4. Topologie Übung

Ferdinand Szekeresch

28. September 2017

Aufgabe 2

a) $\mathbb{R}, (a,b), [a,b], (a,b]$

- $\mathbb{R}$ und (a,b) sind homöomorph, denn :

$$f_1 : \mathbb{R} \to (0,1); x \mapsto \frac{1}{\pi}\arctan(x) + \frac{1}{2} \text{ ist homöomorph}$$
$$f_2 : (0,1) \to (a,b), x \mapsto (b-a)x + a \text{ ist homöomorph}$$

  $\Rightarrow f_2 \circ f_1 : \mathbb{R} \to (a,b)$ ist Homöomorphismus.

- (a,b) und $[a,b]$ sind nicht homöomorph, denn (a,b) ist nicht kompakt, $[a,b]$ aber schon. Da stetige Abbildungen Kompakta auf Kompakta abbilden und Homöom. insbes. stetig sind, kann es keinen Homöomorphismus $(a,b) \to [a,b]$ geben.

- $[a,b] \to (a,b]$ sind nicht homöomorph, wäre $f : [a,b] \to (a,b]$ ein Homöomorphismus, so wäre f nach Zwischenwertsatz streng monoton, d.h. $f([a,b]) = [f(a), f(b)]$ ↯.

- analog: (a,b) und $(a,b]$ sind nicht homöom.
  $\Rightarrow \mathbb{R}$ und (a,b) bzw. $(a,b]$ sind nicht homöom.

b) S^1 und $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ sind homöom.
Definiere Homöomorphismus $h : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to S^1, [x] \mapsto \big(\cos(2\pi x), \sin(2\pi x)\big)$
h ist wohldefiniert, denn seien x, y mit $x \sim y \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : x = y + k$
$\Leftrightarrow h([x]) = \big(\cos(2\pi y + 2\pi k), \sin(2\pi y + 2\pi k)\big) = \big(\cos(2\pi y), \sin(2\pi y)\big) = h([y])$
Die zeigt auch: h ist injektiv.
Klar: h ist surjektiv.
h ist stetig, da $h \circ \pi$ stetig ist, (+ Aufgabe 4, Blatt 5)
h ist offen, denn $h \circ \pi$ ist offen.
Das reicht, denn $\forall O \subseteq \mathbb{R}/\mathbb{Z} : h(o) = h \circ \pi\big(\pi^{-1}(O)\big)$, da π surjektiv ist.)
Das überlegt man sich für Intervalle $\subseteq \mathbb{R}$.

c) $W^n := \partial\big([0,1]^{n+1}\big), S^n := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} | \|x\| = 1\}$ sind homöomorph.
Definiere

$$f : S^n \to W^n, (x_1, \dots, x_{n+1}) \mapsto \frac{1}{\max(|x_1|, \dots, |x_{n+1})}(x_1, \dots, x_{n+1})$$

$$g : S^n \to W^n, (y_1, \dots, y_{n+1}) \mapsto \frac{1}{\max(|y_1|, \dots, |y_{n+1})}(y_1, \dots, y_{n+1})$$

f und g sind stetig zueinander.

Aufgabe 1

a) $\mathbb{Q}$ ist abzählbar $\overset{\text{b)}}{\Rightarrow} \big\{\{x\} | x \in \mathbb{Q}\big\}$ ist die Menge der Zusammenhangskomponenten von $\mathbb{Q}$.

b) Beh: (X, d) abzählbar $\Rightarrow$ die Zusammenhangskomponenten von X sind einelementig.
Bew: Seien $x \neq y \in X \Rightarrow l := d(x, y) > 0$
X abzählbar $\Rightarrow l \in M$, wobei M abzählbare Teilmenge von $\mathbb{R}$
$\Rightarrow \exists r \in [0, d] : \{z \in X | d(x, z) = r\} = \emptyset$
Setze $V_1 = \{z \in X | d(x, z) \leq r\} V_2 = \{z \in X | d(x, z) \geq r\}$
Gäbe es eine zusammenhängende Teilmenge A von X mit $x, y \in A$, so wäre $A = \underbrace{(V_1 \cap A)}_{\neq \emptyset} \cup \underbrace{(V_2 \cap A)}_{\neq \emptyset}$ $\lightning$ zu A zusammenhängend.

Aufgabe 3

Seien jetzt aber $A \subseteq B \subseteq \bar{A}$ mit A zusammenhängend und U, V disjunkte offene Teilmengen mit $B = U \cup V$
$\Rightarrow \underbrace{(U \cap A)}_{=:\tilde{U}} \cup \underbrace{(V \cap A)}_{=:\tilde{V}} = (U \cup V) \cap A = A$
$\tilde{U}, \tilde{V}$ sind disjunkt (wegen $\tilde{U} \cap \tilde{V} \subseteq U \cap V = \emptyset$)
A zusammenhängend $\Rightarrow \tilde{U} = \emptyset$ oder $\tilde{V} = \emptyset$. O.B.d.A $\tilde{U} = \emptyset \Rightarrow A \subseteq V$
$\Rightarrow U \subseteq B \subseteq \bar{A} \subseteq \bar{V} \Rightarrow U = U \cap \bar{V} = \emptyset \Rightarrow B$ ist zusammenhängend.

Aufgabe 4

Beh. X top., $A \subseteq X, Y$ Hausdorffraum, $f : A \to Y$ stetige Abbildung.
$\Rightarrow$ kann man f fortsetzen zu einer stetigen Abb. $g : \bar{A} \to Y$, so ist g eindeutig.
Bew: Seien $g_1 : \bar{A} \to Y, g_2 : \bar{A} \to Y$ stetige Fortsetzungen von A.
Ann: $g_1 \neq g_2 \Rightarrow x \in \bar{A} : g_1(x) \neq g_2(x)$. Es muss gelten: $x \notin A$. da $\forall x \in A : g_1(x) = f(x) = g_2(x)$.
Also: $x \in \bar{A} \backslash A$.
Y Hausdorffraum, $g_1(x) \neq g_2(x) \Rightarrow \exists$ offene disj. Teilmengen $V_1, V_2 \subseteq Y$ mit $g_1(x) \in V_1, g_2(x) \in V_2$.
g_1 ist stetig $\Rightarrow \exists$ offene Umg. U_1 von x mit $g_1(U_1) \subseteq V_1$
g_2 ist stetig $\Rightarrow \exists$ offene Umg. U_2 von x mit $g_2(U_2) \subseteq V_2$
U_1, U_2 sind offene Umgebungen von $x \Rightarrow U_1 \cap U_2$ ist offene Umg. von $x \Rightarrow x \in U_1 \cap U_2$
$x \in \partial A \Rightarrow \exists y \in (U_1 \cap U_2) \cap A$ mit $x \neq y$ (nach Aufg. 2, Blatt 3)

$\Rightarrow y \in U_1 \Rightarrow g_1(y) \in V_1, y \in U_2 \Rightarrow g_2(y) \in V_2$
Da aber $y \in A$ gilt: $g_1(y) = f(y) = g_2(y)$
$\Rightarrow f(y) \in V_1 \cap V_2 \quad \lightning$ zu $V_1 \cap V_2 \neq \emptyset$.