

3. Stetigkeit, Zusammenhang, Gebiete

In diesem Paragraphen seien $D, E \subseteq \mathbb{C}$, $D \neq \emptyset \neq E$ und $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ eine Funktion. Die Funktionen $\operatorname{Re} f$, $\operatorname{Im} f$, $|f| : D \rightarrow \mathbb{R}$ sind definiert durch:

$$(\operatorname{Re} f)(z) := \operatorname{Re} f(z), (\operatorname{Im} f)(z) := \operatorname{Im} f(z), |f|(z) := |f(z)|.$$

Definition

Sei z_0 ein HP von D und $a \in \mathbb{C}$.

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = a : \iff \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : |f(z) - a| < \varepsilon \forall z \in \dot{U}_\delta(z_0) \cap D$$

In diesem Fall schreibt man $f(z) \rightarrow a$ ($z \rightarrow z_0$)

$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ existiert : $\iff \exists a \in \mathbb{C} : \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = a$. Es gelten die üblichen Rechenregeln.

Definition

(1) Sei $z_0 \in D$. f heißt **stetig** in z_0 : $\iff \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : |f(z) - f(z_0)| < \varepsilon \forall z \in \dot{U}_\delta(z_0) \cap D$

(2) f heißt stetig auf D : $\iff f$ ist in jedem $z \in D$ stetig. In diesem Fall schreiben wir $f \in C(D)$.

Beispiel

(1) $p(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n$ ($a_0, \dots, a_n \in \mathbb{C}$). Klar: $p \in C(\mathbb{C})$ (Linearkombination stetiger Funktionen).

$$(2) f(z) = \begin{cases} \frac{\operatorname{Re} z}{z} & , \text{ falls } z \neq 0 \\ 0 & , \text{ falls } z = 0. \end{cases}$$

Klar: $f \in C(\mathbb{C} \setminus \{0\})$. Für $z \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ist $f(z) = 1 \not\rightarrow f(0) = 0$ ($z \rightarrow 0$). f ist in $z_0 = 0$ nicht stetig.

$$(3) f(z) = \begin{cases} \frac{(\operatorname{Re} z)^2}{z} & , \text{ falls } z \neq 0 \\ 0 & , \text{ falls } z = 0. \end{cases}$$

Für $z \neq 0$: $|f(z)| = \frac{|\operatorname{Re} z|^2}{|z|} \leq \frac{|z|^2}{|z|} \leq |z| \Rightarrow f$ ist in $z_0 = 0$ stetig. Insgesamt: $f \in C(\mathbb{C})$.

Beispiel

$D = \mathbb{C} \setminus \{0\}$; für $z = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi) \in D$ mit $\varphi \in (-\pi, \pi]$ sei $f(z) := \varphi = \operatorname{Arg} z$. Behauptung: Ist $z_0 \in \mathbb{R}$ und $z_0 < 0 \Rightarrow f$ ist in z_0 nicht stetig. Denn:

Sei $z_n := |z_0|(\cos(\pi - \frac{1}{n}) + i \sin(\pi - \frac{1}{n}))$, $w_n := |z_0|(\cos(-\pi + \frac{1}{n}) + i \sin(-\pi + \frac{1}{n})) \Rightarrow z_n \rightarrow -|z_0| = z_0$, $w_n \rightarrow -|z_0| = z_0$ und $f(z_n) = \operatorname{Arg} z_n = \pi - \frac{1}{n} \rightarrow \pi$, $f(w_n) = \operatorname{Arg} w_n = -\pi + \frac{1}{n} \rightarrow -\pi$

Wie im \mathbb{R}^n beweist man die folgenden Sätze 3.1, 3.2 und 3.3

Satz 3.1

Sei $z_0 \in D$.

(1) f ist stetig in $z_0 \iff \operatorname{Re} f$ und $\operatorname{Im} f$ sind stetig in $z_0 \iff$ für jede Folge (z_n) in D mit $z_n \rightarrow z_0 : f(z_n) \rightarrow f(z_0)$.

- (2) Ist z_0 ein HP von D , so gilt: f ist in z_0 stetig $\Leftrightarrow \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$
- (3) Sei $g : D \rightarrow \mathbb{C}$ eine weitere Funktion und f und g seien stetig in z_0 . Dann sind $f + g, fg, |f|$ stetig in z_0 ; ist $f(z) \neq 0 \forall z \in D \Rightarrow \frac{1}{f}$ ist stetig in z_0 .

Satz 3.2

Sei $\emptyset \neq E \subseteq \mathbb{C}, g : E \rightarrow \mathbb{C}$ eine Funktion und $f(D) \subseteq E$. Ist f stetig in z_0 und g stetig in $f(z_0)$, so ist $g \circ f : D \rightarrow \mathbb{C}$ stetig in z_0 .

Satz 3.3

D sei **kompakt** und $f \in C(D)$

- (1) $f(D)$ ist kompakt
- (2) $\exists \max |f|(D), \exists \min |f|(D)$

Definition

Sei $[a, b] \subseteq \mathbb{R} (a < b)$. Eine stetige Funktion $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ heißt ein **Weg** (in \mathbb{C}). $\gamma(a)$ heißt **Anfangspunkt** von γ , $\gamma(b)$ heißt **Endpunkt** von γ . $\gamma([a, b])$ heißt der **Träger** von γ . 3.3 $\Rightarrow \gamma([a, b])$ ist kompakt. ("Rektifizierbarkeit" und "Länge" von γ : siehe Analysis II)

Beispiele:

- (1) Seien $z_0, z_1 \in \mathbb{C}; \gamma(t) := z_0 + t(z_1 - z_0), t \in [0, 1]. S[z_0, z_1] := \gamma([0, 1])$ heißt die **Verbindungsstrecke** von z_0 und z_1 .
- (2) Sei $z_0 \in \mathbb{C}, r > 0; \gamma(t) := z_0 + r(\cos t + i \sin t), t \in [0, 2\pi]. \gamma(0) = z_0 + r = \gamma(2\pi), \gamma([0, 2\pi]) = \partial U_r(z_0)$

Für den Rest des §en sei $\emptyset \neq M \subseteq \mathbb{C}$

Definition

M heißt **konvex** $:\Leftrightarrow$ aus $z_0, z_1 \in M$ folgt stets: $S[z_0, z_1] \subseteq M$.

Definition

- (1) Eine Funktion $\varphi : M \rightarrow \mathbb{C}$ heißt auf M **lokalkonstant** $:\Leftrightarrow \forall a \in M \exists \delta = \delta(a) > 0 : \varphi$ ist auf $U_\delta(a) \cap M$ konstant. Beachte: i.d.Fall: $\varphi \in C(M)$.
- (2) M heißt **zusammenhängend** (zsh) $:\Leftrightarrow$ jede auf M lokalkonstante Funktion ist auf M konstant.
- (3) M heißt **wegzusammenhängend** (wegzsh) $:\Leftrightarrow$ zu je zwei Punkten $z, w \in M$ existiert ein Weg $\gamma[a, b] \rightarrow \mathbb{C} : \gamma([a, b]) \subseteq M, \gamma(a) = z$ und $\gamma(b) = w$.

(4) M heißt ein **Gebiet** : $\Leftrightarrow M$ ist offen und wegzsh.

Bemerkung:

(1) Mengen die offen und konvex sind, sind Gebiete.

(2) wegzsh \Rightarrow zsh (" \Leftarrow " ist i.a. falsch)

Satz 3.4

M sei offen, dann sind äquivalent:

(1) M ist ein Gebiet

(2) M ist wegzsh

(3) M ist zsh

(4) Aus $M = A \cup B, A \cap B = \emptyset, A, B$ offen folgt stets: $A = \emptyset$ oder $B = \emptyset$.

Beweis

(1) \Leftrightarrow (2): klar, (2) \Leftrightarrow (3): ohne Beweis.

(3) \Rightarrow (4): Sei $M = A \cup B, A \cap B = \emptyset, A, B$ offen. Annahme: $A \neq \emptyset$ und $B \neq \emptyset$. Definiere

$$\varphi : M \rightarrow \mathbb{C} \text{ durch } \varphi(z) := \begin{cases} 1, & z \in A \\ 0, & z \in B \end{cases}.$$

Sei $z_0 \in M$. 1. Fall (2. Fall) : $z_0 \in A(B)$, $A(B)$ offen $\Rightarrow \exists \delta > 0 : U_\delta(z_0) \subseteq A(B) \Rightarrow \varphi$ ist auf $U_\delta(z_0)$ konstant. φ ist also auf M lokalkonstant. Vor $\Rightarrow \varphi$ ist auf M konstant $\Rightarrow 1 = 0$, Wid!

(4) \Rightarrow (3): Sei $\varphi : M \rightarrow \mathbb{C}$ lokalkonstant. Annahme: φ ist nicht konstant auf M . $\exists z_0, w_0 \in M : \varphi(z_0) \neq \varphi(w_0)$. $A := \{z \in M : \varphi(z) = \varphi(z_0)\}; z_0 \in A$, also $A \neq \emptyset$. $B := M \setminus A, w_0 \in B$, also $B \neq \emptyset$. Klar: $M = A \cup B, A \cap B = \emptyset$.

Sei $z_1 \in A$. φ ist lokalkonstant $\Rightarrow \exists \delta > 0 : U_\delta(z_1) \subseteq M$ und φ ist auf $U_\delta(z_1)$ konstant. Sei $z \in U_\delta(z_1)$. $\varphi(z) = \varphi(z_1) \stackrel{z_1 \in A}{=} \varphi(z_0) \Rightarrow z \in A$. Also: $U_\delta(z_1) \subseteq A$. A ist also offen. Ähnlich: B ist offen. Fazit: $M = A \cup B, A \cap B = \emptyset, A, B$ offen, $A \neq \emptyset, B \neq \emptyset$. Wid zur Vor. ■

Folgerung 3.5

Sei $A \subseteq \mathbb{C}$, A sei offen und abgeschlossen. Dann: $A = \emptyset$ oder $A = \mathbb{C}$.

Beweis

$B := \mathbb{C} \setminus A$; dann A, B offen, $A \cap B = \emptyset$ und $\mathbb{C} = A \cup B$. \mathbb{C} ist ein Gebiet $\stackrel{3.4}{\Rightarrow} A = \emptyset$ oder $B = \emptyset \Rightarrow A = \emptyset$ oder $A = \mathbb{C}$. ■

Satz 3.6

Sei M zsh und $g \in C(M)$. Dann ist $g(M)$ zsh.

Beweis

Sei $\varphi : g(M) \rightarrow \mathbb{C}$ auf $g(M)$ lokalkonstant. Zu zeigen: φ ist auf $g(M)$ konstant. $\psi := \varphi \circ g : M \rightarrow \mathbb{C}$. Sei $z_0 \in M \Rightarrow g(z_0) \in g(M) \Rightarrow \exists \varepsilon > 0$ und $c \in \mathbb{C} : (*) \varphi(w) = c \forall w \in U_\varepsilon(g(z_0)) \cap g(M). g$

3. Stetigkeit, Zusammenhang, Gebiete

stetig in $z_0 \Rightarrow \exists \delta > 0 : |g(z) - g(z_0)| < \varepsilon \forall z \in U_\delta(z_0) \cap M$. Sei $z \in U_\delta(z_0) \cap M$. Dann:
 $g(z) \in U_\varepsilon(g(z_0)) \cap g(M) \xrightarrow{(*)} \varphi(g(z)) = c \Rightarrow \psi(z) = c$. Also ist ψ auf M lokalkonstant. M zsh
 $\Rightarrow \psi(z) = c \forall z \in M$. Sei $w \in g(M) \Rightarrow \exists z \in M : w = g(z) \Rightarrow \varphi(w) = \varphi(g(z)) = \psi(z) = c$. φ ist
also auf $g(M)$ konstant. ■

Beispiele:

(1) $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ ist zsh.

(2) Ist $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ ein Weg, so ist $\gamma([a, b])$ zsh.

Beweis

(2) folgt aus (1) und 3.6

(1) Sei $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ lokalkonstant. Also: $\forall t \in [a, b] \exists \delta(t) > 0 : \varphi$ ist auf $U_{\delta(t)}(t) \cap [a, b]$
konstant. $[a, b] \subseteq \cup_{t \in [a, b]} U_{\delta(t)}(t) \xrightarrow{2.3} \exists t_1, \dots, t_n \in [a, b] : [a, b] \subseteq \cup_{j=1}^n U_{\delta(t_j)}(t_j)$. $\exists c_1, \dots, c_n \in \mathbb{C} :$
 $\varphi(t) = c_j \forall t \in U_{\delta(t_j)}(t_j) \cap [a, b] \Rightarrow \varphi([a, b]) = \{c_1, \dots, c_n\}$. O.B.d.A: $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$. Annahme:
 $c_1 \neq c_2$ etwa $c_1 < c_2$. $\varphi \in C[a, b]$. ZWS $\Rightarrow [c_1, c_2] \subseteq \varphi([a, b])$ Wid! Also: $c_1 = c_2$. Analog:
 $c_2 = c_3 = \dots = c_n$. φ ist also konstant. ■