すうがく徒のつどい@オンライン

ルート系とディンキン図形

宇佐見 公輔

3/20(土) 17:00〜18:30

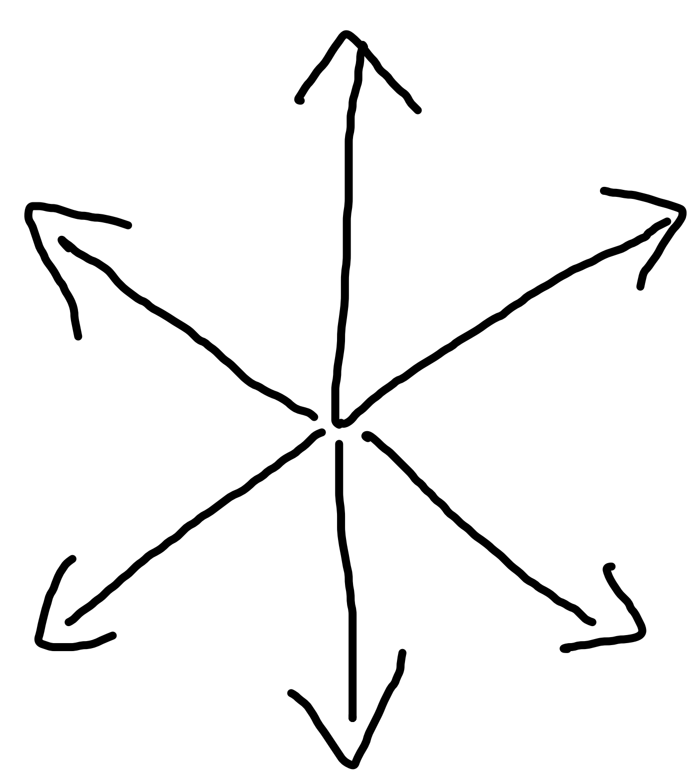
内容

ルート系とディンキン図形

§0 Introduction

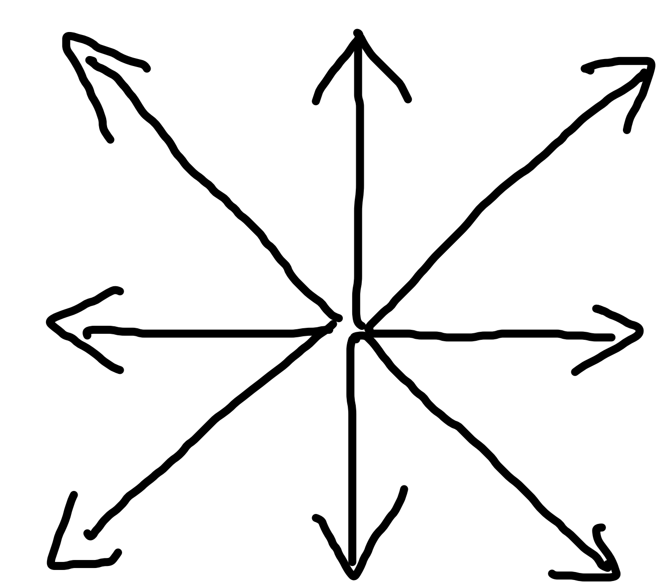
ルート系 : ベクトルの集合である条件をみたすもの

例1



6つのベクトルの集合

例2



8つのベクトルの集合

ルート系の起源：リー代数

- $\mathbb{C}$上の有限次元単純リー代数の分類がしたい

  ↓

  あるベクトルの集合が対応している(リー代数のルート系)

- リー代数のルート系の性質をとり出して、「抽象ルート系」の定義とする

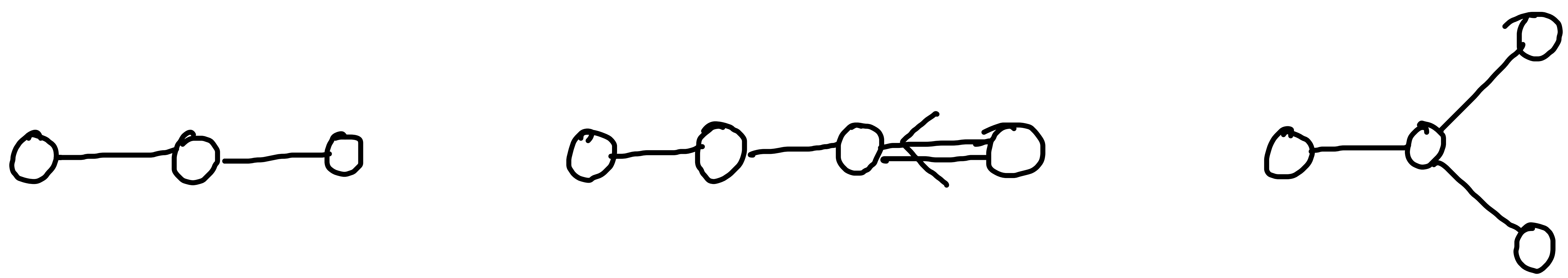
- 抽象ルート系の分類をする

- 抽象ルート系に対して、それをルート系としてもつリー代数をみつける

$\Rightarrow$ リー代数の分類の完成

ルート系の分類：ディンキン図形

・ルート系からある手続きによってディンキン図形という図形がつくれる



・これを使うとルート系の分類ができる

・逆にディンキン図形からルート系を復元できる

ルート系があらわれる分野

※参考情報として…

- 正多面体群
- 有限鏡映群
- 特異点論
- 楕円曲面
- パンルヴェ方程式

§1 準備：鏡映

<u>Def</u>（ユークリッド空間）

$\mathbb{R}$上の有限次元ベクトル空間で，

<u>内積</u>が定義されているものをユークリッド空間という．

└ 正定値対称形式

<u>記法</u>　E：ユークリッド空間

$\alpha, \beta \in E$ に対して内積を $(\alpha | \beta)$ と書くことにする．

Def (超平面)

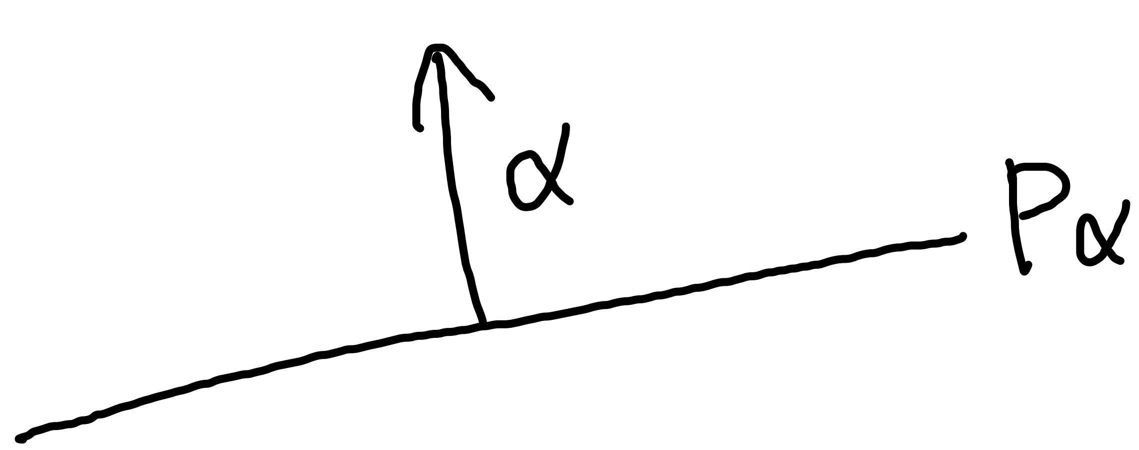
E：ユークリッド空間

$\alpha \in E$ に対して

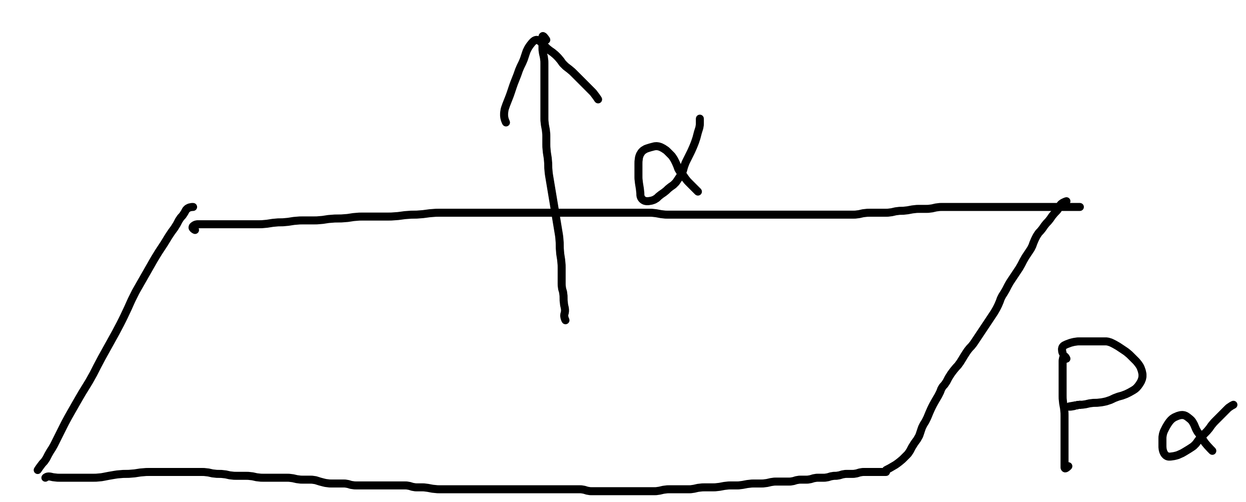
$$P_\alpha := \{ \beta \in E \mid (\alpha \mid \beta) = 0 \}$$

と定義する．P_α を α と直交する超平面という．

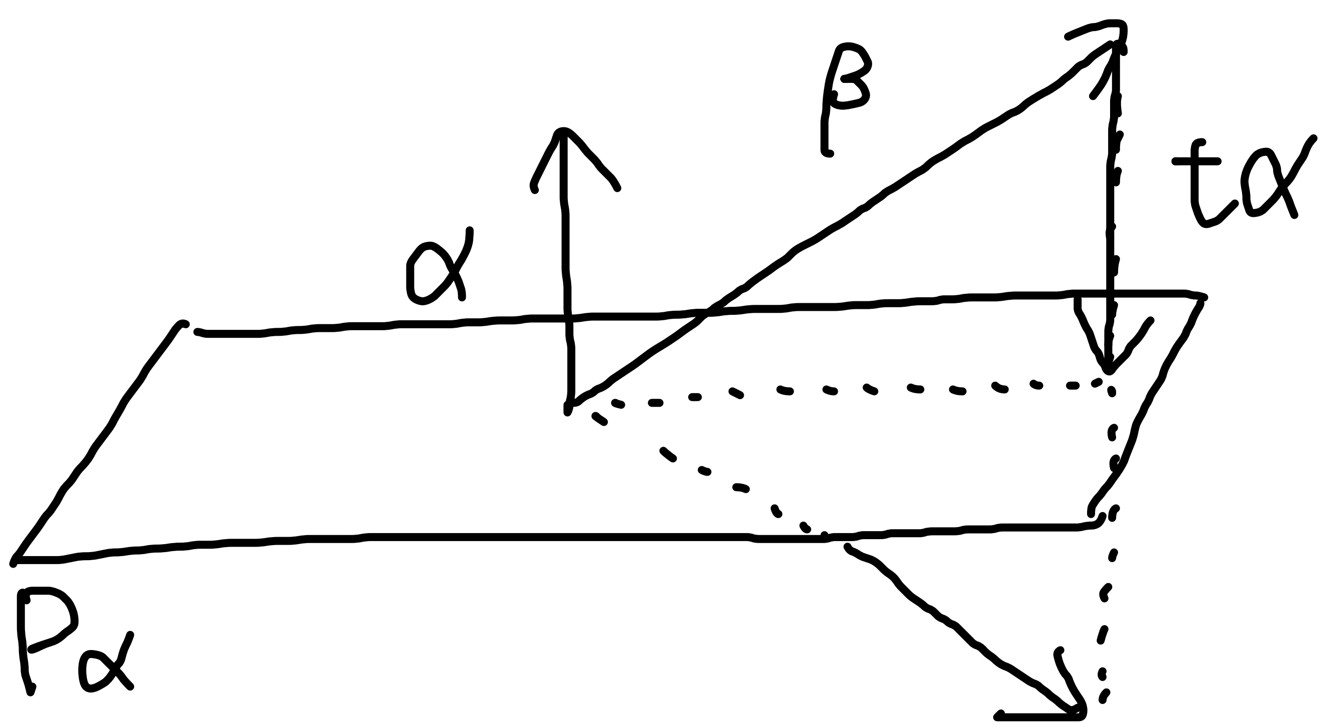
E：2次元の場合



E：3次元の場合



超平面に関する鏡映



$$(\beta + t\alpha \mid \alpha) = 0$$

$$(\beta \mid \alpha) + t(\alpha \mid \alpha) = 0$$

$$\therefore\ t = -\frac{(\beta \mid \alpha)}{(\alpha \mid \alpha)}$$

$$\beta + 2t\alpha = \beta - \frac{2(\beta \mid \alpha)}{(\alpha \mid \alpha)}\alpha$$

$\frac{2(\beta \mid \alpha)}{(\alpha \mid \alpha)}$ を $c(\beta, \alpha)$ と書く.

Def (鏡映)

写像 $\sigma_\alpha : E \longrightarrow E$

$\beta \longmapsto \beta - c(\beta, \alpha)\alpha$ を P_α に関する鏡映という.

§2 ルート系の定義

Def (ルート系)

E : ユークリッド空間

$\Delta \subset E$ がルート系であるとは，以下をみたすこと．

(1) Δ は 0 を含まない有限集合で，E を張る．

(2) $t \in \mathbb{R}$, $\alpha \in \Delta$, $t\alpha \in \Delta \Rightarrow t = \pm 1$

(3) $\alpha \in \Delta \Rightarrow \sigma_\alpha(\Delta) = \Delta$

(4) $\alpha, \beta \in \Delta \Rightarrow c(\beta, \alpha) \in \mathbb{Z}$

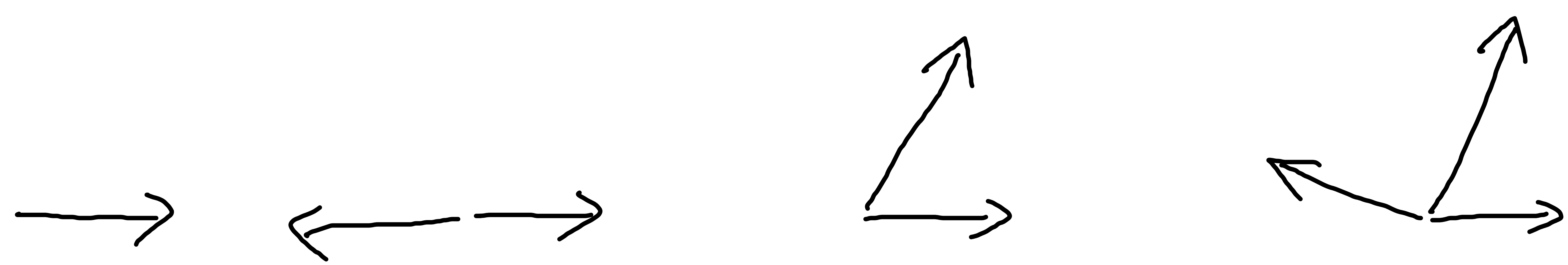
この条件をひとつずつ見てみる．

(1) △は0を含まない有限集合で，Eを張る.

ゼロベクトル

Eの任意の元が
△の元の線型結合でかける.

E: 2次元で考えると



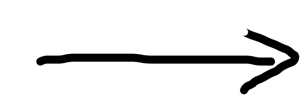
これはダメ　これもダメ　これはOK　これもOK

(2) $t \in \mathbb{R},\ \alpha \in \Delta,\ t\alpha \in \Delta \Rightarrow t = \pm 1$

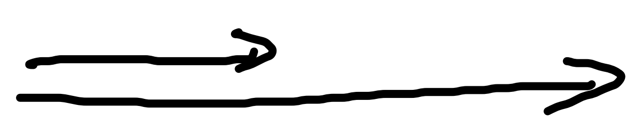
つまり，$\alpha \in \Delta$ のとき α のスカラー倍で Δ に含めてよいのは

α と $-\alpha$ だけ．

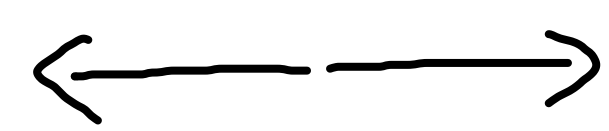
これはダメ



これはOK



これもダメ

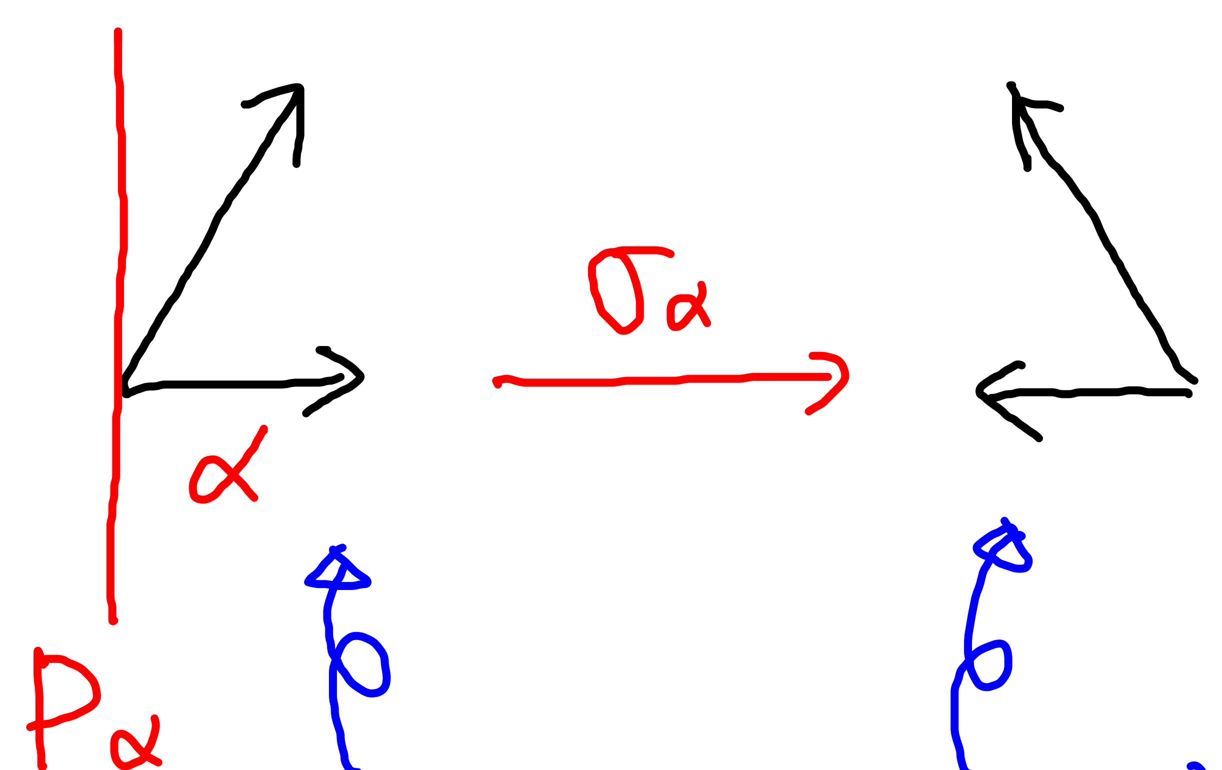


これもOK

(3) $\alpha \in \Delta \Rightarrow \sigma_\alpha(\Delta) = \Delta$

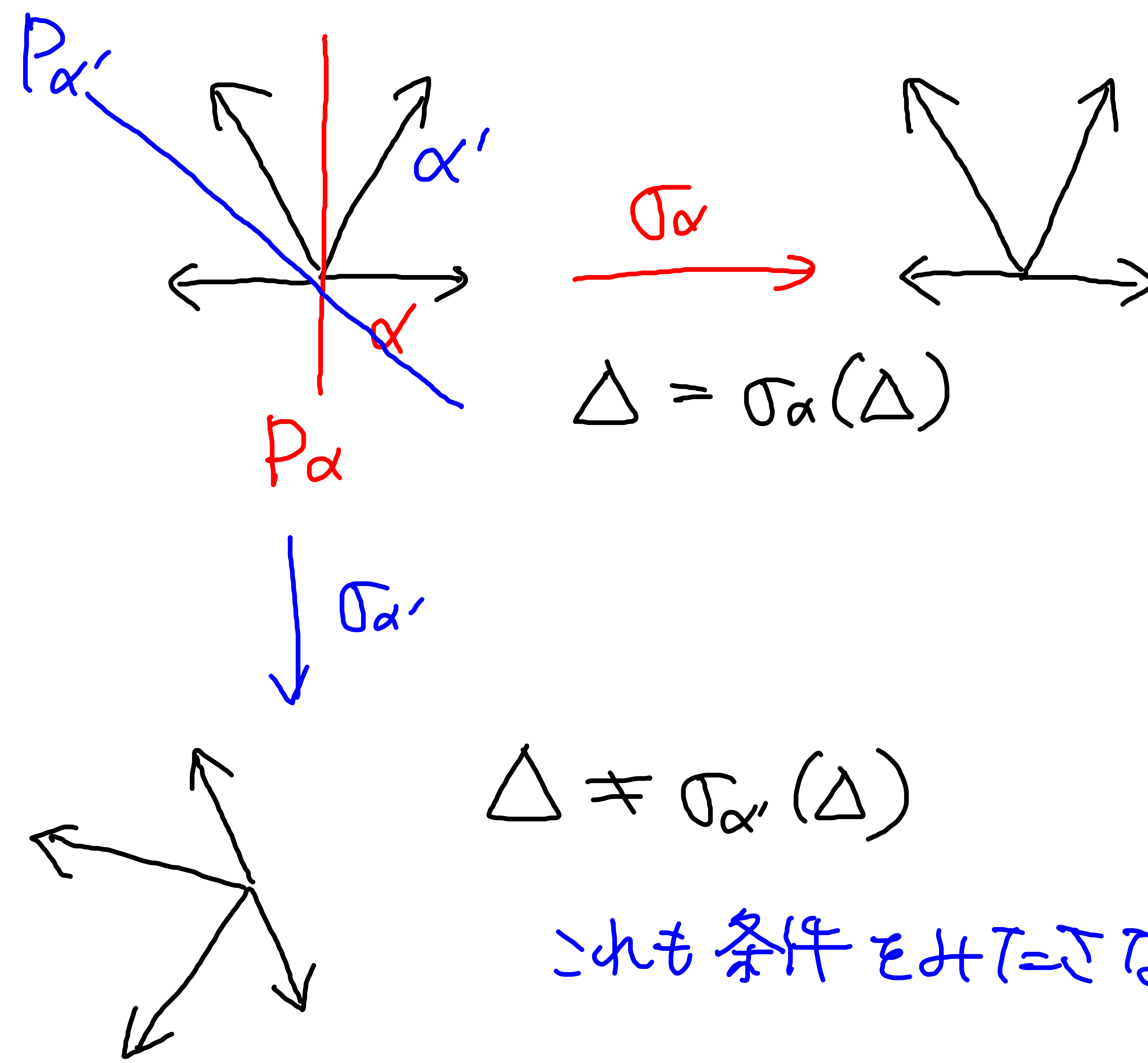
σ_α：α と直交する超平面 P_α に関する鏡映

E：2次元で考える



$\Delta = \sigma_\alpha(\Delta)$

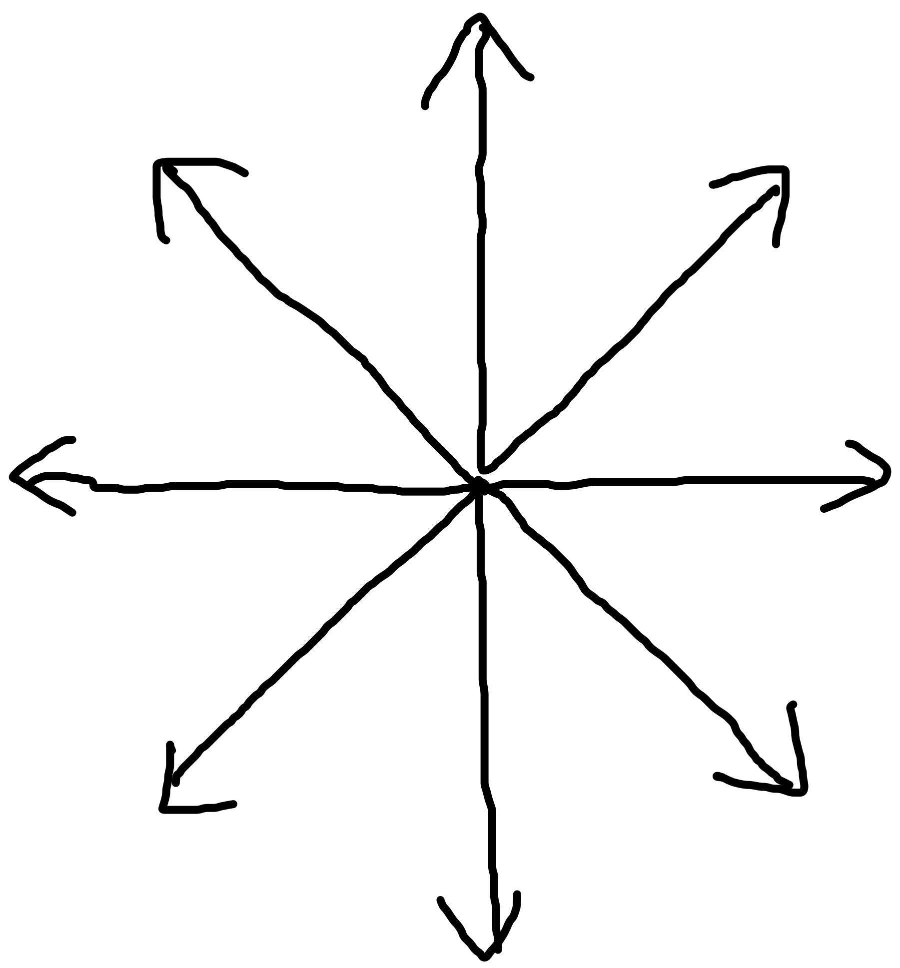
これが要求されている



$\Delta = \sigma_\alpha(\Delta)$

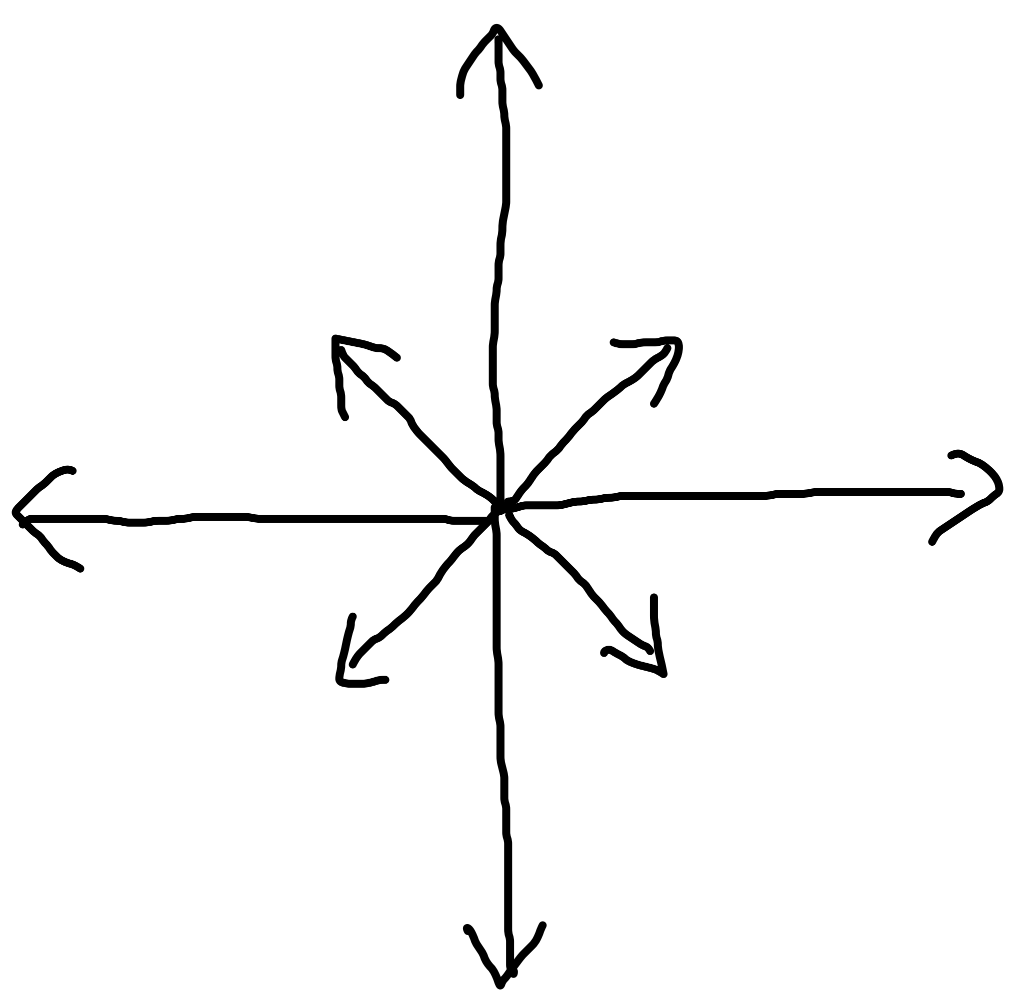
$\Delta \neq \sigma_{\alpha'}(\Delta)$

これも条件をみたさない



これはどのベクトルαをとっても

$\sigma_\alpha(\Delta)=\Delta$ が成り立つ.



これでもOK

$\sigma_\alpha(\Delta)=\Delta$ が成り立つ.

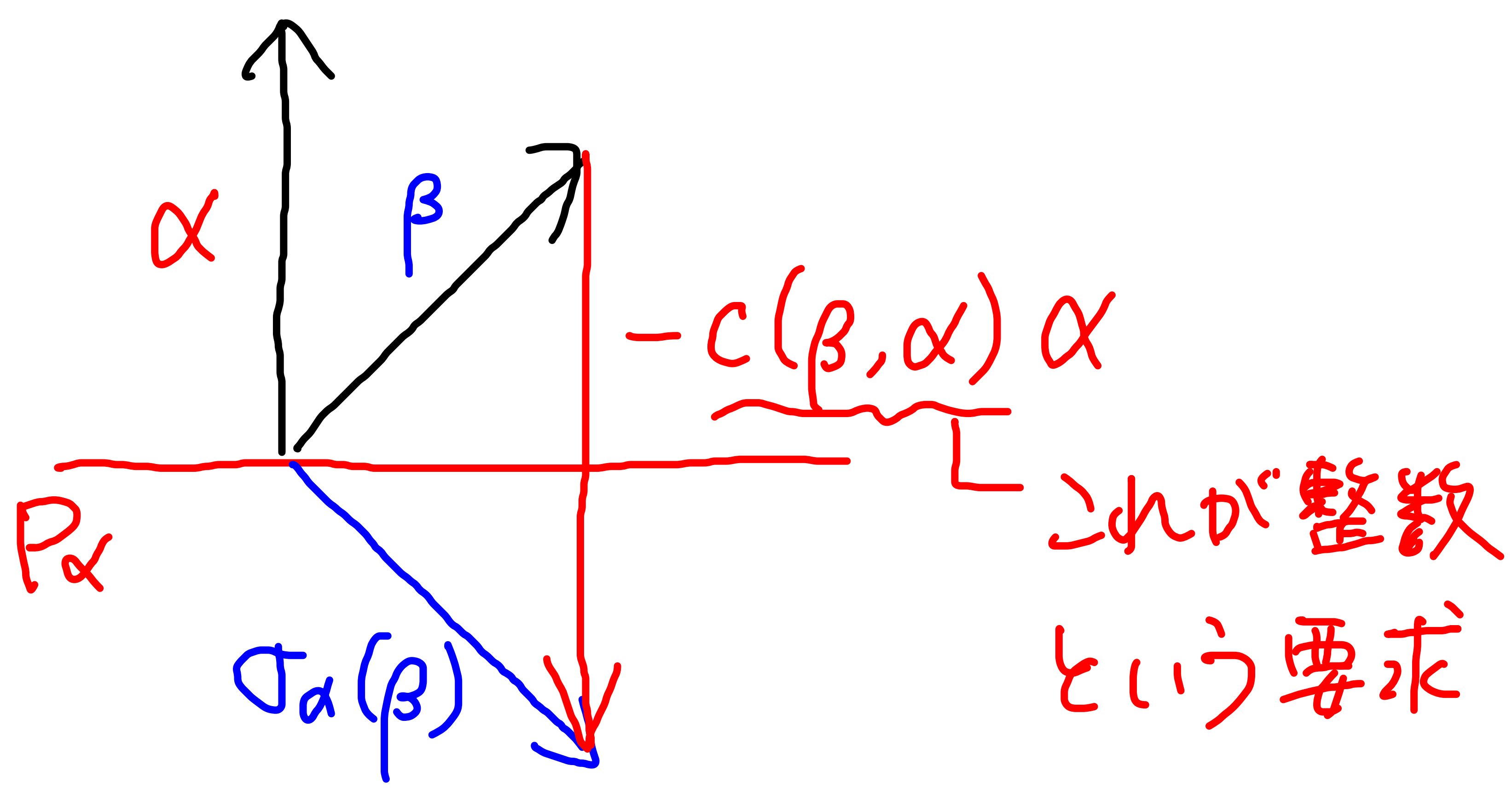
※補足：

(2)で $\alpha\in\Delta,\ t\alpha\in\Delta \Rightarrow t=\pm 1$ だったが

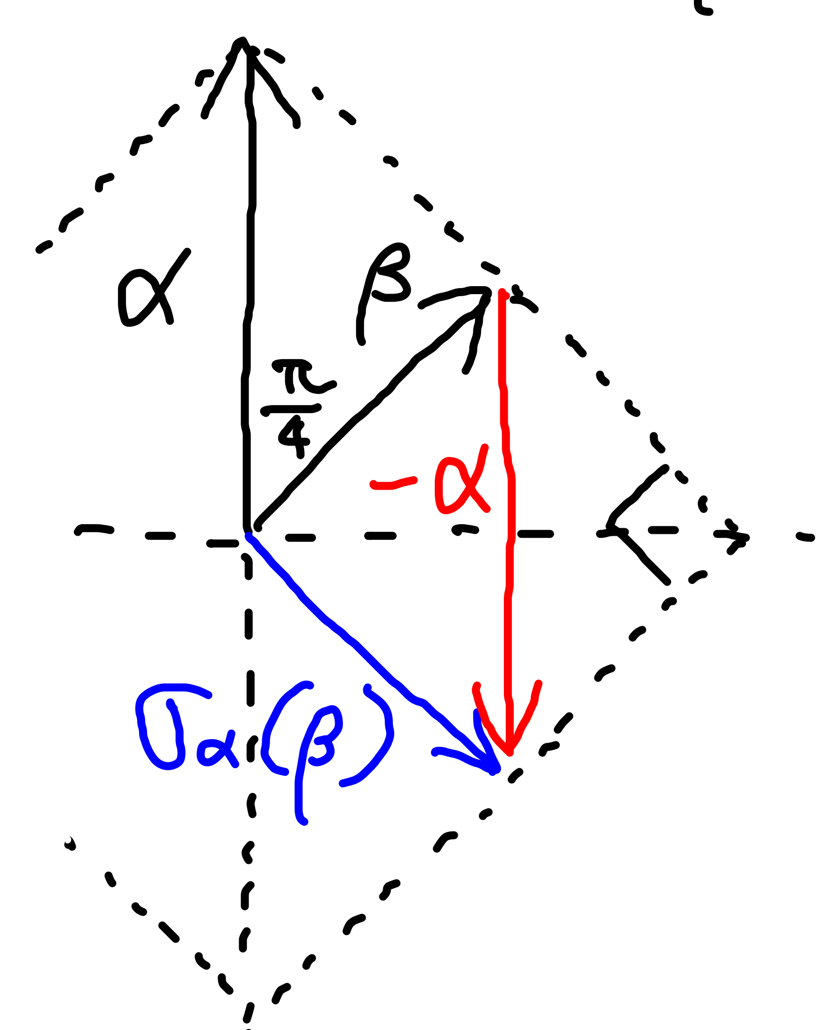
(3)から $\alpha\in\Delta \Rightarrow -\alpha\in\Delta$ である.

(4) $\alpha, \beta \in \Delta \Rightarrow \underbrace{c(\beta,\alpha)}_{= \frac{2(\beta|\alpha)}{(\alpha|\alpha)}} \in \mathbb{Z}$

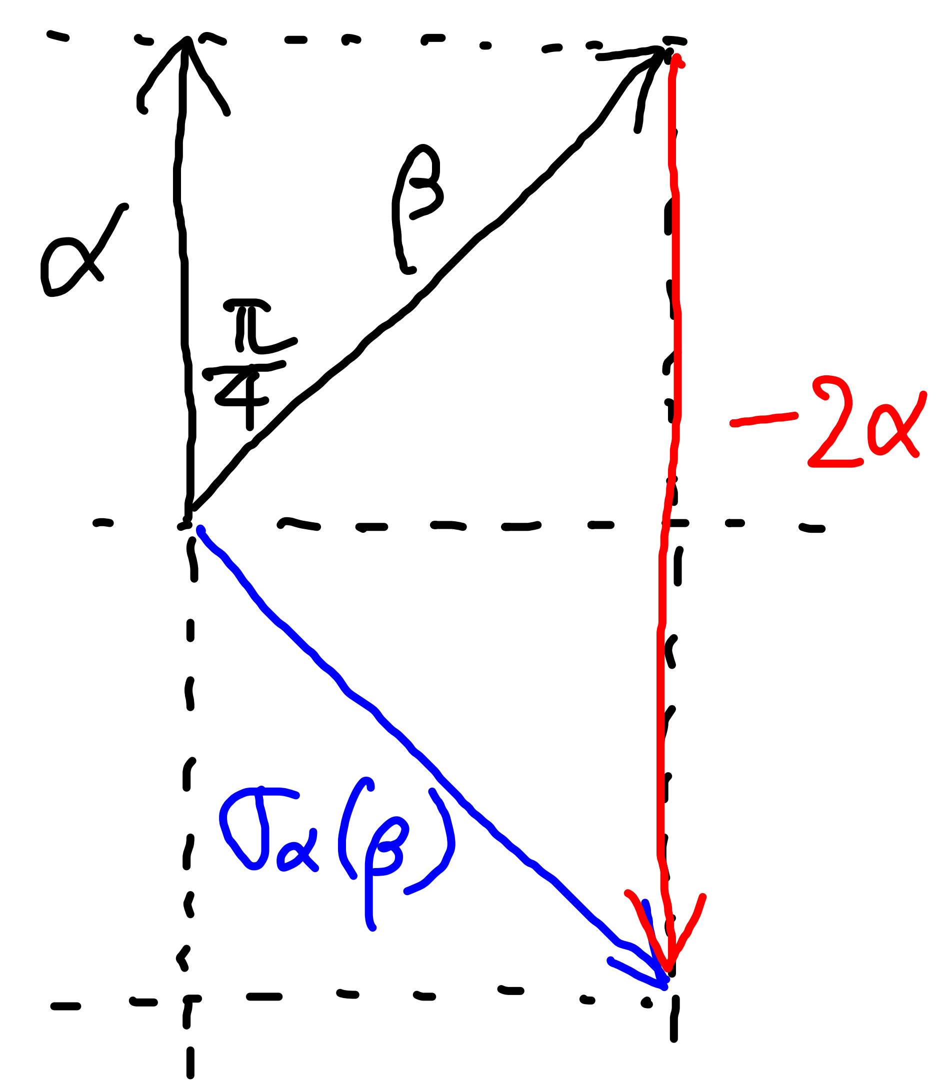
$$\sigma_\alpha : \beta \longmapsto \beta - c(\beta,\alpha)\alpha$$



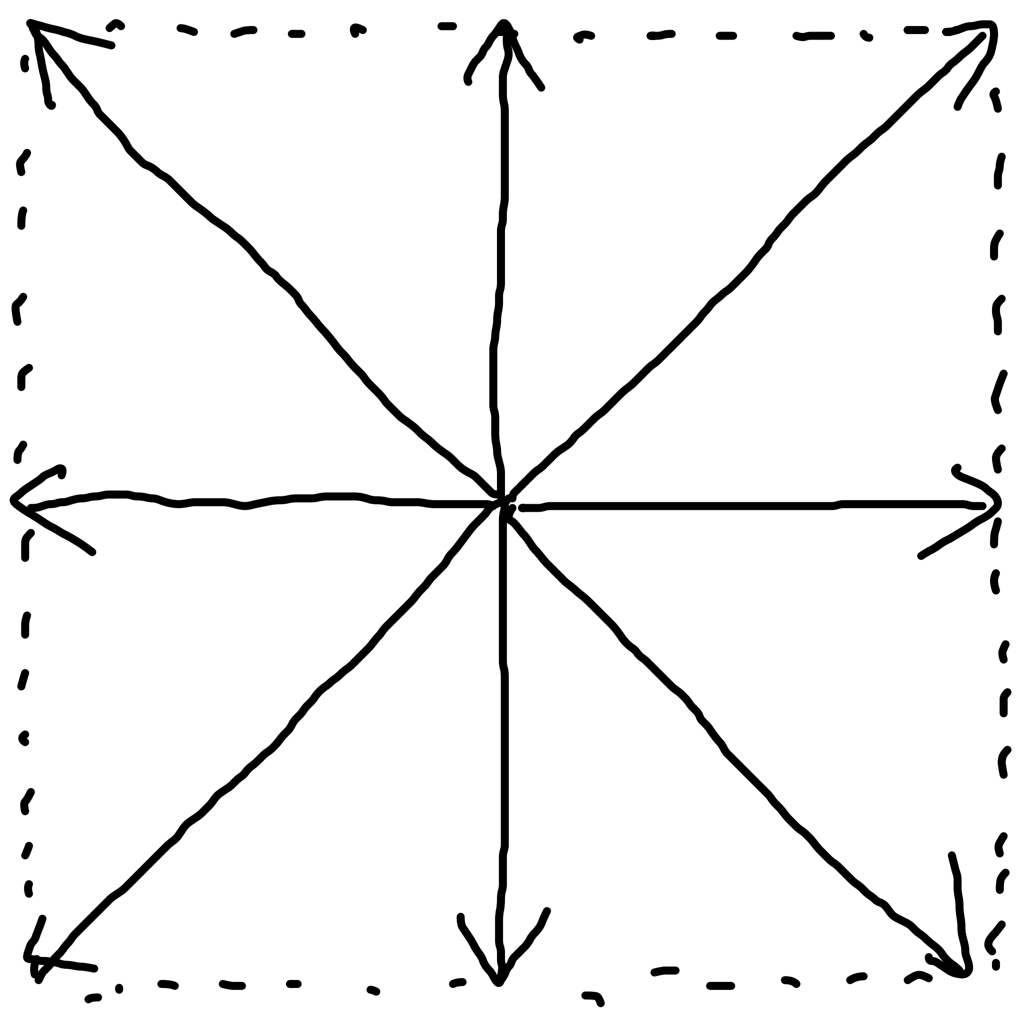
例：αとβの角度が$\frac{\pi}{4}$の場合



$c(\beta,\alpha) = 1$



$c(\beta,\alpha) = 2$



この8つのベクトルの集合は
どの2つを α, β として選んでも
$C(\alpha, \beta) \in \mathbb{Z}$ が成り立つ.
$(-2, -1, 0, 1, 2$ のどれかになる$)$

※ なお, これは (1) (2) (3) (4) のすべての条件をみたす.
つまり, ルート系の例のひとつになっている.

ここまでルート系の定義について見てきた.
要求されている条件がけっこうきびしい.

実のところ,ルート系の種類はそれほど多くない.

既約なルート系の数は以下のとおり.
→ 複数のルート系に分離できない

Eの次元	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10~
ルート系の種類	1	3	3	5	4	5	5	5	4	4

§3 ルート系の定義の起源

※ Introductionの話をもう少しだけ詳しく

ルート系はリー代数の分類のときにうまれた.

リー代数 → ベクトル空間（加法とスカラー倍の2つの演算）

\+

第3の演算 ブラケット積

V : $\mathbb{C}$ 上有限次元ベクトル空間
f : V 上の線型変換

- f の固有値： $\lambda \in \mathbb{C}$, $v \in V$, $f(v) = \lambda v$ のとき λ は f の固有値
- f の固有空間：λ が固有値のとき $V_\lambda := \{ v \in V \mid f(v) = \lambda v \}$

簡単のため f は対角化可能であるとすると，

$V = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} V_\lambda$ という直和分解ができる（固有空間分解）.

※ この分解のしかたは f に依存していることに注意.

L : $\mathbb{C}$ 上 有限次元 単純リー代数

固有空間分解と似たようなルート空間分解がある

$$L = H \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Delta} L_\alpha$$

$\alpha : H \to \mathbb{C}$

H : カルタン部分代数

$$L_\alpha := \{ x \in L \mid \forall h \in H,\ [h, x] = \alpha(h) x \}$$

ルート空間

この分解のしかたは特定の線型変換に依存せず,

本質的に一意な分解

L の構造はルートの集合 Δ と対応している.

L のルートの集合 $\Delta \subset H^*$ が以下の性質をもつ．

$H \to \mathbb{C}$ 線型写像がなすベクトル空間

(1) Δ は H^* を張る．

(2) $t \in \mathbb{R}$, $\alpha \in \Delta$, $t\alpha \in \Delta \Rightarrow t = \pm 1$

(3) $\alpha \in \Delta \Rightarrow \sigma_\alpha(\Delta) = \Delta$

(4) $\alpha, \beta \in \Delta \Rightarrow c(\beta, \alpha) \in \mathbb{Z}$

ここから抽象ルート系の定義をつくり，可能なルート系がどのくらいあるのか調べる

$\longrightarrow$ リー代数がどのくらいあるか分かる

§4 ルート系の性質

Lem Δ：ルート系

$\alpha, \beta \in \Delta$，α と β は線型独立とする．

このとき $C(\alpha,\beta)\underbrace{C(\beta,\alpha)}_{=\frac{2(\beta|\alpha)}{(\alpha|\alpha)}} \in \{0, 1, 2, 3\}$

Proof α と β がなす角を θ とする．$(\alpha|\beta) = |\alpha||\beta|\cos\theta$（これが定義）．

$$C(\beta,\alpha) = \frac{2|\beta||\alpha|\cos\theta}{|\alpha|^2} = \frac{2|\beta|}{|\alpha|}\cos\theta$$

$C(\alpha,\beta)C(\beta,\alpha) = 4\cos^2\theta$ となる．

$\cos^2\theta = 1$ のとき α と β は線型独立でない．

Δ：ルート系より $C(\alpha,\beta), C(\beta,\alpha) \in \mathbb{Z}$ よって上の結果をえる． //

Lem より $\alpha, \beta \in \Delta$ の関係は以下のようになる.

$C(\alpha,\beta)C(\beta,\alpha)$	$\cos^2\theta$	θ	$C(\beta,\alpha)$	$C(\alpha,\beta)$
0	0	$\frac{\pi}{2}$	0	0
1	$\frac{1}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	1	1
		$\frac{2\pi}{3}$	-1	-1
2	$\frac{1}{2}$	$\frac{\pi}{4}$	1	2
		$\frac{3\pi}{4}$	-1	-2
3	$\frac{3}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	1	3
		$\frac{5\pi}{6}$	-1	-3

Lem Δ：ルート系

$\alpha, \beta \in \Delta$，α と β は線型独立

$(\alpha | \beta) > 0$ のとき $\alpha - \beta \in \Delta$

$(\alpha | \beta) < 0$ のとき $\alpha + \beta \in \Delta$

Proof $(\alpha | \beta) > 0$ の場合を示す.

先の表から $C(\alpha, \beta) = 1$ または $C(\beta, \alpha) = 1$ である.

$C(\alpha, \beta) = 1$ とすると $\sigma_\beta(\alpha) = \alpha - \beta \in \Delta$ がわかる.

$C(\beta, \alpha) = 1$ とすると $\sigma_\alpha(\beta) = \beta - \alpha \in \Delta$

このとき $\alpha - \beta = -(\beta - \alpha) \in \Delta$ がわかる.

//

§5 ルート系の底

<u>Thm</u> Δ：ルート系

$\Pi \subset \Delta$ で次をみたすものが存在する。

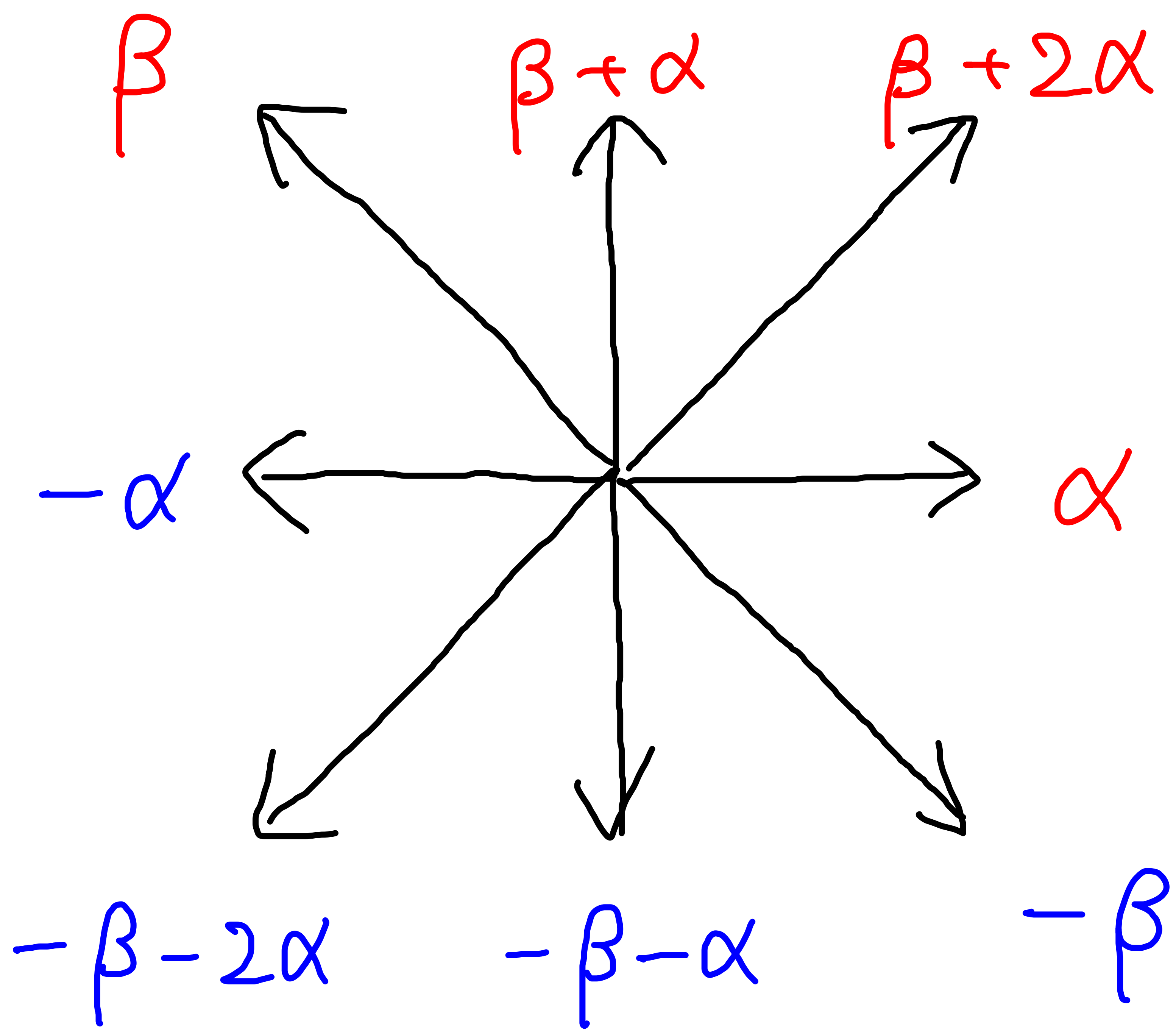
(1) Π は E の基底

(2) $\beta \in \Delta$ を $\beta = \sum_{\alpha \in \Pi} k_\alpha \alpha$ と書くとき，

各 k_α は整数で，すべて 0 以上 または すべて 0 以下

<u>Def</u> 上の Π を Δ の底という。

例　Δ を以下とする.　$\Pi = \{\alpha, \beta\}$ は Δ の底



これら4つは係数がすべて正
(正のルート)

これら4つは係数がすべて負
(負のルート)

ここでは詳しく述べないが次の事実がある.

Δ : ルート系　$\Pi = \{\alpha_i\}$: Δの底　$C_{ij} := C(\alpha_j, \alpha_i)$

Δ' : ルート系　$\Pi' = \{\alpha'_i\}$: Δ'の底　$C'_{ij} := C(\alpha'_j, \alpha'_i)$

とするとき、以下は同値

(1) Δ と Δ' は同型

(2) 基底の番号付けをうまく入れかえると
　任意の i, j について $C_{ij} = C'_{ij}$

したがって, ルート系を分類するには (C_{ij}) の可能性を調べればよい.

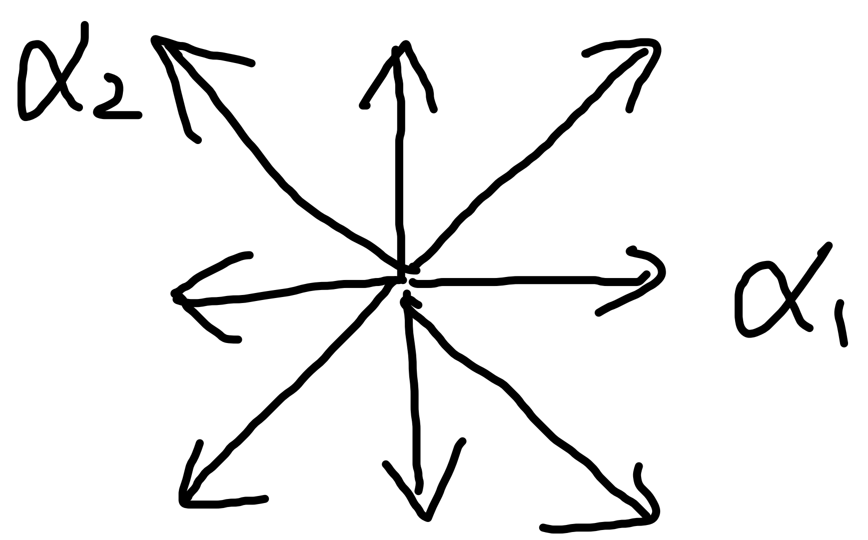
Def (カルタン行列)

Δ：ルート系　$\Pi = \{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$：$\Delta$の底

$$C_{ij} := c(\alpha_j, \alpha_i)$$

行列 $C = (C_{ij})_{1 \le i, j \le n}$ を Δ のカルタン行列という.

例　Δを以下とする



$\Pi = \{\alpha_1, \alpha_2\}$ とする.

$$C = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

§6 ディンキン図形

ルート系を分類するにはカルタン行列を分類すればよい。
カルタン行列をグラフとして表現するのがディンキン図形。

Def (ディンキン図形)

Δ : ルート系　　$C = (c_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$: カルタン行列

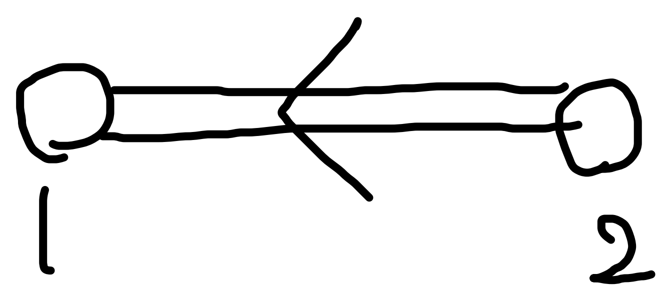
以下のルールで作られるグラフを Δ のディンキン図形という。

- 頂点は n 個

  0, 1, 2, 3
- 頂点 i と j を $c_{ij} c_{ji}$ 本の辺で結ぶ
- $|c_{ij}| < |c_{ji}|$ のとき i から j に向きをつける

例

$C = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ のとき



$C_{12} C_{21} = 2$

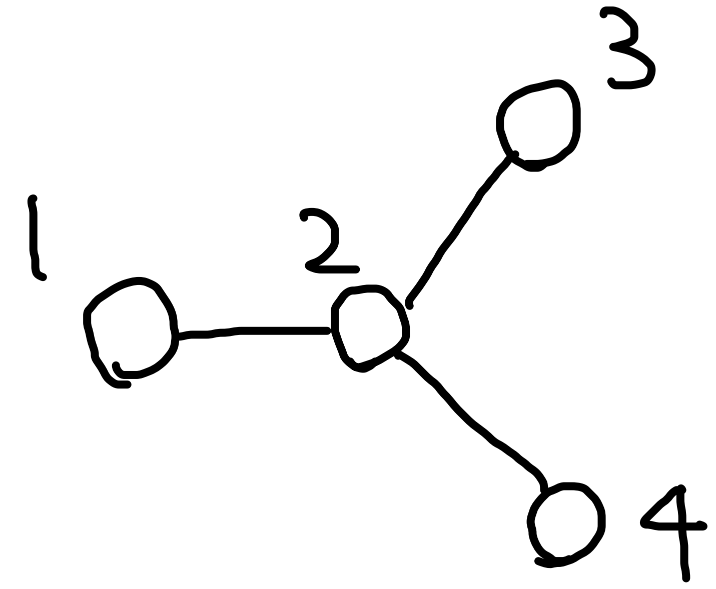
$|C_{21}| < |C_{12}|$

2×2 のカルタン行列は次の4種類

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

逆にディンキン図形からカルタン行列が復元できる.

例



Cは4×4行列とわかる.

Cの対角成分はすべて2

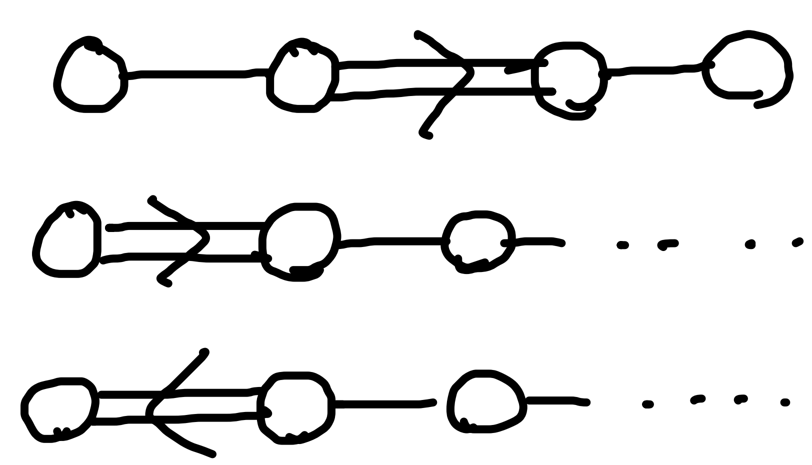
それ以外は$0, -1, -2, -3$のいずれか

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

ルート系やカルタン行列がみたすべき性質を
ディンキン図形であらわすとシンプルになる.

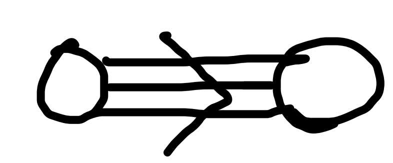
例えば

- ループは存在しない
- 分岐はあっても1つ → さらに実は分岐先の長さに条件がつく
- 2重辺はあっても1つ → さらに実は



しかありえない

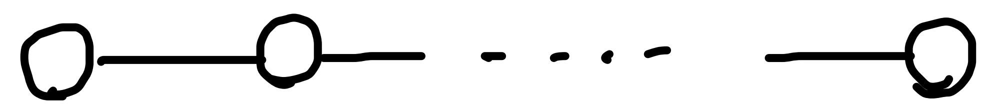
- 3重辺はあっても1つ → さらに実は



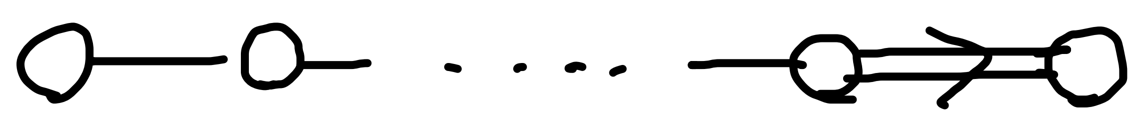
しかありえない

可能なディンキン図形

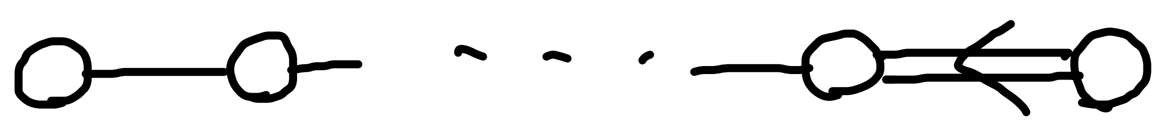
A_n $(n \geq 1)$



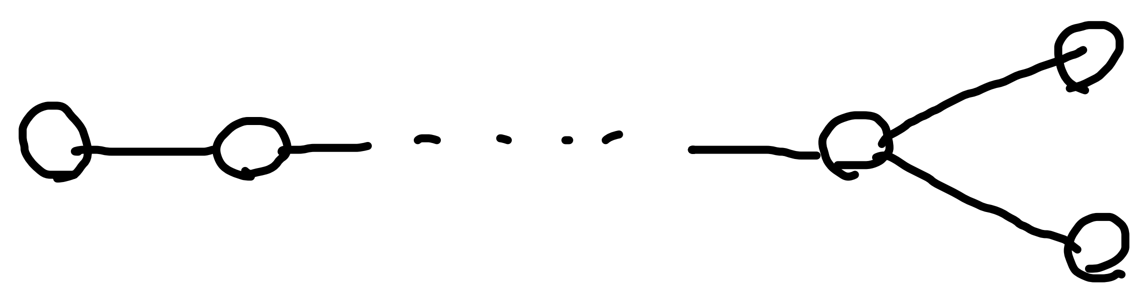
B_n $(n \geq 2)$



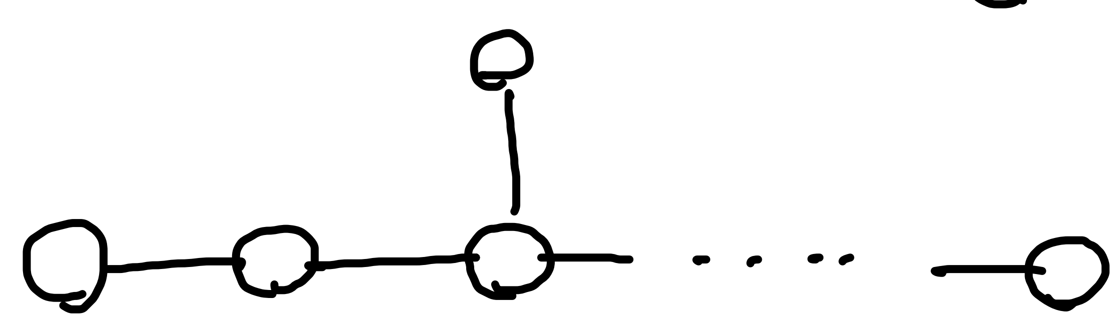
C_n $(n \geq 3)$



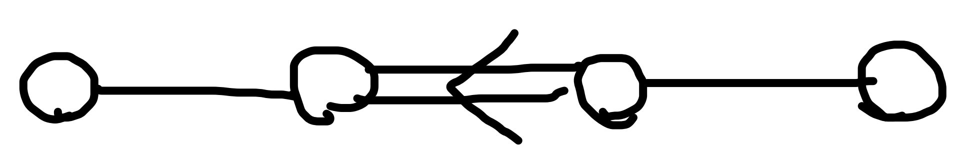
D_n $(n \geq 4)$



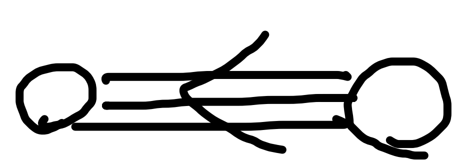
E_n $(n = 6, 7, 8)$



F_4



G_2



例外型

ルート系の種類

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8	A_9
		B_2	B_3	B_4	B_5	B_6	B_7	B_8	B_9
			C_3	C_4	C_5	C_6	C_7	C_8	C_9
				D_4	D_5	D_6	D_7	D_8	D_9
		G_2		F_4		E_6	E_7	E_8	