线性代数期中试卷 答案

姓名______ 学号_______ 专业______ 考试时间 2017.4.22

一. 解答下列各题(8分×5=40分)

1. 设 A 为3阶方阵, A^* 是 A 的伴随矩阵. 已知 $|A|=\frac{1}{2}$,求行列式 $|(3A)^{-1}-2A^*|$.

解:
$$|(3A)^{-1} - 2A^*| = |\frac{1}{3}A^{-1} - 2|A|A^{-1}| = |-\frac{2}{3}A^{-1}| = (-\frac{2}{3})^3|A|^{-1} = -16/27.$$

2. 设 A 为 n 阶方阵且满足 $A^2 = -A$. 证明: r(A) + r(E + A) = n.

解: 由
$$A^2 = -A$$
 得 $A^2 + A = A(A+E) = A(E+A) = O$, 故 $\mathbf{r}(A) + \mathbf{r}(E+A) \le n$.
又有 $\mathbf{r}(A) + \mathbf{r}(E+A) = \mathbf{r}(-A) + \mathbf{r}(E+A) \ge \mathbf{r}(-A+(E+A)) = \mathbf{r}(E) = n$.
故有 $\mathbf{r}(A) + \mathbf{r}(E+A) = n$.

3. 设 A 和 B 分别是 m 阶和 n 阶的可逆方阵,C 是 $m \times n$ 的矩阵,O 是零矩阵. 证明分块矩阵 $\begin{pmatrix} C & A \\ B & O \end{pmatrix}$ 可逆并求其逆矩阵.

证: 设
$$D = \begin{pmatrix} X & Y \\ Z & W \end{pmatrix}$$
 满足 $\begin{pmatrix} X & Y \\ Z & W \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C & A \\ B & O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E \\ E \end{pmatrix}$,
$$\begin{cases} XC + YB &= E, \\ XA &= O, \\ ZC + WB &= O, \\ ZA &= E. \end{cases}$$
,利用 A 、 B 可逆解得
$$\begin{cases} X = O, \\ Y = B^{-1}, \\ Z = A^{-1}, \\ W = -A^{-1}CB^{-1}. \end{cases}$$
,故
$$\begin{pmatrix} C & A \\ B & O \end{pmatrix}$$
 可逆,且逆矩阵为 $D = \begin{pmatrix} O & B^{-1} \\ A^{-1} & -A^{-1}CB^{-1} \end{pmatrix}$.

4. 己知
$$A = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ -12 & 5 \end{pmatrix}$$
 , $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, 求 $P^{-1}AP$ 和 $A^{-3} - A$.

解: 易知
$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}, B = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$
 因为 $P^{-1}(A^{-3} - A)P = (P^{-1}AP)^{-3} - P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = O$,故 $A^{-3} - A = O$.

5. 设 n 阶方阵 A 的秩为 r < n, 证明存在秩为 n - r 的 n 阶方阵 B 使得 AB = O, 这里 O 表示零矩阵.

证: 因为 A 的秩为 r < n,故 $Ax = \theta$ 的基础解系含 n - r 个列向量,且线性无关,设为 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_{n-r}$. 令 $B = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_{n-r}, \eta_1, \cdots, \eta_r)$,其中 $\eta_1 = \cdots = \eta_r = \theta$,则 $\mathbf{r}(B) = n - r$,且 AB = O.

二.(12分) 若方阵 X 满足 $X^2 = X$,则称 X 是幂等的. 设 A 和 B 是同阶的幂等方阵,证明 (A+B) 是幂等的当且仅当 AB = BA = O,这里 O 表示零矩阵.

证: 因为 $A^2 = A, B^2 = B$, 所以有

 $(A+B)^2 = A+B \Leftrightarrow A+AB+BA+B = A+B \Leftrightarrow AB+BA = O.$

分别对 $\overrightarrow{AB} + BA = O$ 左乘 A 和右乘 A 得到 AB + ABA = O, ABA + BA = O.

从而得 AB = BA, 又由 AB + BA = O 得 AB = BA = O.

易知 AB = BA = O 可得 AB + BA = O, 故 $(A + B)^2 = A + B$ 当且仅当 AB = BA = O.

三. (12分) 证明方程组

$$\begin{cases} x_1 - x_2 &= a_1 \\ x_2 - x_3 &= a_2 \\ \dots & \dots \\ x_{n-1} - x_n &= a_{n-1} \\ x_n - x_1 &= a_n \end{cases}$$

有解的充分必要条件是 $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 0$. 在有解的情况下,求方程组的解集.

证: "⇒" 设有解 x_1, x_2, \dots, x_n 满足方程组,将方程组的所有方程相加得 $0 = a_1 + a_2 + \dots + a_n$. "←"将方程组写成矩阵形式: Ax = b,

显然 r(B) = r(A) = n - 1,方程组有解.

易知
$$B' \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & -1 & a_1 + \cdots + a_{n-1} \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -1 & a_2 + \cdots + a_{n-1} \\ & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ & & 1 & -1 & a_{n-1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
, 故方程组的一个特解为: $\gamma = \begin{pmatrix} a_1 + \cdots + a_{n-1} \\ a_2 + \cdots + a_{n-1} \\ \vdots \\ a_{n-1} \\ 0 \end{pmatrix}$,

四.(12分) 解带参数方程组
$$\begin{cases} x_1 + (\lambda^2 + 1)x_2 + 2x_3 &= \lambda, \\ \lambda x_1 + \lambda x_2 + (2\lambda + 1)x_3 &= 0, \\ x_1 + (2\lambda + 1)x_2 + 2x_3 &= 2. \end{cases}$$

五.(12分) 计算行列式
$$\begin{vmatrix} b & b & \cdots & b & b & a \\ b & b & \cdots & b & a & b \\ b & b & \cdots & a & b & b \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ b & a & \cdots & b & b & b \\ a & b & \cdots & b & b & b \end{vmatrix}$$

解:将行列式的第n列两两交换到第1列,然后将新的行列式的第n列两两交换到2列,一直交换下去,直到将行列式的第n列交换到第n-1列.

共交换了:
$$(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1=\frac{1}{2}n(n-1)$$
, 得到

六.(12分) 设 A 和 X 为 n 阶方阵,且满足 AX = A + 2X.

1. 证明:
$$AX = XA$$
;

2. 若
$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$
, X 是三阶未知方阵,求解矩阵方程 $AX = A + 2X$.

1. 证:
$$AX = A + 2X \Rightarrow AX - 2X - A = O \Rightarrow \frac{1}{2}(A - 2E)(X - E) = E$$
. 故 $\frac{1}{2}(A - 2E) = (X - E)^{-1}$,从而 $(X - E)\frac{1}{2}(A - 2E) = \frac{1}{2}(XA - 2X - A + 2E) = E$,即 $XA - 2X - A = O = AX - 2X - A$,于是 $AX = XA$.

2. 解: 移项得
$$(A - 2E)X = A$$
, 于是

$$(A-2E,A) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 & 4 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 6 & 5 & 2 & 6 & 9 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 2 & -12 & -9 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 & -8 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -9 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 12 & 9 \end{pmatrix} .$$

$$\not t X = \begin{pmatrix} 3 & -8 & -6 \\ 2 & -9 & -6 \\ -2 & 12 & 9 \end{pmatrix} .$$