回転群のはなし

宇佐見 公輔

第 6 回 関西日曜数学 友の会

最近の趣味数学

関西日曜数学 友の会：

- Generalized Onsager algebras（第 5 回 / 2019 年 8 月）
- ルート系とディンキン図形（第 4 回 / 2019 年 4 月）

日曜数学会：

- リー代数の計算の楽しみ（マスパーティ / 2019 年 10 月）

関西すうがく徒のつどい：

- 行列の指数関数（第 12 回 / 2019 年 10 月）

執筆参加：

- 数学デイズ大阪編：低次元のリー代数をみる（Kindle 版発売中）

2 次元回転行列

2 次元平面 $\mathbb{R}^2$ を考えます。

ある点を、原点を中心として反時計回りに角度 t だけ回転させる作用は、次の行列であらわされます。

Definition

$$R(t) := \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

2 次元回転行列の積

Proposition

2 次元回転行列について次が成り立ちます。

$$R(t_1)R(t_2) = R(t_1 + t_2)$$

これは計算すれば確認できます。

2 次元の回転群

$R(t_1)R(t_2) = R(t_1 + t_2)$ という関係から、

$SO(2) := \{R(t) \mid t \in \mathbb{R}\}$ が可換群であることが分かります。

Proposition

- 積で閉じている：$R(t_1)R(t_2) \in SO(2)$
- 結合法則：$R(t_1)(R(t_2)R(t_3)) = (R(t_1)R(t_2))R(t_3)$
- 交換法則：$R(t_1)R(t_2) = R(t_2)R(t_1)$
- 単位元：$R(0)$ は単位元
- 逆元：$R(t)$ の逆元は $R(-t)$

無限小の回転

回転角 t を「無限小」にとることを考えます。つまり、

$$\cos t = 1 - \frac{1}{2!}t^2 + \frac{1}{4!}t^4 - \cdots$$
$$\sin t = t - \frac{1}{3!}t^3 + \frac{1}{5!}t^5 - \cdots$$

のうち、2 次以上の項を無視することを考えます。すると、

$$R(t) = \begin{pmatrix} 1 & -t \\ t & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

となります。

無限小回転の生成行列

先ほどの観察から、次の行列が重要そうに見えてきます。

$$J := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

これを使って、$R(t)$ は以下のように書けます。

$$\begin{aligned} R(t) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + O(t^2) \\ &= I + tJ + O(t^2) \end{aligned}$$

行列の指数関数

Definition

行列 X の指数関数を次のように定義します。

$$\exp X := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} X^k = I + X + \frac{1}{2!} X^2 + \frac{1}{3!} X^3 + \cdots + \frac{1}{k!} X^k + \cdots$$

（これについては、第 12 回 関西すうがく徒のつどいで話しました）

回転行列と指数関数

$R(t) = I + tJ + O(t^2)$ と述べましたが、実は指数関数を使って次のように書けます。

Proposition

回転行列 $R(t)$ は次のように書けます。

$$
\begin{aligned}
R(t) &= \exp(tJ) \\
&= I + tJ + \frac{1}{2!}(tJ)^2 + \frac{1}{3!}(tJ)^3 + \cdots + \frac{1}{k!}(tJ)^k + \cdots
\end{aligned}
$$

指数関数と三角関数

回転行列は $R(t) = (\cos t)I + (\sin t)J$ とも書けるので、以下が分かります。

Proposition

次が成り立ちます。

$$\exp(tJ) = (\cos t)I + (\sin t)J$$

3 次元の回転

3 次元空間 $\mathbb{R}^3$ での回転はもう少し複雑になります。

2 次元の場合は、原点を通る回転軸（回転面に対して垂直な直線）がひとつだけでした。2 次元の回転は回転角という 1 パラメータであらわせました。

3 次元の場合は、原点を通る回転軸がひとつではありません。回転軸の向きを決めるためにパラメータを 2 つ使うため、回転角と合わせて 3 つのパラメータが必要になります。

3 次元回転行列

Definition

第 1 軸、第 2 軸、第 3 軸のまわりの回転行列

$$R_1(t) := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos t & -\sin t \\ 0 & \sin t & \cos t \end{pmatrix} \quad R_2(t) := \begin{pmatrix} \cos t & 0 & \sin t \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin t & 0 & \cos t \end{pmatrix}$$

$$R_3(t) := \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t & 0 \\ \sin t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3 次元の回転の行列表示

3 次元の回転をひとつの行列で具体的に書こうとすると、少しややこしい式になります。

しかし、3 次元の回転は $R_1(t), R_2(t), R_3(t)$ の積であらわすことができます。

そのため、この 3 つの回転行列をおさえることで 3 次元の回転群の本質を知ることができます。

再び無限小の回転

回転角 t の「無限小」を考えます（t の 2 次以上を無視）。

$$R_3(t) = \begin{pmatrix} 1 & -t & 0 \\ t & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= I + tJ_3$$

（J_3 をそのように定義する）

再び回転行列と指数関数

Proposition

回転行列 $R_1(t), R_2(t), R_3(t)$ は次のように書けます。

$$R_1(t) = \exp(tJ_1), \quad R_2(t) = \exp(tJ_2), \quad R_3(t) = \exp(tJ_3)$$

ここで

$$J_1 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_2 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_3 := \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3 次元回転の生成行列の関係

Proposition

J_1, J_2, J_3 の間には次の関係があります。

$$[J_1, J_2] = -J_3$$

$$[J_2, J_3] = -J_1$$

$$[J_3, J_1] = -J_2$$

（ここで $[X, Y] := XY - YX$）

さらなる話題

- 回転行列は、簡単な形の行列から指数関数で生成される
- 生成行列には、交代子積によってリー代数の構造がある
- そのリー代数を調べることで回転群のことがわかる