

ペントミノ牧場パズル

宇佐見 公輔

2021 年 1 月 24 日

自己紹介

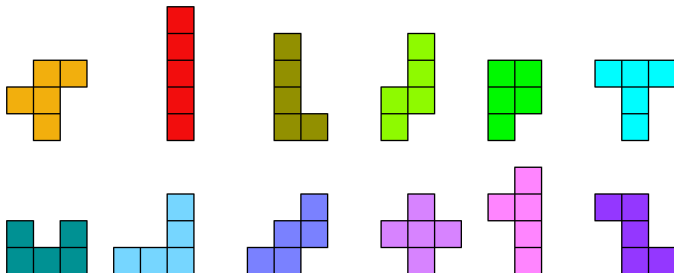
職業：プログラマ / 趣味：数学

最近の活動：

- ルービックキューブ群を SageMath で見る（10 月 / 日曜数学会）
- ルービックキューブと群論（10 月 / 関西日曜数学友の会）
- 平面の敷き詰めとルート系（6 月 / 日曜数学会）
- 四元数のはなし（5 月 / 関西日曜数学友の会）

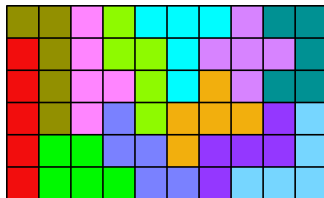
ペントミノ

正方形5つを辺どうしを合わせてつなげた形。回転・鏡像で重なるものを同じとみなすと、12個あります。



ペントミノパズル

ペントミノを使ったパズルとして、12 個のピースを並べて平面図形を作る、というものがもっともよく知られています。
次の図では、 6×10 の長方形を作っています。



ペントミノパズルの解

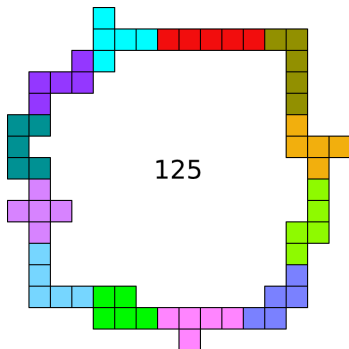
一般的に「いくつかのポリオミノを使って特定の平面図形を作る」という問題に対して、それを解くアルゴリズムが知られています。
(Donald E. Knuth, Dancing links, arXiv cs/0011047, 2000)

このアルゴリズムは SageMath に実装されていて、簡単に使うことができます。
(`sage.combinat.tiling.TilingSolver` クラス)

先ほどの 6×10 の長方形の場合、2339 通りの解があります。

ペントミノ牧場

ここでは、ペントミノを使った別のパズル、ペントミノ牧場 (Pentomino farm) を紹介します。12 個のピースを並べて輪を作ります。囲まれてできる図形の面積の最大値はいくつでしょうか。



ペントミノ牧場の最大値

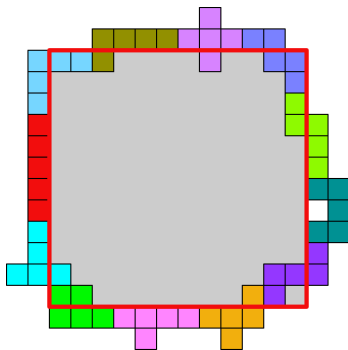
答えを示してしまいましたが、最大値は 128 です。

ペントミノのタイリングパズルではコンピュータを使って解を出していました。そのため、ペントミノ牧場のパズルもコンピュータを使うのが良さそうに見えます。

しかし、実は理詰めで最大値が 128 であることを証明することができます。今回はその概略を説明します。

できる図形の形を考える

矩形を基準として内側にへこんだ形と考えることができます。

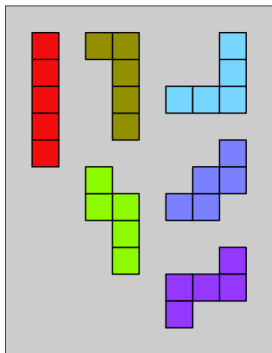


矩形は $12 \times 12 = 144$ 、へこんだ部分は全部で 17、飛び出ている部分が 1 です。したがって、 $144 - 17 + 1 = 128$ となります。

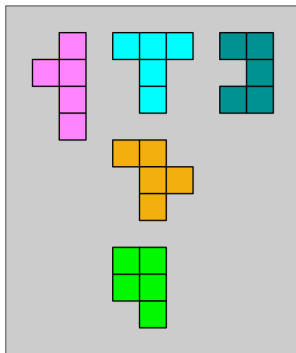
周の長さを考える (1)

可能な基準矩形の大きさを考えるために、周の長さを考えます。
各ピースが周をかたちづくるときに、「他のピースから入ってくる正方形」と「他のピースに出ていく正方形」があります。その間の「長さ」の最大値がピースごとに決まります。

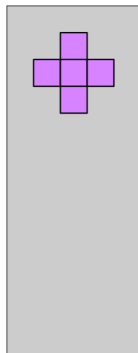
長さ 5



長さ 4



長さ 3



周の長さを考える (2)

合計すると $5 \times 6 + 4 \times 5 + 3 \times 1 = 53$ です。矩形の周の長さなので偶数である必要があり、実際には 52 が最大です。

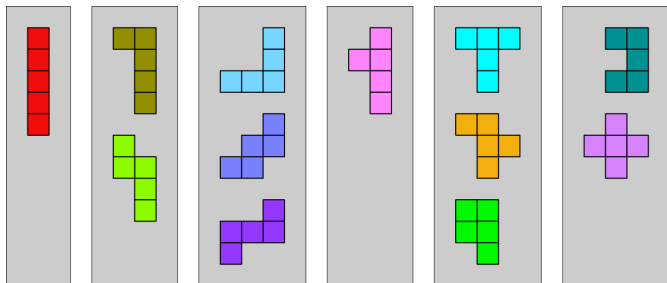
このことから、次のような矩形が基準として考えられます。

- 13×13 の正方形：面積は $12 \times 12 = 144$ です。
- 14×12 の長方形：面積は $13 \times 11 = 143$ です。
- 15×11 の長方形：面積は $14 \times 10 = 140$ です。

1 つのピースだけ最大の長さを使いません。U のピースを長さ 3 とみなして、矩形から飛び出る部分が 1 個生じると考えるのが最も効率が良いです。

ピースの分類

さらに突っ込んで考えるには「長さ」だけでなく、入ってから出るまでの「進み」と「寄り」で分類します。



へこみの量

この分類から、基準矩形に対してへこみが 6 と飛び出しが 1 あることが分かります。

さらに細かく考えて、辺に置くべきピース、角に置くべきピースを考えると、基準矩形に対して 11 の削りが必要であることが分かります。

このため、 $144 - 6 + 1 - 11 = 128$ が最大面積であることが導けます。

ペントミノパズル：

- Donald E. Knuth, Dancing links, arXiv cs/0011047
- Tiling Solver - Sage Reference Manual

ペントミノ牧場：

- 島内剛一, ルービック・キューブと数学パズル