

1.5 Standardkonstruktionen

A) Produkte

Seien X, Y nVRe. Dann:

$X \times Y = \{(x, y) : x \in X, y \in Y\}$ ist ein nVR bzgl.

$$\|(x, y)\|_p = \begin{cases} (\|x\|_X^p + \|y\|_Y^p)^{\frac{1}{p}}, & 1 \leq p < \infty \\ \max\{\|x\|_X, \|y\|_Y\}, & p = \infty \end{cases}$$

Diese Normen sind alle äquivalent.

Sind X, Y vollständig, dann ist $(X \times Y, \|\cdot\|_p)$ ein BR.

Definition Sei Z ein nVR und $P \in B(Z)$ mit $P = P^2$. Dann heißt P **Projektion**.

Hier ist die kanonische Projektion auf X gegeben durch $P(x, y) = (x, 0)$.

B) Diskrete Summe

Definition 1.72 Seien X_1, X_2 abg. UVRe eines BRes X mit $X_1 + X_2 = X$ und $X_1 \cap X_2 = \{0\}$. Dann ist X die **direkte Summe** von X_1 und X_2 . Man schreibt $X = X_1 \oplus X_2$.

X_2 heißt dann **Komplement** von X_1 in X .

Lemma 1.73 Sei X ein BR und $P \in B(X)$ eine Projektion. Dann ist $Q = I - P \in B(X)$ auch eine Projektion und es gelten $R(P) = N(Q) =: X_1$, $N(P) = R(Q) =: X_2$, $X = X_1 \oplus X_2$. Man hat $\|P\| \geq 1$, wenn $P \neq 0$.

Beweis $Q^2 = I - 2P + P^2 = I - P = Q$.

Falls $y = Px$ für ein $x \in X \implies Qy = Px - P^2x = 0$.

Falls $Qx = 0$ für ein $x \in X \implies x - Px = 0 \iff x = Px \implies x \in R(P) \implies R(P) = N(Q)$. Also ist $X_1 = N(Q) = R(P)$ abgeschlossen (1.16). Genauso: X_2 .

Ist $x \in X \implies x = Px + (I - P)x \in X_1 \oplus X_2$. Wenn $x \in X_1 \cap X_2 \implies Px = 0$ und $x = Py$ für ein $y \in X \implies x = P^2y = Px = 0 \implies X_1 \cap X_2 = \{0\}$. Schließlich: $\|P\| = \|P^2\| \leq \|P\|^2 \implies \|P\| \geq 1$, falls $P \neq 0$. ■

Umkehrung:

Sei $X = X_1 \oplus X_2$. Dann existiert für jedes $x \in X$ eindeutig bestimmte $x_1 \in X_1, x_2 \in X_2$ mit $x = x_1 + x_2$. Setze $Px = x_1$. Dann ist P linear und $P = P^2$. Ferner ist P stetig nach dem Homomorphiesatz (Kap. 3). Somit ist die Existenz direkter Zerlegungen und Projektionen äquivalent.

Beispiel 1.74 a) $X = L^1(\mathbb{R})$. $Pf := \mathbf{1}_{\mathbb{R}^+} \cdot f$, $f \in X \implies P \in B(X), \|P\| = 1, P = P^2$. Ferner: $(I - P)f = \mathbf{1}_{(-\infty, 0)} \cdot f$. Die Abbildung $J : R(P) \rightarrow L^1(\mathbb{R}^+)$, $Jf = f|_{\mathbb{R}^+}$ ist stetig und linear mit stetiger Inverser

$$J^{-1}g = \begin{cases} g, & \text{auf } \mathbb{R}^+ \\ 0, & \text{auf } (-\infty, 0) \end{cases}$$

$\implies R(P) \equiv L^1(\mathbb{R}^+)$. Entsprechend: $N(P) \equiv L^1(\mathbb{R}_-) \implies L^1(\mathbb{R}) \equiv L^1(\mathbb{R}^+) \oplus L^1(\mathbb{R}_-)$

b) c_0 hat kein Komplement in ℓ^∞ (Werner, IV 6.5)

c) $X = \mathbb{R}^2, P = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}. P^2 = P$ und $\|P\| = 1 + |t|$ bzgl. $\|\cdot\|_1$. P ist Projektion auf x -Achse.

Quotienten

Seien X nVR, Y ein UVR.

$$X_{/Y} = \{\hat{x} = x + Y, x \in X\} \quad \text{Quotientenraum}$$

Die Quotientenabbildung $\Pi : X \rightarrow X_{/Y}, \Pi x = \hat{x}$ ist wohldefiniert, linear und surjektiv. Man schreibt $\text{codim } Y = \dim X_{/Y}$. Es gilt $N(\Pi) = Y$. Definiere $\|\hat{x}\| = \inf_{y \in Y} \|x - y\| := d(x, Y)$ **Quotientennorm**. Gilt $\bar{x} + Y = x + Y$ für gewisse $x, \bar{x} \in X$, dann gilt: $\bar{x} - x \in Y \Rightarrow d(x, Y) = d(\bar{x}, Y) \Rightarrow$ Quotientennorm wohldefiniert.

Sei $\alpha \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$. Dann:

$$\|\alpha \hat{x}\| = \inf_{y \in Y} \|\alpha x - \frac{\alpha}{\alpha} y\| = |\alpha| \inf_{z \in Y} \|x - z\| = |\alpha| \cdot \|\hat{x}\|$$

Seien $x_1, x_2 \in X$ und $\varepsilon > 0$. Dann ex. $y_1, y_2 \in Y$ so, dass $\|x_k - y_k\| \leq \|\hat{x}_k\| + \varepsilon, k = 1, 2. \Rightarrow \|\hat{x}_1 + \hat{x}_2\| = \inf_{y \in Y} \|x_1 + x_2 - y\| \leq \|x_1 - y_1 + x_2 - y_2\| \leq \|\hat{x}_1\| + \|\hat{x}_2\| + 2\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \|\hat{x}_1\| + \|\hat{x}_2\| \Rightarrow \|\hat{x}\|$ ist ein Halbnorm auf $X_{/Y}$.

Sei nun Y abgeschlossen. Ist $\|\hat{x}\| = 0$, dann ex $y_n \in Y$ mit $\|x - y_n\| \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$.

Da Y abg $\Rightarrow x \in Y \Rightarrow \hat{x} = 0$ und $X_{/Y}$ ist nVR.

Weiter: $\|\Pi(x)\| = \|\hat{x}\| \leq \|x\|_X \Rightarrow \Pi \in B(X, X_{/Y})$ mit $\|\Pi\| \leq 1$.

Satz 1.75 Sei X ein BR und Y ein abg UVR von X . Dann ist $(X_{/Y}, \|\cdot\|)$ ein BR ($\|\cdot\|$ Quotientennorm) und $\Pi \in B(X, X_{/Y}), \|\Pi\| = 1$.

Beweis Sei \bar{x} wie in Lemma 1.51. Dann gilt: $\|\Pi\| \geq \|\Pi \bar{x}\| = \inf_{y \in Y} \|\bar{x} - y\| \geq 1 - \delta$ für ein bel $\delta \in (0, 1) \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} \|\Pi\| = 1$.

Sei $(\hat{x}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine CF in $X_{/Y}$. Dann ex eine Teilfolge $(\hat{x}_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ mit $\|\hat{x}_m - \hat{x}_{n_k}\| \leq 2^{-k} (*)$ für alle $x \geq n_k$. Dann ex $y_{n_k} \in Y$ mit $\|x_{n_{k+1}} - x_{n_k} - y_{n_k}\| \leq 2 \cdot 2^{-k}$. Setze $v_N = x_{n_1} + \sum_{k=1}^N z_k$, wobei $z_k = x_{n_{k+1}} - x_{n_k} - y_{n_k}$. X BR $\Rightarrow \exists x := \lim_{N \rightarrow \infty} v_N \in X$. Weiter gilt:

$$v_N = x_{n_{N+1}} - \underbrace{\sum_{k=1}^N y_{n_k}}_{\in Y} \stackrel{\Pi \text{ stetig}}{=} \underbrace{\hat{v}_N}_{\hat{x}_{n_{N+1}}} \rightarrow \hat{x} \text{ in } X_{/Y}$$

Beachte: $\hat{v}_N = \hat{x}_{n_{N+1}}$. Wie in Th 1.42 folgt aus $(*)$, dass $\hat{x}_n \rightarrow \hat{x}$. ■

Beispiel 1.76 a) Sei $X = Y \oplus Z, X$ BR. Setze $J : Z \rightarrow X_{/Y}, Jz = \hat{z} = z + Y \Rightarrow J$ ist linear und stetig. Sei $Jz = 0 \Rightarrow \hat{z} = 0 \Rightarrow z \in Y \stackrel{z \in X}{\Rightarrow} z \in X \cap Y \Rightarrow z = 0$. Für alle $\hat{x} \in X_{/Y}$ ex. $y \in Y, z \in Z$ mit $x = z + y$, also: $\hat{x} = Jz \Rightarrow J$ ist surjektiv. Mit dem Homomorphiesatz (Kap. 3) folgt: J^{-1} ist stetig $\Rightarrow Z \cong X_{/Y}$, z.B. $L^1(\mathbb{R}_+) \cong L^1(\mathbb{R})_{/L^1(\mathbb{R}_+)}$.

Beachte: $\ell_{/c_0}^\infty$ kann nicht mit einem Teilraum von ℓ^∞ identifiziert werden, d.h. C) ist allgemeiner als B).

- b) $c = c_0 \cdot \mathbb{C}$ mit Projektion $Px = x - \ell(x)\mathbf{1}$ ($\ell(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$), also ist $c_{/c_0} \cong \mathbb{C}$,
d.h. $\text{codim } c_0 = 1$.

Beachte: Mit anderem Isomorphismus gilt: $c \cong c_0$ (nach Bsp 1.71)

Satz 1.77 Sei X nVR und $Y \subseteq X$ ein abg. UVR. Sei $T \in B(X)$ mit $TY = \{Ty : y \in Y\} \subseteq Y$.

Dann def. $\hat{T}\hat{x} := Tx$ einen Operator $\hat{T} \in B(X_{/Y}, X)$ mit $\|\hat{T}\| \leq \|T\|$.

Beweis Sei $\hat{x} = \hat{u} \Rightarrow x - u \in Y$. Dann: $T(x - u) \in Y$

...Vorlesungsende, Beweis in der nächste Stunde fertig...

■