2 Ringe

2.1 Euklidische Ringe

Definition 2.1 (a) Ein Integritätsbereich R heißt **euklidisch**, wenn es eine Abbildung: $\delta : R \setminus \{0\} \to \mathbb{N}$ mit folgender Eigenschaft gibt: zu $f, g \in R, g \neq 0$ gibt es $q, r \in R$ mit $f = qg + r$ mit $r = 0$ oder $\delta(r) < \delta(q)$.

(b) Sei R euklidisch, $a, b \in R \setminus \{0\}$. Dann gilt:

(i) in R gibt es einen ggT von a und b.

(ii) $d \in (a, b)$ (dh $\exists x, y \in R$ mit $d = xa + yb$)

(iii) $(d) = (a, b)$

(c) Jeder euklidische Ring ist ein Hauptidealring.

Beispiel: $\mathbb{Z}$ mit $\delta(a) = |a|$, $K[X]$ mit $\delta(f) = \mathrm{Grad}(f)$

2.2 Hauptidealringe

Definition 2.2

Ein komutativer Ring mit Eins heißt **Hauptidealring**, wenn jedes Ideal in R ein Hauptideal ist.

Satz 4

Jeder nullteilerfreie Hauptidealring ist faktoriell.

Satz 5

Es sei R ein Hauptidealring $p \in R$ eine von 0 verschiedene Nichteinheit. Dann ist äquivalent:

(i) p ist irreduzibel

(ii) p ist Primelement

(iii) (p) ist maximales Ideal in R

2.3 Faktorielle Ringe

Proposition + Definition 2.3

Sei R ein Integritätsbereich.

(a) Folgende Eigenschaften sind äquivalent:

   (i) Jedes $x \in R\backslash\{0\}$ läßt sich eindeutig als Produkt von Primelementen schreiben.

   (ii) Jedes $x \in R \setminus \{0\}$ läßt sich "irgendwie" als Produkt von Primelementen schreiben.

   (iii) Jedes $x \in R \setminus \{0\}$ läßt sich eindeutig als Produkt von irreduziblen Elementen schreiben.

(b) Sind diese drei Eigenschaften für R erfüllt, so heißt R **faktorieller** Ring. (Oder **ZPE-Ring** (engl.: UFD)). Dabei ist in (a) "eindeutig" gemeint, bis auf Reihenfolge und Multiplikation mit Einheiten. Präziser: Sei $\mathcal{P}$ ein Vertretersystem der Primelemnte $(\neq 0)$ bezüglich "assoziiert".
Dann heißt (i) $\forall x \in R \setminus \{0\}$ $\exists!$ $e \in R^{x}$ und für jedes $p \in \mathcal{P}$ ein $\nu_p(x) \geq 0 : x = e \prod\limits_{p \in \mathcal{P}} p^{\nu_p}$. (beachte $\nu_p \neq 0$ nur für endlich viele p).

Bemerkung 2.4
Ist R faktorieller Ring, so gibt es zu allen $a, b \in R \setminus \{0\}$ einen ggT(a,b).

Bemerkung 2.5
Sei R ein faktoriellen Ring, $a \in R$.

$$a \text{ irreduzibel} \Leftrightarrow a \text{ prim}$$

2.4 Vererbung auf den Polynomring

Bemerkung 2.6
Sei R ein Ring und $R[X]$ der zugehörige Polynomring, dann vererben sich folgende Eigenschaften von R auf $R[X]$:

1. hat Eins
2. kommutativ
3. Integritätsbereich
4. faktoriell