四元数と回転

宇佐見 公輔

2022 年 1 月 22 日

自己紹介

宇佐見 公輔（うさみ こうすけ）

- 職業：プログラマ
- 趣味：数学

今日の話に関連する過去の登壇：

- 四元数のはなし（2020 年 5 月 / 関西日曜数学友の会）
- 八元数のはなし（2021 年 10 月 / 日曜数学会）

自己紹介

近況：

- 今年から、株式会社ゆめみ所属

ゆめみメンバーによるグループ Liberal Arts Lab の紹介：

- 2 月 3 日：タカタ先生のお笑い数学全史・第十四章
  produced by Liberal Arts Lab × 日本お笑い数学協会
- 2 月 24 日：「僕の本、こう活かそう！」〜数学のお兄さんの書籍を使った算数・数学の学び方〜
  produced by Liberal Arts Lab × 日本お笑い数学協会

四元数とは

四元数

$x_0 + x_1\mathrm{i} + x_2\mathrm{j} + x_3\mathrm{k}$（$x_i \in \mathbb{R}$）とあらわされる数。

$$\mathrm{i}^2 = \mathrm{j}^2 = \mathrm{k}^2 = -1$$

$$\mathrm{ij} = -\mathrm{ji} = \mathrm{k}, \quad \mathrm{jk} = -\mathrm{kj} = \mathrm{i}, \quad \mathrm{ki} = -\mathrm{ik} = \mathrm{j}$$

- 加減乗除が可能（特に除法が可能）。
- 分配法則、結合法則、加法の交換法則が成り立つ。
- 乗法の交換法則が成り立たない。

四元数の大きさ

四元数の大きさ（絶対値）

$x = x_0 + x_1\mathbf{i} + x_2\mathbf{j} + x_3\mathbf{k}$（$x_i \in \mathbb{R}$）の大きさ $|x|$ は、

$$|x| = \sqrt{x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$$

で、大きさは乗法によって保たれる。

$$|xy| = |x||y|$$

- ハミルトンは、この性質が成り立つようなものを探した結果、三元数を作ることはできず、四元数になった。

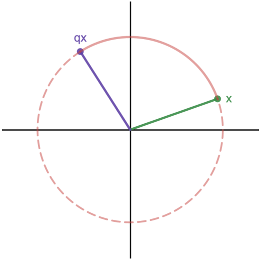
2 次元平面上の回転

2 次元平面上の回転

複素数 $x = x_0 + x_1\mathrm{i}$ に大きさ 1 の複素数 q をかける操作は、2 次元平面上の回転をあらわす。

$$x \mapsto qx$$

- $|qx| = |q||x| = |x|$ なので原点からの距離が保たれる。

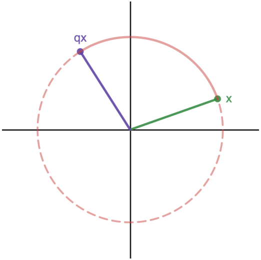


4 次元空間上の回転

四元数 $x = x_0 + x_1\mathbf{i} + x_2\mathbf{j} + x_3\mathbf{k}$ に大きさ 1 の四元数 q をかける操作は、4 次元空間上の回転をあらわす。

$$x \mapsto qx$$

- $|qx| = |q||x| = |x|$ なので原点からの距離が保たれる。



3 次元空間を考える

ハミルトンは 3 次元空間上の回転を表現する方法が欲しかったのだが、三元数は作れなかった。

四元数は 4 次元空間の点に対応する。

$$x_0 + x_1\mathbf{i} + x_2\mathbf{j} + x_3\mathbf{k} \leftrightarrow (x_0, x_1, x_2, x_3)$$

四元数の虚数部だけを使うことにして（純虚四元数)、3 次元空間と対応するようにしてみる。

$$x_1\mathbf{i} + x_2\mathbf{j} + x_3\mathbf{k} \leftrightarrow (x_1, x_2, x_3)$$

純虚四元数

純虚四元数は残念ながら乗法で閉じていない。

$$
\begin{aligned}
&(x_1\mathrm{i} + x_2\mathrm{j} + x_3\mathrm{k})(y_1\mathrm{i} + y_2\mathrm{j} + y_3\mathrm{k}) \\
=& -(x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3) \\
&+ (x_2y_3 - x_3y_2)\mathrm{i} + (x_3y_1 - x_1y_3)\mathrm{j} + (x_1y_2 - x_2y_1)\mathrm{k}
\end{aligned}
$$

そのため、単純に乗法で 3 次元空間上の回転を表現することはできない。

3 次元空間上の回転

実は次のように表現することができる。

3 次元空間上の回転

純虚四元数 $x = x_1\mathbf{i} + x_2\mathbf{j} + x_3\mathbf{k}$ に対して、大きさ 1 の四元数 q を使った次の操作は、3 次元空間上の回転をあらわす。

$$x \mapsto qxq^{-1}$$

- qxq^{-1} は純虚四元数になる。

3 次元空間上の回転とは

3 次元空間上での回転を少し噛み砕いて考えてみる。

2 次元平面上の原点中心の回転は、角度だけで決まっていた。
3 次元空間上の原点中心の回転は、それに加えて「どの方向に回転させるか」の情報がないと決まらない。言い方を変えると、「どの平面上で回転させるか」とも言える。

つまり、3 次元空間上の原点中心の回転は、平面を指定する法線ベクトル n と、その平面上で回転させる角度 θ との 2 つの情報で決まる。

(こういうことをビジュアライズする能力が欲しい・・・)

3 次元空間上の回転（再）

3 次元空間上の回転

点 $X = (x_1, x_2, x_3)$ を法線ベクトル $n = (n_1, n_2, n_3)$（ただし $|n| = 1$ とする）で決まる平面上を θ だけ回転させる操作を考える。

純虚四元数 $x = x_1\mathrm{i} + x_2\mathrm{j} + x_3\mathrm{k}$ に対して、大きさ 1 の四元数

$$q = \cos\frac{\theta}{2} + \left(\sin\frac{\theta}{2}\right)(n_1\mathrm{i} + n_2\mathrm{j} + n_3\mathrm{k})$$

を使った次の操作

$$x \mapsto qxq^{-1}$$

は、上述の 3 次元空間上の回転をあらわす。

3 次元空間上の回転の不思議

実際に回転であることの説明はここではしないけれど、3 次元空間の点と純虚四元数との対応を念頭に置いて、変換 $x \mapsto qxq^{-1}$ が回転になっているらしいというのを飲み込んだとして。

さらに考えてみると、大きさ 1 の四元数を集めた集合は、乗法で群をなす。$x \mapsto qxq^{-1}$ という操作は、群の言葉でいえば共役をとる操作。純虚四元数に対して、大きさ 1 の四元数の群の元で共役をとるのが、回転変換あるいは鏡映変換に対応すると考えられる。

それでも、$x \mapsto qxq^{-1}$ という操作は、ちょっと不思議な感じがする。

3 次元空間上の回転の不思議

x と qxq^{-1} は純虚四元数であり、3 次元空間の点と対応している。しかしその過程で出てくる qx あるいは xq^{-1} は純虚四元数ではない。
つまり、3 次元空間上の回転をあらわすために、一度 4 次元の世界に飛び出している。

左から q をかける操作で、実軸方向に $(q|x)$ だけずれた世界で、外積 $q \times x$ をとる。
そこに右から q^{-1} をかける操作で、実軸方向にずらして元の世界に戻ってきて、外積をとる。
これが実は回転になっているというのである。不思議な感じがしませんか？

参考文献

結論的な話がない感じですが、参考文献を挙げておきます。

これらには先ほどの操作が 3 次元空間をあらわすことの証明や説明が書かれています。

- 松岡 学「数の世界 自然数から実数、複素数、そして四元数へ」講談社ブルーバックス
- 矢野 忠「四元数の発見」海鳴社
- 今野 紀雄「四元数」森北出版