3. Affine Zusammenhänge und Parallelverschiebung

3.1. Motivation

In $\mathbb{R}^n$ kann man Tangentialräume in verschiedenen Punkten vergleichen: Die Tangentialräume von x und y sind $T_x\mathbb{R}^n = \{x\} \times \mathbb{R}^n \simeq \mathbb{R}^n$ und $T_y\mathbb{R}^n \simeq \mathbb{R}^n$. Es gibt dann eine Translation (Parallelverschiebung) $T_{y-x} : T_x\mathbb{R}^n \to T_y\mathbb{R}^n$; $(x, v) \mapsto (T_{y-x}(x), v)$, wobei $T_{y-x}(x) = x + (y - x) = y$.

Die Situation für Mannigfaltigkeiten ist lokal die gleiche: Ist (U, φ) eine Karten, so gilt $TU \simeq U \times \mathbb{R}^n$ (vergleiche Basis-Satz, Satz 1.1). Ist $p, q \in U$, so gilt: ([...] affine Hülle)

$$T_pM = \left[\left.\frac{\partial}{\partial x^1}\right|_p, \ldots, \left.\frac{\partial}{\partial x^n}\right|_p \right] \text{ und } T_qM = \left[\left.\frac{\partial}{\partial x^1}\right|_q, \ldots, \left.\frac{\partial}{\partial x^n}\right|_q \right]$$

Die Parallelverschiebung $T_pM \to T_qM$ bildet jetzt $v = \sum a_i \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p$ auf $\bar{v} = \sum a_i \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_q$ ab.

Der globale Vergleich von Tangentialräumen erfordert jedoch eine Zusatzstruktur („Fernparallelismus“)

In der Flächentheorie realsisiert man die Parallelverschiebung via Kovariante Ableitung: Ist c eine Flächenkurve der Fläche F, so ist $\frac{D}{dt}c'$ die orthogonale Projektion von c'' in die Tangentialebene $T_{c(t)}F$. Die Geodätischen in F (die „verallgemeinerten Geraden“) sind definiert als Lösungen von $\frac{D}{dt}c' = 0$.

3.2. Affine Zusammenhänge

Definition (Affiner Zusammenhang)
Ein Affiner Zusammenhang D auf einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit M ist eine Abbildung

$$D : \begin{aligned} \mathcal{V}M \times \mathcal{V}M &\to \mathcal{V}M \\ (X, Y) &\mapsto D_XY \end{aligned}$$

so dass für alle $X, Y, Z \in \mathcal{V}M$ und $f, g \in C^\infty M$ gilt:

(Z1) $D_{fX+gY}Z = fD_XZ + gD_YZ$

(Z2) $D_X(Y + Z) = D_XY + D_XY$

(Z3) $D_X(fY) = fD_XY + (Xf)Y$

Beispiele

(1) Flächentheorie: $D_X Y := Y_T'$

(2) In $\mathbb{R}^n$: $X = \sum a_i \frac{\partial}{\partial x^i}$, $Y = \sum b_i \frac{\partial}{\partial x^i}$, $D_X Y := \sum X(b_i) \frac{\partial}{\partial x^i}$

D ist ein lokaler Begriff: Wähle Karte (U, φ) mit Basisfelder $X_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$. $X, Y \in \mathcal{V}U$: $X = \sum_{i=1}^n v^i X_i$, $Y = \sum_{j=1}^n w^j X_j$. Dann:

$$\begin{aligned} D_X Y &= D_{\sum_i v^i X_i} \left(\sum_j w^j X_j \right) \\ &\overset{(Z1)}{=} \sum_i v^i D_{X_i} \left(\sum_j w^j X_j \right) \\ &\overset{(Z2)}{=} \sum_i v^i \sum_j D_{X_i} \left(w^j X_j \right) \\ &\overset{(Z3)}{=} \sum_{i,j} v^i w^j D_{X_i} X_j + \sum_{i,j} v^i X_i \left(w^j \right) X_j \end{aligned}$$

wobei $D_{X_i} X_j = \sum_{k=1}^n \Gamma_{ij}^k X_k$ (diese Darstellung existiert wegen dem Basissatz 1.1) für lokal definierte C^∞-Funktionen $\Gamma_{ij}^k : U \to \mathbb{R}$ (Christoffel-Symbole).

Wir haben also:

$$D_X Y = \sum_{k=1}^n \left(\sum_{i,j=1}^n v^i w^j \Gamma_{ij}^k + X(w^k) \right) X_k$$

Die Formel zeigt, dass $D_X Y(p)$ bestimmt ist durch $v^i(p)$, $w^j(p)$ und $X_p(w^k)$ (und Γ_{ij}^k). Insbesondere braucht man das Vektorfeld Y (bzw. w^k) nur „in Richtung X“ zu kennen.

Wir folgern: Man kann Vektorfelder längs einer Kurve in Richtung dieser Kurve ableiten: Falls Y ein Vektorfeld ist längs c (also $Y\left(c(t)\right) = \sum_{i=1}^n w^k(t) X_k\left(c(t)\right)$), dann ist

$$D_{c'} Y := \sum_{k=1}^n \left(\sum_{ij}^n x^{i\prime}(t) w^j(t) \Gamma_{ij}^k\left(c(t)\right) + w^{k\prime}(t) \right) X_k(c(t))$$

(wobei $\varphi \circ c(t) = \left(x^1(t), \dots, x^n(t)\right)$ und damit $c' = \sum x^{i\prime} X_i$)

Definition
Ein Vektorfeld Y längs einer Kurve c heißt parallel bezüglich einem affinen Zusammenhang D, falls $D_{c'} Y = 0$.

Beispiele

(1) Im $\mathbb{R}^n$ haben wir für ein paralleles Vektorfeld Y, dass $D_{c'} Y = \sum_{j=1}^n w^{j\prime} X_j = \sum_{j=1}^n 0 X_j = 0$, da bei Vektorfeldern in $\mathbb{R}^n$ parallel und konstant gleichwertig ist.

(2) Ein Vektorfeld entlang eines Klein-Kreises der Sphäre ist nicht parallel. (Durch Skizze motiviert). Ein Vektorfeld entlang eines Groß-Kreises ist jedoch parallel, da c'' orthogonal zum Groß-Kreis zum Mittelpunkt zeigt, die Projektion auf die Sphäre also 0 ist.

Später werden wir sehen, dass Geodätische (Kurven mit $D_{c'}c' = 0$) Geraden verallgemeinern.

Satz 3.1 (Eindeutigkeit der Parallelverschiebung)
Sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit mit affinem Zusammenhang D. Sei $c : I = [a, b] \to M$ eine differenzierbare Kurve und $v_0 \in T_{c(a)}M$. Dann existiert genau ein paralleles Vektorfeld V längs c mit $V(c(a)) = v_0$.

Definition
Der Vektor $V(t)$ (aus Satz 3.1) heißt der längs c parallel verschobene Vektor v_0. Die Abbildung

$$c\|_a^t : \begin{aligned} T_{c(a)}M &\to T_{c(t)}M \\ v_0 &\to V(t) \end{aligned}$$

heißt Parallelverschiebung.

Beweis
Im ersten Schritt betrachten wir die Situation lokal. Sei $t_1 \in I$, so dass $c([a, t_1]) \subset U$ (Kartengebiet um $c(a)$). In der Karte (U, φ) ist die Definitionsgleichung $D_{c'}V = 0$ äquivalent zu:

$$\sum_k \left(\frac{dv^k}{dt} + \sum_{i,j} \frac{dx^i}{dt} v^j \Gamma_{ij}^k \right) X_k = 0$$

wobei $V = \sum_{i=1}^n v^i X_i$, $X_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$, $\varphi \circ c(t) = \big(x^1(t), \dots, x^n(t)\big)$, $c'(t) = \sum_i \frac{dx^i}{dt}(t) X_i\,(c(t))$. Das heißt wir haben ein System von n linearen Differentialgleichungen 1. Ordnung in $v_k(t)$:

$$0 = \frac{dv^k}{dt} + \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k \frac{dx^i}{dt} v^j, \qquad k = 1, \dots, n$$

Dieses System hat zu gegebenen Anfangsbedingungen $v(a) = v_0 = (v^1(a), \dots, v^n(a))$ genau eine Lösung für alle $t \in [a, t_1]$. Dann existiert eindeutig ein Parallelfeld V längs $c([a, t_1])$ mit $V(a) = v_0$.

Im zweiten Schritt sei $t_2 \in I$ beliebig. Das Segment $c([a, t_2])$ ist kompakt in M und kann daher mit endlich vielen Karten überdeckt werden. In jeder Karte existiert ein V und ist eindeutig (nach Schritt 1). Daraus folgt, dass V global eindeutig existiert auf $c([a, t_2])$ für beliebige t_2. ∎

3.3. Der Levi-Civita-Zusammenhang

Motivation: Ein Parallelfeld im Euklidischen Raum $(\mathbb{R}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ist eine Isometrie.

Definition
Ein affiner Zusammenhang D auf einer Riemann'schen Mannigfaltigkeit $(M, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ heißt verträglich mit der Riemann'schen Struktur $\langle\cdot,\cdot\rangle$ falls für jede differenzierbare Kurve $c : I \to M$ und jedes Paar von parallelen Vektorfeldern V_1, V_2 längs c gilt:

$$\langle V_1\left(c(t)\right), V_2\left(c(t)\right)\rangle_{c(t)} \text{ ist für alle } t \in I \text{ konstant.}$$

Das heißt dass die Parallelverschiebung $c\|_{t_1}^{t_2} : T_{c(t_1)}M \to T_{c(t_2)}M$ eine lineare Isometrie ist.

Satz 3.2 (Äquivalente Formulierung der Verträglichkeit)
Sei $(M, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ eine Riemann'sche Mannigfaltigkeit. Ein affiner Zusammenhang D ist verträglich mit $\langle\cdot,\cdot\rangle$ genau dann, wenn für beliebige Vektorfelder V, W längs einer beliebigen Kurve $c : I \to M$ für alle $t \in I$ gilt:

$$\frac{d}{dt}\langle V(t), W(t)\rangle_{c(t)} = \langle D_{c'}V, W\rangle_{c(t)} + \langle V, D_{c'}W\rangle_{c(t)} \quad (*)$$

Beweis
$(*) \implies$ verträglich: V, W parallel ist äquivalent zu $D_{c'}V = D_{c'}W = 0$, also $\frac{d}{dt}\langle V(t), W(t)\rangle_{c(t)} = 0$, also verträglich.

Umgekehrt gilt: Sei D verträglich, wir haben also eine Parallelverschiebung, die Isometrie ist. Wähle eine Orthonormalbasis $\{P_1(t_0), \dots, P_n(t_0)\}$ von $T_{c(t_0)}M$. Mittels der der Parallelverschiebung erhalten wir wieder für alle $t \in I$ eine Orthonormalbasis $\{P_1(t), \dots, P_n(t)\}$ von $T_{c(t)}M$. Wir können schreiben:

$$V(t) = \sum_{i=1}^{n} v_i(t)P_i(t) \quad \text{sowie} \quad W(t) = \sum_{i=1}^{n} w_i(t)P_i(t)$$

wobei $v_i, w_i \in C^\infty$. Also:

$$D_{c'}V = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{c'(v_i)}_{v_i'} P_i + \sum_{i=1}^{n} v_i \underbrace{D_{c'}P_i}_{=0}$$

das heißt: $D_{c'}V = \sum_{i=1}^{n} v_i'P_i$ und $D_{c'}W = \sum_{i=1}^{n} w_i'P_i$. Wir wollen zeigen, dass $(*)$ gilt. Die rechte Seite ist:

$$\begin{aligned}
\langle D_{c'}V, W\rangle + \langle V, D_{c'}W\rangle &= \left\langle \sum v_i'P_i, \sum w_jP_j \right\rangle + \left\langle \sum v_iP_i, \sum w_j'P_j \right\rangle \\
&= \sum_{i,j} \left(v_i'w_j\langle P_i, P_j\rangle + v_iw_j'\langle P_1, P_j\rangle \right) \\
&= \sum_{i,j} \left(v_i'w_j\delta_{ij} + v_iw_j'\delta_{ij} \right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} (v_i'w_j + v_iw_j') \\
&= \frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{n} v_iw_j \right)
\end{aligned}$$

Die linke Seite ist:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\langle V, W\rangle &= \frac{d}{dt}\left\langle \sum_i v_i P_i, \sum_j w_j P_j \right\rangle \\ &= \frac{d}{dt}\left(\sum_{ij} v_i w_j \langle P_i, P_j\rangle\right) \\ &= \frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^n v_i w_j\right)\end{aligned}$$

■

Bemerkung: Eine weitere äquivalente Formulierung der Verträglichkeit:
Für alle X, Y $Z \in \mathcal{V}M$ gilt:

$$X \underbrace{\langle Y, Z\rangle}_{\in C^\infty(M)} = \langle D_X Y, Z\rangle + \langle Y, D_X Z\rangle$$

Die Frage ist jetzt, ob zu einer gegebener Riemann'schen Struktur ein verträglicher Zusammenhang existiert.

Definition
Ein affiner Zusammenhang D heißt symmetrisch (oder torsionsfrei) falls für alle $X, Y \in \mathcal{V}M$:

$$T(X,Y) := D_X Y - D_Y X - [X,Y] = 0$$

Bemerkung: In lokalen Koordinaten (U, φ) gilt für D symmetrisch und Basisfelder $X_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$:

$$D_{X_i} X_j - D_{X_j} X_i = [X_i, Y_j] = \left[\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right] = 0$$

da $\left[\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right] f = \frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_j} f - \frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial x_i} f = 0$ wegen $f \in C^\infty$ und Vertauschbarkeit der partiellen Ableitungen. Weiter gilt:

$$D_{X_i} X_j - D_{X_j} X_i = \sum_k \Gamma_{ij}^k X_k - \sum_k \Gamma_{ji}^k X_k = \sum_k \left(\Gamma_{ij}^k - \Gamma_{ji}^k\right) X_k \implies \Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$$

Satz 3.3 (Levi-Civita-Zusammenhang)
Auf jeder Riemann'schen Mannigfaltigkeit $(M, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ existiert genau ein affiner Zusammenhang D, so dass gilt:

(1) D ist symmetrisch

(2) D ist verträglich mit $\langle\cdot,\cdot\rangle$

Dieser eindeutige Zusammenhang D heißt Levi-Civita-Zusammenhang von M bezüglich $\langle\cdot,\cdot\rangle$.

Beweis
Wir nehmen an, dass ein solches D existiert. Was sind die Eigenschaften?

D verträglich:

$$X\langle Y, Z\rangle = \langle D_X Y, Z\rangle + \langle Y, D_X Z\rangle$$

Der Trick ist jetzt, die Gleichung zyklisch zu vertauschen:

$$\begin{aligned} Y\langle Z, X\rangle &= \langle D_Y Z, X\rangle + \langle Z, D_Y X\rangle \\ -Z\langle X, Y\rangle &= -\langle D_Z X, Y\rangle - \langle X, D_Z Y\rangle \end{aligned}$$

Summe der drei Gleichungen

$$X\langle Y, Z\rangle + Y\langle Z, X\rangle - Z\langle X, Y\rangle = \langle [X, Z], Y\rangle + \langle [X, Y], Z\rangle + 2\langle Z, D_Y X\rangle + \langle [Y, Z], X\rangle$$

Wir erhalten die Kozul-Formel

$$\langle Z, D_Y X\rangle = \frac{1}{2}\Big(X\langle Y, Z\rangle + Y\langle Z, X\rangle - Z\langle X, Y\rangle - \langle [X, Z], Y\rangle - \langle [X, Y], Z\rangle - \langle [Y, Z], X\rangle\Big) \quad (*)$$

Diese Formel zeigt, dass D eindeutig durch die Riemann'sche Struktur $\langle \cdot, \cdot\rangle$ bestimmt ist, denn seien D und $\tilde{D}$ zwei affine Zusammenhänge, die (1) und (2) erfüllen, dann gilt $(*)$ für beide, also $\langle Z, D_Y X\rangle = \langle Z, \tilde{D}_Y X\rangle$ für alle $X, Y, Z \in \mathcal{V}M$, was heißt dass $\langle D_Y X - \tilde{D}_Y X, Z\rangle = 0$, was heißt das $D_Y X - \tilde{D}_Y X = 0$. Also ist $D = \tilde{D}$.

Die Existenz folgt daraus, dass man D durch $(*)$ definieren kann. ∎

Lokale Form von D Gegeben eine Karte (U, φ) mit Basisfelder $X_i := \frac{\partial}{\partial x^i}$, $i = 1, \dots, n$, auf U. Wir haben $g_{ij} = \langle X_i, X_j\rangle$, $D_{X_i} X_j = \sum_{k=1}^n \Gamma_{ij}^k X_k$, $[X_i, X_j] = 0$. Kozulformel:

$$\langle X_k, D_{X_i} X_j\rangle = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} + 0\right) = \left\langle X_k, \sum_{l=1}^n \Gamma_{ij}^l X_l\right\rangle = \sum_{l=1}^n \Gamma_{ij}^l g_{kl}$$

(g_{kl}) hat inverse Matrix (g^{mk}). Damit

$$\Gamma_{ij}^m = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^n g^{mk}\left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\right).$$

Dieser Ausdruck zeigt nochmals: Levi-Civita-Zusammenhang ist eindeutig durch die Metrik bestimmt.

Beispiel
Im Euklidischer Raum ($\mathbb{R}^n$, Standardskalarprodukt) ist $g_{ij} = \delta_{ij}$, also $\Gamma_{ij}^k = 0$. Also: Der kanonische Zusammenhang ist der Levi-Civita-Zusammenhang.