差分：離散的な世界の微分

宇佐見 公輔

第21回日曜数学会

2021/06/13

関数 $f(x)$ の微分

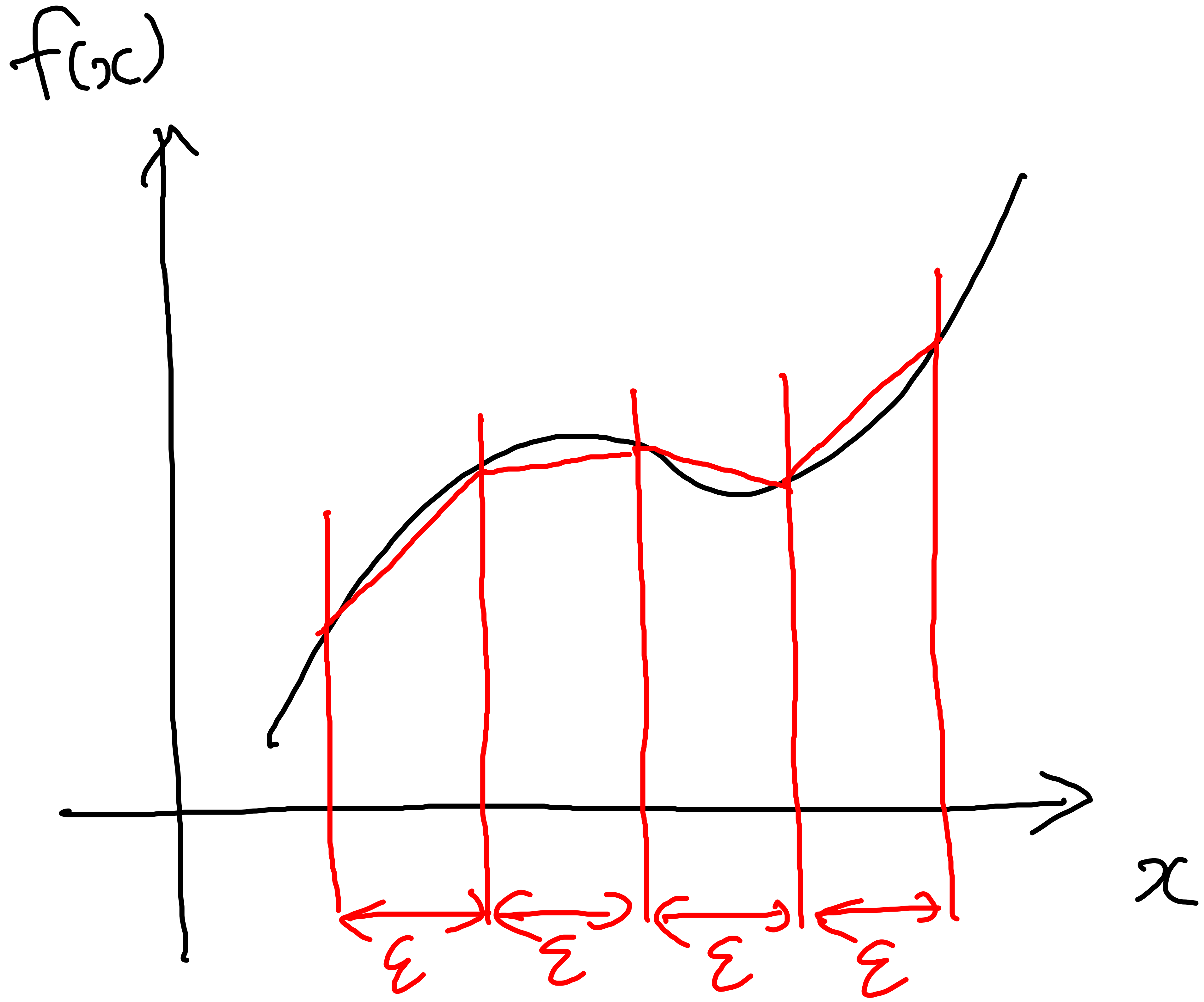
$$\frac{d}{dx}f(x) := \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(x+\varepsilon) - f(x)}{\varepsilon}$$

関数 $f(x)$ の差分

$$\Delta_{\varepsilon x} f(x) := \frac{f(x+\varepsilon) - f(x)}{\varepsilon}$$

※ ε は固定して考えることになる。

極限をとらないというのはどういうことか？



$\varepsilon \to 0$ にすると微分

ε を固定して変えない

$\parallel$

$x, x+\varepsilon, x+2\varepsilon, \cdots$

といったとびとびの値だけに注目する

$\parallel$

離散的な世界

なぜ離散的な世界を考えるのか？

差分それ自体への
数学的な関心

微分方程式の厳密解を
考えるアプローチのひとつ

コンピュータによる数値計算

微分方程式の近似解

効率よく安定した計算法

差分の定義はいろいろ考えられる.

$$\Delta_{+x} f(x) := \frac{f(x+\varepsilon) - f(x)}{\varepsilon}$$

$$\Delta_{-x} f(x) := \frac{f(x) - f(x-\varepsilon)}{\varepsilon}$$

$$\Delta_{x} f(x) := \frac{f\left(x+\frac{\varepsilon}{2}\right) - f\left(x-\frac{\varepsilon}{2}\right)}{\varepsilon}$$

$\varepsilon \longrightarrow 0$ ならどれでも同じ.

しかし一般には $\Delta_{+x} f(x) \neq \Delta_{-x} f(x) \neq \Delta_{x} f(x)$

ここでは $\Delta_{+x} f(x)$ を考えていく.

実際に計算してみる.

$$f(x) = 3x$$

$$\Delta_{+x} f(x) = \frac{3(x+\varepsilon) - 3x}{\varepsilon} = 3$$

$$f(x) = x^2$$

$$\Delta_{+x} f(x) = \frac{(x+\varepsilon)^2 - x^2}{\varepsilon} = 2x + \varepsilon$$

$$f(x) = x^3$$

$$\Delta_{+x} f(x) = \frac{(x+\varepsilon)^3 - x^3}{\varepsilon} = 3x^2 + 3x\varepsilon + \varepsilon^2$$

$$\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1} \qquad \Delta_{+x} x^n \neq nx^{n-1} \qquad (n \geq 2)$$

具体的には $\Delta_{+x} x^n = \sum_{s=1}^{n} \binom{n}{s} x^{n-s} \varepsilon^{s-1}$

しかし実は、べき乗を少しいじってやると

$$\Delta_{+x} x^{\underline{n}} = n x^{\underline{n-1}}$$

と微分と似たような法則ができる。

$$x^{\underline{n}} := x(x-\varepsilon)(x-2\varepsilon)\cdots(x-(n-1)\varepsilon)$$

下降階乗べき と呼ばれる.

$$\Delta_{+x} x^{\underline{3}} = \frac{(x+\varepsilon)^{\underline{3}} - x^{\underline{3}}}{\varepsilon}$$

$$= \frac{(x+\varepsilon)x(x-\varepsilon) - x(x-\varepsilon)(x-2\varepsilon)}{\varepsilon}$$

$$= \frac{(x+\varepsilon)-(x-2\varepsilon)}{\varepsilon}\, x(x-\varepsilon)$$

$$= 3x(x-\varepsilon) = 3x^{\underline{2}}$$

これを使うことで

$$\Delta_{+x}\, x^{\underline{n}} = n\, x^{\underline{n-1}}$$

となる.

注意：$x^{\underline{m+n}} \neq x^{\underline{m}}\, x^{\underline{n}}$

負べきも定義できるが $x^{\underline{-n}} \neq \dfrac{1}{x^{\underline{n}}}$

※これ以降，$\varepsilon=1$で考える．

$$\Delta_{+x} f(x) = n x^{n-1}$$

となるようなf(x)は何なのか？

実は$\underbrace{\text{関・ベルヌーイ多項式}}$がその解である．

→ 関・ベルヌーイ数から定義される多項式．

→ べき乗和の公式やゼータ関数と関連

n次のものを$B_n(x)$とすると

$$B_n(x+1) - B_n(x) = n x^{n-1}$$

ガンマ関数との関連

ガンマ関数 $\Gamma(x) := \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt$

$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$

$\Delta_{+x} \Gamma(x) = \Gamma(x+1) - \Gamma(x) = (x-1)\Gamma(x)$

$\Delta_{+x} \log\Gamma(x) = \log x + \log\Gamma(x) - \log\Gamma(x) = \log x$

$\Delta_{+x} (\log\Gamma(x))' = (\log x)' = x^{-1}$

参考文献

広田良吾　差分学入門

〃　差分方程式講義

荒川・伊吹山・金子　ベルヌーイ数とゼータ関数