

# 1 Komplexe Differenzierbarkeit

## 1.1 Grundlegendes

### 1.1.1 Vorbemerkungen zu $\mathbb{C}$

Wir fassen  $\mathbb{R}^2$  als Körper  $\mathbb{C}$  auf, indem wir  $z = (x, y)$ ,  $w = (u, v) \in \mathbb{R}^2$  wie folgt verknüpfen:

$$z + w = \begin{pmatrix} x + u \\ y + v \end{pmatrix}, \quad z \cdot w = zw = \begin{pmatrix} xu - yv \\ yu + xv \end{pmatrix}.$$

Wir fassen  $\mathbb{R}$  als Teilmenge von  $\mathbb{C}$  auf, indem wir  $x \in \mathbb{R}$  mit  $(x, 0) \in \mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$  identifizieren.

Beachte:  $(0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0)$ . Mit  $i := (0, 1)$  folgt also

$$i^2 = -1.$$

Schreibe also

$$z = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = x + iy,$$

hierbei sei stets  $x, y \in \mathbb{R}$ .

Sei weiter  $w = u + iv$  ( $u, v \in \mathbb{R}$ ). Dann:

$$zw = (x + iy)(u + iv) = xu + i^2 yv + ixv + iyu = (xu - yv) + i(yu + xv).$$

Setze  $\operatorname{Re} z := x$  (Realteil),  $\operatorname{Im} z := y$  (Imaginärteil), wenn  $z = x + iy$  mit  $x, y \in \mathbb{R}$ . Real- und Imaginärteil sind eindeutig bestimmt. Das Konjugiert-Komplexe ist  $\bar{z} := x - iy$ . Damit ist

$$\operatorname{Re} z = \frac{1}{2}(z + \bar{z}), \quad \operatorname{Im} z = \frac{1}{2i}(z - \bar{z}), \quad \overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}, \quad \overline{zw} = \bar{z} \cdot \bar{w}.$$

Der komplexe Betrag ist

$$|z| := \sqrt{x^2 + y^2} = \left| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right|_2,$$

also gilt:  $|z|^2 = x^2 + y^2 = z \cdot \bar{z}$ .

Es gelten:

$$|\operatorname{Re} z|, |\operatorname{Im} z| \leq |z| \leq \sqrt{2} \max\{|\operatorname{Re} z|, |\operatorname{Im} z|\} \quad (1.1)$$

sowie:

$$|z| = 0 \iff z = 0, \quad |wz| = |w||z|, \quad |w + z| \leq |w| + |z| \quad (\forall w, z \in \mathbb{C}).$$

**Polarkoordinaten:** Für  $\phi, \psi \in \mathbb{R}$  setze

$$e^{i\phi} := \begin{pmatrix} \cos \phi \\ \sin \phi \end{pmatrix} = \cos \phi + i \sin \phi.$$

Es gelten nach Ana 1:

$$e^{i\phi} e^{i\psi} = e^{i(\phi+\psi)}, \quad e^{i0} = 1, \quad |e^{i\phi}| = 1, \quad e^{i(\phi+2k\pi)} = e^{i\phi} \quad (\forall k \in \mathbb{Z}).$$

Sei  $z \in \mathbb{C}$ . Dann gilt (für  $z \neq 0$ ):

$$z = r \begin{pmatrix} \cos \phi \\ \sin \phi \end{pmatrix} = r e^{i\phi} \quad (= x + iy),$$

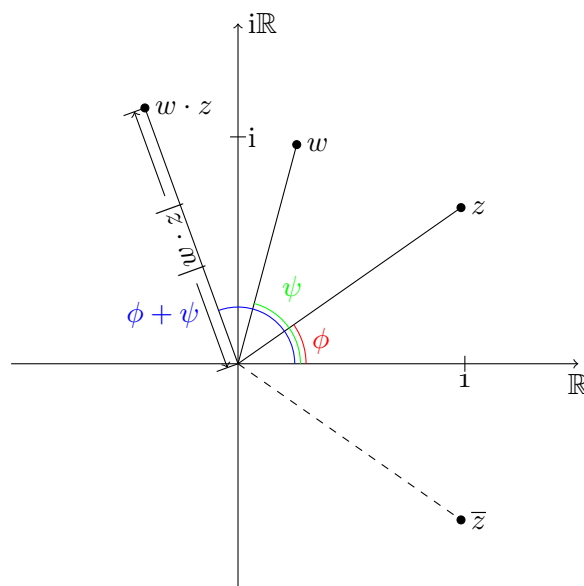
wobei  $r$  der Abstand von  $z$  zum Nullpunkt, also  $|z|$ , ist und

$$\phi = \arg z = \angle \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) \in (-\pi, \pi], \quad \phi = \begin{cases} \text{sign}(y) \arccos \frac{x}{r}, & z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_- \\ \pi, & z \in (-\infty, 0). \end{cases}$$

Sei weiter  $w = s e^{i\psi}$  ( $s \geq 0$ ). Dann

$$wz = s e^{i\psi} r e^{i\phi} = r s e^{i(\phi+\psi)}.$$

Also entspricht die komplexe Multiplikation der Multiplikation der Beträge und Addition der Winkel (mod  $2\pi$ ). Somit ist  $z \mapsto wz$  für jedes feste  $w$  eine *Drehstreckung*.

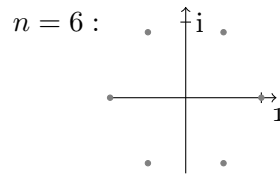


**Einheitswurzeln:** Sei  $n \in \mathbb{N}$  fest. Sei  $z^n = 1$  für  $z = r e^{i\phi} \in \mathbb{C}$ . Dann gilt:  $1 = |1| = |z|^n = r^n$ , also  $r = 1$ . Folglich:

$$1 = \left( e^{i\phi} \right)^n = e^{in\phi} = \cos(n\phi) + i \sin(n\phi).$$

Der Vergleich von Real- und Imaginärteil liefert  $n\phi = 2\pi k$  für ein  $k \in \mathbb{Z}$ . Es gilt also:

$$z^n = 1 \iff z = e^{i \frac{2\pi k}{n}}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$



Ferner: Für  $z_n, z \in \mathbb{C}$  sagen wir, dass  $z_n \rightarrow z$  ( $n \rightarrow \infty$ ), wenn

$$|z - z_n| \rightarrow 0 \stackrel{(1.1)}{\iff} \operatorname{Re} z_n \rightarrow \operatorname{Re} z \text{ und } \operatorname{Im} z_n \rightarrow \operatorname{Im} z \quad (n \rightarrow \infty).$$

Somit haben  $\mathbb{R}^2$  und  $\mathbb{C}$  den gleichen Konvergenzbegriff und außerdem die gleichen offenen und abgeschlossenen Kugeln:

$$B(z_0, r) := \{z \in \mathbb{C} : |z_0 - z| < r\},$$

$$\overline{B}(z_0, r) := \{z \in \mathbb{C} : |z_0 - z| \leq r\}, \quad (\forall z_0 \in \mathbb{C}, r > 0).$$

Sei  $M \subseteq \mathbb{C}$ . Betrachte  $z = x + iy \in M$  als  $z = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  mit  $x = \operatorname{Re} z$ ,  $y = \operatorname{Im} z$ . Sei  $f: M \rightarrow \mathbb{C}$ . Setze

$$u(x, y) = \operatorname{Re} f(x, y), \quad v(x, y) = \operatorname{Im} f(x, y).$$

Also:

$$f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y) = \begin{pmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{pmatrix}.$$

Somit ist  $f: M \rightarrow \mathbb{C}$  genau dann stetig (d.h.  $z_n \rightarrow z$  (in  $M$ )  $\implies f(z_n) \rightarrow f(z)$ ), wenn  $u, v: M \rightarrow \mathbb{R}$  stetig sind.

**Fazit:** Konvergenz, Offenheit, Abgeschlossenheit, Kompaktheit, Stetigkeit, etc. sind in  $\mathbb{R}^2$  und  $\mathbb{C}$  gleich.

### 1.1.2 Komplexe Differenzierbarkeit

Stets sei  $D \subseteq \mathbb{C}$  offen und nichtleer, das heißt:

$$\forall z \in D \exists r = r(z) > 0 \text{ mit } B(z, r) \subseteq D \implies \overline{B}(z, \frac{r}{2}) \subseteq D.$$

**Definition 1.1.** Eine Funktion  $f: D \rightarrow \mathbb{C}$  heißt (*komplex*) *differenzierbar* in  $z_0 \in D$ , wenn

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} =: f'(z_0)$$

existiert. Dann heißt  $f'(z_0)$  die *Ableitung* von  $f$  bei  $z_0$ . Wenn  $f$  bei allen  $z_0 \in D$  komplex differenzierbar ist, dann heißt  $f$  *holomorph*. Wir schreiben dann  $f \in H(D)$ . Iterativ definiert man höhere Ableitungen.

**Bemerkung 1.2.** (a) Offenbar sind die Funktionen  $f(x) = 1$ ,  $g(z) = z$  auf  $\mathbb{C}$  holomorph mit  $f'(z) = 0$ ,  $g'(z) = 1$ .

(b) Genau wie in Analysis 1 zeigt man: Seien  $f, g: D \rightarrow \mathbb{C}$  in  $z \in D$  differenzierbar und  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ . Dann sind auch  $\alpha f + \beta g$ ,  $f \cdot g$  und  $\frac{1}{f}$  (wenn  $f(z) \neq 0$ ) in  $z$  differenzierbar und es gelten die bekannten Regeln. Ebenso gilt die Kettenregel.

(c) Polynome  $p$  sind auf  $\mathbb{C}$  und rationale Funktionen  $f = \frac{p}{q}$  mit einem Polynom  $q \neq 0$  sind auf  $\{z \in \mathbb{C} : q(z) \neq 0\}$  holomorph mit den reellen Formeln für  $p'$ ,  $f'$ .

**Erinnerung an Analysis 1:** Gegeben seien  $a_n \in \mathbb{C}$  ( $n \in \mathbb{N}_0$ ) und ein  $c \in \mathbb{C}$ . Die Potenzreihe

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - c)^n$$

konvergiert absolut für alle  $z$  mit

$$|z - c| < \rho := \left( \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} \right)^{-1} \in [0, \infty]$$

und divergiert, falls  $z \notin \overline{B}(c, \rho)$ .

Reduktion auf  $c = 0$ : Betrachte

$$h(w) := f(c + w) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n w^n,$$

wobei  $w = z - c \in B(0, \rho)$ ,  $z = c + w$ .

**Satz 1.3** (vgl. Analysis 1, Theorem 4.12). *Sei*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - c)^n, \quad z \in B(c, \rho),$$

eine Potenzreihe mit Konvergenzradius  $\rho > 0$ . Dann ist  $f \in H(B(c, \rho))$  und

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z - c)^{n-1} =: g(z) \quad (\forall z \in B(c, \rho)),$$

wobei die Potenzreihe  $g$  den gleichen Konvergenzradius  $\rho$  hat.

Sei  $m \in \mathbb{N}$ . Iterativ folgt:

$$\exists f^{(m)}(z) = \sum_{n=m}^{\infty} n \cdot \dots \cdot (n - m + 1) a_n (z - c)^{n-m}, \quad \forall z \in B(c, \rho).$$

*Beweis.* Wie in Analysis 1 zeigt man:  $g$  hat Konvergenzradius  $\rho$ . Sei oBdA  $c = 0$ .

Seien  $z \in B(0, \rho)$ ,  $\varepsilon > 0$ ,  $r > 0$  mit  $|z| < r < \rho$ . Sei  $w \in \overline{B}(0, r)$  mit  $w \neq z$ .

Da  $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n r^{n-1}$  absolut konvergiert, existiert ein  $N = N_{\varepsilon} \in \mathbb{N}$  mit

$$0 \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} n |a_n| r^{n-1} \leq \varepsilon. \quad (*)$$

Ferner:

$$0 \leq d(w) := \left| \frac{f(w) - f(z)}{w - z} - g(z) \right| = \left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n \underbrace{\left( \frac{w^n - z^n}{w - z} - n z^{n-1} \right)}_{=: p_n(w)} \right|$$

mit  $p_n(w) = w^{n-1} + z w^{n-2} + \dots + z^{n-1} - n z^{n-1}$ . Dabei gelten:

- $p_n(w) \rightarrow 0$ ,  $w \rightarrow z$  (für jedes feste  $n \in \mathbb{N}$ )
- $|p_n(w)| \leq r^{n-1} + r r^{n-2} + \dots + r^{n-1} + n r^{n-1} = 2 n r^{n-1}$  (\*\*)

Damit folgt:

$$0 \leq d(w) \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| |p_n(w)| \stackrel{(**)}{\leq} \sum_{n=1}^N |a_n| |p_n(w)| + \sum_{n=N+1}^{\infty} 2n |a_n| r^{n-1} \\ \stackrel{(*)}{\leq} N \max\{|a_1| |p_1(w)|, \dots, |a_N| |p_N(w)|\} + 2\varepsilon \rightarrow 2\varepsilon \quad (w \rightarrow z) \quad (N = N_\varepsilon \text{ fest!})$$

$\implies \lim_{w \rightarrow z} d(w) \leq 2\varepsilon$ . Da  $\varepsilon > 0$  beliebig war, folgt  $\lim_{w \rightarrow z} d(w) = 0$ .  $\square$

**Beispiele** mit  $\rho = \infty$ .

$$(a) \exp(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad \exp'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{(n-1)!} = \exp(z).$$

$$(b) \sin(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}, \quad \sin'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n} = \cos(z).$$

$$(c) \cos(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}, \\ \cos'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n-1)!} z^{2n-1} \stackrel{l=n-1}{=} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^{l+1}}{(2l+1)!} z^{2l+1} = -\sin(z).$$

Seien  $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $z_0 \in D$ ,  $z \in D$ . Setze wieder  $u = \operatorname{Re} f$ ,  $v = \operatorname{Im} f$ ,  $x_0 = \operatorname{Re} z_0$ ,  $y_0 = \operatorname{Im} z_0$ , also

$$f(x, y) = u(x, y) + i v(x, y) = \begin{pmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{pmatrix}.$$

Sei  $z \neq z_0$  und  $f$  bei  $z_0$  komplex differenzierbar. Dann gilt:

$$\frac{1}{|z - z_0|} |f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)| = \left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - f'(z_0) \right| \longrightarrow 0, \quad z \rightarrow z_0.$$

Die Zahl  $f'(z_0) \in \mathbb{C}$  kann als  $\mathbb{C}$ -lineare Abbildung  $w \mapsto f'(z_0)w$  aufgefasst werden. Diese ist dann auch  $\mathbb{R}$ -linear auf  $\mathbb{R}^2$ , kann also durch eine reelle  $2 \times 2$ -Matrix dargestellt werden. Nach Analysis 2 ist nun  $f$  in  $z_0 = (x, y)$  reell differenzierbar und somit existieren die partiellen Ableitungen von  $u$  und  $v$  und es gilt

$$f'(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) \end{pmatrix}. \quad (+)$$

**Satz 1.4.** Sei  $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $z_0 = x_0 + iy_0 \in D$ . Dann sind äquivalent:

- (a)  $f$  ist in  $z_0$  komplex differenzierbar.
- (b)  $f$  ist in  $z_0$  reell differenzierbar und es gelten die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0), \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0). \quad (\text{CR})$$

Insbesondere ist  $f'(z_0)$  schiefsymmetrisch.

*Beweis.* Die letzte Behauptung folgt aus (+) und (CR)<sub>2</sub>.

(a)  $\implies$  (b): Sei  $r > 0$  mit  $B(z_0, r) \subseteq D$ ,  $t \in \mathbb{Q}$  mit  $0 < |t| < r$ . Dann gelten

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (f(z_0 + t) - f(z_0)) \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \left( \frac{1}{t} (u(x_0 + t, y_0) - u(x_0, y_0)) + \frac{i}{t} (v(x_0 + t, y_0) - v(x_0, y_0)) \right) \\ &= \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) \end{aligned} \quad (1.2)$$

und

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{it} (f(z_0 + it) - f(z_0)) \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \left( -i \frac{1}{t} (u(x_0, y_0 + t) - u(x_0, y_0)) + \frac{i}{it} (v(x_0, y_0 + t) - v(x_0, y_0)) \right) \\ &= -i \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) + \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0). \end{aligned} \quad (1.3)$$

Vergleichen von Real- und Imaginärteil liefert (CR).

(b)  $\implies$  (a): Setze

$$w = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) \stackrel{(\text{CR})}{=} \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) - i \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) \in \mathbb{C}.$$

Dann gilt:

$$w(z - z_0) = (\operatorname{Re} w)(x - x_0) - (\operatorname{Im} w)(y - y_0) + i((\operatorname{Re} w)(y - y_0) + (\operatorname{Im} w)(x - x_0))$$

$$\stackrel{\text{Def. } w}{=} \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) \\ \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) + \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) \end{pmatrix} \quad (\text{in } \mathbb{R}^2).$$

$$\begin{aligned} \implies |f(z) - f(z_0) - w(z - z_0)| &= \frac{1}{|z - z_0|} \\ &= \left| \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} \right|_2^{-1} \left| \begin{pmatrix} u(x, y) - u(x_0, y_0) - \left( \nabla u(x_0, y_0) \mid \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} \right) \\ v(x, y) - v(x_0, y_0) - \left( \nabla v(x_0, y_0) \mid \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} \right) \end{pmatrix} \right|_2 \rightarrow 0, \end{aligned}$$

für  $(x_0, y_0) = z_0 \rightarrow z = (x, y)$ , da  $u, v$  differenzierbar.  $\square$

**Beispiel 1.5.** (a)  $f(z) = \bar{z}$ ,  $z \in \mathbb{C}$ , ist nirgends komplex differenzierbar, obwohl  $f(x, y) = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}$  reell  $C^\infty$  ist. Denn  $u(x, y) = x$ ,  $v(x, y) = -y$ ; also

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = 1 \neq -1 = \frac{\partial v}{\partial y}(x, y),$$

was (CR)<sub>1</sub> widerspricht.

(b)  $f(z) = |z|^2 = x^2 + y^2$ ,  $z \in \mathbb{C}$ , ist nur in  $z = 0$  komplex differenzierbar, denn hier ist  $u(x, y) = x^2 + y^2$ ,  $v(x, y) = 0$  und somit:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = 2x \stackrel{!}{=} \frac{\partial v}{\partial y}(x, y) = 0 \iff x = 0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = 2y \stackrel{!}{=} -\frac{\partial v}{\partial x}(x, y) = 0 \iff y = 0.$$

$$(c) \quad f(z) = \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \underbrace{\frac{x}{x^2+y^2}}_{=u} + i \underbrace{\frac{-y}{x^2+y^2}}_{=v} \text{ ist holomorph f\"ur } z \neq 0 \text{ (Bem. 1.2).}$$

**Bemerkung 1.6.** Sei  $f$  in  $z = x + iy$  komplex differenzierbar. Nach (+) und (CR) gilt:

$$A := f'(z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) \\ -\frac{\partial u}{\partial y}(x, y) & \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v}{\partial y}(x, y) & -\frac{\partial v}{\partial x}(x, y) \\ \frac{\partial v}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial v}{\partial y}(x, y) \end{pmatrix}. \quad (1.4)$$

Also gilt  $\rho := \det A = \frac{\partial u}{\partial x}(x, y)^2 + \frac{\partial u}{\partial y}(x, y)^2 = \frac{\partial v}{\partial x}(x, y)^2 + \frac{\partial v}{\partial y}(x, y)^2 \geq 0$  und  
 $f'(z) \neq 0 \iff \det A > 0$ . Ferner ist  $A^T A = (\det A)I$ . Sei  $f'(z) \neq 0$ . Dann gilt

$$\frac{1}{\sqrt{\rho}} A \text{ orthogonal} \quad (*)$$

$$\implies |Av|_2 = \sqrt{\rho} |v|_2 \quad (\forall v \in \mathbb{R}^2). \quad (**)$$

Sei  $\gamma_j \in C^1((-1, 1), \mathbb{R}^2)$  eine Kurve in  $D$  mit  $\gamma_j(0) = (x, y)$ ,  $\gamma_j'(0) =: v_j \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  ( $j = 1, 2$ ). Dann ist  $Av_j = f'(x, y)\gamma_j'(0) = (f \circ \gamma_j)'(0)$  ein Tangentenvektor der Bildkurve  $f \circ \gamma_j$  bei  $f(x, y)$  ( $j = 1, 2$ ). Weiter gilt:

$$\frac{(v_1 | v_2)}{|v_1|_2 |v_2|_2} \stackrel{(*), (**)}{=} \frac{\frac{1}{\rho}(Av_1 | Av_2)}{\frac{1}{\rho}|Av_1|_2 |Av_2|_2},$$

woraus durch Anwenden des Arcuscosinus folgt:  $\angle(v_1, v_2) = \angle(Av_1, Av_2)$  (Winkel ohne Orientierung).

Also ist der Winkel der Urbildtangente gleich dem Winkel der Bildtangente unter  $f$ . Falls also  $f'(z) \neq 0$ , dann ist  $f$  bei  $z = x + iy$  *winkeltreu* („konform“). Ferner ist  $f$  orientierungstreu, da  $\det A > 0$ .

**Definition 1.7.** Seien  $U, V \subseteq \mathbb{C}$  offen und nichtleer. Sei  $f: U \rightarrow V$  bijektiv und  $f \in H(U)$ ,  $f^{-1} \in H(V)$ . Dann heißt  $f$  *biholomorph*. (Dann heißen  $U$  und  $V$  auch „konform quivalent“.)

**Satz 1.8.** (a) Seien  $U, V \subseteq \mathbb{C}$  offen und nichtleer,  $f: U \rightarrow V$  biholomorph. Dann ist  $f'(z) \neq 0$  fur alle  $z \in U$  und es gilt

$$(f^{-1})'(f(z)) = (f^{-1})'(w) = \frac{1}{f'(f^{-1}(w))} = \frac{1}{f'(z)} \quad (\forall z \in U, \forall w = f(z) \in V).$$

(b) Seien  $f \in H(D) \cap C^1(D, \mathbb{R}^2)$ ,  $z_0 \in D$ ,  $f'(z_0) \neq 0$ . Dann existieren offene  $U, V \subseteq \mathbb{C}$  mit  $z_0 \in U$ ,  $f(z_0) \in V$ , sodass  $f: U \rightarrow V$  biholomorph ist. Somit ist a) auf  $f$  fur alle  $z \in U$  und  $w = f(z) \in V$  anwendbar.

*Beweis.* (a) Nach Bem. 1.2 und  $z = f^{-1}(f(z))$  ( $\forall z \in U$ ) folgt  $1 = (f^{-1})'(f(z))f'(z)$ . Durchdividieren ergibt Behauptung a).

(b) Nach Bem. 1.6 ist  $f'(z_0)$  als  $2 \times 2$ -Matrix invertierbar. Der Umkehrsatz aus Analysis 2 liefert Behauptung b).  $\square$

**Definition.** Eine Funktion  $u \in C^2(D, \mathbb{R})$  heißt *harmonisch* auf  $D$ , wenn fur alle  $(x, y) \in D$  gilt:

$$\Delta u(x, y) := \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) = 0.$$

**Satz 1.9.** (a) Sei  $f \in H(D) \cap C^2(D, \mathbb{R}^2)$ . Dann sind  $u = \operatorname{Re} f$ ,  $v = \operatorname{Im} f$  harmonisch auf  $D$ .  
 (b) Sei  $u \in C^2(D, \mathbb{R})$  auf  $D$  harmonisch,  $B_0 := B((x_0, y_0), r) \subseteq D$  für ein  $r > 0$ ,  $(x_0, y_0) \in D$ . Dann existiert ein  $f \in H(B_0)$  mit  $u = \operatorname{Re} f$ .

*Beweis.* (a) Der Satz von Schwarz aus Analysis 2 (Satz 2.21) liefert

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \stackrel{(\text{CR})}{=} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} = 0.$$

(b) Setze für  $(x, y) \in B_0$

$$v(x, y) = - \int_{x_0}^x \frac{\partial u}{\partial y}(s, y_0) \, ds + \int_{y_0}^y \frac{\partial u}{\partial x}(x, s) \, ds.$$

Beachte: die Strecken von  $(x_0, y_0)$  nach  $(x, y_0)$  und von  $(x, y_0)$  nach  $(x, y)$  liegen in  $B_0$ . Analysis 1 und 2 liefern:  $v \in C^1(B_0)$  und

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial x}(x, y) &= - \frac{\partial u}{\partial y}(x, y_0) + \int_{y_0}^y \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, s) \, ds && \text{Beachte hier: } \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, s) = - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, s) \\ &= - \frac{\partial u}{\partial y}(x, y_0) - \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) + \frac{\partial u}{\partial y}(x, y_0) = - \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) \end{aligned}$$

$\implies (\text{CR})_2$ . Ferner  $\frac{\partial v}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) \implies (\text{CR})$  gilt. Mit Satz 1.4 folgt:  $f = u + iv$  ist auf  $B_0$  holomorph.  $\square$

**Beispiel.** Sei  $f(z) = z^3 = (x + iy)^3 = x^3 + 3ix^2y - 3xy^2 - iy^3$ . Satz 1.9 liefert:  $u(x, y) = \operatorname{Re} f(x, y) = x^3 - 3xy^2$  ist harmonisch auf  $\mathbb{C}$ .

## 1.2 Elementare Funktionen

### 1.2.1 Möbiustransformationen

Sei  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \operatorname{M}_{22}(\mathbb{C})$  mit  $\det A = ad - bc \neq 0$  (dann ist  $c \neq 0$  oder  $d \neq 0$ ). Setze

$$m_A(z) = \frac{az + b}{cz + d} \quad \text{für } z \in D_A := \begin{cases} \mathbb{C} \setminus \{-\frac{d}{c}\}, & c \neq 0, \\ \mathbb{C}, & c = 0. \end{cases}$$

$m_A$  heißt *Möbius-Transformation*. Offensichtlich ist  $m_A \in H(D_A)$ .

**Eigenschaften:** Sei  $A$  wie oben und  $\tilde{A} = \begin{pmatrix} \tilde{a} & \tilde{b} \\ \tilde{c} & \tilde{d} \end{pmatrix} \in \operatorname{M}_{22}(\mathbb{C})$  mit  $\det \tilde{A} \neq 0$ .

(a) Es gilt

$$m_A(z) = z \quad (\forall z \in D_A) \iff A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \quad \text{für ein } a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$



*Beweis.* „ $\Leftarrow$ “: einsetzen! „ $\Rightarrow$ “: Für alle  $z \in D$  gilt:

$$m_A(z) = z \implies cz^2 + (d-a)z - b = 0 \quad (\forall z \in D_A)$$

$$\implies c = 0, d = a, b = 0 \implies A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}. \quad \square$$

(b) Für alle  $\alpha \in \mathbb{C}$  gilt  $m_{\alpha A} = m_A$ .

(c) Es gilt  $m_A(m_{\tilde{A}}(z)) = m_{A\tilde{A}}(z)$  (soweit alles definiert).

*Beweis.* Für passende  $z$ :

$$m_A(m_{\tilde{A}}(z)) = \frac{a \frac{\tilde{a}z + \tilde{b}}{\tilde{c}z + \tilde{d}} + b}{c \frac{\tilde{a}z + \tilde{b}}{\tilde{c}z + \tilde{d}} + d} = \frac{(a\tilde{a} + b\tilde{c})z + (a\tilde{b} + b\tilde{d})}{(c\tilde{a} + d\tilde{c})z + (c\tilde{b} + d\tilde{d})} = m_{A\tilde{A}}(z). \quad \square$$

(d) Es gilt:  $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ . Damit folgt:  $D_{A^{-1}} = \begin{cases} \mathbb{C} \setminus \{\frac{a}{c}\}, & c \neq 0, \\ \mathbb{C}, & c = 0. \end{cases}$

Man zeigt leicht, dass gilt:

$$m_A(D_A) \subseteq D_{A^{-1}}, \quad (*)$$

$$m_{A^{-1}}(D_{A^{-1}}) \subseteq D_A. \quad (**)$$

Also folgt aus c):  $m_A(D_A) = D_{A^{-1}}$  (wende auf (\*\*)  $m_A$  an),  $m_{A^{-1}}(D_{A^{-1}}) = D_A$  (wende auf (\*)  $m_{A^{-1}}$  an) und  $(m_A)^{-1} = m_{A^{-1}}$ .

Insbesondere sind  $m_A: D_A \rightarrow D_{A^{-1}}$ ,  $m_{A^{-1}}: D_{A^{-1}} \rightarrow D_A$  biholomorph.

(e) Sei  $c = 0$  (also  $d \neq 0$ ). Dann ist  $m_A(z) = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d}$  eine affine Abbildung, also  $m_A = T \circ S$  mit  $Tw = w + \frac{d}{a}$  (Translation) und  $Sw = \frac{a}{d}w$  (Drehstreckung). Sei nun  $c \neq 0$ . Dann gilt  $m_A = A_2 \circ J \circ A_1$ , wobei  $A_1w = cw + d$ ,  $A_2w = \frac{a}{c} - \frac{ad-bc}{c}w$  (affin) und  $Jw = \frac{1}{w}$  ( $w \neq 0$ ) (Inversion).

*Beweis.* Es gilt  $\frac{az+b}{cz+d} = \frac{a}{c} - \frac{ad-bc}{c} \frac{1}{cz+d} = A_2(J(A_1(z)))$ .  $\square$

Fasse jede Gerade in  $\mathbb{C}$  als verallgemeinerten Kreis über  $\infty$  auf. Also ist ein verallgemeinerter Kreis  $K$  entweder eine Gerade oder eine echte Kreislinie. Beachte:  $K$  wird durch die Angabe dreier verschiedener Punkte in  $\mathbb{C}_\infty$  eindeutig bestimmt.

(f) Jede Möbiustransformation bildet einen verallgemeinerten Kreis bijektiv auf einen verallgemeinerten Kreis ab.

*Beweis.* Nach 1.9(e) ist die Behauptung nur für Translationen  $T$ , Drehstreckungen  $S$  und die Inversion  $J$  zu zeigen. Klar:  $T, S$  sind „verallgemeinert kreistreu“.

Zu  $J$ : Sei  $r > 0$ ,  $z_0 \in \mathbb{C}$ . Dann:

$$z \in K := \partial B(z_0, r) \iff r^2 = |z - z_0|^2 = (z - z_0)(\bar{z} - \bar{z}_0) = |z|^2 - z_0\bar{z} - \bar{z}_0z + |z_0|^2.$$

Damit:

$$K = \{z \in \mathbb{C} : \alpha|z|^2 + c\bar{z} + \bar{c}z + \delta = 0\} \quad (*)$$

für feste  $\alpha, \delta \in \mathbb{R}$ ,  $c \in \mathbb{C}$  mit  $|c|^2 > \alpha\delta$ , wobei  $z_0 = -\frac{c}{\alpha}$ ,  $r^2 = \frac{|c|^2}{\alpha^2} - \frac{\delta}{\alpha}$ , falls  $\alpha \neq 0$ .

$\rightsquigarrow$  Für  $\alpha \neq 0$  beschreibt  $(*)$  die echte Kreislinie  $\partial B(z_0, r)$ . Für  $\alpha = 0$  beschreibt  $(*)$  die Gerade  $\operatorname{Re}(\bar{c}z) = -\frac{\delta}{2}$  (Beachte:  $c \neq 0$ ). Multipliziere  $(*)$  mit  $\frac{1}{|z|^2}$ . Dann erfüllt  $w = Jz = \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$  die Gleichung:

$$0 = \underbrace{\alpha}_{=: \delta'} + \underbrace{c}_{=: -\bar{c}'} w + \underbrace{\bar{c}}_{=: -c'} \bar{w} + \underbrace{\delta}_{=: \alpha'} |w|^2.$$

Weiter gilt:  $|c'|^2 - \alpha'\delta' = |c|^2 - \alpha\delta > 0$ . Wenn  $K$  durch  $(*)$  beschrieben wird, dann folgt also  $J(K) \subseteq K'$ , wobei  $K'$  ein verallgemeinerter Kreis ist. Genauso:  $J(K') \subseteq K$ . Da  $J^2 = \operatorname{id}$  folgt  $K' = J^2(K') \subseteq J(K) \implies J(K) = K'$ .  $\square$

**Definition 1.10.** Setze  $\mathbb{C}_\infty = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ ,  $\mathbb{R}_\infty = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ , wobei gelten soll:

$$\begin{aligned} \forall z \in \mathbb{C} : z\infty &= \infty + z = \infty, \quad \frac{z}{\infty} = 0, \\ \forall z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : z \cdot \infty &= \infty \cdot z = \infty, \quad \frac{z}{0} = \infty. \end{aligned}$$

**Verboten:**  $0 \cdot \infty, \infty \cdot 0, \frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$ .

Wir schreiben  $z_n \rightarrow \infty$ , wenn  $|z_n| \rightarrow +\infty$  ( $n \rightarrow +\infty$ ).

Beachte: Dieses  $\infty$  ist ein anderes als  $\pm\infty$  in  $\mathbb{R}$  aus Analysis 1.

Setze bezüglich dieser „Konvergenz“  $m_A$  „stetig“ fort durch

$$m_A(\infty) := \begin{cases} \frac{a}{c}, & c \neq 0 \\ \infty, & c = 0 \end{cases}.$$

Beachte:

$$m_A(z) = \frac{a + \frac{b}{z}}{c + \frac{d}{z}} \quad (z \neq 0), \quad m_A\left(-\frac{d}{c}\right) = \infty$$

(beachte:  $-\frac{ad}{c} + b \neq 0$ , da  $\det A \neq 0$ ).

Mit etwas Rechnung folgt:  $m_A: \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{C}_\infty$  ist bijektiv mit  $(m_A)^{-1} = m_{A^{-1}}: \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{C}_\infty$ .

Sei  $\mathcal{M} := \{m_A: \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{C}_\infty \mid \det A \neq 0\}$ . Mit obigen Eigenschaften (und etwas Rechnung bezüglich  $\infty$ ) folgt:

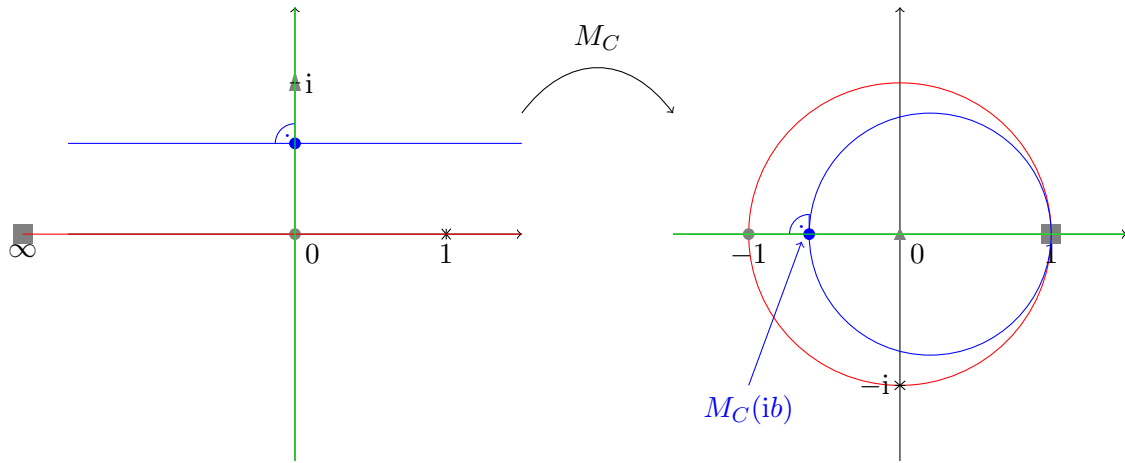
- $\mathcal{M}$  ist eine Gruppe bezüglich der Komposition.
- $\Phi: \operatorname{GL}(2, \mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{M}$ ,  $A \mapsto m_A$  ist ein surjektiver Gruppenhomomorphismus mit  $\operatorname{Kern}\Phi = \{\alpha I \mid \alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}\}$ .

**Beispiel 1.11** (Cayley-Transformation). Sei  $C = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix}$  ( $\rightsquigarrow \det C = 2i \neq 0$ )  $\rightsquigarrow M_C(z) = \frac{z - i}{z + i}$ .

Dabei:  $M_C(-i) = \frac{-2}{0} = \infty$ ,  $M_C(\infty) = \frac{1 - \frac{i}{\infty}}{1 + \frac{i}{\infty}} = 1$ . Weiter:  $M_C(0) = -1$ ,  $M_C(1) = \frac{1 - i}{1 + i} = -i$ .

Durch  $\{0, 1, \infty\}$  läuft der verallgemeinerte Kreis  $\mathbb{R}_\infty = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ . Nach verläuft der Bildkreis  $M_C(\mathbb{R}_\infty)$  durch die Bilder  $-1, -i, 1$ . Dies ist  $\mathbb{S} = \partial\mathbb{D}$  mit  $\mathbb{D} = B(0, 1)$ . Also  $M_C(\mathbb{R}_\infty) = \mathbb{S}$ .

Ferner: Für  $b \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$  gilt  $M_C(ib) = \frac{b - 1}{b + 1}$ , insbesondere  $M_C(i) = 0$ .  $i\mathbb{R}_\infty$  verläuft durch  $0, i, \infty$ .  $\mathbb{R}_\infty$  verläuft durch die Bildpunkte  $-1, 0, 1 \implies M_C(i\mathbb{R}_\infty) = \mathbb{R}_\infty$ . Mit Analysis 1:  $M_C(i\mathbb{R}_+) = [-1, 1)$ .



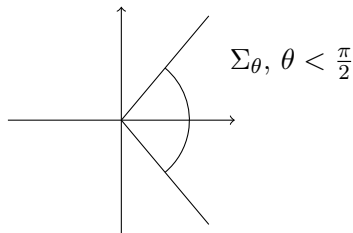
Die Gerade  $K: ib + x, x \in \mathbb{R}, (b > 0 \text{ fest})$  wird auf den verallgemeinerten Kreis  $K'$  durch  $M_C(ib) \in (-1, 1)$  und  $1 = M_C(\infty)$  abgebildet. Nach Bem. 1.6 und da  $K$  die imaginäre Achse im Winkel  $\frac{\pi}{2}$  schneidet, schneidet  $M_C(K)$  die reelle Achse ( $= M_C(i\mathbb{R}_\infty)$ ) auch senkrecht in  $M_C(ib)$ .  $\Rightarrow M_C(K)$  ist symmetrisch zur  $x$ -Achse und liegt in  $\mathbb{D}$ .  $\Rightarrow M_C(\mathbb{H}_+) \subseteq \mathbb{D}$ , mit  $\mathbb{H}_+ = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im } z > 0\}$ . Sei weiter  $w \in \mathbb{D}$ . Sei  $K$  der Kreis durch  $w$  und 1, der symmetrisch zur  $x$ -Achse ist. Sei  $a \in (-1, 1)$  der zweite Schnittpunkt von  $K$  mit der  $x$ -Achse.  $\Rightarrow$  Es gibt genau ein  $b \in (0, \infty)$  mit  $a = \frac{b-1}{b+1}$ . Also: Ist  $w \in M_C(ib + \mathbb{R}_\infty) \Rightarrow M_C(\mathbb{H}_+) = \mathbb{D} \Rightarrow M_C: \mathbb{H}_+ \rightarrow \mathbb{D}$  ist biholomorph.

### 1.2.2 Potenzen und Wurzeln

Sei  $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ . Mit  $\sqrt[n]{x}$  wird stets die reelle Wurzel bezeichnet. Für  $\theta \in (0, \pi]$  definiere den (offenen) Sektor:

$$\Sigma_\theta := \{z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : |\arg z| < \theta\}$$

Speziell:  $\Sigma_\pi = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$  (geschlitzte Ebene),  $\Sigma_{\frac{\pi}{2}} = \{z \in \mathbb{C} : \text{Re } z > 0\} = \mathbb{C}_+$  (rechte Halbebene)



$$z = re^{i\phi} \in \Sigma_\theta \iff r > 0, |\phi| < \theta$$

(wobei  $|\phi| \leq \pi$ )

Betrachte:  $P_n(z) = z^n, z \in \mathbb{C}$ . Dann:  $P_n(re^{i\phi}) = r^n e^{i\phi n}$ . Also bildet  $P_n$  den Halbstrahl  $\{re^{i\phi}, r > 0\}$  mit Winkel  $\phi \in (-\pi, \pi]$  bijektiv auf den Halbstrahl  $\{se^{i\phi n}, s > 0\}$  mit  $n$ -fachem Winkel (modulo  $2\pi$ ) ab.

Setze  $p_n := P_n|_{\Sigma_{\frac{\pi}{n}}}$ . Dann ist  $p_n: \Sigma_{\frac{\pi}{n}} \rightarrow \Sigma_\pi$  bijektiv.

Beachte:  $P_n$  ist schon auf  $\overline{\Sigma_{\frac{\pi}{n}}}$  nicht mehr injektiv. Beispiel für  $n = 2$ :

$$+i, -i \in \overline{\Sigma_{\frac{\pi}{2}}} = \overline{\mathbb{C}_+}, P_2(i) = -1 = P_2(-i).$$

**Definition 1.12.** Der Hauptzweig der  $n$ -ten Wurzel ist die Umkehrabbildung  $r_n = p_n^{-1}: \Sigma_\pi \rightarrow \Sigma_{\frac{\pi}{n}}$ . Man schreibt  $r_n(w) =: w^{\frac{1}{n}}$  für  $w \in \Sigma_\pi$ .

Per Definition haben wir  $r_n(z^n) = z$  ( $\forall z \in \Sigma_{\frac{\pi}{n}}$ ),  $r_n(w)^n = w$  ( $\forall w \in \Sigma_{\pi}$ ). Es gilt:

$$r_n(se^{i\psi}) = \sqrt[n]{s}e^{i\frac{\psi}{n}} \quad (\forall s > 0, |\psi| < \pi) \quad (1.5)$$

(denn:  $z = \sqrt[n]{s}e^{i\frac{\psi}{n}} \in \Sigma_{\frac{\pi}{n}}$  und  $z^n = se^{i\psi}$ )

Insbesondere:  $r_n(x) = \sqrt[n]{x}$  für  $x > 0$ .

Weiter:  $p_n'(z) = nz^{n-1} \neq 0$  ( $\forall z \in \Sigma_{\frac{\pi}{n}}$ ).

Mit Satz 1.8 sind  $r_n \in H(\Sigma_{\pi})$  und

$$\left. \begin{array}{l} p_n: \Sigma_{\frac{\pi}{n}} \rightarrow \Sigma_{\pi} \\ r_n: \Sigma_{\pi} \rightarrow \Sigma_{\frac{\pi}{n}} \end{array} \right\} \text{biholomorph}$$

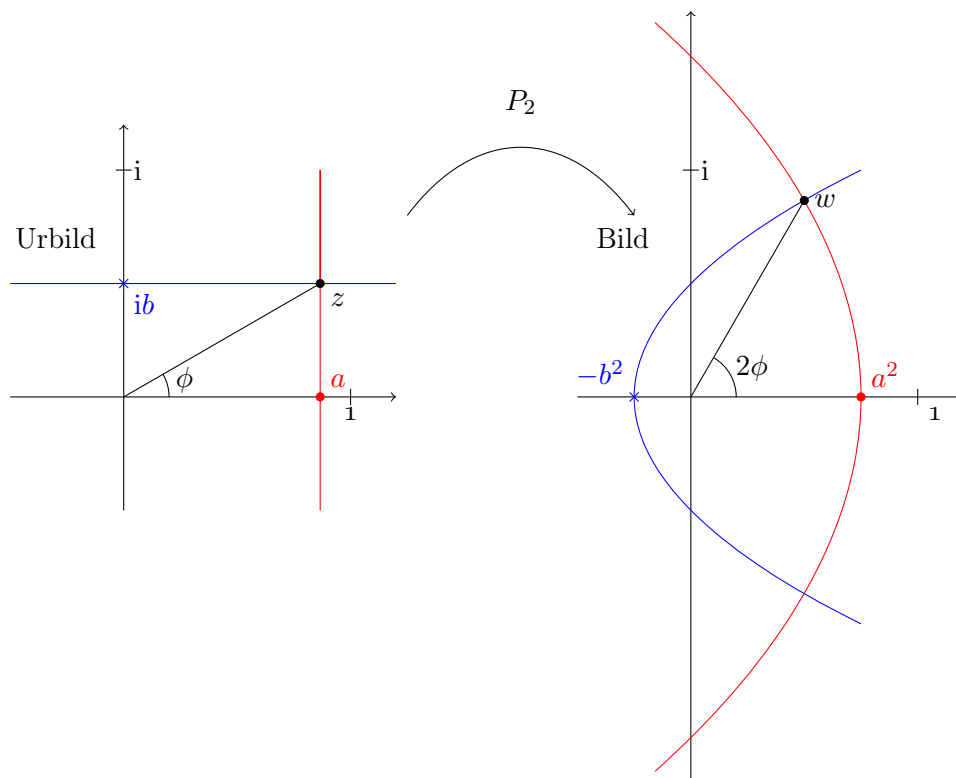
### Abbildungsverhalten der Quadratfunktion

- **Vertikale Gerade**  $\operatorname{Re} z = a$  mit einem festen  $a > 0$ . Also gilt für  $z = x + iy$ , dass  $w := z^2 = a^2 - y^2 + i \cdot 2ay$  (mit  $a = x$ ) ( $y \in \mathbb{R}$  ist Parameter). Also ist  $\operatorname{Im} w = 2ay$ , also  $y = \frac{\operatorname{Im} w}{2a}$ . Damit folgt:

$$\operatorname{Re} w = a^2 - y^2 = a^2 - \frac{(\operatorname{Im} w)^2}{4a^2} \leq a^2.$$

Also ist  $\operatorname{Im} w = \pm 2a\sqrt{a^2 - \operatorname{Re} w}$  eine nach links offene Parabel mit Scheitel  $(a^2, 0)$ .

- **Horizontale Gerade**  $\operatorname{Im} z = b$  mit einem festen  $b > 0$ . Also gilt für  $z = x + iy$ , dass  $w := z^2 = x^2 - b^2 + i \cdot 2bx$  (mit  $y = b$ ) ( $x \in \mathbb{R}$  ist Parameter). Wie oben erhält man  $\operatorname{Im} w = 2bx$ , also  $x = \frac{\operatorname{Im} w}{2b}$  und  $\operatorname{Re} w = x^2 - b^2$ . Also ist  $\operatorname{Im} w = \pm 2b\sqrt{b^2 + \operatorname{Re} w}$  eine nach rechts offene Parabel mit Scheitel  $(-b^2, 0)$ .



### Weitere Zweige der Wurzel

Sei  $\beta \in (-\pi, \pi]$ . Setze

$$E_\beta = \{te^{i\psi} \mid t > 0, \psi \in (\beta, \beta + 2\pi)\} = \mathbb{C} \setminus \{re^{i\beta} \mid r \geq 0\}.$$

Sei nun  $n = 2$ , dann ist

$$W_{\alpha,2} = \{se^{i\phi} \mid s > 0, \phi \in (\alpha, \alpha + \pi)\}$$

eine gedrehte Halbebene.

Da  $\frac{\beta}{2} < \phi < \frac{\beta}{2} + \pi \iff \beta < 2\phi < \beta + 2\pi$ , ist  $p_2^o := P_2|_{W_{\frac{\beta}{2},2}}$  eine Bijektion

$$p_2^o: W_{\frac{\beta}{2},2} \rightarrow E_\beta.$$

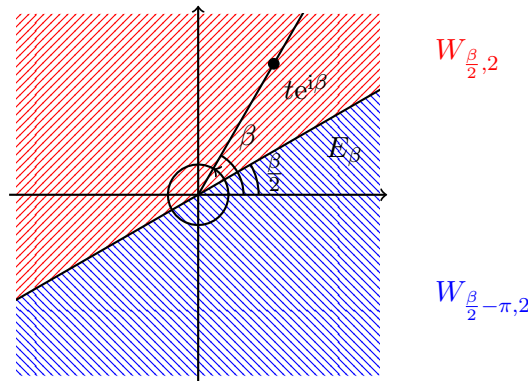
Da  $E_\beta = \{te^{i\psi} \mid t > 0, \psi \in (\beta - 2\pi, \beta)\}$ , ist ebenso  $p_2^u := P_2|_{W_{\frac{\beta}{2}-\pi,2}}$  eine Bijektion

$$p_2^u: W_{\frac{\beta}{2}-\pi,2} \rightarrow E_\beta.$$

Also erhalten wir für jedes  $\beta \in (-\pi, \pi]$  genau zwei Zweige der Wurzel

$$r_2^o = (p_2^o)^{-1}: E_\beta \rightarrow W_{\frac{\beta}{2},2},$$

$$r_2^u = (p_2^u)^{-1}: E_\beta \rightarrow W_{\frac{\beta}{2}-\pi,2}.$$



**Eigenschaften:** Sei  $t > 0$ ,  $\psi \in (\beta, \beta + 2\pi)$ ,  $z = te^{i\psi}$ . Es gilt

- $r_2^o(te^{i\psi}) = \sqrt{t}e^{i\frac{\psi}{2}} =: w^o$

Denn:  $(w^o)^2 = \left(\sqrt{t}e^{i\frac{\psi}{2}}\right)^2 = te^{i\psi} = z$  und  $\frac{\psi}{2} \in (\frac{\beta}{2}, \frac{\beta}{2} + \pi)$ , also  $w^o \in W_{\frac{\beta}{2},2}$ .

- $r_2^u(te^{i\psi}) = \sqrt{t}e^{i\frac{\psi}{2}}e^{-i\pi} =: w^u$

Denn:  $(w^u)^2 = \left(\sqrt{t}e^{i\frac{\psi}{2}}e^{-i\pi}\right)^2 = te^{i\psi}e^{-2\pi i} = z$  und  $\frac{\psi}{2} - \pi \in (\frac{\beta}{2} - \pi, \frac{\beta}{2})$ , also  $w^u \in W_{\frac{\beta}{2}-\pi,2}$ .

**Beispiel.** Sei  $\beta = \frac{\pi}{4}$ . Gefordert ist also im Urbild der Wurzel, dass  $\psi \in (\frac{\pi}{4}, 2\pi + \frac{\pi}{4})$ , sowie  $t > 0$ .

Sei  $\psi = \pi$ ,  $t = 1$ , also  $z = e^{i\pi} = -1$ . Dann  $r_2^o(-1) = e^{i\frac{\pi}{2}} = i$ ,  $r_2^u(-1) = e^{i\frac{\pi}{2}}e^{-i\pi} = -i$ .

Sei  $\psi = 2\pi$ ,  $z = t = te^{2\pi i} > 0$ . Dann  $r_2^o(t) = \sqrt{t}e^{i\pi} = -\sqrt{t}$ ,  $r_2^u(t) = \sqrt{t}e^{i\pi}e^{-i\pi} = \sqrt{t}$ .

Entsprechend erhält man für jedes  $\beta \in (-\pi, \pi]$  genau  $n$  Zweige der  $n$ -ten Wurzel (mit jeweils passenden  $\alpha$ !).

## 1.2.3 Exponentialfunktion und Logarithmus

Aus Analysis 1 haben wir: Seien  $z, w \in \mathbb{C}$ ,  $z = x + iy$ . Dann gelten:

$$\exp(z + w) = \exp(z) \exp(w), \quad \exp(-z) = \frac{1}{\exp(z)} \neq 0 \quad (1.6)$$

$$e^z = \exp(z) = e^x e^{iy} = e^x (\cos y + i \sin y) \quad (x, y \in \mathbb{R}!) \quad (1.7)$$

$$\exp(z) = \exp(z + 2\pi i) \quad (\exp \text{ ist } 2\pi i\text{-periodisch}) \quad (1.8)$$

$$e^z = 1 \iff z = 2\pi i k \text{ für ein } k \in \mathbb{Z} \quad (1.9)$$

Mit (1.7) folgt:

- **Horizontale Gerade**  $y = \operatorname{Im} z = b$  ( $b \in \mathbb{R}$  fest). Die Exponentialfunktion liefert dann einen Ursprungsstrahl  $e^x (\cos b + i \sin b)$ , wobei  $x \in \mathbb{R}$  ein Parameter ist. Hierbei ist  $\exp$  bijektiv, da das reelle  $\exp$  bijektiv ist.
- **Vertikale Gerade**  $x = \operatorname{Re} z = a$  ( $a \in \mathbb{R}$  fest). Die Exponentialfunktion bildet diese Gerade ab auf den Kreis  $\partial B(0, e^a)$  (lasse in (1.7)  $y \in \mathbb{R}$  laufen). Dies ist surjektiv, aber nicht injektiv.

Definiere den vertikalen Streifen  $S_r(a_1, a_2) = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z \in (a_1, a_2)\}$  (mit  $a_1 < a_2$ ,  $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ ) und den horizontalen Streifen  $S_i(b_1, b_2) = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z \in (b_1, b_2)\}$  (wobei  $2\pi k - \pi \leq b_1 < b_2 < 2\pi k + \pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ ). Dann ist

$$\exp: S_r(a_1, a_2) \rightarrow B(0, e^{a_2}) \setminus B(0, e^{a_1})$$

surjektiv, aber nicht injektiv, und

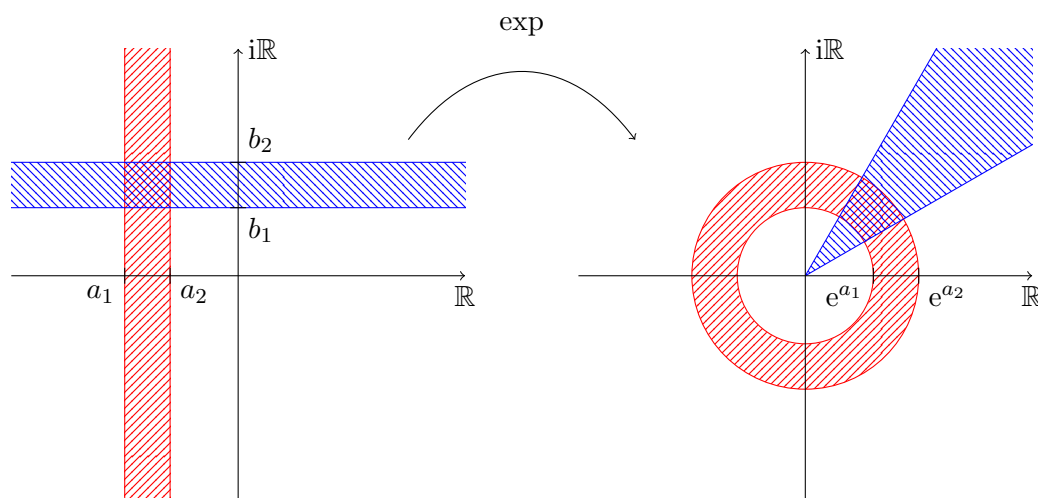
$$\exp: S_i(b_1, b_2) \rightarrow \{z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \mid \arg z \in (\theta_1, \theta_2)\}$$

bijektiv (wobei  $\theta_j = \arg(\cos b_j + i \sin b_j)$  für  $j = 1, 2$ ).

Sei speziell  $S_i = S_i(-\pi, \pi)$ . Wegen  $\cos b_j + i \sin b_j = 1$ ,  $\theta_1 = -\pi$ ,  $\theta_2 = \pi$ , ist dann

$$\exp|_{S_i}: S_i \rightarrow \Sigma_\pi$$

bijektiv.



**Definition 1.13.** Der *Hauptzweig des Logarithmus* ist

$$\log := (\exp|_{S_i})^{-1} : \Sigma_\pi \rightarrow S_i.$$

**Bemerkung.**  $\ln$  bezeichnet stets den reellen Logarithmus.  $\exp|_{S_i+i\alpha}$  liefert andere Zweige des Logarithmus auf passenden  $E_\alpha$ .

Per Definition gelten

$$\begin{aligned} \log(\exp(z)) &= z \quad (\forall z \in S_i), \\ \exp(\log(z)) &= z \quad (\forall z \in \Sigma_\pi). \end{aligned}$$

Da für alle  $z$  gilt  $\exp'(z) = \exp(z) \neq 0$ , liefert Satz 1.8, dass

$$\exp: S_i \rightarrow \Sigma_\pi, \quad \log: \Sigma_\pi \rightarrow S_i$$

biholomorph sind, und es existiert die Ableitung

$$\log'(w) = \frac{1}{\exp'(z)} = \frac{1}{\exp(z)} = \frac{1}{w}$$

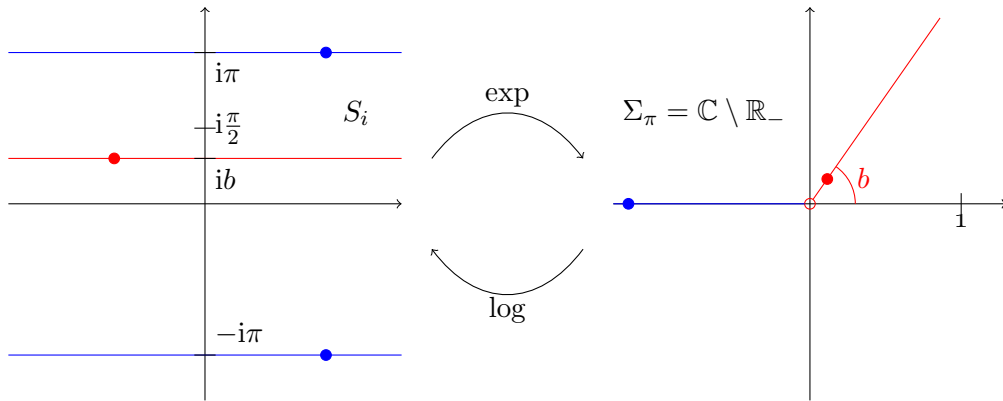
für alle  $w = e^z \in \Sigma_\pi$ , wobei  $z \in S_i$ .

Für  $w = re^{i\phi}$  mit  $r > 0$ ,  $\phi \in (-\pi, \pi)$  gilt

$$\log(re^{i\phi}) = \ln(r) + i\phi, \quad (1.10)$$

denn  $\exp(\ln(r) + i\phi) \stackrel{(1.7)}{=} re^{i\phi}$  und  $\ln(r) + i\phi \in S_i$ .

**Beispiel.**  $\log(r) = \ln(r)$ ,  $\log(i) = \log(e^{i\frac{\pi}{2}}) = i\frac{\pi}{2}$ .



**wobei:**  $e^{x+i\pi} = e^x e^{i\pi} = -e^x$ ,  $e^{x-i\pi} = e^x e^{-i\pi} = -e^x$ ,  $e^{x+ib} = e^x e^{ib}$  für  $x \in \mathbb{R}$ ,  $b \in (-\pi, \pi)$  und es gilt:

$$\log re^{ib} = \ln(r) + ib \quad (1.11)$$

wobei  $r > 0$  und  $b \in (-\pi, \pi)$ , also  $re^{ib} \in \Sigma_\pi$ .

**Vorsicht:** Logarithmusgesetz gilt in  $\mathbb{C}$  nur eingeschränkt. Beispiel: Seien  $\phi, \psi \in (-\pi, \pi)$ ,  $\phi + \psi > \pi \implies \phi + \psi - 2\pi \in (-\pi, \pi)$ . Damit:

$$\log(e^{i\phi}e^{i\psi}) = \log e^{i(\phi+\psi-2\pi)} \stackrel{(1.11)}{=} i(\phi + \psi - 2\pi) \neq i\phi + i\psi \stackrel{(1.11)}{=} \log(e^{i\phi}) + \log(e^{i\psi}).$$

**Definition 1.14.** Seien  $z = re^{i\phi} \in \Sigma_\pi$ ,  $r > 0$ ,  $\phi \in (-\pi, \pi)$ ,  $w = x + iy$ ,  $x, y \in \mathbb{R}$ . Setze

$$z^w := \exp(w \log z) \stackrel{(1.11)}{=} \exp((x + iy)(\ln(r) + i\phi)) = \underbrace{e^{x \ln r}}_{=|z|^x} e^{-y\phi} e^{i(x\phi + y \ln(r))}.$$

**Beispiel.**  $i^i \rightsquigarrow r = 1$ ,  $\phi = \frac{\pi}{2}$ ,  $x = 0$ ,  $y = 1 \implies i^i = e^{-\frac{\pi}{2}}$ .

**Bemerkung 1.15.** Seien  $z, w$  wie in Definition 1.14,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $w_k = x_k + iy_k$  ( $k = 1, 2$ ),  $x_k, y_k \in \mathbb{R}$ . Dann:

$$(a) \quad z^n \stackrel{1.14}{=} \exp(n \log z) \stackrel{(1.6)}{=} \exp(\log z) \cdots \exp(\log z) \stackrel{1.14}{=} \underbrace{z \cdots z}_{n\text{-fach}} \stackrel{\text{alte Def.}}{=} z^n.$$

$$\bullet \quad z^0 = \exp(0 \log z) = 1.$$

$$\bullet \quad z^{-1} \stackrel{1.14}{=} \exp(-\log z) \stackrel{(1.6)}{=} \frac{1}{\exp(\log z)} = \frac{1}{z}.$$

$\implies$  Def. 1.14 passt zu ganzen Exponenten.

$$(b) \quad z^{w_1+w_2} \stackrel{1.14}{=} \exp((w_1 + w_2) \log z) \stackrel{(1.6)}{=} \exp(w_1 \log z) \cdot \exp(w_2 \log z) \stackrel{1.14}{=} z^{w_1} z^{w_2}$$

$$\implies z = z^{\frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{n}} = \underbrace{z^{\frac{1}{n}} \cdots z^{\frac{1}{n}}}_{n\text{-fach}} = (z^{\frac{1}{n}})^n.$$

$\implies$  Für  $w = \frac{1}{n}$  stimmen Definition 1.14 und 1.12 überein.

$$(c) \quad \frac{\partial}{\partial z} z^w = \frac{\partial}{\partial z} \exp(w \log z) = \exp(w \log z) \frac{w}{z} \stackrel{(b)}{=} w z^{w-1},$$

$$\frac{\partial}{\partial w} z^w = \frac{\partial}{\partial w} \exp(w \log z) = \log(z) z^w.$$

$$(d) \quad |z^w| \stackrel{1.14}{=} |z|^{\operatorname{Re} w} e^{-\operatorname{Im}(w) \arg(z)} \leq |z|^{\operatorname{Re} w} e^{\pi |\operatorname{Im} w|}.$$

### 1.2.4 Sinus und Kosinus

Seien  $z, w \in \mathbb{C}$ ,  $z = x + iy$  ( $x, y \in \mathbb{R}$ ) Aus den Reihendarstellungen folgen (Analysis 1):

$$\sin(-z) = -\sin(z), \quad \cos(-z) = \cos(z) \tag{1.12}$$

$$\exp(iz) = \cos(z) + i \sin(z), \quad \cos^2(z) + \sin^2(z) = 1 \tag{1.13}$$

$$\text{mit (1.12):} \quad \cos(z) = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}), \quad \sin(z) = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz}) \tag{1.14}$$

$$\stackrel{(1.7)}{\implies} \quad \cos z = \frac{1}{2}(e^{ix}e^{-y} + e^{ix}e^y) = \frac{1}{2}e^{-y}(\cos x + i \sin x) + \frac{1}{2}e^y(\cos x - i \sin x)$$

$$= \cos(x) \cosh(y) + i \sin(x) \sinh(y) \tag{1.15}$$

$$\text{wobei } \cosh(y) = \frac{1}{2}(e^y + e^{-y}), \quad \sinh(y) = \frac{1}{2}(e^y - e^{-y})$$

$$\text{Genauso: } \sin z = \sin(x) \cosh(y) + i \cos(x) \sinh(y) \tag{1.16}$$



$\leadsto \sin, \cos$  sind in imaginärer Richtung unbeschränkt.

Aus (1.14) folgt ferner (Analysis 1):

$$\cos(z) - \cos(w) = -2 \sin\left(\frac{z+w}{2}\right) \sin\left(\frac{z-w}{2}\right) \quad (1.17)$$

Weiter gilt mit (1.14) und (1.6):  $\cos\left(z + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2} \left( e^{iz} \underbrace{e^{i\frac{\pi}{2}}}_{=i} + e^{-iz} \underbrace{e^{-i\frac{\pi}{2}}}_{=-i} \right) = -\sin(z)$ .

Genauso:  $\sin\left(z + \frac{\pi}{2}\right) = \cos z$ .

$$\implies \cos(z + 2\pi) = \cos(z), \quad \sin(z + 2\pi) = \sin(z).$$

**Nullstellen:**  $\sin(z) = 0 \xLeftrightarrow{(1.14)} e^{iz} = e^{-iz} \xLeftrightarrow{(1.7)} e^{-y}(\cos x + i \sin x) = e^y(\cos x - i \sin x)$

$$\iff \left\{ \begin{array}{l} \text{Imaginärteil: } \sin x = 0 \text{ (da } e^y \neq -e^{-y}) \\ \text{Realteil: } \cos x = 0 \text{ oder } e^y = e^{-y} \text{ (} \iff y = 0 \text{)} \end{array} \right\} \iff z = k\pi \text{ für ein } k \in \mathbb{Z}.$$

Damit:  $\cos(z) = 0 \iff z = k\pi + \frac{\pi}{2}$  für ein  $k \in \mathbb{Z}$ .

*Zusammengefasst:  $\sin, \cos$  haben auf  $\mathbb{C}$  nur die reellen Nullstellen und Perioden.* (1.18)

*Wenn der reelle  $\sin$  bzw.  $\cos$  auf  $(a, b) \subseteq \mathbb{R}$  injektiv ist, dann ist der komplexe  $\sin$  bzw.  $\cos$  auf  $S_r(a, b)$  injektiv.* (1.19)

*Beweis.* (für  $\cos$ ): Nach Voraussetzung muss  $\cos$  auf  $(a, b)$  strikt monoton sein.

$\implies (a, b) \subseteq (k\pi, (k+1)\pi)$  für ein  $k \in \mathbb{Z}$ .

Seien also  $z, w \in S_r(a, b)$  (wobei  $z \neq w$ )  $\implies z + w, z - w \neq 2j\pi$  ( $\forall j \in \mathbb{Z}$ )

$$\xRightarrow{(1.11)} \cos z - \cos w \neq 0. \quad \square$$

$\implies \cos$  ist auf  $S_r(0, \pi)$  injektiv,  $\sin$  ist auf  $S_r(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$  injektiv.

**Bild von  $\cos$  auf  $S_r(0, \pi)$ :**  $S_r$ : Horizontale Gerade:  $z = x + ib$  mit  $x \in \mathbb{R}$  und festem  $b \in \mathbb{R}$ . Mit (1.15):

$$\cos(t) = \cosh(b) \cos(x) + i \sinh(b) \sin(x)$$

$\implies$  Bild der Geraden ist eine Ellipse  $E(b)$  mit Scheiteln  $(\pm \cosh(b), 0)$  und  $(0, \pm \sinh(b))$ .

Für  $x \in (0, \pi)$  erhalten wir für  $b > 0$  den oberen Bogen von  $E(b)$ , den unteren Bogen für  $b < 0$ . Da  $x \neq 0, \pi$  sind diese Bogen ohne die Endpunkte:

$$(\pm \underbrace{\cosh(b)}_{\geq 1}, 0) \implies \cos(S_r) \subseteq D := \mathbb{C} \setminus ((-\infty, -1] \cup [1, \infty)).$$

Klar:  $\cos((0, \pi)) = (-1, 1)$ . Sei  $w \in D \setminus (-1, 1)$ , also  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ , da hier  $w = u + iv$ ,  $u \in \mathbb{R}$ ,  $v \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Suche  $b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  mit

$$w \in E(b) \iff f(b) := \frac{u^2}{\cosh^2(b)} + \frac{v^2}{\sinh^2(b)} \stackrel{!}{=} 1.$$

So ein  $b$  existiert, da  $f$  stetig ist (ZWS):  $f(b) \rightarrow 0$  für  $b \rightarrow \pm\infty$ ,  $f(b) \rightarrow \pm\infty$  für  $b \rightarrow 0$ , da  $v \neq 0$ .

$\implies \cos: S_r \rightarrow D$  bijektiv  $\implies$  haben Hauptzweig des Arcuscosinus:

$$\arccos: D \rightarrow S_r, \quad \arccos = (\cos|_{S_r})^{-1}.$$

Da  $\cos'(z) = -\sin(z) \neq 0 \ \forall z \in S_r$  sind

$$\cos: S_r \rightarrow D, \quad \arccos: D \rightarrow S_r$$

biholomorph. Mit Verschiebung:  $\sin: S_r(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \rightarrow D$  ist biholomorph mit Inversem  $\arcsin$ .