.(10分) 设 $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$, A 的第一列为 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$, 且 $\xi_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ 和 $\xi_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$

是齐次线性方程组 $(A - 2E)x = \theta$ 的非零解, 求 A .

四. (15分) 设下列非齐次线性方程组有3个线性无关的解向量:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 = 1, \\ \lambda x_1 + x_2 + 2x_3 + 7\mu x_4 = -2, \\ 4x_1 + 9x_2 - 5x_3 - 6x_4 = 5. \end{cases}$$

(1) 求出该方程组系数矩阵的秩; (2) 求出参数 λ, μ 的值以及方程组的通解.

五.(15分) 设 $A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 6 \\ 3 & -1 & 3 \\ -3 & -3 & -7 \end{pmatrix}$.

(1) 计算矩阵 A 的特征值和特征向量; (2) 计算矩阵 $(A^2 + A^* + 2E)^{-1}$ 的特征值和特征向量.

六.(10分) 设矩阵 $A \in \mathbb{R}^{m \times n}, r(A) < n$, 列向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 是齐次线性方程组 $Ax = \theta$ 的基础解系, 矩阵 $N = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s) \in \mathbb{R}^{n \times s}$. 证明: $r(A^T, N) = n$.