

# ルービックキューブと群論

宇佐見 公輔

2020 年 10 月 3 日

# 自己紹介

職業：プログラマ / 趣味：数学

最近の活動（登壇・ブログ・Twitter）：

- 平面の敷き詰めとルート系（2020 年 6 月 / 日曜数学会）
- 四元数のはなし（2020 年 5 月 / 関西日曜数学友の会）
- はじめて学ぶリー環 ノート（2020 年 4 月～ / Twitter）
- Ising 模型 ノート（2020 年 3 月～4 月 / Twitter）
- Onsager 代数の話（2020 年 3 月 / 京都某所）
- はじめて学ぶリー群 ノート（2020 年 1 月～3 月 / Twitter）

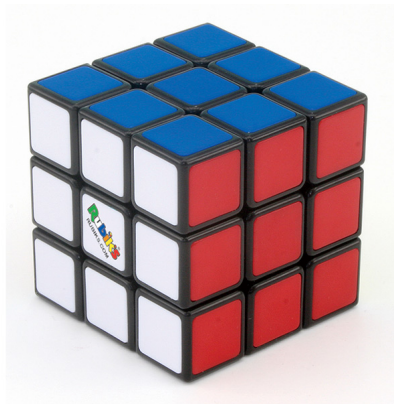
# 今日の話

今日はルービックキューブの話です。過去の発表内容とは特に関係ありません。

ルービックキューブを数学的に考えるにはどうするのかという話と、SageMathでの計算の紹介になります。



# ルービックキューブ



$3 \times 3 \times 3$  が普通ですが、 $2 \times 2 \times 2$  など別サイズもあります。

# ルービックキューブの数学的な解析

ルービックキューブに対する興味の持ち方は様々です。

- 6面完成させる解法は？
- スピードキューブ（完成までの時間を競う）
- キューブの機構はどうなっているのか？

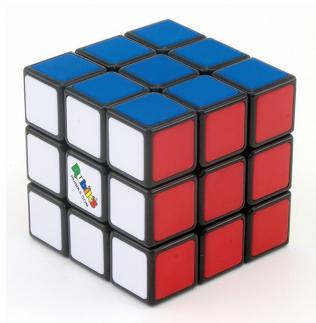
ここでは、ルービックキューブパズルを数学的に解析することを考えます。ルービックキューブは、群論の言葉を用いて記述することが可能です。

# 考察にあたっての前提

3次元空間の中でキューブの位置や向きを固定して考えます。

キューブそのものを回転させることは考えません。

キューブの操作は、各面を時計回りまたは反時計回りに90度ずつ動かすことを考えます。真ん中の列を回転させることはしません。



# 小方体 (cubelet)

- 小方体：キューブを構成する小立方体。中心を除いて 26 個。
- 1 面体：1 つの面が外側に見える小方体。6 個。
- 2 面体：2 つの面が外側に見える小方体。12 個。
- 3 面体：3 つの面が外側に見える小方体。8 個。

先ほどの前提から、1 面体は動きません。2 面体と 3 面体がキューブの操作によって移動します。

# 小面 (facet)

キューブの各面を構成する正方形を小面と呼びます。各面で中央を除いて 8 個、全体で 48 個あります。

+-----+											
1 2 3											
4 top 5											
6 7 8											
+-----+											
9 10 11			17 18 19			25 26 27			33 34 35		
12 left 13			20 front 21			28 right 29			36 rear 37		
14 15 16			22 23 24			30 31 32			38 39 40		
+-----+											
			41 42 43								
			44 bottom 45								
			46 47 48								
+-----+											

番号づけの規則は何でもよいです。上図は SageMath の出力です。



# 小面のシングマスター記法

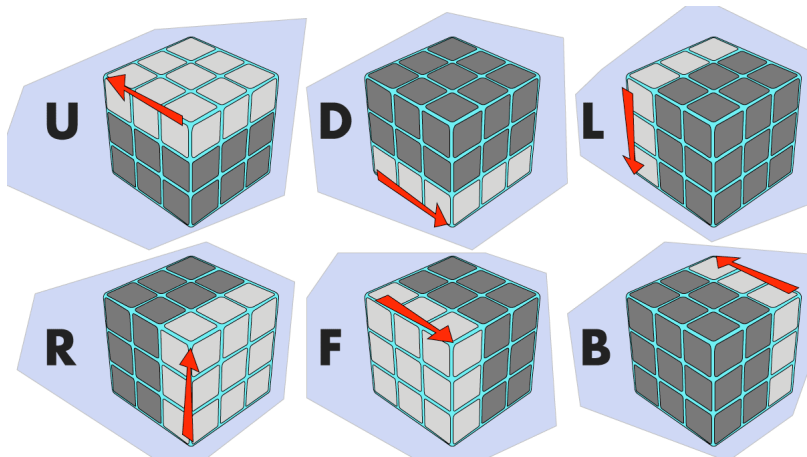
番号づけの代わりに、シングマスター記法という方法もあります。

- 上下左右前後の各面に  $u, d, l, r, f, b$  を割り当てる
- 2面体上の小面：xy 形式
  - x は小面を含む面
  - y は隣接する面
- 3面体上の小面：xyz 形式
  - x は小面を含む面
  - y と z は隣接する面

例：下図の 7 は  $uf$ 、18 は  $fu$ 、6 は  $ufl$ 、17 は  $flu$  と書けます。

+-----+																
				1	2	3										
				4	top	5										
				6	7	8										
+-----+																
	9	10	11		17	18	19		25	26	27		33	34	35	
	12	left	13		20	front	21		28	right	29		36	rear	37	
	14	15	16		22	23	24		30	31	32		38	39	40	
+-----+																
				41	42	43										
				44	bottom	45										
				46	47	48										
+-----+																

# キューブ操作のシングマスター記法



各面を時計回りに 90 度回転する操作を  $U, D, L, R, F, B$  と書くことにします。

# キューブ操作と置換

$X$  を小面 48 個の集合とします。キューブ操作は、 $X$  の置換写像であると考えることができます。

例えば操作  $R$  は、以下のような置換です。小面を 20 個動かします。4 個の元の巡回置換が 5 つ起こります。

- $rf \mapsto ru \mapsto rb \mapsto rd \mapsto rf$
- $ruf \mapsto rub \mapsto rbd \mapsto rdf \mapsto ruf$
- $fr \mapsto ur \mapsto br \mapsto dr \mapsto fr$
- $fur \mapsto ubr \mapsto bdr \mapsto dfr \mapsto fur$
- $fdr \mapsto ufr \mapsto bur \mapsto dbr \mapsto fdr$

## キューブ操作と置換 (2)

もうひとつ例を見ます。 $R$  を 2 回行った  $R^2$  は、以下のような置換です。2 個の元の互換が 10 個起こります。

- $rf \mapsto rb \mapsto rf$
- $ru \mapsto rd \mapsto ru$
- $ruf \mapsto rbd \mapsto ruf$
- $rub \mapsto rdf \mapsto rub$
- $fr \mapsto br \mapsto fr$
- $ur \mapsto dr \mapsto ur$
- $fur \mapsto bdr \mapsto fur$
- $ubr \mapsto dfr \mapsto ubr$
- $fdr \mapsto bur \mapsto fdr$
- $ufr \mapsto dbr \mapsto ufr$

集合  $X$  の置換全体の集合  $S_X$  は群になります。これを  $X$  の対称群と呼びます。

$$S_X := \{f : X \rightarrow X \mid f \text{ は全単射}\}$$

キューブ操作（の組み合わせ）は、小面集合  $X$  の対称群に含まれます。

# ルービックキューブ群

小面集合  $X$  の対称群  $S_X$  の中にはキューブ操作の組み合わせだけでは実現できないものもあります。

例えば、3面体のひとつをルービックキューブから取り外して、小面のうち2つの色を逆に貼り替えてからルービックキューブに戻す、ということを行います。これは小面集合  $X$  の置換にはなっていますが、キューブ操作だけでは元の配置に戻すことができません。

基本操作  $U, D, L, R, F, B$  で生成される  $S_X$  の部分群  $G$  を、ルービックキューブ群と呼びます。

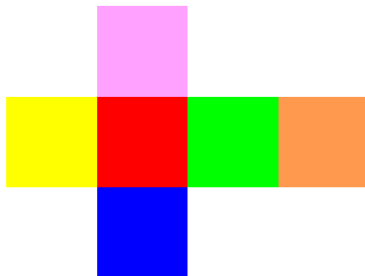
$$G := \langle U, D, L, R, F, B \rangle \subset S_X$$



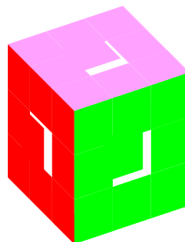
SageMath は数学関連のソフトウェアを統合したものです。  
SageMath には、ルービックキューブ群を扱うプログラムが最初から組み込まれています。

# ルービックキューブ群を SageMath で扱う

```
sage: rubik = CubeGroup()  
sage: rubik.plot_cube("")  
sage: rubik.plot3d_cube("")
```



sagemath.org



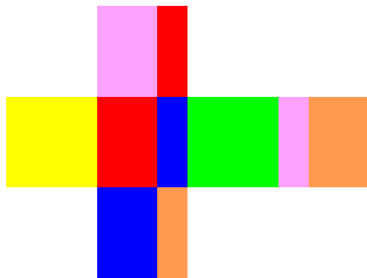
Up, Front, and Right faces.

sagemath.org

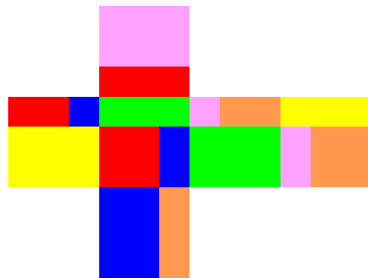


# ルービックキューブ群を SageMath で扱う (2)

```
sage: rubik = CubeGroup()  
sage: rubik.plot_cube("R")  
sage: rubik.plot_cube("R*U")
```



sagemath.org



sagemath.org

# SageMath とシングマスター記法

```
sage: rubik = CubeGroup()
sage: rubik.display2d("")
```

```
+-----+
| 1  2  3 |
| 4  top 5 |
| 6  7  8 |
+-----+
| 9 10 11 | 17 18 19 | 25 26 27 | 33 34 35 |
| 12 left 13 | 20 front 21 | 28 right 29 | 36 rear 37 |
| 14 15 16 | 22 23 24 | 30 31 32 | 38 39 40 |
+-----+
| 41 42 43 |
| 44 bottom 45 |
| 46 47 48 |
+-----+
```

```
sage: from sage.groups.perm_gps.cubegroup import *
sage: index2singmaster(17)
'flu'
```

# ルービックキューブ群の位数

ルービックキューブ群は定義から有限群ですが、その大きさがどれくらいなのか見てみます。

```
sage: rubik = CubeGroup()  
sage: rubik.order()  
43252003274489856000  
sage: rubik.order().factor()  
2^27 * 3^14 * 5^3 * 7^2 * 11
```

# 元の位数

ルービックキューブ群の元の位数 ( $g^m = 1$  を満たす最小の  $m$ ) も見てみましょう。

操作  $R$  は 4 回行えば元に戻ります。

```
sage: R = rubik.move("R")[0]
sage: R.order()
4
```

ルービックキューブ群には位数 1260 の元があります。そのひとつが  $RU^2D^{-1}BD^{-1}$  です。これより大きい位数の元はありません。

```
sage: J = rubik.move("R*U^2*D^-1*B*D^-1")[0]
sage: J.order()
1260
```

## その他の豆知識

- どんな配置でも 20 手以内で 6 面完成できることが知られています（ただし、180 度回転も 1 手とみなして数えた場合。180 度回転を 2 手とするときは 26 手となる）。
- ルービックキューブ群は単純群ではありません（非自明な正規部分群を持つ）。
- 分解の例： $G \cong (\mathbb{Z}_3^7 \times \mathbb{Z}_2^{11}) \rtimes ((A_8 \times A_{12}) \rtimes \mathbb{Z}_2)$

ルービックキューブ群は群論の題材として（ちょっと大きいですが）良いものだと思います。また、SageMath を使うといろいろ遊べるのも良いと思います。

参考文献：

- David Joyner、群論の味わい – 置換群で解き明かすルービックキューブと 15 パズル –
- 島内剛一、ルービック・キューブと数学パズル