22. Nicht fortsetzbare Lösungen

In diesem Paragraphen: $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{R}^2,\ f : D \to \mathbb{R},\ (x_0, y_0) \in D$ und $I, J, K, \dots$ seien Intervalle in $\mathbb{R}$.

Wir betrachten das AWP

$$(A) \begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

Bemerkung: Die Definitionen und Sätze dieses Paragraphen gelten allgemeiner für Systeme, also $D \subseteq \mathbb{R}^{m+1},\ f : D \to \mathbb{R}^m,\ (x_0, y_0) \in D,\ x_0 \in \mathbb{R},\ y_0 \in \mathbb{R}^m$ (vgl. Paragraph 15).

Definitionen und Bezeichnungen

(1) $\mathcal{L}_{(A)} :=$ Menge aller Lösungen von (A).

(2) Für $y \in \mathcal{L}_{(A)}$ bezeichne I_y das Definitionsintervall von y.

(3) Seien $u, v \in \mathcal{L}_{(A)}$. v heißt eine **Fortsetzung** von u, gdw. $I_u \subseteq I_v$ und $u = v$ auf I_u. I.d. Fall schreiben wir $u \lessdot v$.

(4) $v \in \mathcal{L}_{(A)}$ heißt **nicht fortsetzbar (nf)**, gdw. aus $y \in \mathcal{L}_{(A)}$ und $v \lessdot y$ folgt $I_v = I_y$ (also $y = v$).

Erinnerung: (A) ist eindeutig lösbar $\iff$ aus $y_1, y_2 \in \mathcal{L}_{(A)}$ folgt: $y_1 = y_2$ auf $I_{y_1} \cap I_{y_2}$.

Satz 22.1
Sei $u \in \mathcal{L}_{(A)}$. Dann existiert ein $v \in \mathcal{L}_{(A)} : v$ ist eine nicht fortsetzbare Fortsetzung von u („Maximale Fortsetzung von u“).

Beweis
$\mathcal{L} := \{y \in \mathcal{L}_{(A)} : u \lessdot y\},\ \mathcal{L} \neq \emptyset$, denn $u \in \mathcal{L}$. $\lessdot$ ist eine Ordnungsrelation auf $\mathcal{L}$. Weiter gilt für $v \in \mathcal{L} : v$ ist ein maximales Element in $\mathcal{L} \iff v$ ist nicht fortsetzbar. Wegen des Zornschen Lemmas ist z.z.: jede Kette in $\mathcal{L}$ hat eine obere Schranke in $\mathcal{L}$. Sei also $\emptyset \neq \mathcal{K} \subseteq \mathcal{L}$ eine Kette in $\mathcal{L}$. $I := \bigcup_{y \in \mathcal{K}} I_y$. Wegen $x_0 \in I_y\ \forall y \in \mathcal{K} : I$ ist ein Intervall.

Definiere $z : I \to \mathbb{R}$ wie folgt: Ist $x \in I \implies \exists y \in \mathcal{K} : x \in I_y$. $z(x) := y(x)$. Gilt auch noch $x \in I_{\tilde{y}},\ \tilde{y} \in \mathcal{K},\ \mathcal{K}$ Kette $\implies y \lessdot \tilde{y}$ oder $\tilde{y} \lessdot y$. Etwa: $y \lessdot \tilde{y}$. D.h.: $I_y \subseteq I_{\tilde{y}}$ und $y = \tilde{y}$ auf $I_y \implies y(x) = \tilde{y}(x)$.

z ist wohldefiniert. Klar: $z(x_0) = y_0$. 12.2 $\implies z \in \mathcal{L}_{(A)}$ Nach Konstruktion: $y \lessdot z\ \forall y \in \mathcal{K}$.

Sei $y \in \mathcal{K} \implies u \otimes y$ und $y \otimes z \implies u \otimes z \implies z \in \mathcal{L}$. z ist also eine obere Schranke von $\mathcal{K}$ in $\mathcal{L}$. ∎

Satz 22.2
Sei D offen und $f \in C(D, \mathbb{R})$.

(1) $\exists y \in \mathcal{L}_{(A)} : x_0 \in I_y^\circ$

(2) Ist $y \in \mathcal{L}_{(A)}$, so existiert eine nicht fortsetzbare Fortsetzung $\widehat{y} \in \mathcal{L}(A)$ von y mit $I_{\widehat{y}}$ ist offen.

(3) Ist (A) eindeutig lösbar, so hat (A) eine eindeutig bestimmte, nicht fortsetzbare Lösung $y : (\omega_-, \omega_+) \to \mathbb{R}$, wobei $\omega_- < \omega_+,\ \omega_- \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\},\ \omega_+ \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ („die" Lösung des AWPs).

Beweis

(1) 12.6 (Peano, III)

(2) Wegen 22.1 ist nur zu zeigen: $I_{\widehat{y}}$ ist offen.

Annahme: $I_{\widehat{y}}$ ist *nicht* offen. Dann existiert $\max I_{\widehat{y}}$ oder $\min I_{\widehat{y}}$. Etwa: $\exists b := \max I_{\widehat{y}}$.

$x_1 := b,\ y_1 := \widehat{y}(b)$. AWP $(B) \begin{cases} y' &= f(x,y) \\ y(x_1) &= y_1 \end{cases}$

Wende (1) auf (B) an. Dann existiert eine Lösung $\tilde{y} : K \to \mathbb{R}$ von (B) mit $x_1 = b \in \mathcal{K}^\circ \implies \exists \varepsilon > 0 : [b, b+\varepsilon) \subseteq K$. Definiere $z : I_{\widehat{y}} \cup [b, b+\varepsilon) \to \mathbb{R}$ durch $z(x) := \begin{cases} \widehat{y}(x), & x \in I_{\widehat{y}} \\ \tilde{y}(x), & x \in [b, b+\varepsilon) \end{cases}$.
Klar: $z(x_0) = \widehat{y}(x_0) = y_0$. 12.3 $\implies z \in \mathcal{L}_{(A)}$.

Weiter: $I_{\widehat{y}} \subsetneqq I_z = I_{\widehat{y}} \cup [b, b+\varepsilon)$ und $\widehat{y} = z$ auf $I_{\widehat{y}}$. Widerspruch, denn $\widehat{y}$ ist nicht fortsetzbar.

(3) folgt aus (2). ∎

Folgerung 22.3
Es sei $D \subseteq \mathbb{R}^2$ offen, $f \in C(D, \mathbb{R})$, f sei auf D partiell differenzierbar nach y und $f_y \in C(D, \mathbb{R})$. Dann hat (A) eine eindeutig bestimmte nicht fortsetzbare Lösung $y : (\omega_-, \omega_+) \to \mathbb{R}$.

Beweis
13.3, 13.4, 22.2 ∎

Beispiele:

(1) $D = \mathbb{R}^2,\ f(x,y) = 1 + y^2$, AWP $\begin{cases} y' &= 1 + y^2 \\ y(0) &= 0 \end{cases}$

Voraussetzungen obiger Folgerung sind erfüllt.

$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 1 + y^2 \implies \int \frac{\mathrm{d}y}{1+y^2} = \int \mathrm{d}x + c \implies \arctan y = x + c \implies y(x) = \tan(x+c),\ 0 = y(0) = \tan c \implies c = 0.$

Die eindeutig bestimmte, nicht fortsetzbare Lösung des AWPs lautet: $y(x) = \tan x,\ x \in (\omega_-, \omega_+),\ \omega_- = -\pi/2,\ \omega_+ = \pi/2$ (also: $\omega_+ = -\omega_-$).

(2) f erfülle die Voraussetzungen obiger Folgerung und es gelte $D = \mathbb{R}^2$ und

$$(*) \quad f(x,y) = f(-x,y) = f(-x,-y) = f(x,-y) \ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Dann gilt für die eindeutig bestimmte, nicht fortsetzbare Lösung $y : (\omega_-, \omega_+) \to \mathbb{R}$ des AWPs $\begin{cases} y' &= f(x,y) \\ y(0) &= 0 \end{cases} : \omega_+ = -\omega_-$.

Beweis
Klar: $\omega_- < 0 < \omega_+$. Wir zeigen $\omega_+ \geq -\omega_-$ (analog: $\omega_+ \leq \omega_-$). Annahme: $\omega_+ < -\omega_-$.

Sei $x \in [0, -\omega_-) \implies -x \in (\omega_-, 0] \subseteq (\omega_-, \omega_+)$. Definiere $z : [0, -\omega_-) \to \mathbb{R}$ durch $z(x) := -y(-x)$.

$z(0) = -y(0) = 0$, $z'(x) = -y'(-x)(-1) = y'(-x) = f(-x, y(-x)) \overset{(*)}{=} f(x, y(-x)) \overset{(*)}{=} f(x, -y(-x)) = f(x, z(x))$. Also: z löst das AWP auf $[0, -\omega_-)$. Eindeutige Lösbarkeit $\implies y = z$ auf $[0, \omega_+)$. Definiere $u : (\omega_-, -\omega_-) \to \mathbb{R}$ durch $u(x) := \begin{cases} y(x), & x \in (\omega_-, 0] \\ z(x), & x \in [0, -\omega_-) \end{cases}$.

$u(0) = y(0) = 0$, 12.3 $\implies$ u löst das AWP auf $(\omega_-, -\omega_-)$. ∎

Ohne Beweis:

Satz 22.4
Sei $I = [a,b] \subseteq \mathbb{R}$, $D := I \times \mathbb{R}$ und $f \in C(D, \mathbb{R})$ sei auf D beschränkt. (12.4 $\implies \exists u \in \mathcal{L}_{(A)} : I_u = I$).

Ist $y \in \mathcal{L}_{(A)}$, so existiert ein $\tilde{y} \in \mathcal{L}_{(A)} : I_{\tilde{y}} = I$ und $y = \tilde{y}$ auf I_y.