

Kapitel 15

Konfidenzintervalle

Definition 15.1

Sei $\alpha \in (0, 1)$ fest vorgegeben. Ein Intervall der Form $[L(x), U(x)]$ mit messbaren Funktionen $L, U : \chi^n \rightarrow \Theta \subset \mathbb{R}$ heißt $(1 - \alpha)$ -**Konfidenzintervall**, falls $L(x) \leq U(x) \forall x \in \chi^n$ und $P_\theta(L \leq U) = 1$ mit $P_\theta(L \leq \theta \leq U) = 1 - \alpha$

Bemerkung 15.1

- (i) Sowohl Lage als auch Länge des Konfidenzintervalls hängen von der konkreten Stichprobe ab.
- (ii) Sei zum Beispiel $\alpha = 0.05$, dann enthält das Konfidenzintervall in 95% der Fälle den wahren Parameter.

Beispiel 15.1

Es sei $P_\theta = N(\theta, \sigma^2)$, σ^2 bekannt. Stichprobe X vom Umfang n .

Bestimme $(1 - \alpha)$ -Konfidenzintervall für θ .

Sei

$$z := \frac{\bar{X} - \theta}{\sigma}.$$

Unter P_θ gilt: $z \sim N(0, 1)$, (wegen Lemma 6.2, Bsp. 9.4). Wichtig: die Verteilung von z unter P_θ hängt nicht mehr von θ ab.

$$\Phi(c) - \Phi(-c) = P_\theta(-c \leq z \leq c) = P_\theta(\underbrace{X - \frac{c}{\sqrt{n}}\sigma}_{L(X)} \leq \theta \leq \underbrace{\bar{X} + \frac{c}{\sqrt{n}}\sigma}_{U(X)}) \stackrel{!}{=} 1 - \alpha$$

$$1 - \alpha = \Phi(c) - \Phi(-c) = \Phi(c) - (1 - \Phi(c)) = 2\Phi(c) - 1 \Rightarrow \Phi(c) = 1 - \frac{\alpha}{2}$$

Mit z_α bezeichnen wir im Folgenden das α -Quantil der Standardnormalverteilung.

Also: $\Phi(z_\alpha) = \alpha$. Wegen Symmetrie gilt: $z_\alpha = -z_{1-\alpha}$

$\Rightarrow z_{1-\frac{\alpha}{2}}$. Ein $(1 - \alpha)$ -Konfidenzintervall ist also:

$$\left[\bar{x} - \frac{z_{1-\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{n}}\sigma, \bar{x} + \frac{z_{1-\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{n}}\sigma \right]$$

Die ist ein Sonderfall. Die Länge des Konfidenzintervalls: $2 \cdot \frac{z_{1-\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{n}} \sigma$ und hängt nicht vom Zufall ab.

Beispiel 15.2 Es sei $P_\theta = B(m, \theta)$, $\Theta = [0, 1]$, $\chi = \mathbb{N}_0$, $n = 1$

$$\text{Beispiel 13.4: } P_\theta \left(\frac{X - m\theta}{\sqrt{m\theta(1-\theta)}} \leq x \right) \approx \Phi(x)$$

Dann gilt:

$$P_\theta \left(-c \leq \frac{X - m\theta}{\sqrt{m\theta(1-\theta)}} \leq c \right) \approx \Phi(c) - \Phi(-c) \stackrel{!}{=} 1 - \alpha \Rightarrow c = z_{1-\frac{\alpha}{2}}$$

Wir versuchen auf die Darstellung $L(x) \leq \theta \leq U(x)$ zu kommen:

$$\begin{aligned} -c \leq \frac{X - m\theta}{\sqrt{m\theta(1-\theta)}} \leq c &\Leftrightarrow |X - m\theta| \leq c\sqrt{m\theta(1-\theta)} \\ &\Leftrightarrow (X - m\theta)^2 \leq c^2 m\theta(1-\theta) \\ &\Leftrightarrow \theta^2(c^2 + m) - \theta(2X + c^2) + \frac{X^2}{m} \leq 0 \end{aligned}$$

Nullstellen der Parabel in θ :

$$\theta_{1/2} = \frac{1}{m + c^2} \left(X + \frac{c^2}{2} \pm c\sqrt{\frac{X(m-X)}{m} + \frac{c^2}{4}} \right)$$

Das heißt:

$$\begin{aligned} L(x) &= \frac{1}{m + (z_{\frac{\alpha}{2}})^2} \left(x + \frac{(z_{\frac{\alpha}{2}})^2}{2} + z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{x(m-x)}{m} + \frac{(z_{\frac{\alpha}{2}})^2}{4}} \right) \\ U(X) &= \frac{1}{m + (z_{\frac{\alpha}{2}})^2} \left(x + \frac{(z_{\frac{\alpha}{2}})^2}{2} - z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{x(m-x)}{m} + \frac{(z_{\frac{\alpha}{2}})^2}{4}} \right) \end{aligned}$$

In einer Klinik gab es im letzten Jahr 87827 Geburten, davon 45195 Jungen.

Gesucht: 0.99 - Konfidenzintervall für die Wahrscheinlichkeit, dass ein Neugeborenes männlich ist.

Hier: $m = 87827$, $x = 45195$, $\alpha = 0,01$

$$z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0,005} = -z_{0,995} = -z_{1-\frac{\alpha}{2}} = -2,576$$

Einsetzen: $[0,51091, 0,51961]$