平面の敷き詰めとルート系

宇佐見 公輔

2020 年 06 月 28 日 日曜数学会

自己紹介

職業：プログラマ / 趣味：数学

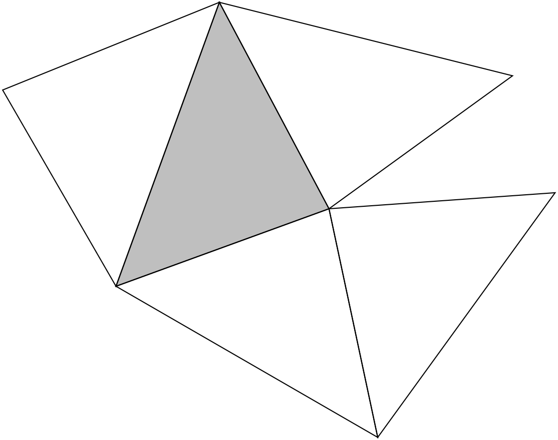
最近の活動（登壇・ブログ・Twitter）：

- 四元数のはなし（2020 年 5 月 / 関西日曜数学友の会）
- はじめて学ぶリー環 ノート（2020 年 4 月〜 / Twitter）
- Ising 模型 ノート（2020 年 3 月〜4 月 / Twitter）
- Onsager 代数の話（2020 年 3 月 / 京都某所）
- はじめて学ぶリー群 ノート（2020 年 1 月〜3 月 / Twitter）
- リー代数と結合法則（2019 年 12 月 / Advent Calendar）
- 回転群のはなし（2019 年 11 月 / 関西日曜数学友の会）
- 行列の指数関数（2019 年 10 月 / 関西数学徒のつどい）
- リー代数の計算の楽しみ（2019 年 10 月 / マスパーティ）

平面の敷き詰め問題

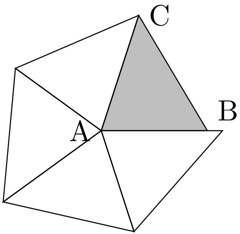
問題

三角形を辺で折り返す操作を繰り返すとき、互いに重ならずに、すき間なく平面を敷き詰めることができる条件は？



ヒント

三角形の各頂点に A、B、C と名前をつけておきます。

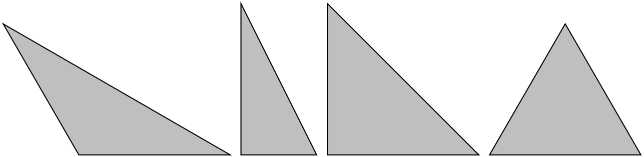


頂点 A のまわりには、頂点 B、C は来ません。よって、∠A の整数倍が 360° ちょうどになる必要があります。(∠B、∠C も同様)

頂点 A のまわりに集まる角が奇数個の場合、辺 AB と辺 AC が重なるため、AB = AC である必要があり、∠B = ∠C となります。(B、C についても同様)

平面の敷き詰め問題の解

先ほどのヒントがあれば、あとは場合分けして解くことができます。



話は変わって・・・

リー代数

ベクトル空間 = 「加法」と「スカラー倍」
リー代数 = ベクトル空間 + 第 3 の演算「ブラケット積」

ブラケット積が満たすべき条件

1. $[ax+by, z] = a[x,z] + b[y,z]$,
   $[z, ax+by] = a[z,x] + b[z,y]$（双線型性）
2. $[x,x] = 0$ $(\implies [x,y] = -[y,x])$（交代性）
3. $[x,[y,z]] + [y,[z,x]] + [z,[x,y]] = 0$（Jacobi identity）

リー代数はどこで出てくるか

リー代数は、代表的なものとしては以下のようなところで出てきます。

リー群とリー代数

リー群（群構造を持つ微分多様体）の接ベクトル空間がリー代数になります。

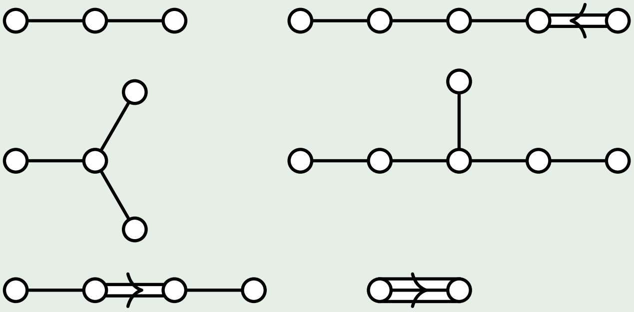
数理物理モデルとリー代数

例えば、強磁性体のモデルであるイジングモデルは、厳密解をリー代数を使って求めることができます。

ディンキン図形

実のところ僕は、リー群や数理物理とは無関係なところから、
リー代数に興味を持ちました。そのきっかけがディンキン図形。

Example (ディンキン図形)



ディンキン図形の種類

ディンキン図形を初めて見かけたとき、「これはなんだろう？」と不思議に思ったのが第一印象。「これって数学・・・？」

その後、有限次元複素単純リー代数の分類がこの図形で行われることを知り、リー代数の理論に興味を持ちました。

ディンキン図形の種類（有限次元複素単純リー代数の分類）

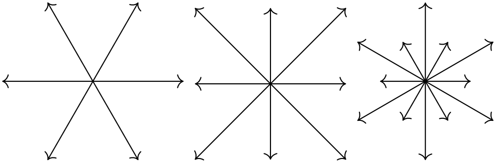
- $A_n \ (n = 1, 2, 3, 4, 5, \ldots)$
- $B_n \ (n = 2, 3, 4, 5, \ldots)$
- $C_n \ (n = 3, 4, 5, \ldots)$
- $D_n \ (n = 4, 5, \ldots)$
- $E_6,\ E_7,\ E_8,\ F_4,\ G_2$

ルート系

ルート系は、ユークリッド空間内のベクトルの集合で、ある公理を満たすものです。

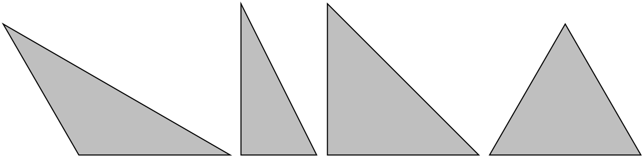
ディンキン図形は、ルート系を特定のルールによって図で表現したものです。ルート系とディンキン図形は 1 対 1 対応しています。

2 次元のルート系は、A_2, B_2, G_2 があります。

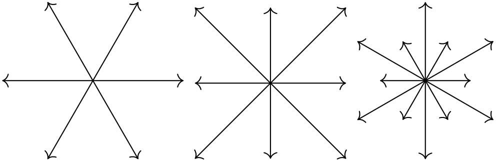


なんか似てる

平面の敷き詰め問題の解

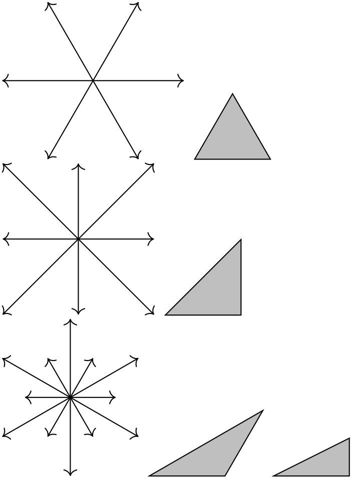


ルート系



平面の敷き詰めとルート系

実は対応関係があります。（注：G_2 は例外的に 2 つと対応している）



空間の敷き詰め

この対応関係は 2 次元だけでなく、より高い次元でも成り立ちます。

問題

三角錐を面で折り返す（鏡映）操作を繰り返すとき、互いに重ならずに、すき間なく空間を埋め尽くすことができる条件は？

3 次元のルート系は、A_3, B_3, C_3 があります。このそれぞれについて、3 次元空間を埋め尽くす三角錐が対応しており、上記の問題の解はその 3 通りです。

4 次元以上でも同様です。単体（三角形や三角錐）を超平面で鏡映する操作を繰り返すとき、互いに重ならずに、すき間なく空間を埋め尽くすことができるものは、その次元のルート系と対応しています。

参考文献

- 松澤淳一、特異点とルート系、朝倉書店（すうがくの風景シリーズ 6）
- 松澤淳一、数学セミナー 2009 年 10 月号 ディンキン図形とルート系、日本評論社