八元数のはなし
何を「数」と呼ぶのか？

宇佐見 公輔

2021年10月23日

数の拡張

普通の数の拡張

- 自然数 $\mathbb{N}$
- 整数 $\mathbb{Z}$
- 有理数 $\mathbb{Q}$
- 実数 $\mathbb{R}$
- 複素数 $\mathbb{C}$

さらなる数の拡張

- 四元数 $\mathbb{H}$
- 八元数 $\mathbb{O}$

複素数と四元数

複素数

$a_0 + a_1\mathrm{i}$ とあらわされる数（$a_i \in \mathbb{R}$）。

$$\mathrm{i}^2 = -1$$

四元数

$a_0 + a_1\mathrm{i} + a_2\mathrm{j} + a_3\mathrm{k}$ とあらわされる数（$a_i \in \mathbb{R}$）。

$$\mathrm{i}^2 = \mathrm{j}^2 = \mathrm{k}^2 = -1$$

$$\mathrm{ij} = -\mathrm{ji} = \mathrm{k}, \quad \mathrm{jk} = -\mathrm{kj} = \mathrm{i}, \quad \mathrm{ki} = -\mathrm{ik} = \mathrm{j}$$

八元数

$a_0 + a_1\mathrm{e}_1 + a_2\mathrm{e}_2 + a_3\mathrm{e}_3 + a_4\mathrm{e}_4 + a_5\mathrm{e}_5 + a_6\mathrm{e}_6 + a_7\mathrm{e}_7$
とあらわされる数（$a_i \in \mathbb{R}$）。

$$\mathrm{e}_1^2 = \mathrm{e}_2^2 = \mathrm{e}_3^2 = \mathrm{e}_4^2 = \mathrm{e}_5^2 = \mathrm{e}_6^2 = \mathrm{e}_7^2 = -1$$

$$\begin{aligned}
&\mathrm{e}_1\mathrm{e}_2 = -\mathrm{e}_2\mathrm{e}_1 = \mathrm{e}_3, \quad &&\mathrm{e}_2\mathrm{e}_3 = -\mathrm{e}_3\mathrm{e}_2 = \mathrm{e}_1, \quad &&\mathrm{e}_3\mathrm{e}_1 = -\mathrm{e}_1\mathrm{e}_3 = \mathrm{e}_2\\
&\mathrm{e}_1\mathrm{e}_4 = -\mathrm{e}_4\mathrm{e}_1 = \mathrm{e}_5, \quad &&\mathrm{e}_4\mathrm{e}_5 = -\mathrm{e}_5\mathrm{e}_4 = \mathrm{e}_1, \quad &&\mathrm{e}_5\mathrm{e}_1 = -\mathrm{e}_1\mathrm{e}_5 = \mathrm{e}_4\\
&\mathrm{e}_2\mathrm{e}_4 = -\mathrm{e}_4\mathrm{e}_2 = \mathrm{e}_6, \quad &&\mathrm{e}_4\mathrm{e}_6 = -\mathrm{e}_6\mathrm{e}_4 = \mathrm{e}_2, \quad &&\mathrm{e}_6\mathrm{e}_2 = -\mathrm{e}_2\mathrm{e}_6 = \mathrm{e}_4\\
&\mathrm{e}_3\mathrm{e}_4 = -\mathrm{e}_4\mathrm{e}_3 = \mathrm{e}_7, \quad &&\mathrm{e}_4\mathrm{e}_7 = -\mathrm{e}_7\mathrm{e}_4 = \mathrm{e}_3, \quad &&\mathrm{e}_7\mathrm{e}_3 = -\mathrm{e}_3\mathrm{e}_7 = \mathrm{e}_4\\
&\mathrm{e}_5\mathrm{e}_3 = -\mathrm{e}_3\mathrm{e}_5 = \mathrm{e}_6, \quad &&\mathrm{e}_3\mathrm{e}_6 = -\mathrm{e}_6\mathrm{e}_3 = \mathrm{e}_5, \quad &&\mathrm{e}_6\mathrm{e}_5 = -\mathrm{e}_5\mathrm{e}_6 = \mathrm{e}_3\\
&\mathrm{e}_6\mathrm{e}_1 = -\mathrm{e}_1\mathrm{e}_6 = \mathrm{e}_7, \quad &&\mathrm{e}_1\mathrm{e}_7 = -\mathrm{e}_7\mathrm{e}_1 = \mathrm{e}_6, \quad &&\mathrm{e}_7\mathrm{e}_6 = -\mathrm{e}_6\mathrm{e}_7 = \mathrm{e}_1\\
&\mathrm{e}_7\mathrm{e}_2 = -\mathrm{e}_2\mathrm{e}_7 = \mathrm{e}_5, \quad &&\mathrm{e}_2\mathrm{e}_5 = -\mathrm{e}_5\mathrm{e}_2 = \mathrm{e}_7, \quad &&\mathrm{e}_5\mathrm{e}_7 = -\mathrm{e}_7\mathrm{e}_5 = \mathrm{e}_2
\end{aligned}$$

結合法則の崩れ

交換法則の崩れ

四元数と八元数は交換法則が成り立たない。

$$\mathrm{e}_1\mathrm{e}_2 \neq \mathrm{e}_2\mathrm{e}_1$$

$$\mathrm{e}_1\mathrm{e}_2 = \mathrm{e}_3, \qquad \mathrm{e}_2\mathrm{e}_1 = -\mathrm{e}_3$$

結合法則の崩れ

八元数は結合法則が成り立たない。

$$(\mathrm{e}_1\mathrm{e}_2)\mathrm{e}_4 \neq \mathrm{e}_1(\mathrm{e}_2\mathrm{e}_4)$$

$$(\mathrm{e}_1\mathrm{e}_2)\mathrm{e}_4 = \mathrm{e}_3\mathrm{e}_4 = \mathrm{e}_7, \qquad \mathrm{e}_1(\mathrm{e}_2\mathrm{e}_4) = \mathrm{e}_1\mathrm{e}_6 = -\mathrm{e}_7$$

余談：「結合的」という言葉

グレイブスが八元数を発見してハミルトンに伝えたとき、ハミルトンが結合法則が成り立たないことを指摘した。このとき初めて「結合的（associative）」という言葉が使われた。

なお、結合的でない代数構造は、八元数のほかに、リー代数やジョルダン代数などがある。

何を「数」と呼ぶのか？

疑問 1

四元数や八元数のように、交換法則や結合法則が成り立たないものを「数」と呼んでいいのか？

疑問 2

四元数や八元数を「数」と認めるとして、それ以外のものは「数」とは呼ばないのか？

数っぽさ

有理数や実数が持っている「数っぽさ」は何か？

- もののの量をあらわす
  - 大きさがある
  - 大小比較ができる
- 加減乗除ができる
  - 加法で閉じる、結合法則、交換法則
  - 減法で閉じる（加法の逆元がある）
  - 乗法で閉じる、結合法則、交換法則、分配法則
  - 除法で閉じる（乗法の逆元がある）

複素数はどうか？

先ほどの「数っぽさ」を複素数は持っているか？

複素数どうしの大小比較はできない。ただし、絶対値は定義できる。$a = a_0 + a_1\mathrm{i}$ に対して、

$$|a| := \sqrt{a_0^2 + a_1^2}$$

加減乗除は問題ない。特に、乗法の逆元は次のようになる。

$$a\overline{a} = a_0^2 + a_1^2 = |a|^2$$

より、$a \neq 0$ のとき

$$a^{-1} = \frac{\overline{a}}{|a|^2}$$

絶対値に期待する性質

複素数は、実数のような「大小比較ができる」という性質は持たなくなった。この点はあきらめるが、「絶対値」はまだ持っている。この「絶対値」と「加減乗除」との関連を考えてみる。

絶対値は「原点からの距離」にあたるものだから、距離として次の性質は持っていてほしい。

$$|a + b| \leq |a| + |b|$$

また乗法は、大きさに関しては「拡大縮小」であってほしいから、次の性質は持っていてほしい。

$$|ab| = |a||b|$$

複素数の絶対値はこれらを満たしている。

四元数や八元数はどうか？

四元数も絶対値は定義できる。$a = a_0 + a_1\mathrm{i} + a_2\mathrm{j} + a_3\mathrm{k}$ に対して、

$$|a| := \sqrt{a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

八元数も同様に定義できる。

$$|a| := \sqrt{a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + a_5^2 + a_6^2 + a_7^2}$$

これらは、$|a+b| \leq |a| + |b|$ や $|ab| = |a||b|$ を満たす。

加減乗除は問題ない。乗法の逆元は、$a \neq 0$ のとき

$$a^{-1} = \frac{\overline{a}}{|a|^2}$$

数の性質

「数」に期待する性質は以下で、実数、複素数、四元数、八元数はこれらを満たす。

- 絶対値がある
  - $|a+b| \leq |a| + |b|$
  - $|ab| = |a||b|$
- 加減乗除ができる
  - 加法で閉じる、結合法則、交換法則
  - 減法で閉じる（加法の逆元がある）
  - 乗法で閉じる、分配法則
  - 除法で閉じる（乗法の逆元がある）

なお、代数の言葉を使えば、（実数体上の）「ノルム付き可除代数 (normed division algebra)」である（乗法的なノルムを持ち、零元以外が乗法の逆元を持つ $\mathbb{R}$ 代数）。

これ以外の「数」はないのか？

定理

実数体上のノルム付き可除代数は、$\mathbb{R}$、$\mathbb{C}$、$\mathbb{H}$、$\mathbb{O}$ の 4 種類しかない。

八元数を拡張して十六元数を構成することはできる。しかし、十六元数は以下の性質を持ち、「数」ではなくなる。

- $|ab| = |a||b|$ とは限らない。
- 乗法の逆元が存在するとは限らない。特に、零因子が存在する。

零因子とは、$a \neq 0, b \neq 0, ab = 0$ を満たす a, b のこと。零因子は乗法の逆元を持たない。

参考文献

他にもありますが、読みやすい本として。

参考文献

松岡 学
「数の世界 自然数から実数、複素数、そして四元数へ」
講談社ブルーバックス