

# 16. Grenzwerte bei Funktionen

## Definition (Häufungspunkt)

Sei  $D \subseteq \mathbb{R}$  und  $x_0 \in \mathbb{R}$ .  $x_0$  heißt ein **Häufungspunkt** (HP) von  $D : \iff \exists$  Folge  $x_n$  in  $D \setminus \{x_0\}$  mit  $x_n \rightarrow x_0$ .

## Beispiele:

- (1) Ist  $D$  endlich, so hat  $D$  keine Häufungspunkte.
- (2)  $D = (0, 1]$ .  $x_0$  ist Häufungspunkt von  $D \iff x_0 \in [0, 1]$ .
- (3)  $D = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ .  $D$  hat genau einen Häufungspunkt:  $x_0 = 0$
- (4)  $D = \mathbb{Q}$ . 8.1(2)  $\implies$  jedes  $x_0 \in \mathbb{R}$  ist ein Häufungspunkt von  $\mathbb{Q}$ .

**Bemerkung:** Unterscheide zwischen „ $x_0$  ist Häufungswert von  $(a_n)$ “ und „ $x_0$  ist Häufungspunkt von  $\{a_1, a_2, \dots\}$ “. Beispiel:  $a_n = (-1)^n$ .  $\mathcal{H}(a_n) = \{1, -1\}$ ,  $\{a_1, a_2, \dots\} = \{-1, 1\}$  hat keine Häufungspunkte.

**Zur Übung:** Sei  $D \subseteq \mathbb{R}$ ,  $x_0 \in \mathbb{R}$ .  $x_0$  ist Häufungspunkt von  $D \iff \forall \varepsilon > 0$  gilt:  $D \cap (U_\varepsilon(x_0) \setminus \{x_0\}) \neq \emptyset$

**Vereinbarung:** Ab jetzt sei in dem Paragraphen gegeben:  $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{R}$ .  $x_0$  ist Häufungspunkt von  $D$  und  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion.

## Definition

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  existiert :  $\iff \exists a \in \mathbb{R}$  mit: für jede Folge  $(x_n)$  in  $D \setminus \{x_0\}$  mit  $x_n \rightarrow x_0$  gilt:  $f(x_n) \rightarrow a$ . In diesem Fall schreibt man:  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$  oder  $f(x) \rightarrow a$  ( $x \rightarrow x_0$ )

**Bemerkung:** (1) Existiert  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ , so ist obiges  $a$  eindeutig bestimmt. (Übung)

(2) Falls  $x_0 \in D$ , so ist der Wert  $f(x_0)$  in obiger Definition nicht relevant.

## Beispiele:

- (1)  $D = (0, 1]$ .

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{falls } x \in (0, \frac{1}{2}) \\ \frac{1}{2} & \text{falls } x = \frac{1}{2} \\ 1 & \text{falls } x \in (\frac{1}{2}, 1) \\ 0 & \text{falls } x = 1 \end{cases}$$

$x_0 = 0$ : Sei  $(x_n)$  eine Folge in  $D$  mit  $x_n \rightarrow 0$ . Dann  $x_n < \frac{1}{2}$  ffa  $n \in \mathbb{N} \implies f(x_n) = x_n^2$  ffa  $n \in \mathbb{N} \implies f(x_n) \rightarrow 0$ , d.h.  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ .

$x_0 = 1$ : Analog:  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1$ .

$x_0 = \frac{1}{2}$ : Sei  $(x_n)$  eine Folge in  $D \setminus \{\frac{1}{2}\}$  und  $x_n < \frac{1}{2} \forall n \in \mathbb{N} \implies f(x_n) = x_n^2 \rightarrow \frac{1}{4}$ .  
 Sei  $(z_n)$  eine Folge in  $D \setminus \{\frac{1}{2}\}$  und  $z_n > \frac{1}{2} \forall n \in \mathbb{N} \implies f(z_n) = 1 \rightarrow 1$  d.h.:  $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} f(x)$

existiert nicht. Aber:  $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} f(x)$  existiert und ist  $\frac{1}{4}$  und  $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} f(x)$  existiert und ist 1.  
 $x \in (0, \frac{1}{2})$   $x \in (\frac{1}{2}, 1)$

Dafür schreibt man:  $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}-} f(x) = \frac{1}{4}$  und  $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}+} f(x) = 1$ .

(2)  $D = [0, \infty)$ ,  $p \in \mathbb{N}$ ,  $f(x) = \sqrt[p]{x}$ . Sei  $x_0 \in D$ . Sei  $(x_n)$  Folge in  $D \setminus \{x_0\}$  mit  $x_n \rightarrow x_0$ . 7.1  
 $\implies f(x_n) = \sqrt[p]{x_n} \rightarrow \sqrt[p]{x_0}$ . Das heißt:  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ .

**Vereinbarung:** Für  $\delta > 0$ :  $D_\delta(x_n) = D \cap U_\delta(x_0)$ .  $\dot{D}_\delta(x_0) = D_\delta(x_0) \setminus \{x_0\}$ .

### Satz 16.1 (Grenzwertsätze bei Funktionen)

- (1)  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  existiert  $\iff$  für jede Folge  $(x_n)$  in  $D \setminus \{x_0\}$  mit  $x_n \rightarrow x_0$  ist  $f(x_n)$  konvergent.
- (2) Für  $a \in \mathbb{R}$  gilt:  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  existiert und ist gleich  $a \iff \forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0$  mit (\*)  
 $|f(x) - a| < \varepsilon \forall x \in \dot{D}_\delta(x_0)$ .
- (3) *Cauchy Kriterium:*  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  existiert  $\iff \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ :  $|f(x) - f(x')| < \varepsilon \forall x, x' \in \dot{D}_\delta(x_0)$

### Beweis

- (1) „ $\implies$ “: aus Definition.  
 „ $\Leftarrow$ “: Seien  $(x_n), (z_n)$  Folgen in  $D \setminus \{x_0\}$  mit  $x_n \rightarrow x_0, z_n \rightarrow x_0$ . Voraussetzung  $\implies$  es existiert  $a := \lim f(x_n)$  und  $b := \lim f(z_n)$ . Zu zeigen ist:  $a = b$ . Sei  $t_n$  definiert durch  $(t_n) := (x_1, z_1, x_2, z_2, \dots)$ .  $(t_n)$  ist Folge in  $D \setminus \{x_0\}$  mit  $t_n \rightarrow x_0$ , Voraussetzung  $\implies \exists c := \lim f(t_n)$ .  $(f(x_n))$  ist Teilfolge von  $(f(t_n)) \implies a = c$ , analog:  $b = c \implies a = b$ .
- (2) „ $\implies$ “: Sei  $\varepsilon > 0$ . **Annahme:** Es gibt kein  $\delta > 0$ , so dass (\*) gilt. Das heißt:  $\forall \delta > 0$  existiert ein  $x_j \in \dot{D}_\delta(x_0)$ :  $|f(x_j) - a| \geq \varepsilon$ , also  $\forall n \in \mathbb{N} \exists x_n \in \dot{D}_{\frac{1}{n}}(x_0) : |f(x_n) - a| \geq \varepsilon$ . Das heißt:  $(x_n)$  ist eine Folge in  $D \setminus \{x_0\}$  mit  $x_n \rightarrow x_0$  und  $f(x_n) \not\rightarrow a$ , Widerspruch.  
 „ $\Leftarrow$ “: Sei  $(x_n)$  eine Folge in  $D \setminus \{x_0\}$  mit  $x_n \rightarrow x_0$ . Zu zeigen ist:  $f(x_n) \rightarrow a$ . Sei  $\varepsilon > 0$ .  $\exists \delta > 0$  so dass (\*) gilt. Dann:  $x_n \in \dot{D}_\delta(x_0)$  ffa  $n \in \mathbb{N} \implies |f(x_n) - a| < \varepsilon$  ffa  $n \in \mathbb{N}$ .
- (3) In Übung. ■

### Satz 16.2 (Rechnen mit Funktionsgrenzwerten)

Seien  $g, h : D \rightarrow \mathbb{R}$  zwei weitere Funktionen und es gelte  $f(x) \rightarrow a, g(x) \rightarrow b$  ( $x \rightarrow x_0$ ).

- (1)  $f(x) + g(x) \rightarrow a + b, f(x) \cdot g(x) \rightarrow ab, |f(x)| \rightarrow |a|$  ( $x \rightarrow x_0$ )
- (2) Ist  $a \neq 0 \implies \exists \delta > 0 : f(x) \neq 0 \forall x \in \dot{D}_\delta(x_0)$ . Für  $\frac{1}{f} : \dot{D}_\delta(x_0) \rightarrow \mathbb{R}$  gilt:  $\frac{1}{f(x)} \rightarrow \frac{1}{a}$ .

- (3) Existiert ein  $\delta > 0$  mit  $f \leq g$  auf  $\dot{D}_\delta(x_0) \implies a \leq b$
- (4) Existiert ein  $\delta > 0$  mit  $f \leq h \leq g$  auf  $\dot{D}_\delta(x_0)$  und  $a = b \implies \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = a$ .

### Beweis

folgt aus 6.2

Zum Beispiel: (3) Sei  $(x_n)$  Folge in  $D \setminus \{x_0\}$  und  $x_n \rightarrow x_0$ . Dann:  $x_n \in \dot{D}_\delta(x_0)$  ffa  $n \in \mathbb{N} \implies f(x_n) \leq g(x_n)$  ffa  $n \in \mathbb{N} \implies a = \lim f(x_n) \stackrel{5.2}{\leq} \lim g(x_n) = b$ . ■

### Definition

- (1) Sei  $(a_n)$  eine Folge in  $\mathbb{R}$ .  
 $\lim a_n = \infty$  (oder  $a_n \rightarrow \infty$ ) :  $\iff \forall c > 0 \exists n_0 = n_0(c) \in \mathbb{N} : a_n > c \forall n \geq n_0$ .  
 $\lim a_n = -\infty$  (oder  $a_n \rightarrow -\infty$ ) :  $\iff \forall c < 0 \exists n_0 = n_0(c) \in \mathbb{N} : a_n < c \forall n \geq n_0$ .
- (2)  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$  (oder  $f(x) \rightarrow \infty$  ( $x \rightarrow x_0$ )) :  $\iff$  für jede Folge  $(x_n)$  in  $D \setminus \{x_0\}$  und  $x_n \rightarrow x_0$  gilt:  $f(x_n) \rightarrow \infty$ .  
 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$  (oder  $f(x) \rightarrow -\infty$  ( $x \rightarrow x_0$ )) :  $\iff$  für jede Folge  $(x_n)$  in  $D \setminus \{x_0\}$  und  $x_n \rightarrow x_0$  gilt:  $f(x_n) \rightarrow -\infty$ .
- (3) Sei  $D$  nicht nach oben beschränkt.  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = a$  (oder  $f(x) \rightarrow a$ ) :  $\iff$  für jede Folge  $(x_n)$  in  $D$  mit  $x_n \rightarrow \infty$  gilt:  $f(x_n) \rightarrow a$  ( $a = \pm\infty$  zugelassen).  
 Sei  $D$  nicht nach unten beschränkt.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = a$  (oder  $f(x) \rightarrow -\infty$ ) :  $\iff$  für jede Folge  $(x_n)$  in  $D$  mit  $x_n \rightarrow -\infty$  gilt:  $f(x_n) \rightarrow a$  ( $a = \pm\infty$  zugelassen).

### Beispiele:

- (1)  $a_n := x^n$  ( $x > 1$ ). Behauptung:  $x^n \rightarrow \infty$  ( $n \rightarrow \infty$ ). Sei  $c > 0$ .  $c < \frac{1}{x^n} < 1 \implies \frac{1}{x^n} \rightarrow 0 \implies \frac{1}{x^n} < \frac{1}{c}$  ffa  $n \in \mathbb{N} \implies x^n > c$  ffa  $n \in \mathbb{N}$ .
- (2) Sei  $p \in \mathbb{N}$ . Dann  $x^p \rightarrow \infty$  ( $x \rightarrow \infty$ ). Siehe Übung.
- (3)  $\frac{1}{x} \rightarrow \infty$  ( $x \rightarrow 0+$ ),  $\frac{1}{x} \rightarrow -\infty$  ( $x \rightarrow 0-$ ).

### Satz 16.3 (Grenzwerte der Exponentialfunktion)

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad (x \in \mathbb{R})$$

- (1) Für  $p \in \mathbb{N}_0$  :  $\frac{e^x}{x^p} \rightarrow \infty$  ( $x \rightarrow \infty$ )
- (2)  $e^x \rightarrow \infty$  ( $x \rightarrow \infty$ )
- (3)  $e^x \rightarrow 0$  ( $x \rightarrow -\infty$ )

**Beweis**

$$(1) \quad e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^{p+1}}{(p+1)!} + \cdots \geq \frac{x^{p+1}}{(p+1)!} \quad \forall x \geq 0 \implies \frac{e^x}{x^p} \geq \frac{x}{(p+1)!} \quad \forall x > 0 \implies$$

Behauptung.

(2) Folgt aus 1 mit  $p = 0$ .

$$(3) \quad e^{-x} = \frac{1}{e^x} \xrightarrow{(2)} 0 \quad (x \rightarrow -\infty) \implies e^x \rightarrow 0 \quad (x \rightarrow -\infty). \quad \blacksquare$$