Onsager 代数の話

Generalized Onsager algebras

宇佐見 公輔

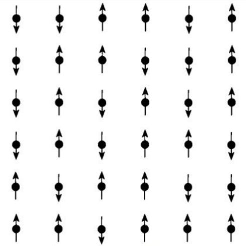
2019 年 8 月 3 日

Onsager algebra とは

- $\mathbb{C}$ 上の無限次元リー代数
- 1944 年、L. Onsager が 2 次元 Ising model を解くため導入
- 1980〜90 年代ごろに研究が進み、注目されはじめる
- Ising model 以外の各種の数理物理のモデルへの応用も

2 次元 Ising model

- $m \times n$ の格子模型
- 各点で ± 1 の値（スピン）を持つ
- 温度が下がると隣接点が同じスピンに揃いたがる（そのようにハミルトニアンを定義する）
- 1944 年に Onsager algebra で解かれた（その後もう少し分かりやすい手法で解かれた）
- なお、3 次元以上では解法は見つかっていない



Onsager algebra の研究

- 1980〜90 年代ごろ、同型な対応がいくつか見つかる
- 特に、アフィンリー代数との関連が見つかる
- そこから、q-Onsager algebra や、Onsager algebra の一般化が研究される
- 今回は Onsager algebra の一般化について触れる

Definition (Onsager algebra)

$\{A_k, G_m\}$ ($k \in \mathbb{Z}$, $m \in \mathbb{Z}_{>0}$) を基底として持ち、ブラケット積を以下で定義したリー代数を Onsager algebra という。

$$\begin{aligned}[A_k, A_l] &= 4G_{k-l} \\ [G_m, A_k] &= 2A_{k+m} - 2A_{k-m} \\ [G_m, G_n] &= 0\end{aligned}$$

（ここで $G_{-m} := -G_m$, $G_0 := 0$）

Dolan-Grady 関係式

Proposition (Dolan-Grady 関係式)

Onsager algebra は、生成元 A_0, A_1 と以下の関係式で生成されるリー代数と同型である。

$$[A_0, [A_0, [A_0, A_1]]] = 16[A_0, A_1]$$
$$[A_1, [A_1, [A_1, A_0]]] = 16[A_1, A_0]$$

こちらを Onsager algebra の定義としても差し支えない。

loop algebra の involution

loop algebra $\mathbb{C}[t, t^{-1}] \otimes \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ を考える。ここで $\mathbb{C}[t, t^{-1}]$ は変数 t のローラン多項式である。

Definition (loop algebra の involution)

$\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ の involution ω を以下で定義する。

$$\begin{aligned} e &\mapsto f \\ f &\mapsto e \\ h &\mapsto -h \end{aligned}$$

$\mathbb{C}[t, t^{-1}] \otimes \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ 上の involution ω を以下で定義する。

$$p(t) \otimes x \mapsto p(t^{-1}) \otimes \omega(x)$$

Proposition (loop algebra の fixed point subalgebra)

$\mathbb{C}[t,t^{-1}]\otimes\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ の部分リー代数

$$\{x\in\mathbb{C}[t,t^{-1}]\otimes\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})\mid\omega(x)=x\}$$

（ω による fixed point subalgebra）は Onsager algebra と同型である。また、以下の $\{A_k,G_m\}$ ($k\in\mathbb{Z}$, $m\in\mathbb{Z}_{>0}$) がその基底である。

$$A_k=2t^k e+2t^{-k}f$$
$$G_m=(t^m-t^{-m})h$$

Onsager algebra は $A_1^{(1)}$ 型のアフィンリー代数（= loop algebra $\mathbb{C}[t,t^{-1}]\otimes\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ の中心拡大）の部分リー代数ともいえる。

Onsager algebra の拡張の発想

- Onsager algebra は $A_1^{(1)}$ 型のアフィンリー代数の部分リー代数であることがわかった
- では、$A_1^{(1)}$ 型以外のアフィンリー代数を考えれば、Onsager algebra の拡張を考えられるのではないか？

$A_n^{(1)}$ への拡張

Uglov と Ivanov による A 型への拡張（1996）

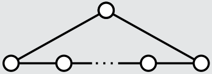
Definition (A 型 Onsager algebra)

生成元 $e_0, \ldots, e_n$ と以下の関係式で生成されるリー代数を $A_n^{(1)}$ 型 Onsager algebra と呼ぶ。

$$[e_i,[e_i,e_j]] = e_j \qquad \text{Dynkin 図形上で頂点が隣のとき}$$

$$[e_i,[e_i,e_j]] = 0 \qquad \text{otherwise}$$

上記の Dynkin 図形は $A_n^{(1)}$ 型のもの。



関係式の意味

A 型 Onsager algebra の関係式

$$[e_i, [e_i, e_j]] = e_j$$

は、A 型有限次元単純リー代数の Serre 関係式

$$[e_i, [e_i, e_j]] = 0$$

の類似と考えられる。

また、Onsager algebra の Dolan-Grady 関係式

$$[A_i, [A_i, [A_i, A_j]]] = 16[A_i, A_j]$$

の類似と考えられる。

Proposition (loop algebra の fixed point subalgebra)

$\mathbb{C}[t, t^{-1}] \otimes \mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$ の involution ω を以下で定義する。

$$t^m E_{ij} \mapsto (-1)^{i+j+1+mn} t^{-m} E_{ji}$$
$$t^m H_i \mapsto (-1)^{1+mn} t^{-m} H_i$$

$\mathbb{C}[t, t^{-1}] \otimes \mathfrak{sl}(n+1, \mathbb{C})$ の fixed point subalgebra は $A_n^{(1)}$ 型 Onsager algebra と同型である。

$A_n^{(1)}$ 型 Onsager algebra は $A_n^{(1)}$ 型のアフィンリー代数の部分リー代数ともいえる。

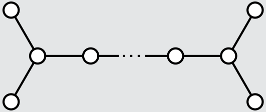
Date と Usami による D 型への拡張（2004）

Definition (D 型 Onsager algebra)

生成元 $e_0, \dots, e_n$ と以下の関係式で生成されるリー代数を $D_n^{(1)}$ 型 Onsager algebra と呼ぶ。

$$[e_i, [e_i, e_j]] = e_j \qquad \text{Dynkin 図形上で頂点が隣のとき}$$
$$[e_i, [e_i, e_j]] = 0 \qquad \text{otherwise}$$

上記の Dynkin 図形は $D_n^{(1)}$ 型のもの。



loop algebra の fixed point subalgebra

Proposition (loop algebra の fixed point subalgebra)

$\mathbb{C}[t, t^{-1}] \otimes \mathfrak{o}(2n, \mathbb{C})$ の involution ω を以下で定義する。

$$t^m G_{ij} \mapsto (-1)^{\alpha(i,j)} t^{-m} G_{ji}$$

（$G_{ij} := E_{ij} - E_{2n+1-j,2n+1-i}$、$\alpha(i,j) := i + j$または$i + j + 1$）

$\mathbb{C}[t, t^{-1}] \otimes \mathfrak{o}(2n, \mathbb{C})$ の fixed point subalgebra は $D_n^{(1)}$ 型 Onsager algebra と同型である。

$D_n^{(1)}$ 型 Onsager algebra は $D_n^{(1)}$ 型のアフィンリー代数の部分リー代数ともいえる。

Generalized Onsager algebra

Stokman による一般の Kac-Moody algebra への拡張（2019）

Definition (Generalized Onsager algebra)

$A = (a_{ij})$ を対称化可能な generalized Cartan matrix とする。生成元 $e_1, \ldots, e_n$ と以下の関係式で生成されるリー代数を Generalized Onsager algebra と呼ぶ。

$$\sum_{s=0}^{1-a_{ij}} c_s^{ij}[1-a_{ij}](\mathrm{ad}\, e_i)^s e_j = 0$$

- Cartax matrix が $A_1^{(1)}$ 型の場合は Dolan-Grady 関係式
- $A_n^{(1)}$ 型の場合は Uglov と Ivanov の定義
- $D_n^{(1)}$ 型の場合は Date と Usami の定義

に、それぞれ一致する。

まとめ

- 以前やっていたことが一般化された論文が出ていて驚いた、
- しかもその論文の中に自分の名前が出てきてさらに驚いた、

というお話でした。

参考文献：

- Generalized Onsager algebras, Jasper V. Stokman, preprint, 2019