线性代数期中试卷　(2017.11.18)

一. 简答题(本题共5小题,每小题8分,共40分)

1. 已知向量组 $\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}$ 线性无关，求参数 t 使得向量组 $\{\beta_1,\beta_2,\beta_3\}$ 线性相关，
其中 $\beta_1=\alpha_1+2\alpha_2+3\alpha_3,\beta_2=2\alpha_1+3\alpha_2+\alpha_3,\beta_3=t\alpha_1+\alpha_2+2\alpha_3$.

2. 已知 $A=\begin{pmatrix} x & x & x & y \\ x & x & y & y \\ x & y & y & y \\ y & y & y & y \end{pmatrix}$，求 $\mathrm{r}(A)$.

3. 已知 $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$，求 A^{-1}.

4. 请找出 2×2 的实数矩阵 A 和 B 满足：$(E+A)^{-1}\neq E^{-1}+A^{-1}$ 和 $(E+B)^{-1}=E^{-1}+B^{-1}$.

5. 计算行列式：$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 2 & 2^2 & \cdots & 2^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ n & n^2 & \cdots & n^n \end{vmatrix}$.

二.(15分) 已知 $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 4 & -5 \\ 2 & -2 & 0 & 6 \end{pmatrix}$.
(1) 求齐次方程组 $Ax=\theta$ 的基础解系.
(2) 若 $\xi=(-2,3,1,1)^T$ 满足 $A\xi=2b$，求 b 并求方程组 $Ax=b$ 的通解.

三.(10分) 已知3维列向量组 $\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}$ 和 $\{\beta_1,\beta_2,\beta_3\}$，且经过初等行变换有
$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1,\beta_2,\beta_3)\to\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.
请将 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 表示为 β_1,β_2,β_3 的线性组合.

四.(10分) 已知存在 x,y 使得 $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & 1 \\ 4 & -8 & x \end{pmatrix}$ 和 $B=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -3 & -2 & -2 \\ -3 & y & 2 \end{pmatrix}$ 相似.
求 x,y 并计算 $\mathrm{tr}(B^*)$，其中 B^* 为 B 的伴随矩阵.

五. (10分) 已知 $P^{-1}AP=D$，其中 $P=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},D=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
计算矩阵 $B=A^2+(2E-A)^{-1}$ 的特征值和特征向量.

六.(15分) 设 A 为 n 阶方阵 $(n\geq 2)$.
(1) 证明： $(A^*)^T=(A^T)^*$，其中 $A^*,(A^T)^*$ 分别为 A 和 A^T 的伴随矩阵.
(2) 若偶数阶方阵 A 满足 $A^T=-A$，证明： A^* 的所有元素之和为0.