

Onsager 代数の話

Generalized Onsager algebras

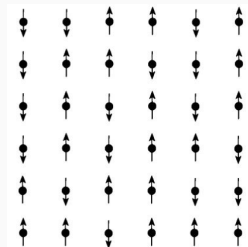
宇佐見 公輔

2019 年 8 月 3 日

- ・ \mathbb{C} 上の無限次元リー代数
- ・ 1944 年、L. Onsager が 2 次元 Ising model を解くため導入
- ・ 1980～90 年代ごろに研究が進み、注目されはじめる
- ・ Ising model 以外の各種の数理解物理のモデルへの応用も

2次元 Ising model

- $m \times n$ の格子模型
- 各点で ± 1 の値（スピン）を持つ
- 温度が下がると隣接点が同じスピンの揃う（そのようにハミルトニアンを定義する）
- 1944 年に Onsager algebra で解かれた（その後もう少し分かりやすい手法で解かれた）
- なお、3 次元以上では解法は見つかっていない



- ・ 1980～90 年代ごろ、同型な対応がいくつか見つかる
- ・ 特に、アフィンリー代数との関連が見つかる
- ・ そこから、 q -Onsager algebra や、Onsager algebra の一般化が研究される
- ・ 今回は Onsager algebra の一般化について触れる

Definition (Onsager algebra)

$\{A_m, G_m\} (m \in \mathbb{Z})$ を基底として持ち、ブラケット積を以下で定義したリー代数を Onsager algebra という。

$$[A_m, A_n] = 4G_{m-n}$$

$$[G_m, A_n] = 2A_{m+n} - 2A_{m-n}$$

$$[G_m, G_n] = 0$$

Proposition (Dolan-Grady 関係式)

Onsager algebra は、生成元 A_0, A_1 と以下の関係式で生成されるリー代数と同型である。

$$[A_0, [A_0, [A_0, A_1]]] = 16[A_0, A_1]$$

$$[A_1, [A_1, [A_1, A_0]]] = 16[A_1, A_0]$$

こちらを Onsager algebra の定義としても差し支えない。

loop algebra の involution

loop algebra $\mathbb{C}[t, t^{-1}] \otimes \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ を考える。ここで $\mathbb{C}[t, t^{-1}]$ は変数 t のローラン多項式である。

Definition (loop algebra の involution)

$\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ の involution ω を以下で定義する。

$$e \mapsto f$$

$$f \mapsto e$$

$$h \mapsto -h$$

$\mathbb{C}[t, t^{-1}] \otimes \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ 上の involution ω を以下で定義する。

$$p(t) \otimes x \mapsto p(t^{-1}) \otimes \omega(x)$$

loop algebra の fixed point subalgebra

Proposition (loop algebra の fixed point subalgebra)

$\mathbb{C}[t, t^{-1}] \otimes \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ の部分リー代数

$$\{x \in \mathbb{C}[t, t^{-1}] \otimes \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) \mid \omega(x) = x\}$$

(ω による fixed point subalgebra) は Onsager algebra と同型である。また、以下の $\{A_m, G_m\}$ ($m \in \mathbb{Z}$) がその基底である。

$$A_m = 2t^m e + 2t^{-m} f$$

$$G_m = (t^m - t^{-m})h$$

Onsager algebra は $A_1^{(1)}$ 型のアフィンリー代数 (= loop algebra $\mathbb{C}[t, t^{-1}] \otimes \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ の中心拡大) の部分リー代数ともいえる。

- Onsager algebra は $A_1^{(1)}$ 型のアフィンリー代数の部分リー代数であることがわかった
- では、 $A_1^{(1)}$ 型以外のアフィンリー代数を考えれば、Onsager algebra の拡張を考えられるのではないか？

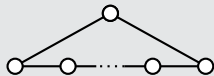
Uglov と Ivanov による A 型への拡張 (1996)

Definition (A 型 Onsager algebra)

生成元 e_0, \dots, e_n と以下の関係式で生成されるリー代数を $A_n^{(1)}$ 型 Onsager algebra と呼ぶ。

$$\begin{array}{ll} [e_i, [e_i, e_j]] = e_j & \text{Dynkin 図形上で頂点が隣るとき} \\ [e_i, [e_i, e_j]] = 0 & \text{otherwise} \end{array}$$

上記の Dynkin 図形は $A_n^{(1)}$ 型のもの。



A 型 Onsager algebra の関係式

$$[e_i, [e_i, e_j]] = e_j$$

は、A 型有限次元単純リー代数の Serre 関係式

$$[e_i, [e_i, e_j]] = 0$$

の類似と考えられる。

また、Onsager algebra の Dolan-Grady 関係式

$$[A_i, [A_i, [A_i, A_j]]] = 16[A_i, A_j]$$

の類似と考えられる。

loop algebra の fixed point subalgebra

Proposition (loop algebra の fixed point subalgebra)

$\mathbb{C}[t, t^{-1}] \otimes \mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$ の involution ω を以下で定義する。

$$t^m E_{ij} \mapsto (-1)^{i+j+1+mn} t^{-m} E_{ji}$$

$$t^m H_i \mapsto (-1)^{1+mn} t^{-m} H_i$$

$\mathbb{C}[t, t^{-1}] \otimes \mathfrak{sl}(n+1, \mathbb{C})$ の fixed point subalgebra は $A_n^{(1)}$ 型
Onsager algebra と同型である。

$A_n^{(1)}$ 型 Onsager algebra は $A_n^{(1)}$ 型のアフィンリー代数の部分リー代数ともいえる。

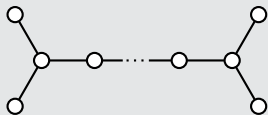
Date と Usami による D 型への拡張 (2004)

Definition (D 型 Onsager algebra)

生成元 e_0, \dots, e_n と以下の関係式で生成されるリー代数を $D_n^{(1)}$ 型 Onsager algebra と呼ぶ。

$$\begin{array}{ll} [e_i, [e_i, e_j]] = e_j & \text{Dynkin 図形上で頂点が隣るとき} \\ [e_i, [e_i, e_j]] = 0 & \text{otherwise} \end{array}$$

上記の Dynkin 図形は $D_n^{(1)}$ 型のもの。



loop algebra の fixed point subalgebra

Proposition (loop algebra の fixed point subalgebra)

$\mathbb{C}[t, t^{-1}] \otimes \mathfrak{o}(2n, \mathbb{C})$ の involution ω を以下で定義する。

$$t^m G_{ij} \mapsto (-1)^{\alpha(i,j)} t^{-m} G_{ji}$$

($G_{ij} := E_{ij} - E_{2n+1-j, 2n+1-i}$, $\alpha(i, j) := i + j$ または $i + j + 1$)

$\mathbb{C}[t, t^{-1}] \otimes \mathfrak{o}(2n, \mathbb{C})$ の fixed point subalgebra は $D_n^{(1)}$ 型
Onsager algebra と同型である。

$D_n^{(1)}$ 型 Onsager algebra は $D_n^{(1)}$ 型のアフィンリー代数の部分リー代数ともいえる。

Generalized Onsager algebra

Stokman による一般の Kac-Moody algebra への拡張 (2019)

Definition (Generalized Onsager algebra)

$A = (a_{ij})$ を対称化可能な generalized Cartan matrix とする。生成元 e_1, \dots, e_n と以下の関係式で生成されるリー代数を Generalized Onsager algebra と呼ぶ。

$$\sum_{s=0}^{1-a_{ij}} c_s^{ij} [1 - a_{ij}] (\text{ade}_i)^s e_j = 0$$

- Cartan matrix が $A_1^{(1)}$ 型の場合は Dolan-Grady 関係式
- $A_n^{(1)}$ 型の場合は Uglov と Ivanov の定義
- $D_n^{(1)}$ 型の場合は Date と Usami の定義

に、それぞれ一致する。

- ・ 以前やっていたことが一般化された論文が出ていて驚いた、
- ・ しかもその論文の中に自分の名前が出てきてさらに驚いた、

というお話でした。

参考文献：

- ・ Generalized Onsager algebras, Jasper V. Stokman, preprint, 2019