12. Wege im $\mathbb{R}^n$

Definition

(1) Sei $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ und $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ sei stetig. Dann heißt γ ein Weg im $\mathbb{R}^n$

(2) Sei $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ ein Weg. $\Gamma_\gamma := \gamma([a, b])$ heißt der zu γ gehörende Bogen, $\Gamma_\gamma \subseteq \mathbb{R}^n$. 3.3 $\implies$ Γ_γ ist beschränkt und abgeschlossen. $\gamma(a)$ heißt der Anfangspunkt von γ, $\gamma(b)$ heißt der Endpunkt von γ. $[a, b]$ heißt Parameterintervall von γ.

(3) $\gamma^- : [a, b] \to \mathbb{R}^n$, definiert durch $\gamma^-(t) := \gamma(b + a - t)$ heißt der zu γ inverse Weg. Beachte: $\gamma^- \neq \gamma$, aber $\Gamma_\gamma = \Gamma_{\gamma^-}$.

Beispiele:

(1) Sei $x_0, y_0 \in \mathbb{R}^n$, $\gamma(t) := x_0 + t(y_0 - x_0)$, $t \in [0, 1]$. $\Gamma_\gamma = S[x_0, y_0]$

(2) Sei $r > 0$ und $y(t) := (r \cos t, r \sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$
$\Gamma_\gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = r^2\} = \partial U_r(0)$
$\tilde{\gamma}(t) := (r \cos t, r \sin t)$, $t \in [0, 4\pi]$. $\tilde{\gamma} \neq \gamma$, aber $\Gamma_{\tilde{\gamma}} = \Gamma_\gamma$.

Erinnerung: $\mathfrak{Z}$ ist die Menge aller Zerlegungen von $[a, b]$

Definition

Sei $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ ein Weg. Sei $Z = \{t_0, \dots, t_m\} \in \mathfrak{Z}$.

$$L(\gamma, Z) := \sum_{j=1}^{m} \|\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})\|$$

Übung: Sind $Z_1, Z_2 \in \mathfrak{Z}$ und gilt $Z_1 \subseteq Z_2 \implies L(\gamma, Z_1) \leq L(\gamma, Z_2)$

γ heißt rektifizierbar (rb) $:\iff \exists M \geq 0 : L(\gamma, Z) \leq M \ \forall Z \in \mathfrak{Z}$. In diesem Fall heißt $L(\gamma) := \sup\{L(\gamma, Z) : Z \in \mathfrak{Z}\}$ die Länge von γ.

Ist $n = 1$, so gilt: γ ist rektifizierbar $\iff \gamma \in \mathrm{BV}[a, b]$. In diesem Fall: $L(\gamma) = V_\gamma([a, b])$.

Satz 12.1 (Rektifizierbarkeit und Beschränkte Variation)
Sei $\gamma = (\eta_1, \dots, \eta_n) : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ ein Weg. γ ist rektifizierbar $\iff \eta_1, \dots, \eta_n \in \mathrm{BV}[a, b]$.

Beweis

Sei $Z = \{t_0, \dots, t_n\} \in \mathfrak{Z}$ und $J = \{1, \dots, n\}$.
$|\eta_j(t_k) - \eta_j(t_{k-1})| \overset{1.7}{\leq} \|\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})\| \overset{1.7}{\leq} \sum_{\nu=1}^{n} |\eta_\nu(t_k) - \eta_\nu(t_{k-1})\|$. Summation über $k \implies$ $V_{\eta_j} \leq L(\gamma, Z) \leq \sum_{k=1}^{m} \sum_{\nu=1}^{n} |\eta_\nu(t_k) - \eta_\nu(t_{k-1})| = \sum_{\nu=1}^{n} V_{\eta_\nu}(Z) \implies$ Behauptung ■

Übung: γ ist rektifizierbar $\iff$ γ^- ist rektifizierbar. In diesem Fall: $L(\gamma) = L(\gamma^-)$

Summe von Wege: Gegeben: $a_0, a_1, \dots a_l \in \mathbb{R}$, $a_0 < a_1 < a_2 < \dots < a_c$ und Wege $\gamma_k : [a_{k-1}, a_k] \to \mathbb{R}^n$ $(k = 1, \dots, l)$ mit : $\gamma_k(a_k) = \gamma_{k+1}(a_k)$ $(k = 1, \dots, l-1)$. Definiere $\gamma : [a_0, a_l] \to \mathbb{R}^n$ durch $\gamma(t) := \gamma_k(t)$, falls $t \in [a_{k-1}, a_k]$. γ ist ein Weg im $\mathbb{R}^n$, $\Gamma_\gamma = \Gamma_{\gamma_1} \cup \Gamma_{\gamma_2} \cup \dots \cup \Gamma_{\gamma_l}$. γ heißt die Summe der Wege $\gamma_1, \dots, \gamma_l$ und wird mit. $\gamma = \gamma_1 \oplus \gamma_2 \oplus \dots \oplus \gamma_l$ bezeichnet.

Bemerkung: Ist $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ ein Weg und $Z = \{t_0, \dots, t_m\} \in \mathfrak{Z}$ und $\gamma_k := \gamma_{|[t_{k-1}, t_k]}$ $(k = 1, \dots, m)$ $\implies$ $\gamma = \gamma_1 \oplus \dots \oplus \gamma_m$. Aus Analysis I, 25.1(7) und 12.1 folgt:

Satz 12.2 (Summe von Wegen)
Ist $\gamma = \gamma_1 \oplus \dots \oplus \gamma_m$, so gilt: γ ist rektifizierbar $\iff$ $\gamma_1, \dots, \gamma_m$ sind rektifizierbar. In diesem Fall: $L(\gamma) = L(\gamma_1) + \dots + L(\gamma_m)$

Definition
Sei $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ ein rektifizierbarer Weg. Sei $t \in (a, b]$. Dann: $\gamma_{|[a,t]}$ ist rektifizierbar (12.2).

$$s(t) := \begin{cases} L(\gamma_{|[a,t]}), & \text{falls } t \in (a, b] \\ 0, & \text{falls } t = a \end{cases}$$

heißt die zu γ gehörende **Weglängenfunktion**.

Satz 12.3 (Eigenschaften der Weglängenfunktion)
Sei $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ ein rektifizierbarer Weg. Dann:

(1) $s \in C[a, b]$

(2) s ist wachsend.

Beweis

(1) In der großen Übung

(2) Sei $t_1, t_2 \in [a, b]$ und $t_1 < t_2$. $\gamma_1 := \gamma_{|[a,t_1]}$, $\gamma_2 := \gamma_{|[t_1,t_2]}$, $\gamma_3 := \gamma_{|[a,t_2]}$. Dann $\gamma_3 = \gamma_1 \oplus \gamma_2$. 12.2 $\implies$ $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ sind rektifizierbar und $\underbrace{L(\gamma_3)}_{=s(t_2)} = \underbrace{L(\gamma 1)}_{s(t_1)} + \underbrace{L(\gamma_3)}_{\geq 0}$ $\implies$ $s(t_2) \geq s(t_1)$. ∎

Satz 12.4 (Rechenregeln für Wegintegrale)
Sei $f = (f_1, \dots, f_n) : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ und $f_1, \dots, f_n \in R[a, b]$.

$$\int_a^b f(t)dt := \left(\int_a^b f_1(t)dt, \int_a^b f_2(t)dt, \dots, \int_a^b f_n(t)dt \right) \quad (\in \mathbb{R}^n)$$

Dann:

(1)

$$x \cdot \int_a^b f(t)dt = \int_a^b (x \cdot f(t))dt \ \forall x \in \mathbb{R}^n$$

(2)

$$\left\| \int_a^b f(t)dt \right\| \leq \int_a^b \|f(t)\|dt$$

Beweis

(1) Sei $x = (x_1, \ldots, x_n) \implies$
$x \cdot \int_a^b f(t)dt = \sum_{j=1}^n x_j \int_a^b f_j(t)dt = \int_a^b \left(\sum_{j=1}^n x_j f_j(t)dt \right) = \int_a^b (x \cdot f(t))\, dt$

(2) $y := \int_a^b f(t)dt$. O.B.d.A: $y \neq 0$. $x := \frac{1}{\|y\|} y \implies \|x\| = 1, y = \|y\|x$. $\|y\|^2 = y \cdot y = \| < \|(x \cdot y) = \|y\| \left(x \cdot \int_a^b f(t)dt \right) = \|y\| \int_a^b (x \cdot f(t))\, dt \leq \|y\| \int_a^b \underbrace{|x \cdot f(t)|}_{\leq \|y\| \|f(t)\| = \|f(t)\|} \leq \|y\| \int_a^b \|f(t)\|dt$

■

Satz 12.5 (Eigenschaften stetig differenzierbarer Wege)
$\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ sei ein stetig differenzierbarer Weg. Dann:

(1) γ ist rektifizierbar

(2) Ist s die zu γ gehörende Weglängenfunktion, so ist $s \in C^1[a, b]$ und $s'(t) = \|\gamma'(t)\| \ \forall t \in [a, b]$

(3) $L(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\|dt$

Beweis

(1) $\gamma = (\eta_1, \ldots, \eta_n)$, $\eta_j \in C^1[a, b] \xRightarrow{\text{A1,25.1}} \eta_j \in \mathrm{BV}[a, b] \xRightarrow{12.1} \gamma$ ist rektifizierbar.

(2) Sei $t_0 \in [a, b)$. Wir zeigen:

$$\frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0} \to \|\gamma'(t_0)\| \ (t \to t_0{+}0). \text{ (analog zeigt man :} \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0} \to \|\gamma'(t_0)\| \ (t \to t_0{-}0)).$$

Sei $t \in (t_0, b]$; $\gamma_1 := \gamma_{|[a,t_0]}, \gamma_2 := \gamma_{|[t_0,t]}, \gamma_3 := \gamma_{|[a,t]}$. Dann: $\gamma_3 = \gamma_1 \oplus \gamma_2$ und $\underbrace{L(\gamma_3)}_{=s(t)} = \underbrace{L(\gamma_1)}_{=s(t_0)} + L(\gamma_2) \implies s(t) - s(t_0) = L(\gamma_2)$ (I).

$\tilde{Z} := \{t_0, t\}$ ist eine Zerlegung von $[t_0, t] \implies \|\gamma(t) - \gamma(t_0)\| = L(\gamma_2, \tilde{Z}) \leq L(\gamma_2)$

Definition: $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ durch $F(t) = \int_a^t \|\gamma'(\tau)\| \mathrm{d}\tau$. 2.Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung $\implies$ F ist differenzierbar und $F'(t) = \|\gamma'(t)\| \ \forall t \in [a, b]$. Sei

$Z = \{\tau_0, \dots, \tau_m\}$ eine beliebige Zerlegung von $[t_0, t]$.

$$\int_{\tau_{j-1}}^{\tau_j} \gamma'(\tau)\mathrm{d}\tau = \left(\cdots, \int_{\tau_{j-1}}^{\tau_j} \eta_k'(\tau)\mathrm{d}\tau, \cdots\right) \overset{\text{A1}}{=} (\cdots, \eta_k(\tau_j) - \eta_k(\tau_{j-1}), \cdots) = \gamma(\tau_j) - \gamma(\tau_{j-1})$$

$\implies \|\gamma(\tau_j) - \gamma(\tau_{j-1})\| \overset{12.4}{\leq} \displaystyle\int_{\tau_{j-1}}^{\tau_j} \|\gamma'(\tau)\|\mathrm{d}\tau$. Summation $\implies L(\gamma_2, Z) \leq \displaystyle\int_{t_0}^{t} \|\gamma'(\tau)\|\mathrm{d}\tau = F(t) - F(t_0) \implies L(\gamma_2) \leq F(t) - F(t_0)$ (III).

$(I), (II), (III) \implies \|\gamma(t) - \gamma(t_0)\| \overset{(II)}{\leq} L(\gamma_2) \overset{(I)}{=} s(t) - s(t_0) \overset{(III)}{\leq} F(t) - F(t_0)$

$$\implies \underbrace{\frac{\|\gamma(t) - \gamma(t_0)\|}{t - t_0}}_{\overset{t \to t_0}{\to} \|\gamma'(t_0)\|} \leq \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0} \leq \underbrace{\frac{F(t) - F(t_0)}{t - t_0}}_{\overset{t \to t_0}{\to} F'(t_0) = \|\gamma'(t_0)\|}$$

(3) $L(\gamma) = s(b) = s(b) - s(a) \overset{AI}{=} \displaystyle\int_a^b s'(t)\mathrm{d}t \overset{(2)}{=} \int_a^b \|\gamma'(t)\|\mathrm{d}t$ ∎

Beispiele:

(1) $x_0, y_0 \in \mathbb{R}^n, \gamma(t) := x_0 + t(y_0 - x_0)$ $(t \in [0, 1])$. $\gamma'(t) = y_0 - x_0 \implies L(\gamma) = \displaystyle\int_0^1 \|y_0 - x_0\|\mathrm{d}t = \|y_0 - x_0\|$.

(2) Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und $\gamma(t) := (t, f(t)), t \in [a, b]$. γ ist ein Weg im $\mathbb{R}^2$. γ ist rektifizierbar $\iff f \in \mathrm{BV}[a, b]$. Γ_γ =Graph von f. Jetzt sei $f \in C^1[a, b] \overset{12.5}{\implies} L(\gamma) = \displaystyle\int_a^b \|\gamma'(t)\|\mathrm{d}t = \int_a^b (1 + f'(t)^2)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}t$.

(3) $\gamma(t) := (\cos t, \sin t)$ $(t \in [0, 2\pi])$. $\gamma'(t) = (-\sin t, \cos t)$. $\|\gamma'(t)\| = 1\ \forall t \in [0, 2\pi] \overset{12.5}{\implies} s'(t) = 1\ \forall t \in [0, 2\pi] \implies s(t) = t\ \forall t \in [0, 2\pi]$ (**Bogenmaß**). **Winkelmaß**: $\varphi := \frac{180}{\pi}t$. $L(\gamma) = 2\pi$.

Definition

$\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ sei ein Weg.

(1) γ heißt **stückweise stetig differenzierbar** $:\iff \exists z = \{t_0, \dots, t_m\} \in \mathfrak{Z}$ mit: $\gamma_{|[t_{k-1}, t_k]}$ sind stetig differenzierbar $(k = 1, \dots, m) \iff \exists$ stetig differenzierbare Wege $\gamma_1, \dots, \gamma_l$: $\gamma = \gamma_1 \oplus \cdots \oplus \gamma_l$.

(2) γ heißt **glatt** $:\iff \gamma$ ist stetig differenzierbar und $\|\gamma'(t)\| > 0\ \forall t \in [a, b]$.

(3) γ heißt **stückweise glatt** $:\iff \exists$ glatte Wege $\gamma = \gamma_1 \oplus \cdots \oplus \gamma_l$

Aus 12.2 und 12.5 folgt:

Satz 12.6 (Rektivizierbarkeit von Wegsummen)
Ist $\gamma = \gamma_1 \oplus \cdots \oplus \gamma_l$ stückweise stetig differenzierbar, mit stetig differenzierbaren Wegen $\gamma_1, \dots, \gamma_l \implies \gamma$ ist rektifizierbar und $L(\gamma) = L(\gamma_1) + \cdots + L(\gamma_l)$.

Definition
Sei $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ ein Weg. γ heißt eine **Parameterdarstellung** von Γ_γ.

Beispiele:

(1) $x_0, y_0 \in \mathbb{R}^n, \gamma_1(t) := x_0 + t(y_0 - x_0)\ t \in [0,1],\ \gamma_2(t) := \gamma_1^-(t)\ t \in [0,1],\ \gamma_3(t) := x_0 + 7t(y_0 - x_0)\ t \in [0, \frac{1}{7}]$. $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ sind Parameterdarstellungen von $S[x_0, y_0]$.

(2) $\gamma_1(t) = (\cos t, \sin t),\ (t \in [0, 2\pi]), \gamma_2(t) := (\cos t, \sin t), (t \in [0, 4\pi])$. γ_1, γ_2 sind Parameterdarstellungen von $K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$.

Definition
$\gamma_1 : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ und $\gamma_2 : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^n$ seien Wege.

γ_1 und γ_2 heißen **äquivalent**, in Zeichen $\gamma_1 \sim \gamma_2 :\iff \exists h : [a,b] \to [\alpha, \beta]$ stetig und streng wachsend, $h(a) = \alpha, h(b) = \beta$ und $\gamma_1(t) = \gamma_2(h(t))\ \forall t \in [a,b]$ (also $\gamma_1 = \gamma_2 \circ h$). h heißt eine **Parametertransformation** (PTF). Analysis 1 $\implies h([a,b]) = [\alpha, \beta] \implies \Gamma_{\gamma_1} = \Gamma_{\gamma_2}$. Es gilt: $\gamma_2 = \gamma_1 \circ h^{-1} \implies \gamma_2 \sim \gamma_1$. „$\sim$“ ist eine Äquivalenzrelation.

Beispiele:

(1) $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ seien wie in obigem Beispiel (1). $\gamma_1 \sim \gamma_3, \gamma_1 \nsim \gamma_2$.

(2) γ_1, γ_2 seien wie in obigem Beispiel (2). $\gamma_1 \nsim \gamma_2$, denn $L(\gamma_1) = 2\pi \neq 4\pi = L(\gamma_2)$

Satz 12.7 (Eigenschaften der Parametertransformation)
$\gamma_1 : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ und $\gamma_2 : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^n$ seien äquivalente Wege und $h : [a,b] \to [\alpha, \beta]$ eine Parametertransformation.

(1) γ_1 ist rektifizierbar $\iff$ γ_2 ist rektifizierbar. In diesem Falle: $L(\gamma_1) = L(\gamma_2)$

(2) Sind γ_1 und γ_2 glatt $\implies h \in C^1[a,b]$ und $h' > 0$.

Beweis

(2) In den großen Übungen.

(1) Es genügt zu zeigen: Aus γ_2 rektifizierbar folgt: γ_1 ist rektifizierbar und $L(\gamma_1) \leq L(\gamma_2)$. Sei $Z = \{t_0, \ldots, t_m\} \in \mathfrak{Z} \implies \tilde{Z} := \{h(t_0), \ldots, h(t_m)\}$ ist eine Zerlegung von $[\alpha, \beta]$.

$$L(\gamma_1, Z) = \sum_{j=1}^{m} \|\gamma_1(t_j) - \gamma_1(t_{j-1})\| = \sum_{j=1}^{m} \|\gamma_2(h(t_j)) - \gamma_2(h(t_{j-1}))\| = L(\gamma_2, \tilde{Z}) \leq L(\gamma_2)$$

$\implies \gamma_1$ ist rektifizierbar und $L(\gamma_1) \leq L(\gamma_2)$. ∎

Weglänge als Parameter Es sei $\gamma : [a,b] - > \mathbb{R}^n$ ein *glatter* Weg. 12.5 $\implies \gamma$ ist rb. $L := L(\gamma)$. 12.5 $\implies s \in C^1[a,b]$ und $s'(t) = ||\gamma'(t)|| > 0\ \forall t \in [a,b]$. s ist also *streng wachsend.* Dann gilt: $s([a,b]) = [0, L],\ s^{-1} : [0, L] \to [a,b]$ ist streng wachsend und stetig db. $(s^{-1})'(\sigma) = \frac{1}{s'(t)}$ für $\sigma \in [0, L],\ s(t) = \sigma$.

Definition
$\tilde{\gamma}[0, L] \to \mathbb{R}^n$ durch $\tilde{\gamma}(\sigma) := \gamma(s^{-1}(\sigma))$, also $\tilde{\gamma} = \gamma \cdot s^{-1}$; $\tilde{\gamma}$ ist ein Weg im $\mathbb{R}^n$ und $\tilde{\gamma} \sim \gamma$; $\Gamma_\gamma = \Gamma_{\tilde{\gamma}}$.

12.7 $\implies$ $\tilde{\gamma}$ ist rb, $L(\tilde{\gamma}) = L(\gamma) = L$, $\tilde{\gamma}$ ist stetig db. $\tilde{\gamma}$ heißt Parameterdarstellung von Γ_γ mit der Weglänge als Parameter. Warum?

Darum: Sei $\tilde{s}$ die zu $\tilde{\gamma}$ gehörende Weglängenfunktion. $\forall \sigma \in [0, L] : \tilde{\gamma}(\sigma) = \gamma(s^{-1}(\sigma))$. Sei $\sigma \in [0, L]$, $t := s^{-1}(\sigma) \in [a, b]$, $s(t) = \sigma$.

$\tilde{\gamma}(\sigma) = (s^{-1})'(\sigma) \cdot \gamma'(s^{-1}(\sigma)) = \frac{1}{s'(t)}\gamma'(t) \overset{12.5}{=} \frac{1}{||\gamma'(t)||}\gamma'(t) \implies ||\gamma'(\sigma)|| = 1$ ($\implies$ $\tilde{\gamma}$ ist glatt).

$\tilde{s}'(\gamma) \overset{12.5}{=} ||\gamma'(\sigma)|| = 1 \xRightarrow{\tilde{s}(0)=0} \tilde{s}(\sigma) = \sigma$.

Also: $||\tilde{\gamma}'(\sigma)|| = 1$, $\tilde{s}(\sigma) = \sigma \; \forall \sigma \in [0, L]$.

Beispiel
$\gamma(t) = \frac{e^t}{\sqrt{2}}(\cos t, \sin t)$, $t \in [0, 1]$; γ ist stetig db; Nachrechnen: $||\gamma'(t)|| = e^t \; \forall t \in [0, 1] \implies \gamma$ ist glatt.

$s'(t) \overset{12.5}{=} ||\gamma'(t)|| = e^t \implies s(t) = e^t + c \implies 0 = s(0) = 1 + c \implies c = -1$, $s(t) = e^t - 1$ ($t \in [0, 1]$) $\implies L = L(\gamma) = s(1) = e - 1$. $e^t = 1 + s(t)$, $t = \log(1 + s(t))$.

$\tilde{\gamma}(\sigma) = \gamma(s^{-1}(\sigma)) = \gamma(\log(1 + \sigma)) = \frac{1+\sigma}{\sqrt{2}}(\cos(\log(1 + \sigma)), \sin(\log(1 + \sigma)))$, $\sigma \in [0, e - 1]$.