0.5 Übung 4, 29.11.2004

Can somebody please tell where the heck I've been ? Oh, wait, now I remember, good old Bremen

0.6 Übung 5, 06.12.2004

0.6.1 Aufgabe 1

Geg: $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit $a_{ij} = 0$, falls $i \geq j$

a) z.Z.: $A^n = 0$
Beweis: $A^k = ((a_{ij}^{(k)}))$ Beh.: $a_{ij}^{(k)} = 0$, falls $i \geq j - k + 1$
(Vollständige Induktion)

I.A.: $A^n = A = ((a_{ij}))$. Nach Vor.: $a_{ij} = 0$ für $i \geq j - 1 + 1$
I.V.: Für $A^k = ((a_{ij}))$ gilt $a_{ij}^{(k)} = 0$ für $i \geq j - k + 1$
I.S.: z.Z. $A^{k+1} = ((a_{ij}^{(k+1)}))$ erfüllt

$$a_{ij}^{(k+1)} = 0 \text{ für } i \geq (k+1)+1 = j-k$$

Bew.: Sei $i_0, j_0 \in \{1, ..., n\}$ mit $i_0 \geq j_0 - k = i_0 \geq (j_0 - 1) + k + 1$

$A^{k+1} = A^K \cdot A$. Also gilt:

$a_{i_0 j_0}^{k+1} = \sum_{l=1}^{n} a_{i_0 l} a_{l j_0}$

$$\underbrace{\underbrace{a_{i_o 1}^{(k)} \cdot a_{1j_0}}_{0} + ... + \overbrace{a_{i_0 j_0 - 1}^{(k)}}^{=0}}_{0 \text{ nach I.V.}} \cdot \underbrace{a_{(j_0-1)j_0} + a_{i_0 j_0}^{(k)} \cdot a_{i_0 j_0}^{(k)} \cdot \overbrace{a_{j_0 j_0}}^{=0} + ... + a_{i_0 n}^{(k)} \cdot \underbrace{a_{nj_0}}_{0}}_{\text{nach Vor. aus A}} = 0$$

Damit gilt für $k = n : A^n = ((d_{ij}^{(n)}))a_{ij}^{(n)} = 0$, falls $i \geq \underbrace{j - n + 1}_{\text{Gilt für alle} i,j < \{1,...,n\}}$. Also gilt: $A^n = 0$

□

b) Wo ist Teil b ?, bzw. was war a ?

c) $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, t \mapsto t^3$. Dazu gehört dann: $\varphi : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}^{n\times n}, A \mapsto A^3$

P ist injektiv aber $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$ erfüllt: $\varphi_n(A) = A^3 = 0$. Damit ist φ_n nicht injektiv.