

ルービックキューブ群を SageMath で見る

宇佐見 公輔

2020 年 10 月 31 日

自己紹介

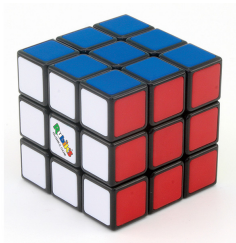
職業：プログラマ / 趣味：数学

最近の活動：

- イジング模型（10 月 / MathWills）
- ルービックキューブと群論（10 月 / 関西日曜数学友の会）
- 平面の敷き詰めとルート系（6 月 / 日曜数学会）
- 四元数のはなし（5 月 / 関西日曜数学友の会）

今回の内容

ルービックキューブは群論の言葉で考察することができます。



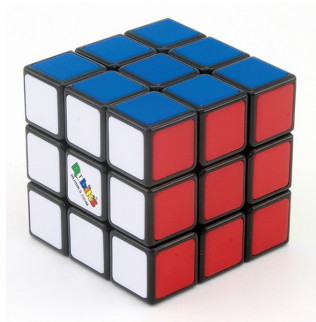
SageMath でルービックキューブ群について調べて遊んでみたいと思います。



ルービックキューブ考察にあたっての前提

3次元空間の中でキューブの位置や向きを固定します。キューブそのものを回転させることは考えません。

キューブの操作は、各面を時計回りまたは反時計回りに90度ずつ動かすことを考えます。真ん中の列を回転させることはしません。



小方体 (cubelet)

- 小方体：キューブを構成する小立方体。中心を除いて 26 個。
- 1 面体：1 つの面が外側に見える小方体。6 個。
- 2 面体：2 つの面が外側に見える小方体。12 個。
- 3 面体：3 つの面が外側に見える小方体。8 個。

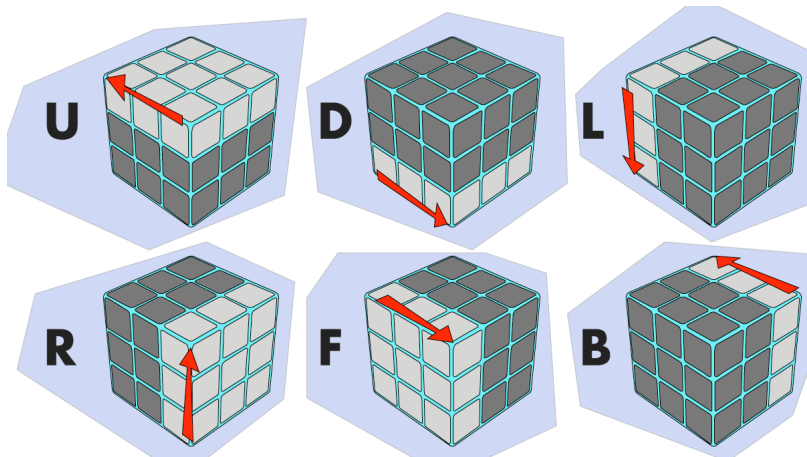
先ほどの前提から、1 面体は動きません。2 面体と 3 面体がキューブの操作によって移動します。

小面 (facet)

キューブの各面を構成する正方形を小面と呼びます。各面で中央を除いて8個、全体で48個あります。

+-----+											
1 2 3											
4 top 5											
6 7 8											
+-----+											
9 10 11			17 18 19			25 26 27			33 34 35		
12 left 13			20 front 21			28 right 29			36 rear 37		
14 15 16			22 23 24			30 31 32			38 39 40		
+-----+											
			41 42 43								
			44 bottom 45								
			46 47 48								
+-----+											

キューブ操作のシングマスター記法



各面を時計回りに 90 度回転する操作を U, D, L, R, F, B と書きます。反時計回りは U' または U^{-1} と書きます。

ルービックキューブ群

X を小面 48 個の集合とします。キューブ操作は、 X の置換写像であると考えることができます。 X の置換全体の集合 S_X は群になります。これを X の対称群と呼びます。

S_X の中にはキューブ操作の組み合わせだけでは実現できないものもあります。例えば、3 面体のひとつをルービックキューブから取り外して、小面のうち 2 つの色を逆に貼り替えてからルービックキューブに戻す、ということをします。これは小面集合 X の置換にはなっていますが、キューブ操作だけでは元の配置に戻すことができません。

基本操作 U, D, L, R, F, B で生成される S_X の部分群 G を、ルービックキューブ群と呼びます。

$$G := \langle U, D, L, R, F, B \rangle \subset S_X$$



SageMath は数学関連のソフトウェアを統合したものです。
SageMath には、ルービックキューブ群を扱うプログラムが最初から組み込まれています。

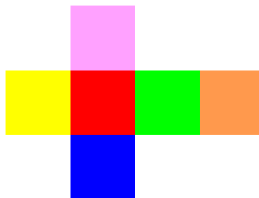
```
sage: rubik = CubeGroup()  
sage: rubik
```

```
The Rubik's cube group with generators R,L,F,B,U,D  
in SymmetricGroup(48).
```

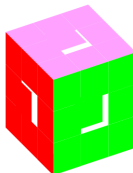
ルービックキューブのグラフィカル表示 (1)

```
sage: rubik.display2d("")
sage: rubik.plot_cube("")
sage: rubik.plot3d_cube("")
```

+-----+			+-----+		
1	2	3			
4	top	5			
6	7	8			
+-----+			+-----+		
9 10 11	17 18 19	25 26 27	33 34 35		
12 left 13	20 front 21	28 right 29	36 rear 37		
14 15 16	22 23 24	30 31 32	38 39 40		
+-----+			+-----+		
			41 42 43		
			44 bottom 45		
			46 47 48		
			+-----+		



sagemath.org

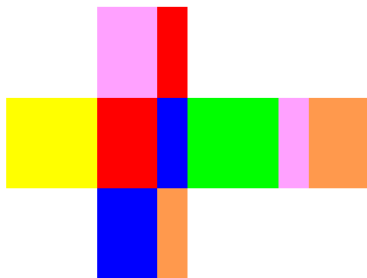


Up, Front, and Right faces.

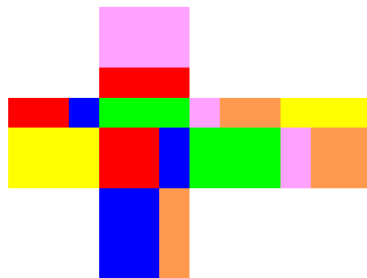
sagemath.org

ルービックキューブのグラフィカル表示 (2)

```
sage: rubik.plot_cube("R")  
sage: rubik.plot_cube("R U")
```



sagemath.org



sagemath.org

ルービックキューブの操作 (1)

```
sage: rubik.move("R")[0]  
(3,38,43,19)(5,36,45,21)(8,33,48,24)  
(25,27,32,30)(26,29,31,28)
```

操作 R は長さ 4 の巡回置換 5 個の積だと分かります。

```
sage: rubik.move("R2")[0]  
(3,43)(5,45)(8,48)(19,38)(21,36)  
(24,33)(25,32)(26,31)(27,30)(28,29)
```

操作 R^2 は長さ 2 の巡回置換 10 個の積だと分かります。

ルービックキューブの操作 (2)

```
sage: rubik.move("R U")[0]  
(1, 3, 38, 43, 11, 35, 27, 32, 30, 17, 9, 33, 48, 24, 6)  
(2, 5, 36, 45, 21, 7, 4)(8, 25, 19)(10, 34, 26, 29, 31, 28, 18)
```

先ほどは長さ 2 や 4 の巡回置換でしたが、今回は長さ 7 や 11 の巡回置換が出てきているのが興味深いです。

(8, 25, 19) に注目してみます。これは右上手前の小方体であり、操作 RU で元の位置に戻りますが、120 度回転しています。そのため、長さ 3 の巡回置換になっています。

ルービックキューブ群の位数

ルービックキューブ群は有限群です（有限集合の置換は有限個）。

その大きさがどれくらいなのか見てみます。

```
sage: rubik = CubeGroup()
sage: rubik.order()
43252003274489856000
sage: rubik.order().factor()
2^27 * 3^14 * 5^3 * 7^2 * 11
```

つまり、ルービックキューブで可能な配置は約 4325 京通りあることが分かります。

元の位数 (1)

Definition

群の元 g について $g^m = 1$ が成り立つような自然数 m で最小のものを、元 g の位数と呼びます。

Definition

ルービックキューブの特定の操作手順 g を m 回繰り返すと元の配置に戻るとき、その最小の m を g の位数と呼びます。

操作 R は 4 回行えば元に戻るので R の位数は 4 です。

```
sage: rubik.move("R")[0].order()
```

```
4
```

元の位数 (2)

Theorem

有限群の元の位数は有限である。

これは、群の元 g に対して集合 $\{g^k \mid k \in \mathbb{Z}\}$ が部分群となることから分かります。

Theorem

ルービックキューブで特定の操作手順を何度も繰り返すと、必ず元の配置に戻る。

ルービックキューブで考えると成り立つかどうか分からない気がしますが、群論で考えるとわりと簡単に分かる、というのは興味深い点だと思います。

元の位数 (3)

では、操作 RU は何回やれば元に戻るのか？

```
sage: rubik.move("R U")[0].order()  
105
```

実際にやってみると、「え、これ本当に元に戻る・・・？」と不安になりますが、頑張って回すと本当に戻るのでちょっと感動。

元の位数 (4)

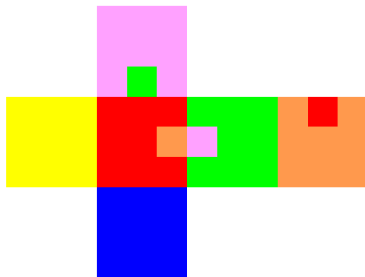
ルービックキューブ群には位数 1260 の元があります。そのひとつが $RU^2D'BD'$ です。これより大きい位数の元はありません。

```
sage: rubik.move("R U2 D' B D'")[0].order()  
1260
```

操作手順の例：むすび

動く小面が少ない操作手順の例を挙げます。島内先生の本で「むすび」と呼んでいる手順です。操作は多いですが、結果を図で表示すると分かりやすいような気がします。

```
sage: rubik.plot_cube("R B L F U^2 F' L' B' R' U^2")
```



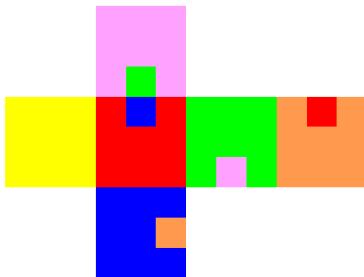
sagemath.org

共役

群の元 g に対して（群の元 h を使って） $h^{-1}gh$ の形の元を共役と呼びます。

「むすび」の共役を考えると、別の場所の置換を作り出すことができます。

```
sage: rubik.plot_cube("R R B L F U^2 F' L' B' R' U^2 R'")
```



sagemath.org

参考文献：

- Rubik's cube group functions - Sage Reference Manual
- David Joyner、群論の味わい－置換群で解き明かすルービックキューブと15パズル
- 島内剛一、ルービック・キューブと数学パズル

David Joyner 先生が SageMath にルービックキューブ群を組み込んだようです。

島内先生の本には、ルービックキューブの様々な手順や、それを利用した解法が載っています。(残念ながら絶版ですが)