

§ 18.

Differentialgleichungen: Grundbegriffe

In diesem Paragraphen seien I, J, \dots immer Intervalle in \mathbb{R} .

Erinnerung: Seien $p, k \in \mathbb{N}$. Eine Funktion $y = (y_1, \dots, y_p) : I \rightarrow \mathbb{R}^p$ heißt k -mal (stetig) db, genau dann wenn y_1, \dots, y_p k -mal auf I (stetig) db sind.

In diesem Fall ist $y^{(j)} = (y_1^{(j)}, \dots, y_p^{(j)})$ ($j = 1, \dots, k$).

Definition

Seien $n, p \in \mathbb{N}$, sei weiter $D \subseteq \mathbb{R} \times \underbrace{\mathbb{R}^p \times \dots \times \mathbb{R}^p}_{n+1 \text{ Faktoren}}$ und $F : D \rightarrow \mathbb{R}^p$ eine Funktion.

Eine Gleichung der Form:

$$F(x, y, \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (\text{i})$$

heißt eine **(gewöhnliche) Differentialgleichung (Dgl) n -ter Ordnung**.

Eine Funktion $y : I \rightarrow \mathbb{R}^p$ heißt eine **Lösung** (Lsg) von (i), genau dann wenn y auf I n -mal db, für alle $x \in I$, $(x, y(x), \dots, y^{(n)}(x)) \in D$ ist und gilt:

$$\forall x \in I : F(x, y(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0$$

Beispiele:

- (1) Sei $n = p = 1$, $F(x, y, z) = z + \frac{y}{x}$ und $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \neq 0\}$, dann ist die zugehörige Dgl:

$$y' + \frac{y}{x} = 0$$

Z.B. ist $y : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, y(x) = \frac{1}{x}$ eine Lösung der Dgl.

Weitere Lösungen sind:

$$y : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}, y(x) := 0$$

$$y : (-\infty, 0) \rightarrow \mathbb{R}, y(x) := \frac{3}{x}$$

- (2) Sei $n = 1, p = 2$ und folgende Dgl gegeben:

$$y' = \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y_2 \\ y_1 \end{pmatrix}$$

Dann ist $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, y(x) := (\cos x, \sin x)$ eine Lösung der Dgl.

Definition

Seien $n, p \in \mathbb{N}$, $D \subseteq \mathbb{R} \times \underbrace{\mathbb{R}^p \times \dots \times \mathbb{R}^p}_{n \text{ Faktoren}}$ und $f : D \rightarrow \mathbb{R}^p$.

Eine Gleichung der Form:

$$y^{(n)} = f(x, y, \dots, y^{(n-1)}) \quad (\text{ii})$$

heißt **explizite Differentialgleichung n -ter Ordnung**.

(hier gilt: $F(x, y, \dots, y^{(n)}) = y^{(n)} - f(x, y, \dots, y^{(n-1)})$)

Definition

Seien p, n, D und f wie oben. Weiter sei $(x_0, y_0, \dots, y_{n-1}) \in D$ fest.

Dann heißt:

$$\begin{cases} y^{(n)} = f(x, y, \dots, y^{(n-1)}) \\ y(x_0) = y_0, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1} \end{cases} \quad (\text{iii})$$

ein **Anfangswertproblem** (AwP).

Eine Funktion $y : I \rightarrow \mathbb{R}^p$ heißt eine **Lösung** des AwP (iii), genau dann wenn y eine Lösung von (ii) ist und gilt:

$$y(x_0) = y_0, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$$

Das AwP heißt **eindeutig lösbar**, genau dann wenn (iii) eine Lösung hat und für je zwei Lösungen $y : I \rightarrow \mathbb{R}^p, \tilde{y} : J \rightarrow \mathbb{R}^p$ von (iii) gilt:

$$\forall x \in I \cap J : y(x) = \tilde{y}(x)$$

(Beachte: $x_0 \in I \cap J$)

Beispiele:

(1) Sei $n = p = 1$ und das folgende AwP gegeben:

$$\begin{cases} y' = 2\sqrt{|y|} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Dann sind:

$$\begin{aligned} y : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2 \\ y : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto 0 \end{aligned}$$

Lösungen des AwP.

(2) Sei $n = p = 1$ und das folgende AwP gegeben:

$$\begin{cases} y' = y \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Dann ist:

$$y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto e^x$$

eine Lösung des AwP. In §19 werden wir sehen, dass dieses AwP eindeutig lösbar ist.