

## 23. Analytische Geometrie

### 23.1. Quadriken

$K$  sei ein Körper,  $f \in K[X_1, \dots, X_n]$

$$f(X_1, \dots, X_n) = \sum_{i_1, \dots, i_n \in \mathbb{N}} \alpha_{i_1, \dots, i_n} \underbrace{X_1^{i_1} \dots X_n^{i_n}}_{=: \underline{X}^{\underline{i}}} = \sum_{\underline{i} \in \mathbb{N}^n} \alpha_{\underline{i}} \cdot \underline{X}^{\underline{i}}$$

$\underline{i}$  heißt **Multiindex**.

**Definition:** Für  $\underline{i} \in \mathbb{N}^n$  sei  $|\underline{i}| := i_1 + \dots + i_n$  der **Grad** von  $\underline{X}^{\underline{i}}$ .

Der **(Gesamt-)Grad** von  $f$  ist  $\deg(f) := \max\{|\underline{i}| : \alpha_{\underline{i}} \neq 0\}$ .

**Ziel:** Beschreibe die Nullstellenmenge  $\mathcal{N}(f) := \{x = (x_1, \dots, x_n) \in K^n \mid f(x_1, \dots, x_n) = 0\}$  für ein Polynom  $f$  mit  $\deg(f) = 2$ .

**Bemerkung:** Den Fall eines oder mehrerer Polynome vom Grad 1 erledigt die lineare Algebra. Mehrere Polynome vom Grad  $\geq 2$  behandelt die **Kommutative Algebra und algebraische Geometrie**.

**Vorarbeit:** Klassifiziere die Menge  $\mathcal{N}(f)$  durch Klassifizierung der Polynome. (Erinnerung: Klasseneinteilung entspricht einer Äquivalenzrelation)

Dazu sei  $G \leq \text{Aut}_{\text{aff}}(K^n)$  (Untergruppe).

Definiere hiermit eine Äquivalenzrelation auf Polynomen bzw. auf Teilmengen  $T \subseteq K^n$ .

$$\begin{aligned} f_1 \approx_G f_2 &: \iff \exists \mu \in K^\times \exists \varphi \in G : f_2 = \mu \cdot (f_1 \circ \varphi) \\ M_1 \sim_G M_2 &: \iff \exists \varphi \in G : M_2 = \varphi(M_1) \end{aligned}$$

Klar:  $f_1 \approx_G f_2 \implies \mathcal{N}(f_1) \sim_G \mathcal{N}(f_2)$

**Ziel:** Klassifiziere die Polynome für spezielle  $G$ .

- Affine Klassifikation (für  $\text{Char}(K) \neq 2$ ):

$$G = \text{Aut}_{\text{aff}}(K^n) = \{\varphi = (A, b) \mid A \in \text{GL}_n(K), b \in K^n\}$$

- Euklidische Klassifikation:

$$G = \text{Aut}_{\text{aff}}(\mathbb{R}^n) = \{(A, b) \mid A \in O_n, b \in \mathbb{R}^n\}$$

Sei nun  $\text{Char}(K) \neq 2$ .

**Vorbereitung:** Jedes Polynom  $f$  mit  $\deg(f) = 2$  hat die Form

$$f(X_1, \dots, X_n) = \sum_{i,j=1}^n \alpha_{ij} X_i X_j + 2 \sum_{i=1}^n \beta_i X_i + \gamma$$

mit einer symmetrischen Matrix  $A = (\alpha_{ij}) \neq 0$ ,  $b = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} \in K^n$ ,  $\gamma \in K$ .

**Beweis:** (Symmetrie von A)

Falls  $A$  nicht symmetrisch ist, ersetze  $A$  durch

$$\frac{1}{2} (A + A^\top) =: A'$$

■

**Beachte:** Für  $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in K^n$  gilt

$$f(x^\top) = x^\top A x + 2b^\top x + \gamma$$

mit  $A^\top = A$ .

$Q := \mathcal{N}(f)$  heißt **affine Quadrik**.

**Lemma:**

Für  $f$  wie oben und  $\varphi = (C, d) \in \text{Aut}_{\text{aff}}(K^n)$  sei  $g(y) := (f \circ \varphi)(y)$ . Dann ist

$$g(y) = y^\top A' y + 2b'^\top y + \gamma'$$

wobei  $A' := C^\top A C$ ,  $b' := C^\top (A d + b)$ ,  $\gamma' := f(d)$ .

**Beweis:**

$$\begin{aligned} f(\varphi(y)) &= f(Cy + d) \\ &= \underbrace{(Cy + d)^\top}_{y^\top C^\top + d^\top} A (Cy + d) + 2b^\top (Cy + d) + \gamma \\ &= y^\top \underbrace{C^\top A C}_{=: A'} y + d^\top A C y + \underbrace{y^\top C^\top A d}_{\substack{\in K^{1 \times 1} \\ = d^\top A^\top C y = d^\top A C y}} + 2b^\top C y + \underbrace{d^\top A d + 2b^\top d + \gamma}_{=: \gamma'} \\ &= y^\top A' y + 2b'^\top y + \gamma' \end{aligned}$$

■

**Prinzip der Klassifikation:** Zu gegebenem  $f$  finde  $(C, d)$ , so dass  $A'$ ,  $b'$ ,  $\gamma'$  eine einfache, übersichtliche “Normalform” annehmen.

**Bemerkung:**  $\varphi$  bewirkt Wechsel des Koordinatensystems  $y = \varphi^{-1}(x) = D_{\mathcal{L}}(x)$ .  $y$  beschreibt  $Q = \mathcal{N}(f)$  im Koordinatensystem  $\mathcal{L}$ .

**Satz 36 (Satz von der quadratischen Ergänzung):**

Sei  $A \in K^{n \times n}$  symmetrisch vom Rang  $r$  und  $\text{Char}(K) \neq 2$ . Dann existiert  $C \in \text{GL}_n(K)$  so dass

$$C^{\top} A C = \text{diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_r, 0, \dots, 0)$$

**Beweis:** Sei  $A = (\alpha_{ij})$  mit  $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$  für alle  $i, j$ .

Nutze eine Variante des Gaußalgorithmus; es genügt Diagonalgestalt zu erreichen, den Rest erledigen Vertauschungsmatrizen  $V_{ij}$ .

$\nu$ -ter Schritt: Angenommen die Zeilen (Spalten) mit einer Nummer kleiner  $\nu$  haben die gewünschte Form. Dann ist:

$$A_{\nu} := \begin{pmatrix} * & & & 0 & & \\ & \ddots & & & \ddots & \\ & & * & & & 0 \\ 0 & & & * & \dots & * \\ & \ddots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ & & 0 & * & \dots & * \end{pmatrix}$$

Unterscheide folgende Fälle:

(1)  $\alpha_{\nu\nu} \neq 0$ :

Mache Zeilenumformung: Subtrahiere Vielfaches der  $\nu$ -ten Zeile von der unteren Zeile, so dass dort die  $\nu$ -te Spalte Null wird.

Dies geht mit

$$C' := I - \sum_{k=\nu+1}^n \frac{\alpha_{k\nu}}{\alpha_{\nu\nu}} E_{k\nu} : \quad C' A_{\nu} = (\beta_{ij})$$

mit  $\beta_{\nu+1,\nu} = \dots = \beta_{n,\nu} = 0$ . Die  $\nu$ -te Zeile ist  $\beta_{\nu j} = \alpha_{\nu j} (= \alpha_{j\nu})$ .

(2)  $\alpha_{\nu\nu} = 0$ ,  $\alpha_{kk} \neq 0$  für ein  $k > \nu$ :

Bilde  $A'_{\nu} := V_{\nu k} A_{\nu} V_{\nu k}$ , dann weiter wie in Fall 1.

(3)  $\alpha_{kk} = 0$  für  $k = \nu, \dots, n$ :

Ist  $\alpha_{k\nu} = 0 \forall k \geq \nu$ , so ist bereits  $A_{\nu}$  diagonal bis Zeile  $\nu$ .

Sonst sei  $\beta := \alpha_{k\nu} \neq 0$  für ein  $k > \nu$  (addiere die  $k$ -te Zeile zur  $\nu$ -ten). Nutze die Additionsmatrix  $T := A_{\nu k}(1) = I + E_{\nu k}$  mit  $T^{\top} = I + E_{k\nu}$ .

Dann folgt  $A'_{\nu} := T A_{\nu} T^{\top}$  hat  $\alpha'_{\nu\nu} = 2\beta \neq 0$  (da  $\text{Char}(K) \neq 2$ ). Fahre fort wie in Fall 1. ■

**Vorsicht:** Die  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  sind im allgemeinen nicht eindeutig.

**Satz 37 (Trägheitssatz von Sylvester):**

Sei  $A \in K^{n \times n}$  symmetrisch vom Rang  $r$ .

- (1) Für  $K = \mathbb{C}$  existiert  $C \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$  mit

$$C^\top A C = \text{diag}(\underbrace{1, \dots, 1}_r, 0, \dots, 0)$$

- (2) Für  $K = \mathbb{R}$  existiert  $C \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$  mit

$$C^\top A C = \text{diag}(\underbrace{1, \dots, 1}_p, \underbrace{-1, \dots, -1}_q, 0, \dots, 0)$$

wobei  $p, q$  durch  $A$  eindeutig bestimmt sind.

**Beweis:** (1) Nach Satz 36 mit  $D := \text{diag}(\beta_1, \dots, \beta_r, 0, \dots, 0)$ .

Weiteres umformen liefert:

$$D^\top \cdot \text{diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_r, 0, \dots, 0) \cdot D = \text{diag}(\beta_1^2 \alpha_1, \dots, \beta_r^2 \alpha_r, 0, \dots, 0)$$

Falls  $\beta_i$  Nullstelle von  $X^2 - \frac{1}{\alpha_i}$  ist, existiert in  $\mathbb{C}$  immer in eine Diagonalmatrix  $\text{diag}(1, \dots, 1, 0, \dots, 0)$ .

- (2) Ähnlich für  $\mathbb{R}$ . Vorzeichen berücksichtigen

Restbehauptung:  $p$  ist eindeutig bestimmt durch  $A$

Behauptung:  $p = \max \{ \dim U \mid U \leq \mathbb{R}^n \text{ mit } s_A|_U \text{ positiv definit} \}$  wobei  $s_A(x, y) := \langle Ax, y \rangle$ .

Sei anderes  $C'$  mit zugehörigem  $p', q'$ . Setze

$$\begin{aligned} b_i &:= C e_i \\ b'_i &:= C' e_i \\ U &:= \langle b_1, \dots, b_p \rangle \\ U' &:= \langle b'_1, \dots, b'_{p'} \rangle \\ V &:= \langle b_{p+1}, \dots, b_{p+q} \rangle \\ V' &:= \langle b'_{p'+1}, \dots, b'_{p'+q'} \rangle \end{aligned}$$

Dann sind  $s_A|_U, s_A|_{U'}, -s_A|_V, -s_A|_{V'}$  positiv definit.

Für  $W := \text{Kern}(\Lambda_A) = \langle b_{r+1}, \dots, b_n \rangle = \langle b'_{r+1}, \dots, b'_n \rangle$  gilt

$$\mathbb{R}^n = U \oplus V \oplus W = U' \oplus V' \oplus W$$

Damit folgt

$$U \cap (V' \oplus W) = 0,$$

denn

$$\begin{aligned}\forall x \in U \cap (V' \oplus W) : s_A(x, x) \geq 0, s_A(x, x) \leq 0 &\implies s_A(x, x) = 0 \\ &\implies x = 0\end{aligned}$$

Damit folgt  $p = \dim U \leq \dim U' = p'$ , da

$$\begin{aligned}\dim U' + \dim(V' + W) &= n \\ &\geq \dim(U + V' + W) \\ &= \dim(U \oplus V' + W) \\ &= \dim U + \dim(V' + W)\end{aligned}$$

Aus Symmetriegründen folgt  $p = p'$ . ■

**Fortsetzung der Polynomklassifikation (deg = 2) über beliebigem Körper  $K$ :** Aus obigem Lemma und Satz 37 folgt: Der quadratische Anteil der Polynome  $f(x) = x^\top A x + 2b^\top x + \gamma$  lässt sich durch eine geeignete affine Abbildung  $\varphi = (C, d)$  auf folgende einfache Gestalt bringen:

$$\alpha_1 x_1^2 + \alpha_2 x_2^2 + \dots + \alpha_n x_n^2$$

**Beachte:** Abändern von  $C$ , etwa  $C_1 = \text{diag}(\underbrace{1, \dots, 1}_r, B)$  mit  $B \in \text{GL}_{n-r}(K)$ , ändert den quadratischen Anteil **nicht**.

**Nächste Vereinfachung:** linearer Term  $2b'^\top y$   
Kann eventuell  $2b'^\top y = 0$  erreicht werden?

$$b' \stackrel{\text{Def.}}{=} C^\top (Ad + b) = 0 \iff Ad + b = 0$$

Das heißt das LGS  $Az = -b$  hat die Lösung  $z = d$ .

**Definition:** Falls eine Lösung  $d$  existiert, so heißt  $d$  **Mittelpunkt** der Quadrik.

**Beachte:**

$$y = d + t \in \mathcal{N}(f) \implies d - t \in \mathcal{N}(f)$$

**Beweis:**  $f(d + t) = 0$ , das heißt:

$$\begin{aligned}(d + t)^\top A(d + t) + 2b^\top (d + t) + \gamma &= 0 \\ (d + t)^\top A(d + t) + 2(-Ad)^\top (d + t) + \gamma &= 0 \\ (d + t)^\top A(d + t) - 2d^\top A(d + t) + \gamma &= 0 \\ \iff (d - t)^\top A(d + t) + \gamma &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f(d - t) &= (d - t)^\top A(d - t) + 2(-Ad)^\top (d - t) + \gamma \\ &= -(d - t)^\top A(d + t) + \gamma \\ &= 0\end{aligned}$$
■

**Affine Klassifikation der Quadriken mit Mittelpunkt:**(1) Fall  $K = \mathbb{C}$ :

(a)  $f = X_1^2 + \dots + X_r^2 \quad (\gamma' = 0)$

(b)  $f = X_1^2 + \dots + X_r^2 + 1 \quad (\gamma' \neq 0)$

(2) Fall  $K = \mathbb{R}$ :

(a)  $f = X_1^2 + \dots + X_p^2 - X_{p+1}^2 - \dots - X_{p+q}^2 \quad (\text{ohne Einschränkung } p \geq q)$

(b)  $f = X_1^2 + \dots + X_p^2 - X_{p+1}^2 - \dots - X_{p+q}^2 + 1 \quad (\gamma' \neq 0)$

**Beispiel:**  $n = r = 2$ 

(1) Ellipse:  $f = X_1^2 + X_2^2 - 1$

(2) Hyperbel:  $f = X_1^2 - X_2^2 + 1$

**Affine Klassifikation der Quadriken ohne Mittelpunkt:**

Jetzt sei  $Az = -b$  unlösbar. Es ist aber auch für  $A$  Diagonalform erreichbar:  $A = \text{diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_r, 0, \dots, 0)$ , wobei  $r = \text{rg}(A)$  ist.

Daraus folgt: es existiert ein  $d$  mit

$$Ad + b =: c \in \langle e_{r+1}, \dots, e_n \rangle \quad (c \neq 0)$$

Nun wähle  $C_1 = \text{diag}(\underbrace{1, \dots, 1}_r, B)$ , so dass  $C_1^\top c = -e_{r+1}$ .

$$C_1^\top c = C_1^\top (Ad + b) =: b'$$

**Beachte:**  $c$  bleibt unverändert wenn  $d$  durch  $d + y$  mit  $y \in \langle e_{r+1}, \dots, e_n = \text{Kern}(\Lambda_A) \rangle$  ersetzt wird.

$$\text{Somit: } f = \alpha_1 X_1^2 + \dots + \alpha_r X_r^2 - \underbrace{2X_{r+1}}_{2b'^\top X} + \gamma'$$

Schließlich: affine Transformation  $\varphi = (I, \frac{1}{2}\gamma' e_{r+1})$  führt zu

$$\begin{aligned} f &= \alpha_1 X_1^2 + \dots + \alpha_r X_r^2 - 2 \left( X_{r+1} + \frac{1}{2}\gamma' \right) + \gamma' \\ &= \alpha_1 X_1^2 + \dots + \alpha_r X_r^2 - 2X_{r+1} \end{aligned}$$

(1) Fall  $K = \mathbb{C}$ :  $f = X_1^2 + \dots + X_r^2 - 2X_{r+1} \quad (\text{für } r < n)$

(2) Fall  $K = \mathbb{R}$ :  $f = X_1^2 + \dots + X_p^2 - X_{p+1}^2 - \dots - X_{p+q}^2 - 2X_{r+1} \quad (p \geq q)$

**Euklidische Klassifikation**

( $\varphi = (x \mapsto Cx + d)$  mit  $C \in O_n$  sei zugelassen)

Zur Diagonalisierung von  $A$  verwende den Spektralsatz. Das heißt, es existiert  $C \in O_n$  :  $C^T AC = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_r, 0, \dots, 0)$ , wobei ohne Beschränkung der Allgemeinheit  $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_r$  sei.

Der Rest ist wie oben. Damit erhalten wir folgende Normalformen:

$$(1) \lambda_1 X_1^2 + \dots + \lambda_r X_r^2 \quad (\text{bis auf einen gemeinsamen Faktor } \mu \neq 0 \text{ eindeutig})$$

$$(2) \lambda_1 X_1^2 + \dots + \lambda_r X_r^2 + 1$$

$$(3) \lambda_1 X_1^2 + \dots + \lambda_r X_r^2 - 2X_{r+1}$$

**Definition:** Die Zahlen  $|\lambda_i|^{-\frac{1}{2}}$  heißen **Halbachsenlängen**, die Geraden  $\langle e_i \rangle$  ( $i = 1, \dots, r$ ) heißen die **Hauptachsen** der Quadrik in Normalform. Der Übergang in Normalform heißt auch **Hauptachsentransformation**.

**23.2. Der Tangentialraum**

Sei  $K$  ein beliebiger Körper.

**Definition:** Die Nullstellenmenge  $\mathcal{F} = \mathcal{N}(f)$  eines Polynoms  $f \in K[X_1, \dots, X_n]$  heißt **Hyperfläche**.

Im folgenden sei stets  $\mathcal{N}(f) \neq \emptyset$ . Es sei  $P \in \mathcal{F} \subseteq K^n$  ein Punkt auf der Hyperfläche. Betrachte die Geraden  $G = P + \langle u \rangle$  mit  $u \in K^n$ .

$$Q \in G : Q = P + \tau u \quad \text{mit } u \in K^n$$

**Beachte:**  $P \in \mathcal{F}$  impliziert  $T \mid f(P + Tu) \in K[T]$  (da Nullstelle bei  $T = 0$ ).

**Definition:** Eine Gerade heißt **Tangente** an  $\mathcal{F}$  in  $P$ , falls  $T^2 \mid f(P + Tu)$  gilt.

**Ziel:** Bestimme alle Tangenten durch  $P$  (d.h.  $u$  variiert).

Dazu schreibe:

$$f(P + Tu) = \alpha_0 + \alpha_1 T + \alpha_2 T^2 + \dots \quad \text{mit } \alpha_i = \alpha_i(u)$$

Es gilt:  $\alpha_1 \in \text{Hom}(K^n, K)$ . Daraus folgt: es existiert ein Vektor  $J_p(f) := J_p \in K^{1 \times n}$  mit  $\alpha_1(u) = J_p \cdot u$ .  $J_p$  heißt **Jacobi-Matrix**.

In Analogie zur Analysis schreibe

$$J_p =: \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=p}$$

Es gilt

$$J_p = \left( \frac{\partial f}{\partial X_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial X_n} \right) \Big|_{x=p}$$

Das heißt:

$$G = P + \langle u \rangle \text{ ist Tangente} \iff J_p u = 0 \iff u \in J_p^\perp$$

**Definition:** (a)  $P \in \mathcal{F}$  heißt **regulär**, falls  $J_p \neq 0$ .  
Die Hyperebene  $T_p(\mathcal{F}) := P + J_p^\perp$  heißt **Tangentialraum**.

(b) Sonst heißt  $P$  **singulär** (oder **Singularität**).

**Beispiel:** (1) “Kurven”  $y = p(x)$  mit  $p(x) \in K[x]$

$$f(X, Y) = Y - p(X)$$

$\mathcal{N}(f)$  ist Singularitätenfrei, da

$$\begin{aligned} J_p &= \left( \frac{\partial f}{\partial X}, \frac{\partial f}{\partial Y} \right) \Big|_{(X,Y)=P} \\ &= \left( \frac{\partial p}{\partial X}, 1 \right) \Big|_{(X,Y)=P} \\ &\neq 0 \end{aligned}$$

(2) Kurve  $y^2 = x^3$   $f(X, Y) = Y^2 - X^3$

$$J_p = (3X^2, 2Y)_{(X,Y)=P} = 0 \iff P = (0, 0)$$

Also:  $(0, 0)$  ist die einzige Singularität.

**Satz 38:**

Sei  $\varphi$  eine Affinität von  $K^n$  und  $\mathcal{F}$  eine Hyperfläche. Dann gilt

(1)  $P \in \mathcal{F}$  regulär  $\iff \varphi(P)$  regulär in  $\varphi(\mathcal{F})$

(2)  $P$  regulär  $\iff T_{\varphi(P)}(\varphi(\mathcal{F})) = \varphi(T_P(\mathcal{F}))$

**Beweis:** (1)  $\varphi(\mathcal{F}) = \mathcal{N}(f \circ \varphi^{-1})$

Taylorentwicklung von  $f \circ \varphi^{-1}$  bei  $\varphi(P)$

Schreibe:

$$\varphi^{-1}(x) = Ax + b$$

mit  $A = (\alpha_{ij}) \in \text{GL}_n(K)$ .

Kettenregel anwenden auf  $f \circ \varphi^{-1}(X) = f(AX + b)$  mit



$$X = \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}, \quad AX + b = \begin{pmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_n \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial X_i}(AX + b) \Big|_{X=\varphi(P)} &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial X_j} \Big|_{Y=P} \cdot \frac{\partial (AX + b)_j}{\partial X_i} \Big|_{X=\varphi(P)} \\ &= J_P(f) \cdot \begin{pmatrix} \alpha_{1i} \\ \vdots \\ \alpha_{ni} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Damit folgt:

$$J_{\varphi(P)}(f \circ \varphi^{-1}) = J_P(f) \cdot A$$

$$P \text{ regulär in } \mathcal{F} \iff J_P(f) \neq 0$$

$$\stackrel{\exists A^{-1}}{\iff} J_{\varphi(P)}(f \circ \varphi^{-1}) \neq 0$$

$$\iff \varphi(P) \text{ regulär in } \varphi(\mathcal{F})$$

(2)

$$\begin{aligned} T_{\varphi(P)}(\varphi(\mathcal{F})) &= \varphi(P) + J_{\varphi(P)}(f \circ \varphi^{-1})^\perp \\ &\stackrel{!}{=} \varphi(\underbrace{P + J_P(f)^\perp}_{=T_P(\mathcal{F})}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J_P(f)Av &= 0 \iff Av \in J_P(f)^\perp \\ &\iff v \in A^{-1}(J_P(f)^\perp) \end{aligned}$$

**Beachte:**  $A^{-1} = \Lambda_\varphi$

**Beispiel:**  $\mathcal{F} = Q$  Quadrik mit  $f(P) = P^\top AP + 2b^\top P + \gamma = 0$  ( $A = A^\top$ ). Damit folgt:

$$\begin{aligned} f(P + Tu) &= \underbrace{f(P)}_{=0} + 2TP^\top Au + 2Tb^\top u + T^2u^\top Au \\ &= T \cdot 2(P^\top A + b^\top)u + T^2u^\top Au \\ &= T \cdot J_P(f) \cdot u + T^2u^\top Au \end{aligned}$$

$P$  singulär genau dann wenn  $f(P) = 0$  und  $AP = -b$  (das liefert entweder eine Hyperebene oder die leere Menge).

**Folgerung (aus Satz 38):**

- (1) Alle Singularitäten bleiben bei Affinitäten erhalten
- (2) Es genügt die Normalformen der affinen Klassifikation auf Singularitäten zu untersuchen

### 23.3. Die oskulierende Quadrik

Sei  $\mathcal{F} = \mathcal{N}(f) \in K^n$  Hyperfläche,  $P \in \mathcal{F}$  regulärer Punkt mit

$$T_P(\mathcal{F}) = \left\{ P + (\lambda_1, \dots, \lambda_n)^\top, \lambda_i \in K, \left( \frac{\partial f}{\partial X_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial X_n} \right)_{X=P} \cdot (\lambda_1, \dots, \lambda_n)^\top = 0 \right\}$$

Die definierende Gleichung ist aus der formalen Taylorentwicklung um  $P$  ablesbar.

$$f\left(P + (\lambda_1, \dots, \lambda_n)^\top\right) = f(P) + \frac{\partial f}{\partial X} \Big|_{X=P} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial X_i \partial X_j} \Big|_{X=P} \lambda_i \lambda_j + \text{höhere Terme}$$

(Dabei ist  $\text{Char}(K) \neq 2$ )

Daher sagt man: Der Tangentialraum approximiert  $\mathcal{F}$  in einer Umgebung von  $P$  in “erster” Näherung (d.h. Terme vom Grad größer 2 weglassen). Die Approximation wird besser je höher der Grad der zugelassenen Terme ist.

Wir lassen nun nur Terme bis zum Grad 2 zu.

**Definition:** Die Quadrik

$$Q_{P,\mathcal{F}} := \left\{ P + \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \mid \frac{\partial f}{\partial X} \Big|_{X=P} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \sum_{i,j} \frac{\partial^2 f}{\partial X_i \partial X_j} \Big|_{X=P} \cdot \lambda_i \lambda_j = 0 \right\}$$

heißt **oskulierende Quadrik** zu  $\mathcal{F}$  im Punkt  $P$  (auch **Schmiege-Quadrik** genannt).

**Bemerkung:** Die oskulierende Quadrik ist eine affine Invariante wie der Tangentialraum, d.h. für jede Affinität  $\varphi$  gilt:

$$Q_{\varphi(P),\varphi(\mathcal{F})} = \varphi(Q_{P,\mathcal{F}})$$

**Beweis:** wie für den Tangentialraum. ■

**Beispiel:** Die **Torusfläche**

$$\mathcal{T} = \mathcal{N}(f) \subseteq \mathbb{R}^3 \text{ für}$$

$$f(x, y, z) = (R^2 - r^2 + x^2 + y^2 + z^2) - 4R^2(x^2 + y^2)$$

Wir benötigen eine Liste der partiellen Ableitungen:

$$f_x = 4x(-R^2 - r^2 + x^2 + y^2 + z^2)$$

$$f_y = 4y(-R^2 - r^2 + x^2 + y^2 + z^2)$$

$$f_z = 4z(R^2 - r^2 + x^2 + y^2 + z^2)$$

Welche singulären Punkte  $f|_P = 0 = f_x|_P = f_y|_P = f_z|_P$  existieren?

- Fall  $0 < r < R$ :

$$R^2 - r^2 + x^2 + y^2 + z^2 > 0 \quad \forall x, y, z \in \mathbb{R}$$

Aus  $P = (x, y, z)$  singular folgt  $z = 0$  (da  $f_z|_P = 0$ ). Währe  $x \neq 0$  oder  $y \neq 0$ , so ergäbe  $f_x = f_y = 0$

$$x^2 + y^2 = R^2 + r^2$$

In  $f$  einsetzen:

$$(2R^2)^2 = 4R^2(R^2 + r^2) \quad \text{Widerspruch!}$$

Also folgt  $x = y = z = 0$ . Aber:  $f(0, 0, 0) = R^2 - r^2 > 0$ , da  $R > r$ , d.h.  $(0, 0, 0) \notin \mathcal{T}$ .

Damit sind alle Punkte auf  $\mathcal{T}$  regulär.

- Fall  $r \geq R > 0$ :  
Es gibt singuläre Punkte. Welche? Übung.

## 23.4. Durchschnitte von Hyperebenen

Sei  $K$  ein beliebiger Körper,  $R = K[X_1, \dots, X_n]$ .

**Problem:** Beschreibe die (gemeinsamen) Nullstellen endlich vieler vorgegebener Polynome  $f_i \in \mathbb{R}$ .

Mit  $\mathcal{F}_i := \mathcal{N}(f_i)$  betrachte also

$$\mathcal{D} := \bigcap_{i=1}^n \mathcal{F}_i = \mathcal{N}(f_1, f_2, \dots, f_m)$$

Eine Gerade  $G = P + \langle u \rangle$  heißt Tangente an  $\mathcal{D}$  in  $P \in \mathcal{D}$ , wenn  $G$  Tangente an jede Hyperfläche  $\mathcal{F}_i$  ist, d.h.

$$\left( \frac{\partial f_i}{\partial X_1}, \dots, \frac{\partial f_i}{\partial X_n} \right)_{X=P} \cdot u = 0 \quad \forall i$$

d.h. mit der **Jacobi-Matrix**:

$$J_P = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial X_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial X_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial X_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial X_n} \end{pmatrix}_{X=P} \in K^{m \times n}$$

Es gilt:  $J_P \cdot u = 0$ .

**Definition:** Die  $\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_m$  schneiden sich in  $P \in \mathcal{D}$  **transversal** wenn  $\text{rg}(J_P) = m$ . Dann heißt  $P$  regulärer Punkt von  $\mathcal{D}$  und

$$T_{P,\mathcal{D}} := P + \text{Kern}(\Lambda_{J_P})$$

heißt Tangentialraum.

**Bemerkung:**  $T_{P,\mathcal{D}} = T_{P,\mathcal{F}_1} \cap \dots \cap T_{P,\mathcal{F}_n}$  bei transversalem Schneiden.

**Beispiel:** Die orthogonale Gruppe  $O_n = \{A = (\alpha_{rs}) \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid A \cdot A^\top = I\}$

- (1)  $O_n$  ist der Durchschnitt von Hyperflächen (Quadriken) im  $\mathbb{R}^3$ .

Der zugehörige Polynomring ist

$$R = \mathbb{R}[X_{11}, X_{12}, \dots, X_{1n}, X_{21}, \dots, X_{n1}, \dots, X_{nn}] \in \mathbb{R}[X]$$

Nach Definition von  $O_n$  gilt:

$$O_n = \left\{ (\alpha_{rs}) \mid \sum_{k=1}^n \alpha_{ik} \cdot \alpha_{jk} = \delta_{ij} \right\}$$

d.h.  $\alpha_{rs} \in \mathbb{R}^{n^2}$  ist Nullstelle des Polynoms

$$f_{ij}(X) = \sum_{k=1}^n X_{ik} X_{jk} - \delta_{ij} \in \mathbb{R}$$

**Beachte:**  $f_{ij} = f_{ji}$ , daraus folgt  $O_n = \bigcap_{1 \leq i \leq j \leq n} \mathcal{F}_{ij}$  mit  $\mathcal{F}_{ij} := \mathcal{N}(f_{ij})$ .

- (2) Die  $\mathcal{F}_{ij}$  schneiden sich transversal in  $P = I$ .

Also insbesondere

$$T_{I, O_n} = \bigcap_{i \leq j} T_{I, \mathcal{F}_{ij}}$$

mit

$$\begin{aligned} \dim T_{I, O_n} &= n^2 - \text{card} \{(i, j) \mid 1 \leq i \leq j \leq n\} \\ &= n^2 - \sum_{j=1}^n j \\ &= n^2 - \frac{n(n+1)}{2} \\ &= \frac{1}{2}n(n-1) \end{aligned}$$

**Beweis (der Transversalität):** Aus  $\frac{\partial f_{ik}}{\partial X_{pq}} =: f_{ik,pq}$  folgt: Jacobi-Matrix  $J_I = (\alpha_{ik,pq}) \in \mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2} \times n^2}$  mit  $\alpha_{ik,pq} := f_{ik,pq}|_{X=I}$ .

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_{ik}}{\partial X_{pq}} &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial X_{ij} X_{kj}}{\partial X_{pq}} \\ &= \sum_{j=1}^n \left( X_{ij} \frac{\partial X_{kj}}{\partial X_{pq}} + X_{kj} \frac{\partial X_{ij}}{\partial X_{pq}} \right) \\ &= X_{iq} \delta_{kp} + X_{kq} \delta_{ip} \end{aligned}$$

Auswerten bei  $P = I$  liefert  $\delta_{iq} \delta_{kp} + \delta_{kq} \delta_{ip} = \alpha_{ik,pq}$ .

Bilde das Skalarprodukt zweier Zeilen von  $J_I$  (Zeile  $ik$  mit Zeile  $jl$ ):

$$\begin{aligned} \sum_{pq} \alpha_{ik,pq} \cdot \alpha_{jl,pq} &= \sum_{pq} (\delta_{iq}\delta_{kp} + \delta_{kq}\delta_{ip}) (\delta_{jq}\delta_{lp} + \delta_{lq}\delta_{jp}) \\ &= \delta_{ji}\delta_{lk} + \delta_{li}\delta_{jk} + \delta_{jk}\delta_{li} + \delta_{lk}\delta_{ji} \\ &= 2(\delta_{ij}\delta_{lk} + \delta_{jl}\delta_{ik}) \\ &= \begin{cases} 0 & \text{für } ik \neq jl \\ 2 \vee 4 & \text{für } ik = jl \end{cases} \end{aligned}$$

$\delta_{il}\delta_{jk} = 1$  impliziert  $i = l, j = k$  und wegen  $i \leq k, j \leq l$  gilt  $i \leq k = j \leq l = i$ , also  $ik = ii = il$ .

Damit folgt: Die Zeilen von  $J_I$  sind paarweise orthogonal und jeweils ungleich Null.  $\text{rg}(J_I)$  ist gleich der Anzahl Zeilen. Das heißt die  $\mathcal{F}_{ij}$  schneiden sich transversal bei  $I$ . ■

(3) Der Tangentialraum bei  $I$  ist

$$T_{I, O_n} = I + \bigoplus_{i < k} \mathbb{R}(\underbrace{E_{ik} - E_{ki}}_{=: B_{ik}})$$

**Beweis:** Die  $B_{ik}$  sind offenbar linear unabhängig im  $\mathbb{R}^{n^2}$ , also

$$\dim \langle B_{ik} \mid i < k \rangle = \sum_{k=1}^n (k-1) = \frac{n(n-1)}{2}$$

und  $B_{ik} \in \text{Kern}(\Lambda_{J_I})$ , da  $J_I \cdot B_{ik} = 0$  (leicht). ■

**Definition:** Eine Untergruppe  $\mathcal{J} \leq \text{GL}_n(K)$  (wie hier  $O_n$ ), die als Durchschnitt von Hyperflächen definiert ist, heißt **algebraische (Matrizen-)Gruppe**.

**Bemerkung:** Solche  $\mathcal{J}$  haben den großen Vorzug, dass Regularität an einem Punkt  $Q \in \mathcal{J}$  sich auf alle anderen Punkte von  $\mathcal{J}$  überträgt.

**Satz 39:**

Sei  $\mathcal{J}$  eine algebraische Gruppe mit mindestens einem Punkt. Dann ist jeder Punkt  $Q \in \mathcal{J}$  regulär und

$$T_{Q, \mathcal{J}} = Q \cdot T_{I, \mathcal{J}} = \{Q \cdot T \mid T \in T_{I, \mathcal{J}}\}$$

**Beweis:**  $\Lambda_Q : B \mapsto Q \cdot B$  ist eine Affinität von  $K^{n \times n}$ .

Schon gesehen: Affinitäten erhalten die Regularität und führen Tangentialräume ineinander über. ■

**Korollar:**

$Q_n$  ist Singularitätenfrei und die Dimension von  $T_{P,O_n}$  ist  $\frac{n(n-1)}{2}$ .