ディンキン図形を知る
(ルート系とディンキン図形)

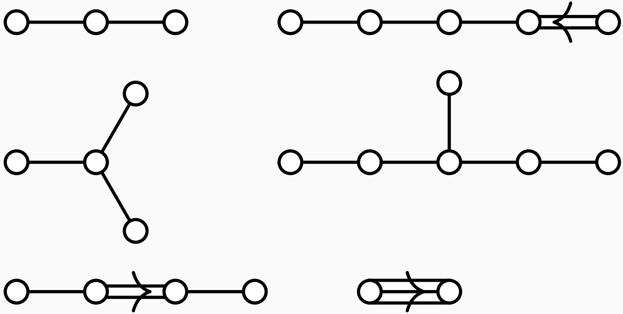
宇佐見 公輔

2019 年 4 月 13 日

ディンキン図形とは何か

「ルート系（root system）」と呼ばれる対象を図であらわしたものが「ディンキン図形（Dynkin diagram）」です。

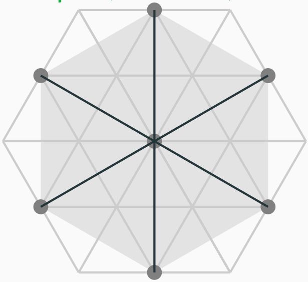
Example (ディンキン図形)

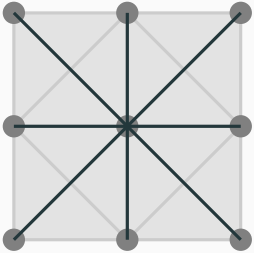


ルート系とは何か

実ベクトル空間の部分集合で、ある特定の条件（これはもう少し後で述べます）を満たすものを「ルート系（root system）」と呼びます。

Example (ルート系)





なぜルート系を考えるのか

ルート系は、リー代数（Lie algebra）を分類する研究の中であらわれました。

- 複素数体上の有限次元単純リー代数は、ルート分解という直和分解ができます。
- そこに出てくるルート（root）というベクトルの集合は、ある一定の性質を持っています。
- この性質をルート系の定義として、ルート系の分類をすることでリー代数の分類ができます。

その後、数学の様々な分野でルート系が登場することが知られるようになりました。

ルート系の定義の準備：鏡映

E を有限次元実ベクトル空間、$v, w \in E$ の内積を $(v|w)$ とします。

Definition (超平面)
$v \in E$ に対して $P_v := \{w \in E \mid (v|w) = 0\}$ と定義し、v と直交する超平面（hyperplane）と呼びます。

Definition (鏡映)
$v \in E$ と $x \in E$ に対して、

$$c(x, v) := \frac{2(x|v)}{(v|v)}$$

と定義し、写像 $\sigma_v : E \to E$ を以下で定義します。

$$x \mapsto x - c(x, v)v$$

σ_v を、超平面 P_v に関する鏡映（reflection）と呼びます。

Definition (ルート系)
$\Delta \subset E$ がルート系（root system）であるとは、以下を満たすことです。

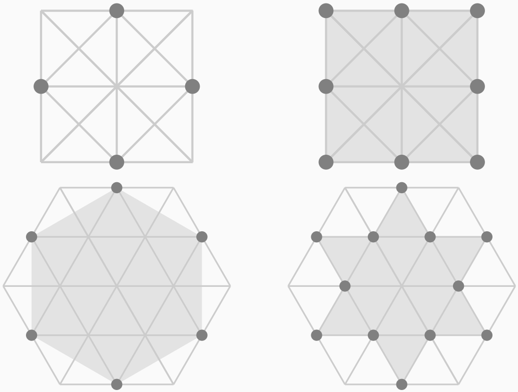
1. Δ は 0 を含まない有限集合で、E を張る。
2. $c \in \mathbb{R}$、$v \in \Delta$、$cv \in \Delta$ のとき、$c = \pm 1$ である。
3. $v \in \Delta$ のとき、$\sigma_v(\Delta) = \Delta$ である。
4. $v, w \in \Delta$ のとき、$c(v, w) \in \mathbb{Z}$ である。

また、ルート系の元をルート（root）と呼びます。

条件 4 が少し分かりにくいですが、言葉でいえば、「v の鏡映 σ_v で w を移したときの差分が v の整数倍になる」という感じになります。

ルート系の例

Example (2 次元空間のルート系)



2 つのルートの関係

ベクトル v, w のなす角を θ とします。

$c(v, w)$ の定義から $c(v, w)c(w, v) = 4\cos^2\theta$ が導けます。

ここで v, w をルートとし、それらが線型独立とすると、
$c(v, w) \in \mathbb{Z}$ から、

$$c(v, w)c(w, v) = 0, 1, 2, 3$$

となることが分かります。

また、θ のとりうる値は以下です。

$$\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$$

ルート系には、基底のようなものが存在しています。

Proposition (ルート系の底)
$\Delta \subset E$ をルート系とします。以下を満たす $\Pi \subset \Delta$ が存在します。

1. Π は E の基底である。
2. $v \in \Delta$ を $v = \sum_{e \in \Pi} c_e e$ とすると、c_e は全て 0 以上の整数、または全て 0 以下の整数となる。

Π を Δ の底（*base*）と呼びます。

Definition (ディンキン図形)
Δ を n 次元空間のルート系、Π を Δ の底とします。

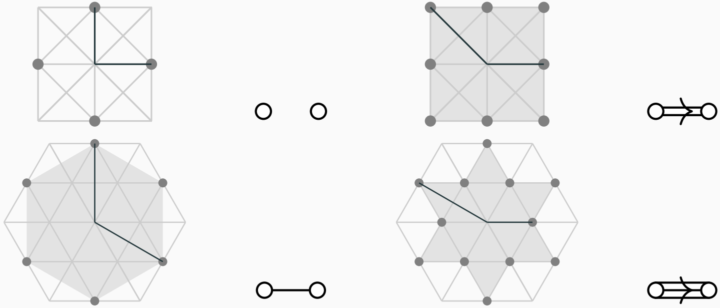
以下のように構成されるグラフを Δ のディンキン図形（Dynkin diagram）と呼びます。

1. n 個のノードを持つ。各ノードは Π の元でラベルづけされる。
2. ノードとノードを何本かの辺で結ぶ。その本数は $c(v,w)c(w,v)$ とする。（したがって、0〜3 本である）
3. 辺で結ばれたノードについて、$(v|v)$ と $(w|w)$ が異なる場合、大きいほうのノードから小さいほうのノードへ矢印をつける。

補足：$c(v,w)c(w,v) = 1$ のときは $(v|v) = (w|w)$ であるため、矢印がつくのは辺が 2 本または 3 本のときとなります。

ディンキン図形の例

Example (2 次元空間のルート系のディンキン図形)



なぜディンキン図形を考えるのか

ルート系の性質をディンキン図形の性質に置きかえると、簡単な性質になります。例えば、以下のような性質が導けます。

- ループを持たない。
- 分岐は多くともひとつしかない。
- ひとつのノードから出る辺は 3 本以内である。

また、分岐がある場合にそれぞれの分岐はどのくらいの長さが可能か、といった議論もできます。

これらを使って可能なディンキン図形を分類することで、ルート系の分類ができます。

Theorem (ディンキン図形の分類)
ディンキン図形は以下のいずれかと一致する。また、以下のディンキン図形に対応するルート系が存在する。

- A_n $(n \geq 1)$
- B_n $(n \geq 2)$
- C_n $(n \geq 3)$
- D_n $(n \geq 4)$
- E_n $(n = 6, 7, 8)$
- F_4
- G_2

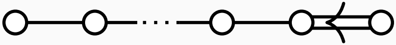
具体的な図は次ページ以降で。

ディンキン図形：古典型

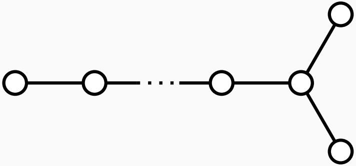
A_n

B_n

C_n

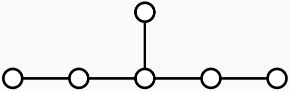


D_n

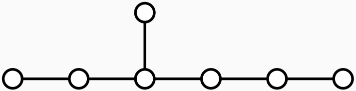


ディンキン図形：例外型

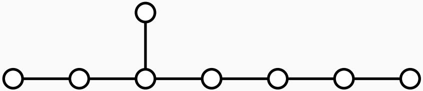
E_6



E_7



E_8



F_4

G_2

ルート系とディンキン図形の面白さ

個人的に思う、ルート系とディンキン図形の面白さは以下のようなところです。

- ルート系の性質が簡単なグラフ上の性質に置き換わる
- 分類結果が多すぎず少なすぎず、ちょうどいいくらいの種類
- 例外型に感じられるロマン
- いろいろな分野に顔を出す意外性

決して難しい理論ではないので、ぜひ触れてみてください。

また、拡大ディンキン図形など、類似の図形もいろいろあるので、調べてみると面白いかと思います。