Onsager algebra

§0 Background

Onsager algebra

- 2次元 Ising model の解法 (1944 Onsager)
  - ↳ その後、別の解法がメジャーに
- Chiral Potts model の解法 (1980~1990)
- 他の model の研究に自

一般化

- Generalized Onsager algebra
- q- Onsager algebra
- 2つのくみあわせ

— これらも数理物理への応用が研究されている。

§1 Onsager algebra の定義

Def (Lie algebra)

L : 体 K 上の vector space

演算 $L \times L \longrightarrow L$

$(x, y) \mapsto [x, y]$ (Lie bracket)

(1) bilinear すなわち

$$[x+y, z] = [x, z] + [y, z]$$

$$[z, x+y] = [z, x] + [z, y]$$

$$[\alpha x, y] = [x, \alpha y] = \alpha [x, y] \quad (\alpha \in K)$$

(2) $[x, x] = 0$ $\quad (\Rightarrow [x, y] = -[y, x])$

(3) $[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0$

(Jacobi identity)

このとき L を Lie algebra という. ⌟

L : K-vector space が与えられたとき,

L に Lie bracket を定めるには

L の基底 $\{e_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ に対して

$$[e_\lambda, e_\lambda] = 0$$

$$[e_{\lambda_1}, e_{\lambda_2}] = \sum_{\lambda \in \Lambda} \alpha_\lambda e_\lambda$$

を定めて, 一般の元には bilinear 性で拡張する.

ただし, Jacobi identity をみたすように α_λ を決める必要がある. (基底だけみればよい)

例1 基底 $\{h, e, f\}$ に対して

$$[h,e] = 2e,\ [h,f] = -2f,\ [e,f] = h$$

とすると Lie algebra になる.

$\because$) $[h, \underbrace{[e,f]}_{=h}] + [e, \underbrace{[f,h]}_{=2f}] + [f, \underbrace{[h,e]}_{=2e}]$

$= 0 + 2[e,f] + 2[f,e] = 0$ //

これは $\mathfrak{sl}_2$ である.

例2 基底 $\{h_1, h_2, e_1, e_2, e_3\}$ に対して

$$[h_1, h_2] = 0$$

$$[e_1, e_2] = e_3,\ [e_1, e_3] = 0,\ [e_2, e_3] = 0$$

$$[h_1, e_1] = 2e_1,\ [h_1, e_2] = -e_2,\ [h_1, e_3] = e_3$$

$$[h_2, e_1] = -e_1,\ [h_2, e_2] = 2e_2,\ [h_2, e_3] = e_3$$

とすると Lie algebra になる.

∵) 略. ひとつだけ例をあげる.

$$[h_1, [e_1, e_2]] + [e_1 [e_2, h_1]] + [e_2, [h_1, e_1]]$$

$$= [h_1, e_3] + [e_1, e_2] + 2[e_2, e_1]$$

$$= e_3 + e_3 - 2e_3 = 0$$

//

たねあかし: $\mathfrak{gl}(3, k)$ の部分リー代数と同型.

$$h_1 = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & 0 \end{pmatrix} \quad h_2 = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$$

$$e_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ & 0 & 0 \\ & & 0 \end{pmatrix} \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 1 \\ & & 0 \end{pmatrix} \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ & 0 & 0 \\ & & 0 \end{pmatrix}$$

参考：Lie algebra の直和分解

$L = H \oplus E$

$[h_i, h_j] = 0$, $[e_i, e_j] \in H$, $[h_i, e_j] \in E$

さらにいえば Lie algebra のルート空間分解.
(vector space の固有空間分解にあたる)

Def (Onsager algebra)

$\mathcal{O}$: K-vector space

基底 $\{G_m, A_i\}$ $(m \in \mathbb{Z}_{>0}, i \in \mathbb{Z})$

Lie bracket を以下で定める.

$[G_m, G_n] = 0$

$[A_i, A_j] = 2G_{i-j}$

$[G_m, A_i] = A_{i+m} - A_{i-m}$

$G_{-m} := -G_m$
$G_0 := 0$
とする.

この $\mathcal{O}$ を Onsager algebra という.

θ : Lie algebra であることを示す. (Jacobi identity)

$$[G_l, \underbrace{[G_m, G_n]}_{=0}] + \cdots + \cdots = 0$$

$$[A_i, [A_j, A_k]] = [A_i, 2G_{j-k}]$$

$$= 2A_{i-j+k} - 2A_{i+j-k}$$ より

$$[A_i,[A_j,A_k]] + [A_j,[A_k,A_i]] + [A_k,[A_i,A_j]]$$

$$= 2A_{i-j+k} - 2A_{i+j-k} + 2A_{j-k+i} - 2A_{j+k-i}$$

$$+ 2A_{k-i+j} - 2A_{k+i-j} = 0$$

$$[G_m,[A_i,A_j]] + [A_i,[A_j,G_m]] + [A_j,[G_m,A_i]]$$

$$= [G_m, 2G_{i-j}] + [A_i, A_{j-m} - A_{j+m}] + [A_j, A_{i+m} - A_{i-m}]$$

$$= 2G_{i-j+m} - 2G_{i-j-m} + \underbrace{2G_{j-i-m}}_{= -G_{i-j+m}} - \underbrace{2G_{j-i+m}}_{= -G_{i-j-m}} = 0$$

$$[A_i,[G_m,G_n]] + [G_m,[G_n,A_i]] + [G_n,[A_i,G_m]]$$

$$= [G_m, A_{i+n} - A_{i-n}] + [G_n, A_{i-m} - A_{i+m}]$$

$$= A_{i+n+m} - A_{i+n-m} - A_{i-n+m} + A_{i-n-m} + A_{i-m+n} - A_{i-m-n}$$

$$- A_{i+m+n} + A_{i+m-n} = 0 \quad //$$

§2 Dolan-Grady relations

Lie algebra の定め方

- 基底どうしの Lie bracket を定義
- 生成元と関係式で定義

<u>Def</u> (free Lie algebra).

集合 X 上の free Lie algebra $L(X)$ とは

以下をみたすもの.

M: Lie algebra, $\varphi : X \to M$ map

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\mathrm{id}"] \arrow[dr, "\varphi"'] & L(X) \arrow[d, "\psi"] \arrow[dl, phantom, "\circlearrowright"] \\
& M
\end{tikzcd}
$$

ψ: 準同型 が一意に存在

free Lie algebra は一意に存在する.

一意: 普遍性 (圏論)

存在: tensor algebra の subalgebra

Def (Lie algebra with generators and relations)

X : 集合　$L(X)$: X上 free Lie algebra

$\{r_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$: $L(X)$の部分集合

R : $\{r_\lambda\}$で生成される$L(X)$のイデアル

このとき, $L(X)/R$ を generators X,

relations $r_\lambda = 0$ $(\lambda \in \Lambda)$ で定まる Lie algebra

という.

例1 生成元 e, f

関係式 $[e,[e,[e,f]]] = 0$

$[f,[f,[f,e]]] = 0$

例2 生成元 h_1, h_2, e_1, e_2

関係式 $[h_1, h_2] = 0$

$[h_1, e_1] = 2e_1$, $[h_1, e_2] = -e_2$

$[h_2, e_1] = -e_1$, $[h_2, e_2] = 2e_2$

$[e_1,[e_1,e_2]] = 0$, $[e_2,[e_2,e_1]] = 0$

Def (Onsager algebra with Dolan-Grady relations)

生成元 A_0, A_1 と関係式

$$[A_0,[A_0,[A_0,A_1]]] = 4[A_0,A_1]$$

$$[A_1,[A_1,[A_1,A_0]]] = 4[A_1,A_0]$$

で定まる Lie algebra を $\mathcal{O}_{DR}$ とする.

Thm $\mathcal{O}$ と $\mathcal{O}_{DR}$ は同型.

証明はかなり大変(計算量が).

$\mathcal{O}$ の基底は A_0, A_1 から次のように生成できる.

$$G_1 := \frac{1}{2}[A_1, A_0]$$

$$A_2 := A_0 + [G_1, A_1]$$

$$A_{-1} := A_1 - [G_1, A_0]$$

$$G_2 := \frac{1}{2}[A_2, A_0]$$

$$A_3 := A_1 + [G_1, A_2]$$

$$A_{-2} := A_0 - [G_1, A_{-1}]$$

...

$$[G_m, A_i] = A_{i+m} - A_{i-m}$$

$$[A_i, A_j] = 2G_{i-j}$$

○以外は A_0, A_1, G_1 だけでOK

Dolan-Grady relationがどこで効いてくるか
の例をひとつあげておく.

Lemma $[A_0, A_1] = [A_1, A_2]$

$\because)$ $[A_1, A_2] = [A_1, A_0 + [G_1, A_1]]$

$$= [A_1, A_0] + [A_1, [G_1, A_1]]$$

$$[A_1, [G_1, A_1]] = -[A_1, [A_1, G_1]]$$

$$= -\frac{1}{2}[A_1, [A_1, [A_1, A_0]]]$$

$$= -2[A_1, A_0] \quad \swarrow \text{Dolan-Grady}$$

$$\therefore [A_1, A_2] = [A_1, A_0] - 2[A_1, A_0]$$

$$= -[A_1, A_0]$$

$$= [A_0, A_1] \quad /\!/$$

§3 Onsager algebra と loop algebra

$\mathbb{K}[t, t^{-1}]$: 体 $\mathbb{K}$ のローラン多項式環

$$p = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \alpha_i t^i$$ (ただし $\alpha_i \neq 0$ となる α_i は有限個)

<u>Def</u> (Loop algebra)

L : 体 $\mathbb{K}$ 上の Lie algebra

$\mathbb{K}[t, t^{-1}] \otimes L$ について Lie bracket を

$$[p \otimes x, q \otimes y] := pq \otimes [x, y]$$

と定義したものを L の Loop algebra という.

※スカラーの部分をローラン多項式におきかえる

参考:

Affine Lie algebra は有限次元 Lie algebra の Loop algebra の中心拡大で実現できる.

Onsager algebra は §1, §2 では抽象的な定義だったが, Loop algebra を使って具体的に実現できる.

Def (Chevalley involution)

$$\omega : \mathfrak{sl}_2 \to \mathfrak{sl}_2$$

$$e \mapsto f, \quad f \mapsto e \quad h \mapsto -h$$

$$\omega : K[t,t^{-1}] \otimes \mathfrak{sl}_2 \to K[t,t^{-1}] \otimes \mathfrak{sl}_2$$

$$p(t) \otimes x \longmapsto p(t^{-1}) \otimes \omega(x)$$

$$L^{\omega} := \{ p \otimes x \in \underset{K[t,t^{-1}]\otimes\mathfrak{sl}_2}{\overset{\parallel}{L}} \mid \omega(p \otimes x) = p \otimes x \}$$

Thm 「$\mathcal{O}$ と L^{ω} は同型」

L^{ω} の基底は $\{ g_m, a_i \}$ $(m \in \mathbb{Z}_{>0}, i \in \mathbb{Z})$

$$g_m := (t^m - t^{-m}) \otimes h$$

$$a_i := t^i \otimes e + t^{-i} \otimes f$$