§ 11 Der Transformationssatz (Substitutionsregel)

Die Sätze in diesem Paragraphen geben wir **ohne** Beweis an. Es seien $X, Y \subseteq \mathbb{R}^d$ nichtleer und offen.

Definition
Sei $\Phi\colon X \to Y$ eine Abbildung. Φ heißt **Diffeomorphismus** genau dann wenn $\Phi \in C^1(X, \mathbb{R}^d)$, Φ ist bijektiv und $\Phi^{-1} \in C^1(Y, \mathbb{R}^d)$.
Es gilt

$$x = \Phi^{-1}(\Phi(x)) \text{ für jedes } x \in X$$

Kettenregel:

$$I = \left(\Phi^{-1}\right)' (\Phi(x)) \cdot \Phi'(x) \text{ für jedes } x \in X$$

Das heißt $\Phi'(x)$ ist invertierbar für alle $x \in X$ und somit ist $\det\left(\Phi'(x)\right) \neq 0$ für alle $x \in X$.

Satz 11.1 (Transformationssatz (Version I))
$\Phi\colon X \to Y$ sei ein Diffeomorphismus.

(1) $f\colon Y \to [0, +\infty]$ sei messbar und für $x \in X$ sei $g(x) := f\left(\Phi(x)\right) \cdot |\det \Phi'(x)|$.
Dann ist g messbar und es gilt:

$$\int_Y f(y)\, dy = \int_X g(x)\, dx = \int_X f\left(\Phi(x)\right) \cdot |\det \Phi'(x)|\, dx \qquad (*)$$

(2) $f\colon Y \to \overline{\mathbb{R}}$ sei integrierbar und g sei definiert wie in (1). Dann ist g integrierbar und es gilt die Formel $(*)$.

Erinnerung: Sei $A \subseteq \mathbb{R}^d$ und $A^\circ := \{x \in A : \text{ es existiert ein } r = r(x) > 0 \text{ mit } U_r(x) \subseteq A\}$ das **Innere** von A. A° ist offen!

Beispiel
Sei $A = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Es ist $A^\circ = \varnothing$ und $A \setminus A^\circ = A$. Aus $\mathbb{R} = A \dot\cup \mathbb{Q}$ folgt

$$\infty = \lambda_1(\mathbb{R}) = \lambda_1(A) + \lambda_1(\mathbb{Q}) = \lambda_1(A)$$

Das heißt $A \setminus A^\circ$ ist keine Nullmenge.

Satz 11.2 (Transformationssatz (Version II))
Es sei $\varnothing \neq U \subseteq \mathbb{R}^d$ offen, $\Phi \in C^1(U, \mathbb{R}^d)$, $A \subseteq U$, $A \in \mathfrak{B}_d$, $X := A^\circ$ und $A \setminus A^\circ$ eine Nullmenge. Weiter sei Φ injektiv auf X, $\det \Phi' \neq 0$ für alle $x \in X$, $B := \Phi(A) \in \mathfrak{B}_d$ und $g(x) = f(\Phi(x)) \cdot |\det \Phi'(x)|$ für $x \in A$. Dann gilt:

(1) $Y := \Phi(X)$ ist offen und $\Phi : X \to Y$ ist ein Diffeomorphismus.

(2) Ist $f\colon B \to [0, \infty]$ messbar, so ist $g\colon A \to [0, \infty]$ messbar und

$$\int_B f(y)\,dy = \int_A g(x)\,dx = \int_A f(\Phi(x)) \cdot \left|\det\big(\Phi'(x)\big)\right| dx \qquad (**)$$

(3) Ist $f\colon B \to \overline{\mathbb{R}}$ messbar, so gilt:

$$f \in \mathfrak{L}^1(B) \iff g \in \mathfrak{L}^1(A)$$

Ist $f \in \mathfrak{L}^1(B)$ so gilt $(**)$

Folgerungen 11.3

(1) Sei $T\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ linear und $\det T \neq 0$. Weiter sei $A \in \mathfrak{B}_d$ und $v \in \mathbb{R}^d$. Dann ist $T(A) \in \mathfrak{B}_d$ und es gilt:

$$\lambda_d(T(A) + v) = |\det T| \cdot \lambda_d(A)$$

(2) $\Phi\colon X \to Y$ sei ein Diffeomorphismus und $A \in \mathfrak{B}(X)$. Dann ist $\Phi(A) \in \mathfrak{B}_d$ und es gilt:

$$\lambda_d(\Phi(A)) = \int_A |\det \Phi'(X)|\,dx$$

(3) Sei $F \in C^1(X, \mathbb{R}^d)$ und $N \subseteq X$ eine Nullmenge. Dann ist $F(N)$ enthalten in einer Nullmenge.

Beispiel
Seien $a, b > 0$ und $T := \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, $\det T = ab > 0$. Definiere:

$$A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$$

Dann ist $A \in \mathfrak{B}_2$ und $\lambda_2(A) = \pi$.

$$\begin{aligned} (u, v) \in T(A) &\iff \exists (x, y) \in A : (u, v) = (ax, by) \\ &\iff \exists (x, y) \in A : (x = \frac{u}{a}) \wedge (y = \frac{v}{b}) \\ &\iff \frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2} \leq 1 \end{aligned}$$

Aus 11.3 folgt $T(A) \in \mathfrak{B}_2$ und $\lambda(T(A)) = ab\pi$.

11.4. Polarkoordinaten

Jeder Vektor im $\mathbb{R}^2$ lässt sich nicht nur durch seine Projektionen auf die Koordinatenachsen (x, y), sondern auch eindeutig durch seine Länge r und den (kleinsten positiven) Winkel φ zur x-Achse darstellen. Diese Darstellung (r, φ) heißen die **Polarkoordinaten** des Vektors. Dabei gilt:

$$r = \|(x, y)\| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

und

$$\begin{cases} x = r\cos(\varphi) \\ y = r\sin(\varphi) \end{cases}$$

Definiere nun für $(r, \varphi) \in [0, \infty) \times [0, 2\pi]$:

$$\Phi(r, \varphi) := (r\cos(\varphi), r\sin(\varphi))$$

Dann ist $\Phi \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ und es gilt:

$$\Phi'(r, \varphi) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -r\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & r\cos(\varphi) \end{pmatrix}$$

d.h. falls $r > 0$ ist gilt:

$$\det \Phi'(r, \varphi) = r\cos^2(\varphi) + r\sin^2(\varphi) = r > 0$$

Bemerkung (Faustregel für Polarkoordinaten): Ist ein Integral der Form $\int_B f(x, y) d(x, y)$ zu berechnen, so lässt sich oft eine Menge A finden, sodass $\Phi(A) = B$ ist. Mit 11.2 folgt dann:

$$\int_B f(x, y) \;\mathrm{d}(x, y) = \int_A f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) \cdot r \;\mathrm{d}(r, \varphi)$$

Beispiel

(1) Sei $0 \le \rho < R$. Definiere

$$B := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \rho^2 \le x^2 + y^2 \le R^2\}$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned} \lambda_2(B) &= \int_B 1 \;\mathrm{d}(x, y) \\ &= \int_A 1 \cdot r \;\mathrm{d}(r, \varphi) \\ &\overset{§10}{=} \int_\rho^R \left(\int_0^{2\pi} r \;\mathrm{d}\varphi \right) \;\mathrm{d}r \\ &= \left[2\pi \frac{1}{2} r^2 \right]_\rho^R \\ &= \pi(R^2 - \rho^2) \end{aligned}$$

(2) Definiere

$$B := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \le 1, y \ge 0\}$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned}\int_B y\sqrt{x^2+y^2}\ \mathrm{d}(x,y) &= \int_A r\sin(\varphi)r\cdot r\ \mathrm{d}(r,\varphi)\\ &= \int_A r^3\sin\varphi\ \mathrm{d}(r,\varphi)\\ &\overset{§10}{=} \int_0^\pi\left(\int_0^1 r^3\sin\varphi\ \mathrm{d}r\right)\ \mathrm{d}\varphi\\ &= \frac{1}{4}\int_0^\pi \sin\varphi\ \mathrm{d}\varphi\\ &= \left[\frac{1}{4}(-\cos\varphi)\right]_0^\pi\\ &= \frac{1}{4}(1+1)=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

(3) **Behauptung:**

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx=\sqrt{\pi}$$

Beweis: Für $\rho>0$ sei

$$B_\rho := \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x,y\geq 0, x^2+y^2\leq\rho^2\}$$

Weiterhin sei $Q_\rho := [0,\rho]\times[0,\frac{\pi}{2}]$ und $f(x,y)=e^{-(x^2+y^2)}$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}\int_{B_\rho} f(x,y)\ \mathrm{d}(x,y) &= \int_{Q_\rho} e^{-r^2}r\ \mathrm{d}(r,\varphi)\\ &\overset{§10}{=} \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^\rho re^{-r^2}\ \mathrm{d}r\right)\ \mathrm{d}\varphi\\ &= \frac{\pi}{2}\left[-\frac{1}{2}e^{-r^2}\right]_0^\rho\\ &= \frac{\pi}{2}\left(-\frac{1}{2}e^{-\rho^2}+\frac{1}{2}\right)\\ &=: h(\rho) \overset{\rho\to\infty}{\to} \frac{\pi}{4}\end{aligned}$$

Außerdem gilt:

$$\begin{aligned}\int_{Q_\rho} f(x,y)\ \mathrm{d}(x,y) &= \int_{Q_\rho} e^{-x^2}e^{-y^2}\ \mathrm{d}(x,y)\\ &= \int_0^\rho\left(\int_0^\rho e^{-x^2}e^{-y^2}\ \mathrm{d}y\right)\ \mathrm{d}x\\ &= \left(\int_0^\rho e^{-x^2}\ \mathrm{d}x\right)^2\end{aligned}$$

Wegen $B_\rho\subseteq Q_\rho\subseteq B_{\sqrt{2}\rho}$ und $f\geq 0$ folgt:

$$\begin{array}{ccccccc} & \int_{B_\rho} f\ \mathrm{d}(x,y) & \leq & \int_{Q_\rho} f\ \mathrm{d}(x,y) & \leq & \int_{B_{\sqrt{2}\rho}} f\ \mathrm{d}(x,y)\\ \Longrightarrow & h(\rho) & \leq & \int_{Q_\rho} f\ \mathrm{d}(x,y) & \leq & h(\sqrt{2}\rho)\\ \Longrightarrow & h(\rho) & \leq & \left(\int_0^\rho e^{-x^2}\ \mathrm{d}x\right)^2 & \leq & h(\sqrt{2}\rho)\\ \Longrightarrow & \sqrt{h(\rho)} & \leq & \int_0^\rho e^{-x^2}\ \mathrm{d}x & \leq & \sqrt{h(\sqrt{2}\rho)}\end{array}$$

Mit $\rho \to \infty$ folgt daraus

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\ \mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

und damit die Behauptung.

11.5. Zylinderkoordinaten

Definiere für $(r, \varphi, z) \in [0, \infty) \times [0, 2\pi] \times \mathbb{R}$:

$$\Phi(r, \varphi, z) := (r\cos(\varphi), r\sin(\varphi), z)$$

Dann gilt:

$$|\det \Phi'(r, \varphi, z)| = \left|\det \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -r\sin(\varphi) & 0 \\ \sin(\varphi) & r\cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right| = r$$

Bemerkung (Faustregel für Zylinderkoordinaten): Ist ein Integral der Form $\int_B f(x, y, z) d(x, y, z)$ zu berechnen, so lässt sich eine Menge A finden, sodass $\Phi(A) = B$ ist. Mit 11.2 folgt dann:

$$\int_B f(x, y, z)\ \mathrm{d}(x, y, z) = \int_A f(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z) \cdot r\ \mathrm{d}(r, \varphi, z)$$

Beispiel
Definiere

$$B := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 1, x, y \geq 0, z \in [0, 1]\}$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\int_B z + y\sqrt{x^2 + y^2}\ \mathrm{d}(x, y, z) &= \int_A (z + r\sin(\varphi) \cdot r) \cdot r\ \mathrm{d}(r, \varphi, z) \\
&= \int_A rz + r^3\sin(\varphi)\ \mathrm{d}(r, \varphi, z) \\
&= \int_0^1 (\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\int_0^1 rz + r^3\sin(\varphi)\ \mathrm{d}r)\ \mathrm{d}\varphi)\ \mathrm{d}z \\
&= (\int_0^1 r\ \mathrm{d}r) \cdot (\int_0^1 z\ \mathrm{d}z) \cdot (\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ \mathrm{d}\varphi) + (\int_0^1 r^3\ \mathrm{d}r) \cdot (\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(\varphi)\ \mathrm{d}\varphi) \cdot (\int_0^1\ \mathrm{d}z) \\
&= \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

11.6. Kugelkoordinaten

Definiere für $(r, \varphi, \theta) \in [0, \infty) \times [0, 2\pi] \times [0, \pi]$:

$$\Phi(r, \varphi, \theta) := (r\cos(\varphi)\sin(\theta), r\sin(\varphi)\sin(\theta), r\cos(\theta))$$

Dann gilt (nachrechnen!):

$$\det \Phi'(r, \varphi, \theta) = -r^2\sin(\theta)$$

Bemerkung (Faustregel für Kugelkoordinaten): Ist ein Integral der Form $\int_B f(x,y,z)d(x,y,z)$ zu berechnen, so lässt sich eine Menge A finden, sodass $\Phi(A) = B$ ist. Mit 11.2 folgt dann:

$$\int_B f(x,y,z)\ \mathrm{d}(x,y,z) = \int_A f(r\cos(\varphi)\sin(\theta), r\sin(\varphi)\sin(\theta), r\cos(\theta)) \cdot r^2 \sin(\theta)\ \mathrm{d}(r,\varphi,\theta)$$

Beispiel
Definiere

$$B := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 1 \leq \|(x,y,z)\| \leq 2, x,y,z \geq 0\}$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned}\int_B \frac{1}{x^2+y^2+z^2}\ \mathrm{d}(x,y,z) &= \int_A \frac{1}{r^2} \cdot r^2 \cdot \sin(\theta)\ \mathrm{d}(r,\varphi,\theta)\\ &= \int_A \sin(\theta)\ \mathrm{d}(r,\varphi,\theta)\\ &= \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

Beispiel (Zugabe von Herrn Dr. Ullmann)
Wir wollen das Kugelvolumen $\lambda_3(K)$ mit $K := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \|(x,y,z)\| \leq 1\}$ berechnen. Dann ist $K = \Phi(A)$ mit $A := [0,1] \times [0,2\pi] \times [0,\pi]$. Und es gilt:

$$\begin{aligned}\lambda_3(K) &= \int_K 1\ \mathrm{d}(x,y,z)\\ &= \int_A r^2 \sin(\theta)\ \mathrm{d}(r,\varphi,\theta)\\ &= \int_0^1 (\int_0^{2\pi} (\int_0^{\pi} r^2 \sin(\theta)\ \mathrm{d}\theta)\ \mathrm{d}\varphi)\ \mathrm{d}r\\ &= (\int_0^1 r^2\ \mathrm{d}r) \cdot (\int_0^{2\pi}\ \mathrm{d}\varphi) \cdot (\int_0^{\pi} \sin(\theta)\ \mathrm{d}\theta)\\ &= \frac{4\pi}{3}\end{aligned}$$