Kapitel 4

Höhere Dimensionen und weitere Modelle

4.1 Höhere Dimensionen

Für die euklidische Ebene $\mathbb{E}^2 = (\mathbb{R}^2, d_e)$ ist der n-dimensionale euklidische Raum $\mathbb{E}^n = (\mathbb{R}^2, d_e)$ mit

$$d_e : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad (x,y) \mapsto d_e(x,y) = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (x_k - y_k)^2}$$

die naheliegende Verallgemeinerung. Durch Nullsetzen der Koordinaten $3, ..., n$ sehen wir in ihr die ebene euklidische Geometrie. Analog können wir die zweidimensionale sphärische Geometrie auf $\mathbb{S}^2$ auf

$$\mathbb{S}^n := \left\{ x = (x_1, \ldots, x_{n+1} \in \mathbb{R}^{n+1} \;\middle|\; \sum_{k=1}^{n+1} x_k^2 = 1 \right\}$$

übertragen. Auch hier findet man $\mathbb{S}^2$ wieder. Für die zweidimensionale hyperbolische Geometrie haben wir bereits das Halbebenenmodell

$$\mathbb{H}^2 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 > 0\}, \qquad \mathrm{d}s_h^2 = \frac{\mathrm{d}x_1^2 + \mathrm{d}x_2^2}{x_2^2}$$

kennengelernt. Für eine differentierbare Kurve $c : [a,b] \longrightarrow \mathbb{H}^2$, $c(t) = (x_1(t), x_2(t))$ liefert dies eine Längenmessung

$$L_h(c) = \int_a^b \|c'(t)\|_{c(t)}^h \ \mathrm{d}t = \int_a^b \frac{\sqrt{(x_1'(t))^2 + (x_2'(t))^2}}{x_2(t)} \ \mathrm{d}t$$

ein Modell für die n-dimensionale hyperbolische Geometrie ist dann kanonisch gegeben durch

$$\mathbb{H}^n = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_n > 0\},$$

dem *oberen Halbraum*. Für das Wegelement gilt

$$\mathrm{d}s^2_{\mathbb{H}^n} = \frac{\sum_{k=1}^n \mathrm{d}x_k^2}{x_n^2},$$

wir erhalten für eine differenzierbare Kurve $c(t) = (c_1(t), \ldots, c_n(t))$ also durch

$$L_{\mathbb{H}^n}(c) = \int_a^b \|c'(t)\|^{\mathbb{H}^n}_{c(t)} \,\mathrm{d}t = \int_a^b \frac{\sqrt{\sum_{k=1}^n (c_k'(t))^2}}{c_n(t)} \,\mathrm{d}t$$

eine Längenmessung. Diese liefert eine Längenmetrik

$$d_{\mathbb{H}^n} : \mathbb{H}^n \times \mathbb{H}^n \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad (p, q) \mapsto d_{\mathbb{H}^n}(p, q) := \inf_{c \in \Omega_{pq}(\mathbb{H}^n)} L_{\mathrm{hyp}}(c).$$

Damit wird $(\mathbb{H}^n, d_{\mathbb{H}^n})$ zu einem metrischen Raum. Dieser ist ein Modell für die n-dimensionale hyperbolische Geometrie.

Weiter hatten wir bereits das Einheitskreismodell für die ebene hyperbolische Geometrie kennengelernt. Dieses lässt sich ebenfalls verallgemeinern zu

$$\mathbb{D}^n := \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{k=1}^n x_k^2 < 1\},$$

wobei für das Wegelement

$$\mathrm{d}s^2_{\mathbb{D}^n} = \frac{4 \sum_{k=1}^n \mathrm{d}x_k^2}{\left(1 - \sum_{k=1}^n x_k^2\right)^2}$$

gilt. Damit wird $(\mathbb{D}^n, d_{\mathbb{D}^n})$ zu einem metrischen Raum, dem *Einheitsballmodell* der n-dimensionalen hyperbolischen Geometrie.

Bemerkung 4.1.1 *(i) Wir werden sehen: Die beiden vorgestellten Modelle $(\mathbb{H}^n, d_{\mathbb{H}^n})$ und $(\mathbb{D}^n, d_{\mathbb{D}^n})$ sind isometrisch.*

(ii) $\mathbb{H}^n$ und $\mathbb{D}^n$ enthalten (viele) Kopien von $\mathbb{H}^2, \mathbb{D}^2$ (beispielsweise durch Nullsetzen von Koordinaten).

4.2 Das Hyperboloidmodell

Definiere auf $\mathbb{R}^{n+1}$ die quadratische Form

$$\star : \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad (x, y) \mapsto x \star y = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k - x_{n+1} y_{n+1}.$$

Definiere für $c \in \mathbb{R}$ dann $\mathbb{L}^n_c = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x \star x = c\}$. $\mathbb{L}_0$ heißt auch *Nullkegel.* $\mathbb{L}^3_{-c^2}$ spielt in der speziellen Relativitätstheorie eine wichtige Rolle (Lorentz-Minkowski-Raumzeit). Für unser hyperbolisches Modell setze

$$\mathbb{L}^n := \mathbb{L}^n_{-1} := \{x = (x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_1^2 + \ldots + x_n^2 - x_{n+1}^2 = -1\}.$$

Im Folgenden wollen wir eine Längemessung auf $\mathbb{L}^n$ definieren. Für eine differenzierbare Kurve $c : I \longrightarrow \mathbb{L}^n,\ t \mapsto c(t) = (c_1(t), \ldots, c_{n+1}(t))$ gilt $c(t) \star c(t) = -1$ für alle $t \in I$, also

$$-1 = c(t) \star c(t) = c_1(t)^2 + \ldots + c_n(t)^2 - c_{n+1}(t)^2.$$

Ableiten auf beiden Seiten liefert

$$0 = c_1'(t) c_1(t) + \ldots + c_n'(t) c_n(t) - c_{n+1}'(t) c_{n+1}(t) = c'(t) \star c(t).$$

der Tangentialraum an $c(t)$ in $p \in \mathbb{L}^n$ ist also

$$\begin{aligned} T_p\mathbb{L}^n &= \{c'(0) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid c : (-\epsilon, \epsilon) \longrightarrow \mathbb{L}^n \text{ ist differenzierbar mit } c(0) = p\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x \star p = 0\} \\ &= p^{\perp_\star}, \end{aligned}$$

der Orthogonalraum von p bezüglich der quadratischen Form $\star$.

Lemma 4.2.1 *Die quadratische Form $\star$ auf $\mathbb{R}^{n+1}$ eingeschränkt auf den Tangentialraum $T_p\mathbb{L}^n$ von $\mathbb{L}^n$ im Punkt p ist positiv definit für alle $p \in \mathbb{L}^n$.*

Beweis. Sei $p = (p_1, \ldots, p_n, p_{n+1}) = (\hat{p}, p_{n+1}) \in \mathbb{L}^n$ mit $\hat{p} \in \mathbb{R}^n$ und $x = (\hat{x}, x_{n+1}) \in T_p\mathbb{L}^n$ mit $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$. Sei weiter mit $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das Standardskalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$ gegeben. Wir betrachten zwei Fälle.

Fall (a) Es gilt $x_{n+1} = 0$. Dann ist $x \star x = \langle \hat{x}, \hat{x} \rangle$ und $\star$ ist damit wegen der positiven Definitheit von $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ebenfalls positiv definit.

Fall (b) Sei nun $x_{n+1} \neq 0$. Dann gilt auch $x = (\hat{x}, x_{n+1}) \neq 0$. Wir müssen also zeigen, dass

$x \star x > 0$. Nach Definition des Tangentialraums ist

$$0 = x \star p = x_1 p_1 + \ldots + x_n p_n - x_{n+1} p_{n+1} = \langle \hat{x}, \hat{p} \rangle - x_{n+1} p_{n+1}$$

und da $p \in \mathbb{L}^n$ weiter

$$-1 = p \star p = \langle \hat{p}, \hat{p} \rangle - p_{n+1}^2.$$

Die Cauchy-Schwarz-Ungleichung für $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ergibt

$$\langle \hat{x} \hat{x} \rangle \langle \hat{p} \hat{p} \rangle \geqslant \langle \hat{x}, \hat{p} \rangle^2 = (x_{n+1} p_{n+1})^2 = x_{n+1}^2 (1 + \langle \hat{p}, \hat{p} \rangle)$$

und damit

$$(x \star x) \langle \hat{p}, \hat{p} \rangle = \left(\langle \hat{x}, \hat{x} \rangle - x_{n+1}^2 \right) \langle \hat{p}, \hat{p} \rangle \geqslant x_{n+1}^2 > 0.$$

Da $\langle \hat{p}, \hat{p} \rangle > 0$, folgt $x \star x > 0$, was zu zeigen war. $\square$.

Bemerkung 4.2.2 *(i) Aus Lemma 4.2.1 folgt, das $\star$ für alle $p \in \mathbb{L}^n$ ein Skalarprodukt auf $T_p \mathbb{L}^n$ definiert, also eine Riemannsche Metrik ist. Das Wegelement*

$$\mathrm{d}s_{\mathbb{L}^n}^2 = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{d}x_k^2 - \mathrm{d}x_{n+1}^2$$

induziert für differenzierbare Kurven $c : I \longrightarrow \mathbb{L}^n$, $c(t) = (c_1(t), \ldots, c_{n+1}(t))$ eine Längenmessung

$$L_h(c) = \int_I \sqrt{\sum_{k=1}^{n} c_k'(t)^2 - c_{n+1}'(t)^2} \ \mathrm{d}t.$$

Diese liefert eine Abstandsfunktion $d_{\mathbb{L}^n}$, womit $(\mathbb{L}^n, d_{\mathbb{L}^n})$ zu einem metrischen Raum wird, dem Hyperboloidmodell für die n-dimensionale hyperbolische Geometrie.

(ii) Die Kurve

$$c : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{L}^n, \qquad t \mapsto c(t) = (\sinh t, 0, \ldots, 0, \cosh t)$$

ist eine isometrische Einbettung (d.h. $c(\mathbb{R})$ ist eine hyperbolische Geodätische), denn für jedes $t \in \mathbb{R}$ ist $c(t) \star c(t) = \sinh^2 t - \cosh^2 t = -1$ sowie

$$\|c'(t)\|_{\mathbb{L}^n}^2 = \cosh^2 t - \sinh^2 t = 1,$$

also

$$d_{\mathbb{L}^n}(c(t_1), c(t_2)) = \int_{t_1}^{t_2} \|c'(t)\|_{\mathbb{L}^n}^2 \ \mathrm{d}t = \int_{t_1}^{t_2} \ \mathrm{d}t = t - s = d_e(s, t),$$

das heißt c ist eine abstandstreue Kurve, also eine Isometrie.

4.3 Die Modelle sind isometrisch

Satz 4.3.1 *Die metrischen Räume* $(\mathbb{H}^n, d_{\mathbb{H}^n}), (\mathbb{D}^n, d_{\mathbb{D}^n})$ *und* $(\mathbb{L}^n, d_{\mathbb{L}^n})$ *sind isometrische Modelle der n-dimensionalen hyperbolischen Geometrie.*

Beweis. Für den Beweis wollen wir ein weiteres Modell angeben und anschließend explizite Isometrien in die drei obigen Modelle angeben. Betrachte die obere Hemisphäre

$$\mathbb{K}^n := \left\{ (x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \;\middle|\; \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 = 1,\; x_{n+1} > 0 \right\}$$

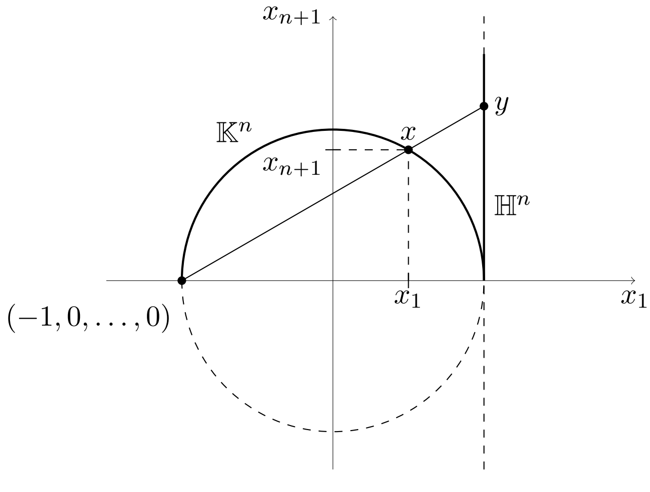
mit dem Wegelement

$$\mathrm{d}s_{\mathbb{K}^n}^2 = \frac{\mathrm{d}x_1^2 + \ldots + \mathrm{d}x_{n+1}^2}{x_{n+1}^2}.$$

Diese wird zu einem metrischen Raum $(\mathbb{K}^n, d_{\mathbb{K}^n})$. Betrachte nun die Abbildung

$$\begin{aligned} \alpha : \mathbb{K}^n &\longrightarrow \mathbb{H}^n := \{(1, x_2, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_{n+1} > 0\} \\ x = (x_1, \ldots, x_{n+1}) &\longmapsto \alpha(x) =: y = \left(1, \frac{2x_2}{x_1+1}, \ldots, \frac{2x_{n+1}}{x_1+1}\right) =: (y_1, \ldots, y_{n+1}) \end{aligned}$$

Dann ist α gerade die Zentralprojektion von $(-1, 0, \ldots, 0)$ aus.

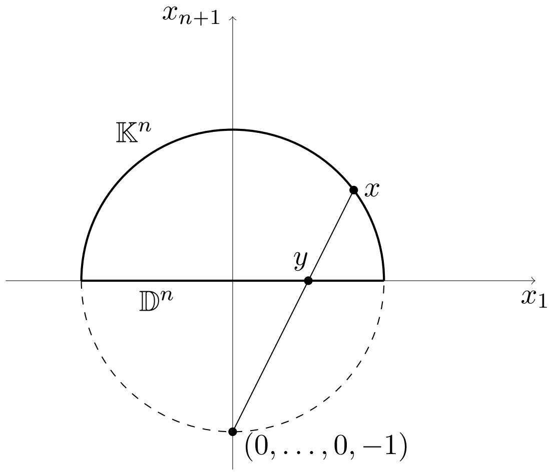


Die Formel für α ergibt sich direkt durch den Strahlensatz. Definiere nun

$$\beta : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{D}^n = \left\{ (x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \;\middle|\; x_{n+1} = 0,\; \sum_{i=1}^{n} x_i^2 < 1 \right\}$$

$$x = (x_1, \dots, x_{n+1}) \quad \mapsto \quad \beta(x) =: y = \left(\frac{x_1}{x_{n+1}+1}, \dots, \frac{x_n}{x_{n+1}+1}, 0 \right) = (y_1, \dots, _{n+1})$$

Dann ist β die Zentralprojektion von $(0, \dots, 0, -1)$ aus:



Auch hier ergibt sich die Formel unmittelbar. Definiere schließlich noch

$$\gamma : \mathbb{L}^n \longrightarrow \mathbb{K}^n, \qquad x = (x_1, \dots, x_{n+1}) \mapsto \gamma(l) =: y = \left(\frac{x_1}{x_{n+1}}, \dots, \frac{x_n}{x_{n+1}}, \frac{1}{x_{n+1}} \right) = (y_1, \dots, y_{n+1})$$

Auch γ ist die Zentralprojektion von $(0, \dots, 0, -1)$ aus. Wir zeigen nun (exemplarisch): Für eine differenzierbare Kurve $c : I \longrightarrow \mathbb{K}^n,\ t \mapsto (x_1(t), \dots, x_{n+1}(t))$ gilt

$$L_{\mathbb{H}^n}(\alpha \circ c) = L_{\mathbb{K}^n}(c),$$

das heißt α is längentreu. Daraus folgt mit den Definitionen der Metriken bereits $d_{\mathbb{H}^n}(\alpha(p), \alpha(q)) = d_{\mathbb{K}^n}(p, q)$ für alle $p, q \in \mathbb{K}^n$, also dass α eine Isometrie ist. Parametrisiere nun die Bildkurve $\alpha \circ c$ durch

$$y_2(t) := \frac{2x_2(t)}{x_1(t)+1}, \dots, y_{n+1}(t) := \frac{2x_{n+1}(t)}{x_1(t)+1}.$$

Es gilt dann

$$y_k'(t) = \frac{\mathrm{d}y_k(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{2x_k'(t)(x_1(t)+1) - 2x_k(t)x_1'(t)}{(x_1(t)+1)^2} = \frac{2}{x_1(t)+1} \left(x_k'(t) - \frac{x_k(t)}{x_1(t)+1} x_1'(t) \right).$$

Wegen

$$\sum_{i=1}^{n+1} x_i(t)^2 = 1$$

folgt

$$\sum_{i=2}^{n+1} x_i(t)^2 = 1 - x_1(t)^2$$

und

$$x_1(t)x_1'(t) = -\sum_{i=2}^{n+1} x_i(t)x_i'(t).$$

Damit erhalten wir

$$L_{\mathbb{H}^n}(\alpha\circ c) = \int_I \frac{1}{y_{n+1}(t)}\sqrt{\sum_{i=2}^{n+1} y_i'(t)^2}\,\mathrm{d}t, \qquad L_{\mathbb{K}^n}(c) = \int_I \frac{1}{x_{n+1}(t)}\sqrt{\sum_{i=1}^{n+1} x_i'(t)^2}\,\mathrm{d}t.$$

Für die Integranden rechnen wir mit $x_k := x_k(t)$:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{y_{n+1}^2}\left(\sum_{i=2}^{n+1}(y_i')^2\right) &= \frac{(x_1+1)^2}{4x_{n+1}^2}\frac{4}{(x_1+1)^2}\left(\sum_{i=2}^{n+1}\left(x_i' - \frac{x_i}{x_1+1}x_1'\right)^2\right)\\
&= \frac{1}{x_{n+1}^2}\left(\sum_{i=2}^{n+1}(x_i')^2 - \frac{2x_1'}{x_1+1}x\sum_{i=2}^{n+1}x_i'x_i + \frac{(x_1')^2}{(x_1+1)^2}\sum_{i=2}^{n+1}x_i^2\right)\\
&= \frac{1}{x_{n+1}^2}\left(\sum_{i=2}^{n+1}(x_i')^2 + \frac{2x_1'}{x_1+1}x_1x_1' + \frac{(x_1')^2}{(x_1+1)^2}(1-x_1^2)\right)\\
&= \frac{1}{x_{n+1}^2}\left(\sum_{i=2}^{n+1}(x_i')^2 + (x_1')^2\frac{2x_1}{x_1+1} + (x_1')^2\frac{(1-x_1)(1+x_1)}{(x_1+1)^2}\right)\\
&= \frac{1}{x_{n+1}}\left(\sum_{i=2}^{n+1}(x_i')^2 + \frac{(x_1')^2}{x_1+1}(2x_1+1-x_1)\right)\\
&= \frac{1}{x_{n+1}^2}\left(\sum_{i=1}^{n+1}(x_i')^2\right),
\end{aligned}$$

woraus die Behauptung folgt. Für β und γ verfahre analog. □

4.4 Isometrien und Geodätische des Halbraum-Modells

Satz 4.4.1 *Die folgenden Selbstabbildungen sind Isometrien von* $(\mathbb{H}^n, d_{\mathbb{H}^n})$*:*

(i) Euklidische Drehungen um die x_n*-Achse.*

(ii) Translationen parallel zur Hyperebene $x_n = 0$*.*

(iii) Streckungen $x \mapsto \lambda x$ *für* $\lambda > 0$*.*

Beweis. (i) Eine Rotation um die x_n-Achse ist gegeben durch eine Matrix

$$R = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{O}(n), \qquad A \in \mathcal{O}(n-1).$$

Ist $c : I \longrightarrow \mathbb{H}^n$ eine differenzierbare Kurve mit $c(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))$, so ist

$$\begin{aligned} L_{\mathbb{H}^n}(R \circ c) &= \int_I \frac{1}{(R \circ c)_n(t)} \sqrt{\sum_{i=1}^n (R \circ c)_i'(t)^2}\, \mathrm{d}t \\ &= \int_I \frac{1}{x_n(t)} \|(R \circ c)'\|_e\, \mathrm{d}t \\ &= \int_I \frac{1}{x_n(t)} \|Rc'(t)\|_e\, \mathrm{d}t \\ &= \int_I \frac{1}{x_n(t)} \|c'(t)\|_e\, \mathrm{d}t \\ &= L_{\mathbb{H}^n}(c), \end{aligned}$$

wobei die Linearität von R sowie $R \in \mathrm{Isom}(\mathbb{E}^n)$ benutzt wurde.

(ii) Eine Translation in $(x_1, \ldots, x_{n-1})$-Richtung ist gegeben durch die Abbidung

$$T_a : \mathbb{H}^n \longrightarrow \mathbb{H}^m, \qquad (x_1, \ldots, x_n) \mapsto (x_1 + a_1, \ldots, x_{n-1} + a_{n-1}, x_n)$$

mit $(a_1, \ldots, a_{n-1}, 0) \in \mathbb{R}^n$. Dann gelten jedoch erneut $(T_a \circ c)'(t) = c'(t)$ sowie $\frac{1}{(T_a \circ c)(t)} = \frac{1}{x_n(t)}$, woraus $L_{\mathbb{H}^n}(c) = L_{\mathbb{H}^n}(T_a \circ c)$ folgt.

(iii) Ein Streckung ist durch eine Abbildung

$$s_\lambda : \mathbb{H}^n \longrightarrow \mathbb{H}^n, \qquad (x_1, \ldots, x_n) \mapsto (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n)$$

gegeben Dann gilt

$$\frac{1}{(s_\lambda \circ c)(t)} \sqrt{\sum_{i=1}^n (s_\lambda \circ c)_i'(t)^2} = \frac{1}{\lambda x_n(t)} \sqrt{\lambda^2 \sum_{i=1}^n x_i'(t)^2} = \frac{1}{x_n(t)} \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i'(t)^2}$$

und es folgt die Behauptung. □

Bemerkung 4.4.2 *Mit Satz 4.4.1 hat man viele Isometrien:* $(\mathbb{H}^n, d_{\mathbb{H}^n})$ *ist homogen bezüglich der Isometriegruppe: Für* $p_0 = e_n$ *und beliebigem* $p \in \mathbb{H}^n$ *strecke* p_0 *um den Faktor* p_n *und verschiebe ihn anschließend um* $(p_1, \ldots, p_{n-1}, 0)$*. Dann ist*

$$p = \left(T_{(p_1, \ldots, p_{n-1}, 0)} \circ s_{p_n}\right)(p_0).$$

Man kann zeigen: Die Isometrien aus Satz 4.4.1 sind nicht alle Isometrien von $(\mathbb{H}^n, d_{\mathbb{H}^n})$.

Lemma 4.4.3 *Der Teilraum* $U \subseteq \mathbb{H}^n$ *gegeben durch die Gleichungen* $x_i = 0$ *für* $i \in \{1, \ldots, n-2\}$ *mit der von* $\mathbb{H}^n$ *induzierten Riemannschen Metrik ist isometrisch zu* $(\mathbb{H}^2, d_{\mathbb{H}^2})$.

Beweis. Die Riemannsche Metrik von $\mathbb{H}^n$ ist

$$\mathrm{d}s^2_{\mathbb{H}^n} = \frac{1}{x_n^2}\left(\mathrm{d}x_1^2 + \ldots + \mathrm{d}x_n^2\right).$$

Die auf U induzierte Metrik ist dann

$$\mathrm{d}s^2_{\mathbb{H}^n}|_U = \frac{1}{x_n^2}\left(\mathrm{d}x_{n-1}^2 + \mathrm{d}x_n^2\right),$$

welche bis auf die Indizies mit der Metrik der hyperbolischen Ebene übereinstimmt. □

Lemma 4.4.4 *Die Projektion*

$$\mathrm{pr} : \mathbb{H}^n \longrightarrow U \cong \mathbb{H}^2, \qquad (x_1, \ldots, x_n) \mapsto (0, \ldots, 0, x_{n-1}, x_n)$$

verkürzt die Länge von Kurven. Insbesondere sind Geodätische in U *bereits Geodätische in* $\mathbb{H}^n$, *das heißt* U *ist total geodätisch.*

Beweis. Sei $c : [0,1] \longrightarrow \mathbb{H}^n$, $c(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))$ eine differenzierbare Kurve. Dann ist

$$(\mathrm{pr} \circ c)(t) = (0, \ldots, 0, x_{n-1}(t), x_n(t))$$

und damit

$$L_{\mathbb{H}^n}(c) = \int_a^b \frac{1}{x_n(t)} \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i'(t)^2}\ \mathrm{d}t \geqslant \int_a^b \frac{1}{x_n(t)} \sqrt{x_{n-1}'(t)^2 + x_n'(t)^2}\ \mathrm{d}t = L_U(\mathrm{pr} \circ c),$$

woraus die Behauptung folgt. □

Satz 4.4.5 *Die Geodätischen in* $\mathbb{H}^n$ *sind (parametrisierte) Halbgeraden senkrecht zur Hyperebene* $x_n = 0$ *oder parametrisierte Halbkreise orthogonal zur Hyperebene* $x_n = 0$. *Insbesondere gibt es durch zwei verschiedene Punkte genau eine Geodätische.*

Beweis. Seien $p, q \in \mathbb{H}^n$. Es seien p', q' die Projektionen von p, q auf die Hyperebene $H_n : x_n = 0$. Betrachte nun die zu H_n orthogonale Ebene $\sigma = \overline{pp'qq'}$. Gilt $p' = q'$, so wähle eine beliebige Gerade g in H_n durch p', ansonsten setze $g = \overline{p'q'}$. Nach Satz 4.3.1 existieren Translationen und Rotationen in $\mathrm{Isom}(\mathbb{H}^n)$, welche σ auf U abbilden. Da U isometrisch zu $\mathbb{H}^2$ ist, ist auch σ isometrisch zu $\mathbb{H}^2$. Weiter ist nach Lemma 4.4.2 σ total geodätisch. Damit ist die Geodätische durch p und q gegeben durch die Geodätische durch p und q in U, welche ein Halbkreis oder eine Halbgerade orthogonal zu g ist. $\square$

Bemerkung 4.4.6 *(i) Wie $\mathbb{H}^2$ kann man auch Kopien von $\mathbb{H}^k$ für $k \leqslant n$ in $\mathbb{H}^n$ konstruieren. Setze dazu $x_1 = \ldots = x_{n-k} = 0$.*

(ii) Geodätische in anderen Modelle erhält man durch folgende Proposition: Die Zentralprojektion α, β, γ aus Satz 4.3.1 sind kreis- und winkeltreu (vgl. Cannon). Damit zeigt man: Geodätische in $\mathbb{D}^n$ sind euklidische Kreissegmente in $\mathbb{D}^n$, welche orthogonal zu $\partial\mathbb{D}^n = \mathbb{S}^n$ sind. Geodätische im Hyperboloidmodell sind gerade die Schnitte von $\mathbb{L}^n$ mit zweidimensionalen Untervektorräumen des $\mathbb{R}^{n+1}$.

4.5 Alle Isometrien des Hyperboloid-Modells

Seien $x, y \in \mathbb{R}^{n+1}$. Das *Lorentz-Minkowski-Produkt* von x und y ist definiert als

$$x \star y := \sum_{k=1}^{n} x_k y_k - x_{n+1} y_{n+1}.$$

Dies definiert eine symmetrische Bilinearform

$$B : \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad (x, y) \mapsto B(x, y) = x \star y$$

und die zu B assoziierte quadratische Form

$$Q : \mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad x \mapsto Q(x) = B(x, x) = x \star x$$

auf $\mathbb{R}^{n+1}$.

Bemerkung 4.5.1 *Die Bilinearform B ist nicht ausgeartet.*

Beweis. Es gelte $B(x, y) = 0$ für alle $y \in \mathbb{R}^{n+1}$. Sein $\mathcal{E} = \{e_1, \ldots, e_{n+1}\}$ die Standardbasis des $\mathbb{R}^{n+1}$. Dann gilt für $x \in \mathbb{R}^{n+1}$ insbesondere

$$0 = B(x, e_i) = x \star e_i = x_i, \qquad 0 = B(x, e_{n+1}) = x \star e_{n+1} = -x_{n+1},$$

also $x_i = 0$ für alle $i \in \{1, \ldots, n+1\}$ und damit $x = 0$. $\square$

Das Hyperboloidmodell der n-dimensionalen hyperbolischen Geometrie ist nun gegeben durch

$$\mathbb{L}^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid Q(x) = x \star x = -1,\ x_{n+1} > 0\}.$$

Definition 4.5.2 (i) Eine *lineare Isometrie* $f : \mathbb{L}^n \longrightarrow \mathbb{L}^n$ ist die Einschränkung einer linearen Abbildung $F : \mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$, die das Lorentz-Minkowski-Produkt erhält. Für $x, y \in \mathbb{R}^{n+1}$ gilt also $B(F(x), F(y)) = F(x) \star F(y) = x \star y = B(x, y)$ und insbesondere $Q(F(x)) = Q(x)$.

(ii) Eine *Riemannsche Isometrie* $f : \mathbb{L}^n \longrightarrow \mathbb{L}^n$ ist ein Diffeomorphismus, sodass für differenzierbare Kurven c_1, c_2 mit $c_1(0) = c_2(0) = p \in \mathbb{L}^n$ gilt

$$\mathrm{d}s^2_{\mathbb{L}^n}(f(p))\big((f \circ c_1)'(0), (f \circ c_2)'(0)\big) = \mathrm{d}s^2_{\mathbb{L}^n}(p)(c_1'(0), c_2'(0)),$$

das heißt f lässt die riemannsche Metrik invariant.

(iii) Eine *topologische Isometrie* $f : \mathbb{L}^n \longrightarrow \mathbb{L}^n$ ist ein Homöomorphismus, der die Abstandsfunktion $d_{\mathbb{L}^n}$ invariant lässt, also

$$d_{\mathbb{L}^n}(f(x), f(y)) = d_{\mathbb{L}^n}(x, y)$$

für alle $x, y \in \mathbb{L}^n$.

Satz 4.5.3 *Eine reelle $(n+1)\times(n+1)$-Matrix M mit Spalten $m_1, \dots, m_{n+1}$ definiert eine lineare Isometrie von $\mathbb{L}^n$ genau dann, wenn die folgenden beiden Bedingungen gelten:*

(1) Für alle Indizes $i, j \in \{1, \dots, n+1\}$ gilt $m_i \star m_j = e_i \star e_j$, wobei $\mathcal{E} := \{e_1, \dots, e_{n+1}\}$ die Standardbasis der $\mathbb{R}^{n+1}$ bezeichne.

(2) Der letzte Eintrag in der Spalte m_{n+1} ist positiv.

Dabei ist die erste Bedingung (1) äquivalent zu

(1') M ist invertierbar mit inverser Matrix $M^{-1} = JM^TJ$, wobei

$$J = \begin{pmatrix} I_{n-1} & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Beweis. Offensichtlich ist J die Abbildungsmatrix des Lorentz-Minkowski-Pridukts bezüglich der Standardbasis, denn es gilt

$$e_i \star e_j = J_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{für } i = j,\ i, j \in \{1, \dots, n\} \\ -1, & \text{für } i = n+1 = j \\ 0, & \text{für } i \neq j \end{cases}$$

Also gilt für $x, y \in \mathbb{R}^{n+1}$: $x \star y = x^TJy$. Somit ist $Mx \star My = x^TM^TJMy$ und M ist invariant genau dann, wenn $x^TM^TJMy = x \star y$, also genau dann, wenn $M^TJM = J$. Der (i, j)-te EIntrag von M^TJM ist $m_i \star m_j$ und jener von J ist $e_i \star e_j$. Da J invertierbar ist, folgt aus (1), dass M

ebenfalls invertierbar ist, denn es gilt

$$\det M = \det m_{ij} = \det(m_i \star m_j) = \det(e_i \star e_j) = \det J = -1.$$

Bemerkung 4.5.4 *Die linearen Abbildungen aus Satz 4.5.3 definieren eine Gruppe* $\mathcal{O}^+(n,1) \subseteq \mathcal{O}(n,1)$*, wobei*

$$\mathcal{O}(n,1) = \{M \in \mathbb{R}^{(n+1)\times(n+1)} \mid M^T J M = J\}$$

eine semi-orthogonale Gruppe ist. Diese ist ein Spezialfall von

$$\mathcal{O}(p,q) = \{M \in \mathbb{R}^{(p+q+1)\times(p+q+1)} \mid M^T \tilde{J} M = \tilde{J}\}$$

mit

$$\tilde{J} = \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_q \end{pmatrix}$$

Satz 4.5.5 *Sei* $f : \mathbb{L}^n \longrightarrow \mathbb{L}^n$ *eine Abbildung. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) f *ist eine lineare Isometrie.*

(ii) f *ist eine Riemannsche Isometrie.*

(iii) f *ist eine topologische Isometrie.*

Insbesondere ist also $\mathrm{Isom}(\mathbb{H}^n) = \mathcal{O}^+(n,1)$*. Weiter gilt für* $p, q \in \mathbb{L}^n$

$$p \star q = -\cosh\left(d_{\mathbb{L}^n}(p,q)\right)$$

Beweis. "(i) → (ii)" Sei zunächst f eine lineare Isometrie, das heißt es gibt eine lineare Abbildung $F : \mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$, welche $\star$ erhält, $\mathbb{L}$ in sich selbst abbildet und $F|_{\mathbb{L}^n} = f$ erfüllt. Die Riemannsche Metrik $\mathrm{d}s^2_{\mathbb{L}^n}$ ist in jedem Punkt $x \in \mathbb{L}^n$ ein Skalarprodukt im Tangentialraum $T_x\mathbb{L}^n$, gegeben durch

$$\mathrm{d}s^2_{\mathbb{L}^n}(x) : T_x\mathbb{L}^n \times T_x\mathbb{L}^n \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad \mathrm{d}s^2_{\mathbb{L}^n}(x)(c_1'(0), c_2'(0)) = c_1'(0) \star c_2'(0)$$

Für müssen zeigen, das f dieses Skalarprodukt invariant lässt. Es gilt für $x \in \mathbb{L}^n$ und $c_1'(0), c_2'(0) \in T_x\mathbb{L}^n$:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}s^2_{\mathbb{L}^n}\,(f(x))\left((f\circ c_1)'(0), (f\circ c_2)'(0)\right) &= \mathrm{d}s^2_{\mathbb{L}^n}\,(f(x))\left((\mathrm{d}f\circ c_1')(0), (\mathrm{d}f\circ c_2')(0)\right) \\ &= \mathrm{d}s^2_{\mathbb{L}^n}\,(F(x))\left((\mathrm{d}F\circ c_1')(0), (\mathrm{d}F\circ c_2')(0)\right) \\ &= \mathrm{d}s^2_{\mathbb{L}^n}\,(F(x))\left((F(c_1'(0)), F(c_2'(0))\right) \\ &= F(c_1'(0)) \star F(c_2'(0)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= c_1'(0) \star c_2'(0) \\ &= \mathrm{d}s^2_{\mathbb{L}^n}(x)(c_1'(0), c_2'(0)), \end{aligned}$$

also ist f eine Riemannsche Isometrie.

"$(ii) \to (iii)$" Sei nun f eine Riemannsche Isometrie. Dann gilt für jede differenzierbare Kurve $c \in \Omega_{pq}(\mathbb{L}^n)$

$$\begin{aligned} L_{\mathbb{L}^n}(f \circ c) &= \int_I \sqrt{\mathrm{d}s^2_{\mathbb{L}^n}\left((f \circ c)(t)\right)\left((f \circ c)'(t), (f \circ c)'(t)\right)}\ \mathrm{d}t \\ &= \int_I \sqrt{\mathrm{d}s^2_{\mathbb{L}^n}\left(c(t)\right)\left(c'(t), c'(t)\right)}\ \mathrm{d}t \\ &= L_{\mathbb{L}^n}(c), \end{aligned}$$

und für $p, q \in \mathbb{L}^n$ also auch $d_{\mathbb{L}^n}(f(p), f(q)) = d_{\mathbb{L}^n}(p, q)$.

Für die fehlende Implikation zu zeigen, beweisen wir zunächst die Abstandsformel. Seien $p, q \in \mathbb{L}^n$ beliebig, $t = d_{\mathbb{L}^n}(p, q)$. Den Abstand erhält man durch Integration der Riemannschen Metrik entlang der eindeutigen Geodätischen zwischen p und q. Diese Metrik ist nach obigem aber invariant unter linearen Isometrien, wir können also p und q zunächst durch eine lineare Isometrie in eine spezielle Position überführen und anschließend erst die Distanz berechnen. Sei dazu m_1 der Einheitstangentialvektor (bzgl. $\mathrm{d}s^2_{\mathbb{L}^n}(p)$) im Punkt p an die Schnittkurve $[p, q, 0] \cap \mathbb{L}^n$ (welche gerade die Geodätische zwischen p und q ist). Weiter sei $m_{n+1} = p$. Beachte: m_1 und m_{n+1} sind orthogonal bzgl. $\star$. Nach dem Gram-Schmidt-Orthogonalisierungsverfahren können wir m_1, m_{n+1} zu einer $\star$-ONB $\{m_1, m_2, \ldots, m_n, m_{n+1}\}$ von $\mathbb{R}^{n+1}$ erweitern, sodass also gilt $m_i \star m_j = e_i \star e_j$ für alle i, j. Nach Satz 4.7 definiert die Matrix $M = (m_1|m_2|\ldots|m_{n+1}) \in \mathcal{O}^+(n,1)$ eine lineare Isometrie. Die inverse Abbildung M^{-1} ist ebenfalls eine lineare Isometrie von $\mathbb{L}^n$ und bildet p auf e_{n+1} und $[p, q] = [m_1, m_{n+1}] \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ auf den Unterraum $\sigma = [e_1, e_{n+1}]$ ab. Der Schnitt $\sigma \cap \mathbb{L}^n$ ist ein Hyperbel-Ast durch die Punkte $M^{-1}(p) = e_{n+1}$ und $M^{-1}(q)$. Da $t = d_{\mathbb{L}^n}(p, q) = d_{\mathbb{L}^n}(M^{-1}(p), M^{-1}(q))$ und die Geodätische von e_1 nach e_{n+1} nach Bogenlänge parametrisiert ist, können wir annehmen, dass $M^{-1}(q) = (\sinh t, 0, \ldots, 0, \cosh t)$. Dann gilt

$$p \star q = M^{-1}(p) \star M^{-1}(q) = (0, \ldots, 0, 1) \star (\sinh t, 0, \ldots, 0, \cosh t) = -\cosh t = -\cosh\left(d_{\mathbb{L}^m}(p, q)\right),$$

was gerade zu zeigen war. Wir können nun die fehlende Implikation beweisen:

"$(iii) \to (i)$" Sei $f : \mathbb{L}^n \longrightarrow \mathbb{L}^n$ eine topologische Isometrie, es gelte also

$$d_{\mathbb{L}^n}(f(p), f(q)) = d_{\mathbb{L}^n}(p, q)$$

für alle $p, q \in \mathbb{L}^n$. Wähle eine Basis $\{v_1, \ldots, v_{n+1}\} \subseteq \mathbb{L}^n$ von $\mathbb{R}^{n+1}$. Sei $F : \mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$

die lineare Abbildung gegeben durch $F(v_i) = f(v_i)$ für alle i. Dann erhält F das Lorentz-Minkowski-Produkt $\star$, d.h. $F|_{\mathbb{L}^n}$ ist eine lineare Isometrie, denn: Schreibe die Standardsbasisvektoren e_i als $e_i = \sum_{j=1}^{n+1} a_{ij} v_j$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
F(e_i) \star F(e_j) &= \sum_{k=1}^{n+1} \sum_{l=1}^{n+1} a_{ik} a_{jl} f(v_k) \star f(v_l) \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} \sum_{l=1}^{n+1} a_{ik} a_{jl} \left(-\cosh\left(d_{\mathbb{L}^n}(f(v_k), f(v_l))\right)\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} \sum_{l=1}^{n+1} a_{ik} a_{jl} \left(-\cosh\left(d_{\mathbb{L}^n}(v_k, v_l)\right)\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} \sum_{l=1}^{n+1} a_{ik} a_{jl} v_k \star v_l \\
&= e_i \star e_j
\end{aligned}$$

Zeige noch, dass $F|_{\mathbb{L}^n} = f$. Betrachte dazu $\tilde{f} = F^{-1} \circ f$. Dann sind offensichtlich äquivalent:

(1) $F|_{\mathbb{L}^n} = f$.

(2) $\tilde{f} = \mathrm{id}_{\mathbb{L}^n}$.

(3) Für alle $x \in \mathbb{L}^n$ gilt $\tilde{f}(x) - x = 0$.

(4) Für alle $x \in \mathbb{L}^n$ und $i \in \{1, \ldots, n+1\}$ gilt $(\tilde{f}(x) - x) \star e_i = 0$

(5) Für alle $x \in \mathbb{L}^n$ und $i \in \{1, \ldots, n+1\}$ gilt $\tilde{f}(x) \star e_i = x \star e_i$.

Dies folgt daraus, dass $\star$ nicht ausgeartet ist. Seien also x, i beliebig aber fest. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\tilde{f}(x) \star e_i &= \tilde{f}(x) \star \sum_{j=1}^{n+1} a_{ij} v_j \\
&= \sum_{j=1}^{n+1} a_{ij} \left(\tilde{f}(x) \star v_j\right) \\
&= \sum_{j=1}^{n+1} a_{ij} \left(\tilde{f}(x) \star \tilde{f}(v_j)\right) \\
&= \sum_{j=1}^{n+1} a_{ij} \left(-\cosh\left(d_{\mathbb{L}^n}(\tilde{f}(x), \tilde{f}(v_j))\right)\right) \\
&= \sum_{j=1}^{n+1} a_{ij} \left(-\cosh\left(d_{\mathbb{L}^n}(x, v_j)\right)\right) \\
&= \sum_{j=1}^{n+1} a_{ij} \left(x \star v_j\right) \\
&= x \star e_i,
\end{aligned}$$

was zu zeigen war. $\square$

Korollar 4.5.6 *(i)* $(\mathbb{L}^n, d_{\mathbb{L}^n})$ *(und damit auch jedes andere Modell der n-dimensionalen hyperbolischen Geometrie) ist 2-Punkt homogen. Insbesondere ist* $\mathbb{L}^n$ *homogen, d.h. die Isometriegruppe* $\mathcal{O}^+(n,1)$ *operiert transitiv auf* $\mathbb{L}^n$*. Algebraisch erhalten wir*

$$\mathbb{L}^n \cong \mathcal{O}^+(n,1) \Big/ \mathrm{Stab}_{\mathcal{O}^+(n,1)}(e_{n+1}) \cong \mathcal{O}^+(n,1) \,/\, \mathcal{O}(n).$$

(ii) Geodätische in $\mathbb{L}^n$ *sind (parametrisierte) Schnitte von* $\mathbb{L}^n$ *mit zweidimensionalen Untervektorräumen des* $\mathbb{R}^{n+1}$*.*

Beweis. (i) Der Beweis von Satz 4.5.5 zeigt: Für $p, q \in \mathbb{L}^n$ mit $d_{\mathbb{L}^n}(p,q) = t$ existiert eine Isometrie $f_{pq} : \mathbb{L}^n \longrightarrow \mathbb{L}^n$ gegeben durch eine Matrix $M \in \mathcal{O}^+(n,1)$, die das Paar (p,q) auf das Standardpaar in der Ebene $[e_1, e_{n+1}]$ abbildet:

$$f_{pq}(p) = e_{n+1}, \qquad f_{pq}(q) = e_1 \sinh t + e_{n+1} \cosh t.$$

Insbesondere ist $p = f_{pq}^{-1}(e_{n+1})$, $\mathbb{L}^n$ ist also eine $\mathcal{O}^+(n,1)$-Bahn. Für den Stabilisator von e_{n+1} gilt

$$\begin{aligned}
\mathrm{Stab}_{\mathcal{O}^+(n,1)}(e_{n+1}) &= \{M \in \mathcal{O}^+(n,1) \mid M(e_{n+1}) = e_{n+1}\} \\
&= \left\{ \left(\begin{array}{ccc|c} & & & 0 \\ & M' & & \vdots \\ & & & 0 \\ \hline 0 & \dots & 0 & 1 \end{array} \right) \in \mathcal{O}^+(n,1) \;\middle|\; M' \in \mathcal{O}(n) \right\} \\
&\cong \mathcal{O}(n)
\end{aligned}$$

(ii) Für eine parametrisierte Hyperbel $\gamma_0 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{L}^n$, $\gamma_0(t) = (\sinh t, 0, \dots, 0, \cosh t)$ gilt

$$d_{\mathbb{L}^n}(\gamma_0(t_1), \gamma_0(t_2)) = \int_{t_1}^{t_2} \|\gamma_0'(t)\|^{\mathbb{L}^n}_{\gamma_0(t)} \, dt = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\cosh^2 t - \sinh^2 t} \, dt = t_2 - t_1,$$

das heißt γ_0 ist eine Geodätische und es gilt $\gamma_0(\mathbb{R}) = \mathbb{L}^n \cap [e_1, e_{n+1}]$. Sei nun f_{pq} die Isometrie, welche (p,q) nach $[e_1, e_{n+1}] \cap \mathbb{L}^n$ abbildet. Dann gilt für die Geodätische γ durch p und q

$$\gamma(\mathbb{R}) = f^{-1}(\gamma_0(\mathbb{R})) = f^{-1}([e_1, e_{n+1}] \cap \mathbb{L}^n) = f^{-1}([e_1, e_{n+1}]) \cap \mathbb{L}^n,$$

wobei die Linearität von f^{-1} und $f^{-1}(\mathbb{L}^n) = \mathbb{L}^n$ ausgenutzt wurde. Damit ist $\gamma(\mathbb{R})$ ein zweidimensionaler Untervektorraum von $\mathbb{R}^{n+1}$, was den Beweis abschließt. $\square$