

# 线性代数期中试卷 (2019.4.27)

一. 简答与计算(本题共5小题, 每小题8分, 共40分)

1. 计算  $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \end{pmatrix}$  的第一行所有元素的代数余子式之和。

2. 计算  $X = (X_{ij})_{3 \times 3}$  使之满足矩阵方程  $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ 。

3. 已知4阶方阵  $A$  的伴随矩阵  $A^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ , 求  $A$ 。

4. 给定向量组  $A = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{100}\}$  与  $B = \{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{20}\}$ , 已知  $r(A) = 7$ , 某同学计算出  $r(A \cup B) = 31$ , 请问对吗? 说明理由。

5. 已知线性方程组  $Ax = b$  的三个特解为  $\alpha_1 = (1, -2, 3)^T, \alpha_2 = (0, -1, -2)^T, \alpha_3 = (-4, 2, 1)^T, r(A) = 1$ , 试写出  $Ax = b$  的通解。

二.(10分) 假定矩阵  $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$  为3阶可逆矩阵:  $A^{-1} = \begin{pmatrix} \beta_1^T \\ \beta_2^T \\ \beta_3^T \end{pmatrix}$ , 令  $P = \alpha_2 \beta_2^T + \alpha_3 \beta_3^T$ 。

- (1) 证明  $P^2 = P$  (即  $P$  是投影矩阵);
- (2)  $P$  的秩是多少?
- (3) 给定3维向量  $x$ ,  $Px$  可否由  $\alpha_2$  与  $\alpha_3$  线性表出? 如果可以, 写出一个表出方式。

三.(10分) 计算  $(A^*)^*$ , 此处  $A^*$  表示矩阵  $A$  的伴随矩阵,  $A = \begin{pmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & a_1 b_3 \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & a_2 b_3 \\ a_3 b_1 & a_3 b_2 & a_3 b_3 \end{pmatrix}$ 。

四. (10分) 计算  $f(\pi)$  与  $f'(\pi)$ , 此处:

$$f(x) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & a_1 x^2 + b_1 x + c_1 \\ a_2 & b_2 & a_2 x^2 + b_2 x + c_2 \\ a_3 & b_3 & a_3 x^2 + b_3 x + c_3 \end{vmatrix}.$$

五.(12分) 给定矩阵  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 & -2 & -3 \\ 1 & 3 & 8 & -3 & 9 \\ 3 & 1 & 2 & -7 & 3 \end{pmatrix}$ ,

- (1) 计算  $r(A)$ ;
- (2) 计算线性方程组  $Ax = 0$  的基本解组;
- (3) 假定  $\eta = (1, -1, 0, 0, 2)^T$  是  $Ax = b$  的解, 确定  $b$  并计算  $Ax = b$  的通解。

六.(10分) 写出向量组  $\alpha_1 = (1 + a, 1, 1, 1)^T, \alpha_2 = (1, 1 + a, 1, 1)^T, \alpha_3 = (1, 1, 1 + a, 1)^T$  的极大线性无关组;  $\beta = (1, 1, 1, b)^T$  能否由  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性表出? 如果可以, 表出方式唯一吗?

七.(8分)  $A = (a_{ij})_{m \times n}$  为实矩阵,  $b$  为  $m$  维实向量, 证明  $A^T Ax = A^T b$  有解。  
(提示: 先证明  $r(A^T A) = r(A)$ )