

## 4 Integralsätze

TODO: Einleitung

### 4.1 Etwas Differentialgeometrie

**Definition 4.1.** Eine beschränkte offene Menge  $D \subset \mathbb{R}^d$  hat einen  $C^1$ -Rand  $\partial D$ , wenn es für jedes  $x \in \partial D$  eine offene beschränkte Umgebung  $\tilde{V} \subset \mathbb{R}^d$ , eine offene beschränkte Menge  $\tilde{U} \subset \mathbb{R}^d$  und einen Diffeomorphismus  $\psi : \tilde{V} \rightarrow \tilde{U}$  gibt, sodass  $\psi(D \cap \tilde{V}) \subset \mathbb{R}^{d-1} \times (-\infty, 0)$  und  $\psi(\partial D \cap \tilde{V}) \subset \mathbb{R}^{d-1} \times \{0\}$ .

Wir nehmen ferner an, dass  $(\psi^{-1})'$  beschränkt ist. Dann heißt  $(\psi, \tilde{V})$  Karte und  $V := \tilde{V} \cap \partial D$  Kartengebiet.

Setze  $U \times \{0\} := \tilde{U} \cap (\mathbb{R}^{d-1} \times \{0\})$  und  $F(t) = \psi^{-1}(t, 0)$  für  $t \in U \subset \mathbb{R}^{d-1}$ . Dann heißt  $F : U \rightarrow V \subset \mathbb{R}^d$  Parametrisierung des Kartengebiets  $V$ . Wenn  $\psi \in C^k(\tilde{V}, \mathbb{R}^d)$  für jedes  $x \in \partial D$ , dann heißt  $\partial D$   $C^k$ -Rand ( $k \in \mathbb{N}$ ). Man schreibt dann  $\partial D \in C^k$  für  $k \in \mathbb{N}$ .

TODO: Bild

**Bemerkung 4.2.** a) Wenn in [Def 4.1](#)  $\psi \in C^k(\tilde{V}, \mathbb{R}^d)$ , dann gilt auch  $\psi^{-1} \in C^k(\tilde{U}, \mathbb{R}^d)$ . (Folgt aus  $(\psi^{-1})'(y) = [\psi'(\psi^{-1}(y))]^{-1}$ , siehe dazu Kettenregel und Umkehrsatz).

b) Da  $\partial D$  kompakt ist, kann man in [Def 4.1](#)  $\partial D$  mit endlich vielen  $\tilde{V}_1, \dots, \tilde{V}_n$  überdecken.

c) Die Abbildung  $F : U \rightarrow V$  ist homöomorph (d.h., bijektiv, stetig,  $F^{-1}$  stetig). Ferner sind die Spalten  $\partial_k F(t)$  ( $t = 1, \dots, d-1$ ) der Jakobimatrix bei jedem  $t \in U$  gleich  $\partial \psi^{-1}(t, 0)$  und somit linear unabhängig. Daraus folgt

$$\text{Rang } F'(r) = d - 1 \quad (\forall t \in U) \quad (4.1)$$

d)  $\partial D \subset \psi_1^{-1}(U_1 \times \{0\}) \times \dots \times \psi_m^{-1}(U_m \times \{0\})$  ist eine Nullmenge nach [Lem 3.33](#), da  $\psi_k^{-1}$  ein Diffeomorphismus ist und  $\lambda_d(U \times \{0\}) = 0$ .

**Beispiel 4.3.** a) (Sphäre) Sei  $D = B(0, R)$ ,  $\partial D = S(0, R)$  in  $\mathbb{R}^3$ . Wähle

$$\tilde{V} = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 : \frac{R}{2} < |x|_2 < \frac{3R}{2} \right\} \setminus (\mathbb{R}_+ \times \{0\} \times \mathbb{R}),$$

$$\tilde{U} = \left( -\frac{R}{2}, \frac{R}{2} \right) \times (0, 2\pi) \times \left( -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right)$$

und

$$\psi^{-1}(r, \varphi, \Theta) = (r + R) \cdot \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \cdot \cos(\Theta) \\ \sin(\varphi) \cdot \cos(\Theta) \\ \sin(\Theta) \end{pmatrix} : \tilde{U} \rightarrow \tilde{V}.$$

Dann folgt, dass

$$F(\varphi, \Theta) = \psi^{-1}(0, \varphi, \Theta) = R \cdot \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \cdot \cos(\Theta) \\ \sin(\varphi) \cdot \cos(\Theta) \\ \sin(\Theta) \end{pmatrix}$$

die geschlitze Sphäre  $\partial B(0, R) \setminus (\mathbb{R}_+ \times \{0\} \times \mathbb{R})$  [parametrisiert](#).

Beachte dabei, dass für  $-\frac{R}{2} < r < 0$   $\psi^{-1}(r, \varphi, \Theta) \in B(0, R)$  gilt.

Für den Schlitz braucht man noch eine rotierte Variante der obigen [Karte](#).

Ana III, 09.01.2009

- b) Sei  $\partial D$  lokal ein Graph oberhalb von  $D$ , d.h., dass ein offenes beschränktes  $U \subset \mathbb{R}^d$  und ein beschränktes  $h \in C^1(U, \mathbb{R})$  mit beschränkter Ableitung  $\nabla h$  existieren und  $a < 0 < b$ , sodass mit

$$\tilde{U} = U \times (a, b), \quad \tilde{V} = \{(t, s) \in U \times \mathbb{R} : s \in (a + h(t), b + h(t))\}$$

gilt:

$$\begin{aligned} \tilde{V} \cap D &= \{(t, s) \in U \times \mathbb{R} : s \in (a + h(t), h(t))\}, \\ \tilde{V} \cap \partial D &= \{(t, h(t)) : t \in U\}. \end{aligned}$$

< Setze hier  $\psi(t, s) := \begin{pmatrix} t \\ s - h(t) \end{pmatrix}$  für  $(t, s) \in \tilde{V}$ . Dann folgt  $\psi : \tilde{V} \rightarrow \tilde{U}$  ist bijektiv und  $C^1$  mit inverser  $\psi^{-1} : \tilde{U} \rightarrow \tilde{V}$ ,  $\psi^{-1}(t, \tau) = \begin{pmatrix} t \\ \tau + h(t) \end{pmatrix}$ . Hier gilt  $\psi'(t, s) = \begin{pmatrix} I_{d-1} & 0 \\ h'(t) & 1 \end{pmatrix}$ , also gilt  $\det \psi'(t, s) = 1$ . Damit sind  $\psi$  und  $\psi^{-1}$  [diffeomorph](#) mit beschränkter Ableitung.

Ferner gilt  $\psi(\tilde{V} \cap D) = U \times (a, 0)$ ,  $\psi(\tilde{V} \cap \partial D) = U \times \{0\}$ . Demnach ist  $(\psi, \tilde{V})$  eine [Karte](#) (Def 4.1). Hier gilt  $F(t) = \begin{pmatrix} t \\ h(t) \end{pmatrix}$  für  $t \in U$ .

- c) Seien  $w \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ ,  $a \in \mathbb{R}$  fest. Setze  $D := \{x \in \mathbb{R}^d : (x|w) < a\}$  (Halbraum). Dann ist  $\partial D = \{x \in \mathbb{R}^d : (x|w) = a\}$ . Wähle Basis  $v_1, \dots, v_{d-1}$  von  $\{w\}^\perp$  und  $p = \frac{a}{|w|^2} w$ . Daraus folgt  $(p|w) = a$ . Setze  $\psi^{-1}(t, \tau) := \sum_{j=1}^{d-1} t_j \cdot v_j + \tau w + p$  für  $t \in \mathbb{R}^{d-1}$ ,  $\tau \in \mathbb{R}$ . Also ist  $\psi^{-1} : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  [diffeomorph](#). Mit  $x = \psi^{-1}(t, \tau)$  gilt  $(x|w) = 0 + \tau |w|^2 + a \stackrel{\leq}{=} a$  für  $\tau \stackrel{\leq}{=} a$ . Damit gilt  $\psi^{-1}(\mathbb{R}^{d-1} \times (-\infty, 0)) = D$ ,  $\psi^{-1}(\mathbb{R}^{d-1} \times \{0\}) = \partial D$ . Also ist  $\psi$  eine "Karte". Hier ist  $F(t) = t_1 v_1 + \dots + t_{d-1} v_{d-1} + p$ .

## Zur Tangentialgleichung

Sei  $x \in \partial D$ ,  $F$  sei eine [Parametrisierung](#) wie in [Def 4.1](#) mit  $F(t) = x$ . Sei  $\phi \in C^1((-1, 1), \mathbb{R}^{d-1})$  mit  $\phi(0) = t$ ,  $\phi'(0) = w \in \mathbb{R}^{d-1} \setminus \{0\}$ . Dann folgt

$$\begin{aligned}\gamma &= F \circ \phi \in C^1((-1, 1), \mathbb{R}^d) \\ \gamma(0) &= F(t) = v, \quad \gamma(\tau) \in \partial D \quad \forall \tau \in (-1, 1) \\ \gamma'(0) &= F'(\phi(0))w = F'(t)w \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}.\end{aligned}$$

TODO: Bild

Betrachte  $v$  als Tangentialrichtung an  $\partial D$  bei  $x$ .

**Definition 4.4.** Sei  $\partial D \subset C^1$ . Der Tangentialraum  $T_x \partial D$  an  $\partial D$  bei  $x \in \partial D$  ist der Bildraum  $F'(t)(\mathbb{R}^{d-1})$  einer [Parametrisierung](#) ([Def 4.1](#)) mit  $F(t) = x$ .

Die Tangentialhyperebene ist  $x + T_x \partial D$ . Das orthogonale Komplement von  $T_x \partial D$  in  $\mathbb{R}^d$  heißt Normalenraum  $N_x \partial D$ .

Ein  $w \in N_x \partial D$  heißt äußere Normale, wenn ein  $\delta > 0$  existiert, sodass  $x + \tau w \in D$  für alle  $t \in (-\delta, 0)$  und  $x + \tau w \notin D$  für alle  $t \in (0, \delta)$ .

**Bemerkung 4.5.** a) Die Spalten  $\partial_1 F'(t), \dots, \partial_{d-1} F'(t)$  spannen  $T_x \partial D$  auf. Mit [Def 4.1](#) folgt  $\dim T_x \partial D = d - 1$  und daraus  $\dim N_x \partial D = 1$ .

b) Sei  $G : W \rightarrow \mathbb{R}^d$  eine weitere [Parametrisierung](#) von  $\partial D$  bei  $x = F(t)$  mit  $G(s) = x$ . Sei  $(\psi, \tilde{V})$  die Karte bei  $x$  zu  $F$  (aus [Def 4.1](#)). Wähle  $W$  so klein, dass  $s \in W$ ,  $G(W) \subset \tilde{V}$ . Setze  $\phi \in C^1(W, \mathbb{R}^{d-1})$  durch  $\phi = P \circ \psi \circ G$  mit  $P(t', \tau) = t'$  für  $t' \in \mathbb{R}^{d-1}, \tau \in \mathbb{R}$ .

Dann folgt  $F \circ \phi = G$  und  $\phi(s) = t$ . Da  $G'(s) = F'(t)\phi'(s)$  und  $G'(s)$  injektiv (siehe [\(4.1\)](#) für  $G$ ), folgt  $\phi'(s)$  ist injektiv. Aus der Linearen Algebra wissen wir, dass  $\phi'(s)$  als lineare Abbildung damit auch bijektiv ist. Daraus folgt  $G'(s)\mathbb{R}^{d-1} = F'(s)\mathbb{R}^{d-1}$ . Also sind  $T_x \partial D$  und  $N_x \partial D$  unabhängig von der Wahl der [Parametrisierung](#).

**Beispiel 4.6** (vergleiche [Bsp 4.3](#)). a) Seien  $D = B(0, R)$  und  $d = 3$ . Die Menge  $\partial D \setminus (\mathbb{R}_+ \times \{0\} \times \mathbb{R})$  hat die [Parametrisierung](#)

$$F(\varphi, \Theta) = R \cdot \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \cdot \cos(\Theta) \\ \sin(\varphi) \cdot \cos(\Theta) \\ \sin(\Theta) \end{pmatrix}$$

für  $(\varphi, \Theta) \in U = (0, 2\pi) \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ . Sei  $x = F(\varphi, \Theta)$ . Dann folgt

$$F'(\varphi, \Theta) = R \cdot \begin{pmatrix} -\sin(\varphi) \cdot \cos(\Theta) & -\cos(\varphi) \cdot \sin(\Theta) \\ \cos(\varphi) \cdot \cos(\Theta) & -\sin(\varphi) \cdot \sin(\Theta) \\ 0 & \cos(\Theta) \end{pmatrix}.$$

Damit wird  $T_x \partial D$  von  $v_1 = \begin{pmatrix} -\sin(\varphi) \cdot \cos(\Theta) \\ -\sin(\varphi) \cdot \sin(\Theta) \\ 0 \end{pmatrix}$  und  $v_2 = \begin{pmatrix} -\cos(\varphi) \cdot \sin(\Theta) \\ -\sin(\varphi) \cdot \sin(\Theta) \\ \cos(\Theta) \end{pmatrix}$  aufgespannt. Eine äußere Normale ist  $x = R \cdot \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \cdot \cos(\Theta) \\ \sin(\varphi) \cdot \cos(\Theta) \\ \sin(\Theta) \end{pmatrix}$ , denn es gelten  $(v_2|x) = 0$  und  $|x + \tau x|_2 = |1 + \tau| \cdot |x|_2 = |1 + \tau| \cdot R =: J$ . Es gilt nun  $J > R$ , wenn  $\tau > 0$  und  $J < R$ , wenn  $\tau \in (-1, 0)$ . Also gilt auch  $x + \tau \cdot x \in D$  für  $\tau > 0$  und  $x + \tau \notin D$  für  $\tau \in (-1, 0)$ .

TODO: Bild

- b)  $\partial D$  liege bei  $x_0$  unterhalb vom Graph von  $h$ . Dann folgt, dass es ein offenes  $U \subset \mathbb{R}^{d-1}$ ,  $t_0 \in U$  und ein  $h \in C^1(U, \mathbb{R})$  gibt, sodass  $F(t) = \begin{pmatrix} t \\ h(t) \end{pmatrix}$  und  $F(t_0) = x_0$  gelten. Damit sind die Tangentialvektoren bei  $x_0$  gerade  $v_j = \begin{pmatrix} e_j \\ \partial_j h(t_0) \end{pmatrix}$ ,  $j = 1, \dots, d-1$ , wobei  $e_j \in \mathbb{R}^{d-1}$ . Weiter ist  $w = \begin{pmatrix} -\nabla h(t_0) \\ 1 \end{pmatrix}$  eine äußere Normale, denn es gelten  $(v_j|w) = 0 \ \forall j = 1, \dots, d-1$  und  $x_0 + tw = \underbrace{\begin{pmatrix} t_0 - \tau \cdot \nabla h(t_0) \\ h(t_0) + \tau \end{pmatrix}}_{=:(t,s)^T}$ .

Somit folgt die Existenz eines  $\delta > 0$ , sodass für  $|\tau| < \delta$  gilt:  $t \in U$  und

$$\begin{aligned} \psi_d(t) &= s - h(t) \\ &\stackrel{\text{Taylor}}{=} h(t_0) + \tau - (h(t_0) + \nabla h(t_0) \underbrace{(t - t_0)}_{= -\tau \nabla h(t_0)}) + \sigma(|t - t_0|_2) \end{aligned}$$

= TODO: Hier macht einiges in meinem Mitschrieb keinen Sinn...

(siehe dazu [Bsp 4.3](#)).

- c) In [Bsp 4.3c](#)) ist  $\partial D$  die [Tangentialhyperebene](#) für alle  $x \in \partial D$  und  $w$  ist eine äußere Normale.

**Lemma 4.7.** Sei  $\partial D \in C^1$  und  $x_0 \in \partial D$ . Nach eventueller Rotation und Spiegelung des Koordinatensystems gibt es eine offene Umgebung  $\tilde{V}$  von  $x_0$ , sodass  $\partial D$  eine [Karte](#)  $(\psi, \tilde{V})$  wie in [Bsp 4.3b](#)) hat. Insbesondere gibt es eine eindeutig bestimmte äußere Normale  $\nu(x_0)$ , die durch

$$\nu(x_0) = \frac{1}{\sqrt{1 + |\nabla h(t)|_2^2}} \begin{pmatrix} -\nabla h(t) \\ 1 \end{pmatrix}$$

gegeben ist. Dabei ist  $x = \begin{pmatrix} t \\ h(t) \end{pmatrix}$  für  $t \in U$ .

*Beweis.* Die Eindeutigkeit folgt aus [Def 4.4](#) und  $\dim N_{x_0} \partial D = 1$ . Sei  $(\psi, \tilde{V})$  eine [Karte](#) von  $\partial D$  bei  $x_0$  mit zugehöriger [Parametrisierung](#)  $F : U_0 \rightarrow \mathbb{R}^d$  mit  $F(t_0) = x_0$ . Da  $\text{Rang} F'(t_0) = d-1$ , gibt es eine Rotation des  $\mathbb{R}^d$ , sodass  $\nabla F_1(t_0), \dots, \nabla F_{d-1}(t_0)$  linear unabhängig sind. (Wir behalten auch nach der Rotation die alten Bezeichnungen.)

Sei  $f = (F_1, \dots, F_{d-1})^T$ . Aus dem Umkehrsatz folgt:  $\exists$  offenes  $U_1 \subset U_0$ ,  $t_0 \in U_1$  mit  $f : U_1 \rightarrow f(U_1) =: W$  offen und  $f$  [diffeomorph](#).

Setze  $h(s) := F_d(f^{-1}(s))$ ,  $G(s) := (s, h(s))^T$ . Damit ist  $h \in C^1(W, \mathbb{R})$  und (nach eventueller Verkleinerung von  $U_1$ ) sind  $h$  und  $\nabla h$  beschränkt und  $G(s) = (f(t), F_d(t))^T = F(t)$ ,  $t := f^{-1}(s)$ ,  $s \in U_1$ . Also ist  $G$  eine [Parametrisierung](#).

$V_1 = G(U_1) = F(W) \subset V$ . Aus [Bsp 4.6b](#) folgt: haben  $(-\nabla h(s_0), 1)^T$  (TODO: WTF?!). Nach weiterer Rotation wird dieser Vektor zu  $\alpha \cdot e_d \in \mathbb{R}^d$  für ein  $\alpha > 0$ . Demnach wird  $T_{x_0} \partial D$  von  $\{e_1, \dots, e_{d-1}\}$  aufgespannt und ebenfalls von  $\partial_j \psi^{-1}(t_0, 0) = \partial_j F(t_0)$  ( $j = 1, \dots, d-1$ ) ([Bem 4.5](#)). Da  $(\psi^{-1})'(t_0, 0)$  invertierbar ist, ist  $\partial_d(\psi^{-1})(t_0, 0)$  linear unabhängig zu  $\partial_1 F(t_0), \dots, \partial_{d-1} F(t_0)$ . Folgt gilt  $\partial_d \psi^{-1}(t_0, 0) \neq 0$ .

Ana III, 12.01.2009

Wir können annehmen, dass  $(\partial_d \psi^{-1})_d(t_0, 0) > 0$ . (Andernfalls ersetze  $\tau$  durch  $-\tau$ , was einer Spiegelung an der Ebene  $\{t_d = 0\}$  entspricht.) Daraus folgt:  $\exists U_2 \subset U_1$ ,  $U_2$  offen mit  $t_0 \in U_2$ ,  $\delta, \eta > 0$ , sodass  $(\partial_d \psi^{-1})_d(t, 0) > 0$ ,  $\forall t \in U_2$ ,  $|\delta| \leq \eta$ .

Sei  $t \in U_2$ ,  $\tau \in (-\eta, 0)$ . Mit dem Mittelwertsatz folgt dann

$$\exists \sigma \in (\tau, 0) \text{ mit } (\psi^{-1})_d(t, \tau) - \underbrace{(\psi^{-1})_d(t, 0)}_{=F(t)=h(f(t))} = (\partial_d \psi^{-1})_d(t, \sigma) \cdot \tau \leq \delta \cdot \tau < 0.$$

Damit liegt  $D$  für diese Punkte unterhalb von  $\partial D$ . Mit [Bsp 4.6b](#) und [Bem 4.5b](#) folgt der Ausdruck für  $\nu$ .  $\square$

## 4.2 Das Oberflächenintegral

Idee: Sei  $d = 3$ ,  $F : U \rightarrow V$  eine [Parametrisierung](#),  $U \subset \mathbb{R}^3$ . Dann sind  $\partial_1 F(s, t)$ ,  $\partial_2 F(s, t)$  linear unabhängig  $\forall (s, t) \in U$ .

TODO: Bilder

$T_{jk}$  ist ein Parallelogramm in  $T_{x_{jk}}$ , das von  $v_{jk} = \partial_1 F(s_k, t_j) \Delta s_j$  und  $w_{jk} = \partial_2 F(s_k, t_j) \Delta t_k$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} \text{"vol}_2(V) &= \sum_{s,k} \text{vol}_2(v_{jk}) \approx \sum_{j,k} |v_{jk} \times w_{jk}|_2 \\ &= \sum_{j,k} |\partial_1 F(s_j, t_k) \times \partial_2 F(s_j, t_k)|_2 \Delta s_j \Delta t_k \\ &\xrightarrow{\Delta s_j, \Delta t_k \rightarrow 0} \int_U \underbrace{|\partial_1 F(s, t) \times \partial_2 F(s, t)|_2}_{=: \sqrt{g_F(s, t)}} ds dt. \end{aligned}$$

Weiter gilt

$$\begin{aligned} g_F &\stackrel{\text{LA}}{=} |\partial_1 F|_2^2 \cdot |\partial_2 F|_2^2 - (\partial_1 F | \partial_2 F)^2 = \det \begin{pmatrix} |\partial_1 F|_2^2 & (\partial_1 F | \partial_2 F) \\ (\partial_1 F | \partial_2 F) & |\partial_2 F|_2^2 \end{pmatrix} \\ &= \det \underbrace{\left( (F')^T \cdot F' \right)}_{\text{symm. } 2 \times 2 \text{ Matrix}}. \end{aligned}$$

**Definition 4.8.** Sei  $F : U \rightarrow \mathbb{R}^d$  eine [Parametrisierung](#). Dann ist die Gramsche Determinante von  $F$  durch

$$g_F(t) = \det (F'(t)^T \cdot F'(t))$$

für alle  $t \in U$  gegeben.

Im Spezialfall  $d = 3$  gilt

$$g_F(t) = |\partial_1 F(t) \times \partial_2 F(t)|_2^2 = \left| \begin{pmatrix} \partial_1 F_2(t) \cdot \partial_2 F_3(t) - \partial_1 F_3(t) \cdot \partial_2 F_2(t) \\ \partial_1 F_3(t) \cdot \partial_2 F_1(t) - \partial_1 F_1(t) \cdot \partial_2 F_3(t) \\ \partial_1 F_1(t) \cdot \partial_2 F_2(t) - \partial_1 F_2(t) \cdot \partial_2 F_1(t) \end{pmatrix} \right|_2^2.$$

**Bemerkung.** Für  $d = 3$  ist  $\partial_1 F(t) \times \partial_2 F(t)$  eine Normale an  $V$  bei  $F(t) = x$ , da sie senkrecht auf  $\partial_1 F(t)$  und  $\partial_2 F(t)$  steht.

**Beispiel 4.9.** a) Sei  $V = \partial B(0, R) \setminus (\mathbb{R}_+ \times \{0\} \times \mathbb{R}) \subset \mathbb{R}^3$  parameterisiert durch die sphärischen Koordinaten (siehe [Bsp 4.3a](#), [Bsp 4.6a](#)). Dann gilt für  $\varphi \in (0, 2\pi)$ ,  $\Theta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

$$F'(\varphi, \Theta) = R \cdot \begin{pmatrix} -\sin(\varphi) \cdot \cos(\Theta) & -\cos(\varphi) \cdot \sin(\Theta) \\ \cos(\varphi) \cdot \cos(\Theta) & -\sin(\varphi) \cdot \sin(\Theta) \\ 0 & \cos(\Theta) \end{pmatrix}$$

und

$$F'(\varphi, \Theta)^T \cdot F'(\varphi, \Theta) = R^2 \cdot \begin{pmatrix} \cos^2(\Theta) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Damit folgt

$$\sqrt{g_F(\varphi, \Theta)} = R^2 \cdot \sqrt{\det \begin{pmatrix} \cos^2(\Theta) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} = R^2 \cdot \cos(\Theta).$$

b)  $V$  als Graph ([Bsp 4.6b](#)). Hier gilt  $F(t) = (t, h(t))^T$  für  $t \in U \subset \mathbb{R}^{d-1}$ ,  $h \in C^1(U, \mathbb{R})$ .

Damit folgt

$$G(t) := F'(t)^T \cdot F'(t) = [I_{d-1} \quad \nabla h(t)] \cdot \begin{bmatrix} I_{d-1} \\ \nabla h(t)^T \end{bmatrix} = I_{d-1} + \underbrace{\nabla h(t) \cdot \nabla h(t)^T}_{=: H(t)}$$

und damit

$$G(t) \nabla h(t) = \nabla h(t) + \nabla h(t) \cdot |\nabla h(t)|_2^2 = (1 + |\nabla h(t)|_2^2) \cdot \nabla h(t)$$

$$H(t) = \nabla h(t) \cdot (\nabla h(t)|_v), \quad \forall v \in \mathbb{R}^{d-1}.$$

Somit gilt

$$\text{Rang } H(t) = \begin{cases} 1, & \nabla h(t) \neq 0 \\ 0, & \nabla h(t) = 0 \end{cases} \Rightarrow \dim \text{Kern } H(t) = \begin{cases} d-2, & \nabla h(t) \neq 0 \\ d-1, & \nabla h(t) = 0 \end{cases}.$$

Also hat  $G(t)$  die Eigenwerte  $1 + |\nabla h(t)|_2^2$  und  $1$  ( $d-2$  fach). Schließlich gilt dann

$$\sqrt{g_F(t)} = \sqrt{\det G(t)} = \sqrt{1 + |\nabla h(t)|_2^2}.$$

c) Die geschlitzte  $d$ -dimensionale Sphäre  $\partial B(0, R) \setminus H_d$  (vgl. Bsp 3.35) wird durch

$$F(\varphi, \Theta_1, \dots, \Theta_{d-2}) = \phi_d(R, \phi, \Theta) \\ = R \cdot \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & \cos(\Theta_1) & \cdots & \cos(\Theta_{d-2}) \\ \sin(\varphi) & \cos(\Theta_1) & \cdots & \cos(\Theta_{d-2}) \\ & \sin(\Theta_1) & \cdots & \cos(\Theta_{d-2}) \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & \sin(\Theta_{d-2}) \end{pmatrix}$$

mit  $(\varphi, \Theta) \in (0, 2\pi) \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) =: U$  parameterisiert. Hierbei gilt

$$\sqrt{g_F(\varphi, \Theta)} = R^{d-1} \cdot \cos^1(\Theta_1) \cdots \cos^{d-2}(\Theta_{d-2})$$

(Ohne Beweis)

Es seien stets  $\partial D$  und die Kartengebiete  $V$  mit der Borel- $\sigma$ -Algebra  $\mathcal{B}(\partial D)$ ,  $\mathcal{B}(V) \subset \mathcal{B}_d$  versehen. Da  $F : U \rightarrow V$ ,  $F^{-1} : V \rightarrow U$  stetig sind, gilt

$$f = f \circ F \circ F^{-1} : V \rightarrow \overline{\mathbb{R}} \text{ messbar} \Leftrightarrow f \circ F : U \rightarrow \overline{\mathbb{R}} \text{ messbar} \quad (4.2)$$

Sei ferner  $f$  positiv oder  $f \circ F \cdot \sqrt{g_F}$  integrierbar, dann definieren wir das Oberflächenintegral auf dem Kartengebiet  $V$  durch

$$\int_V f d\sigma = \int_V f(x) d\sigma(x) =: \int_M f(F(t)) \cdot \sqrt{g_F(t)} dt, \quad (4.3)$$

wobei  $F : U \rightarrow V$  eine Parametrisierung ist.

Für  $B \in \mathcal{B}(V)$  gilt  $A := F^{-1}(B) \subset \mathcal{B}(U)$  und wir definieren das Oberflächenmaß auf  $V$  durch

$$\sigma(B) := \int_V \mathbf{1}_B d\sigma = \int_U \underbrace{\mathbf{1}_B(F(t))}_{=\mathbf{1}_A(t)} \cdot \sqrt{g_F(t)} dt. \quad (4.4)$$

**Beispiel 4.10.** a) (Hintere Halbsphäre) Es sei

$$M = \{x \in \partial B(0, R) \subset \mathbb{R}^3 : x_2 > 0\} = F\left((0, \pi) \times \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)\right).$$

(sphärische Koordinaten). Aus Bsp 4.9 folgt  $\sqrt{g_F(\varphi, \Theta)} = R^2 \cdot \cos(\Theta)$ . Dann folgt

$$\int_M f d\sigma \stackrel{(4.3)}{=} \int_0^\pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(F(\varphi, \Theta)) \cdot R^2 \cdot \cos(\Theta) d\Theta d\varphi.$$

**Beispiel.** • Fall  $f = 1$ .

$$\sigma(M) = \int_M 1 d\sigma = R^2 \cdot \int_0^\pi d\varphi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(\Theta) d\Theta = 2\pi R^2.$$

- Fall  $f(x) = |x_3| = R \cdot |\sin(\Theta)| = f(F(\varphi, \Theta))$ . Dann gilt

$$\begin{aligned}\int_M f d\sigma &= \int_0^\pi d\varphi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} R^3 |\sin(\Theta)| \cos(\Theta) d\Theta d\varphi \\ &= R^3 \cdot \int_0^\pi d\varphi \cdot \underbrace{2 \cdot \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}}_{=\frac{1}{2} \sin^2(\Theta)|_0^{\frac{\pi}{2}}} = \pi R^3.\end{aligned}$$

b) (Paraboloidoberfläche). Wir betrachten den Graph von

$$h(s, t) = b \left( 1 - \frac{s^2}{R^2} - \frac{t^2}{R^2} \right)$$

mit  $(s, t) \in U := B(0, R) \subset \mathbb{R}^2$ . Hier gilt  $F(s, t) = (s, t, h(s, t))^T$ ,  
 $\sqrt{g_F(s, t)} = \sqrt{1 + |\nabla h(s, t)|_2^2}$  mit  $\nabla h(s, t) = \left(-\frac{2bs}{R^2}, \frac{2bt}{R^2}\right)$ . Damit folgt

$$\begin{aligned}\sigma(M) &= \int_M d\sigma = \int_{B(0, R)} \sqrt{1 + |\nabla h(s, t)|_2^2} ds dt \\ &= \int_{B(0, R)} \left( 1 + \frac{4b^2}{R^4} (s^2 + t^2) \right)^{\frac{1}{2}} ds dt \\ &\stackrel{\text{Polarkoord.}}{=} \int_0^{2\pi} \int_0^R \sqrt{1 + \frac{4b^2}{R^4} r^2} \cdot r dr d\varphi \\ &= 2\pi \frac{2b}{R^2} \cdot \int_0^R \sqrt{\frac{R^4}{4b^2} + r^2} \cdot r dr \\ &\stackrel{x=r^2}{\stackrel{dx=2rdr}{=}} \frac{4\pi b}{R^2} \int_0^R \sqrt{\frac{R^4}{4b^2} + x} \frac{dx}{2} = \left[ \frac{2\pi b}{R^2} \cdot \frac{2}{3} \left( \frac{R^4}{4b^2} + x \right)^{\frac{3}{2}} \right]_0^{R^2} \\ &= \frac{4\pi b}{3} \cdot R \cdot \left( \left( \frac{R^2}{4b^2} + 1 \right)^{\frac{3}{2}} - \left( \frac{R^2}{4b^2} \right)^{\frac{3}{2}} \right)\end{aligned}$$

- c) Sei Spezialfall  $d = 2$ :  $F : (a, b) \rightarrow V \subset \mathbb{R}^2$ . Dann ist  $g_F(t) = F'(t)^T \cdot F'(t) = |F'(t)|_2^2$ .  
Dann gilt

$$\int_V f d\sigma = \int_a^b f(F(t)) \cdot |F'(t)|_2 dt.$$

Sei  $\partial D \in C^1$ ,  $D \subset \mathbb{R}^d$  offen und beschränkt.

Dann gibt es Karten  $(\psi_k, \tilde{V}_k)$  mit [Parametrisierungen](#) (4.5)  
 $F_k : U_k \rightarrow V_k$ ,  $U_k \subset \mathbb{R}^{d-1}$  ( $k = 1, \dots, m$ ) mit  $\partial D \subset V_1 \cup \dots \cup V_m$ .

Wir haben also auf  $V_k$  Oberflächenmaße  $\sigma_k$  wie in (4.4) mit [Gramscher Determinante](#)  
 $g_k = g_{F_k}$ .



**Lemma 4.11.** Seien  $V_1, \dots, V_n$  wie in (4.5). Dann existieren *messbare*  $\varphi_k : \partial D \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $0 \leq \varphi_k \leq 1$ ,  $\varphi_k = 0$  auf  $\partial D \setminus V_k$  ( $k = 1, \dots, m$ ) und  $\sum_{k=1}^m \varphi_k(x) = 1$ ,  $\forall x \in \partial D$ .

Ana III, 16.01.2009

*Beweis.* Definiere  $W_1 = V_1$ ,  $W_k = V_k \setminus (V_1 \cup \dots \cup V_{k-1})$  für  $k = 2, \dots, m$ . Dann gilt  $W_k \in \mathcal{B}(\partial D)$ . Setze  $\varphi_k = \mathbf{1}_{W_k}$ . Aus  $\partial D = W_1 \dot{\cup} \dots \dot{\cup} W_m$  folgt die Behauptung.  $\square$

**Lemma 4.12.** Sei  $\partial D \in C^1$ ,  $(\psi_k, \tilde{V}_k)$ ,  $F_k$  wie in (4.5) und  $\varphi$  wie in Lem 4.11. Dann definiert

$$\sigma(B) := \sum_{k=1}^m \int_{V_k} \mathbf{1}_B \cdot \varphi_k d\sigma_k := \sum_{k=1}^m \int_{U_k} \mathbf{1}_B(F_k(t)) \cdot \varphi(F_k(t)) \cdot \sqrt{g_k(t)} dt$$

für  $B \in \mathcal{B}(\partial D)$  ein endliches Maß auf  $\mathcal{B}(\partial D)$ . Es heißt *Oberflächenmaß* (*O-Maß*). Wenn  $B \subset V_i$  für ein  $i \in \{1, \dots, n\}$ , dann gilt  $\sigma(B) = \sigma_i(B)$  (mit dem Oberflächenmaß  $\sigma_i$  auf  $V_i$  aus (4.4)). Weiter hängt  $\sigma$  nicht von der Wahl der Karten  $(\psi_k, \tilde{V}_k)$  und der Wahl der  $\varphi_k$  wie in Lem 4.11 ab.

*Beweis.* Es gelten  $\sigma(\emptyset) = 0$  und

$$\begin{aligned} \sigma(\partial D) &= \sum_{k=1}^m \int_{U_k} \underbrace{\varphi_k(F_k(t))}_{\leq 1} \cdot \sqrt{g_k(t)} dt \\ &\leq \sum_{k=1}^m \lambda_{d-1}(U_k) \cdot \max_{t \in U_k} (\det F'_k(t)^T \cdot \underbrace{F'_k(t)}_{=: A})^{\frac{1}{2}} < \infty. \end{aligned}$$

Dabei ist  $\|A\| \leq c \in \mathbb{R}$  nach Def 4.1.

Seien  $B_j \in \mathcal{B}(\partial D)$  disjunkt für  $j \in \mathbb{N}$  und  $B := \bigsqcup_{j \in \mathbb{N}} B_j$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} \sigma(B) &\stackrel{\text{Def}}{=} \sum_{k=1}^m \int_{U_k} \underbrace{\mathbf{1}_{\bigsqcup_{j \in \mathbb{N}} B_j}(F_k(t))}_{=\sum_{j=1}^{\infty} \mathbf{1}_{B_j}(F_k(t))} \cdot \varphi_k(F_k(t)) \cdot \sqrt{g_k(t)} dt \\ &\stackrel{\text{Kor 2.20}}{=} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^m \int_{U_k} \mathbf{1}_{B_j}(F_k(t)) \cdot \varphi_k(F_k(t)) \cdot \sqrt{g_k(t)} dt \stackrel{\text{Def}}{=} \sum_{j=1}^{\infty} \sigma(B_j). \end{aligned}$$

Somit ist  $\sigma$  ein endliches Maß. Seien  $(\kappa_l, \tilde{D}_l)$  weitere Karten von  $D$  mit  $\partial D \subset D_1 \cup \dots \cup D_n$ ,  $D_l = \tilde{D}_l \cap \partial D$ ,  $l = 1, \dots, n$  und  $G_l : W_l \rightarrow D_l$  die zugehörigen *Parametrisierungen* mit offenen  $W_l \subset \mathbb{R}^{d-1}$ , sowie  $\tilde{\sigma}_l$  das zu  $G_l$  gehörende Oberflächenmaß auf  $D_l$ ,  $l = 1, \dots, n$ . Weiter sollen  $\chi_1, \dots, \chi_n$  Lem 4.11 für  $D_1, \dots, D_n$  erfüllen. Definiere dann  $\tilde{\sigma}$  zu  $\tilde{\sigma}_l$ ,  $\chi_l$  wie

in [Lem 4.12](#). Sei  $B \in \mathcal{B}(\partial D)$ . Dann gilt

$$\begin{aligned}\tilde{\sigma}(B) &= \sum_{l=1}^m \int_{D_l} \underbrace{\sum_{k=1}^m \varphi_k \cdot \chi_l \cdot \mathbf{1}_B}_{=1} d\tilde{\sigma}_l \\ &\stackrel{\text{Def}}{=} \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^n \int_{W_l} \underbrace{\varphi_k(G_l(s))}_{=0, \text{ da } \sigma_l(s) \notin V_k} \cdot \chi_l(G_l(s)) \cdot \mathbf{1}_B(G_l(s)) \cdot \sqrt{g_{G_l}(s)} ds\end{aligned}\quad (*)$$

Betrachte ein Paar  $k, l$ , sodass  $D_l \cap V_k = G_l(W_l) \cap F_k(U_k) \neq \emptyset$ . Setze  $W_{kl} := P\kappa_l(D_l \cap V_k)$ ,  $D(t, 0) = t$  für  $t \in \mathbb{R}^{d-1}$  und  $\phi_{kl} = P_{\psi_k} G_l : W_{kl} \rightarrow \mathbb{R}^{d-1}$ . Wie in [Bem 4.5](#) sieht man, dass  $\phi_{kl}$  injektiv ist und  $\phi_{kl} \in C^1(W_{kl}, \mathbb{R}^{d-1})$  als Komposition solcher Abbildungen. Ferner ist  $\phi'_{kl}(s)$  invertierbar (vgl. [Bem 4.5](#)) und  $F_k(\phi_{kl}(s)) = G_l(s)$  ( $\forall s \in W_{kl}$ ). Da  $W_{kl}$  offen in  $\mathbb{R}^{d-1}$  ist, liefert der Umkehrsatz:  $\phi_{kl} : W_{kl} \rightarrow \underbrace{\phi_{kl}(W_{kl})}_{\subset U_k}$  ist [diffeomorph](#). Damit

gelten

$$\begin{aligned}G_l'^T \cdot G_l' &\stackrel{\text{Kettenregel}}{=} ((F_k \circ \phi_{kl})\phi'_{kl}) \cdot (F_k' \circ \phi_{kl})\phi'_{kl} \\ &= \phi'_{kl}(F_k \circ \phi_{kl})^T \cdot (F_k' \circ \phi_{kl})\phi'_{kl}\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}g_{G_l} &= \det G_l'^T \cdot G_l' \stackrel{\text{LA}}{=} \det(\phi_{kl}'^T) \cdot \det((F_k' \circ \phi_{kl})^T \cdot (F_k' \circ \phi_{kl})) \cdot \det(\phi_{kl}') \\ &\stackrel{\text{LA}}{=} (\det \phi_{kl})^2 \cdot g_{F_k \circ \phi_{kl}}\end{aligned}$$

auf  $W_{kl}$ . (Zur Übersicht wurde  $s \in W_{kl}$  weggelassen). Dann gilt

$$\begin{aligned}\tilde{\sigma}(B) &\stackrel{(*)}{=} \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^n \int_{W_{kl}} \underbrace{\varphi_k(F_k(\phi_{kl}(s))) \cdot \chi_l(F_k(\phi_{kl}(s))) \cdot \mathbf{1}_B(F_k(\phi_{kl}(s)))}_{=0, \text{ s} \in W_l \setminus W_{kl}} \\ &\quad \cdot |\det \phi'_{kl}(s)| \cdot \sqrt{g_{F_k}(\phi_{kl}(s))} ds \\ &= \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^n \int_{\phi_{kl}(W_{kl})} \varphi_k(F_k(t)) \cdot \chi_l(F_k(t)) \cdot \mathbf{1}_B(F_k(t)) \cdot \sqrt{g_{F_k}(t)} dt \\ &= \sum_{k=1}^m \int_{U_k} \varphi_k(F_k(t)) \cdot \underbrace{\sum_{l=1}^n \chi_l(F_k(t)) \cdot \mathbf{1}_B(F_k(t))}_{=1} \cdot \sqrt{g_{F_k}(t)} dt = \sigma(B).\end{aligned}$$

Sei  $B \subset V_i$  für ein  $i \in \{1, \dots, k\}$ . Im Beweis von [Lem 4.11](#) kann man erreichen, dass  $\varphi_k = 0$  auf  $V_i$ ,  $\forall k \neq i$  und  $\varphi_i = \mathbf{1}_{V_i}$ . Damit gilt

$$\sigma(B) \stackrel{\text{Def}}{=} \sum_{k=1}^m \int_{V_k} \varphi_k \cdot \mathbf{1}_B d\sigma_k = \int_{V_i} \underbrace{\varphi_i}_{=1} \cdot \mathbf{1}_B d\sigma = \sigma_i(B).$$

□

**Definition 4.13.** Sei  $\partial D \in C^1$  wie in (4.5) und  $\varphi_k$  wie in Lem 4.11. Eine messbare Funktion  $f : \partial D \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  heißt integrierbar (bzgl.  $\sigma$ ), wenn jede der Funktionen  $f \circ F_k \cdot \sqrt{g_k} : U_k \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  ( $k = 1, \dots, m$ ) integrierbar ist. Dann definiert man das Oberflächenintegral (O-Integral) durch

$$\int_{\partial D} f d\sigma := \int_{\partial D} f(x) d\sigma(x) := \sum_{k=1}^m \int_{U_k} \varphi_k(F_k(t)) \cdot f(F_k(t)) \cdot \sqrt{g_k(t)} dt.$$

Dieses Integral ist ferner für alle messbaren  $f : \partial D \rightarrow [0, \infty]$  definiert. Man schreibt weiter  $\mathcal{L}^1(\partial D, \sigma) = \{f : \partial D \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ integrierbar}\}$ . Für  $A \in \mathcal{B}(\partial D)$  gilt

$$\int_A f d\sigma = \int_{\partial D} \mathbf{1}_A f d\sigma.$$

**Satz 4.14.** Seien  $\partial D \in C^1$ ,  $f, g : \partial D \rightarrow \mathbb{R}$  integrierbar oder messbar und positiv. Dann gelten:

- a) Das Oberflächenintegral hängt nicht von der Wahl der  $(\psi_k, \tilde{V}_k)$  in (4.5) und den  $\varphi_k$  in Lem 4.11 ab.
- b) Wenn  $f = 0$  auf  $\partial D \setminus V_k$  für ein  $k \in \{1, \dots, m\}$ . Dann gilt

$$\int_{\partial D} f d\sigma = \int_{V_k} f d\sigma_k. \quad (\text{vgl. (4.3)})$$

- c) Wenn  $f, g$  reellwertig sind und  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , dann ist  $\alpha \cdot f + \beta \cdot g$  integrierbar und es gilt

$$\int_{\partial D} (\alpha \cdot f + \beta \cdot g) d\sigma = \alpha \cdot \int_{\partial D} f d\sigma + \beta \cdot \int_{\partial D} g d\sigma.$$

Diese Gleichheit gilt auch für messbare  $f, g : \partial \rightarrow [0, \infty]$ ,  $\alpha, \beta > 0$ .

- d)  $f \leq g \Rightarrow \int_{\partial D} f d\sigma \leq \int_{\partial D} g d\sigma$ .
- e)  $|\int_{\partial D} f d\sigma| \leq \int_{\partial D} |f| d\sigma$ .

- f) Sei  $h : \partial D \rightarrow \mathbb{R}$  messbar und beschränkt. Dann ist  $h$  integrierbar und

$$\left| \int_{\partial D} h d\sigma \right| \leq \|h\|_{\infty} \sigma(\partial D).$$

- g) Wenn  $\partial D = A \dot{\cup} B$  für disjunkte  $A, B \in \mathcal{B}(\partial D)$ , dann gilt

$$\int_{\partial D} f d\sigma = \int_A f d\sigma + \int_B f d\sigma.$$

- h) Wenn  $B \subset F_k(N)$  für ein  $k \in \{1, \dots, m\}$  und eine  $(d-1)$ -dimensionale Nullmenge  $N \subset U_k$ . Dann gilt  $\int_B f d\sigma = 0$ .

- i) Die Sätze von der monotonen Konvergenz ([Thm 2.19](#)) und der majorisierten Konvergenz ([Thm 3.10](#)) gelten für das Oberflächenintegral entsprechend.

Entsprechende Aussagen gelten auch für das Integral in (4.3) für eine [Parametrisierung](#)  $F : U \rightarrow V$ .

*Beweis.* a) Wie in [Lem 4.12](#).

b) Wie in [Lem 4.12](#).

- c) Nach Voraussetzung sind  $(f \circ F_k) \cdot \sqrt{g_k}$ ,  $(g \circ F_k) \cdot \sqrt{g_k}$  integrierbar auf  $U_k$ ,  $k = 1, \dots, m$ , falls  $f, g$  integrierbar sind. Mit [Satz 2.25](#) folgt dann  $(\alpha \cdot f + \beta \cdot g) \circ F_k \cdot \sqrt{g_k} : U_k \rightarrow \mathbb{R}$  ist integrierbar. Daraus folgt dann, dass  $\alpha \cdot f + \beta \cdot g : \partial D \rightarrow \mathbb{R}$  integrierbar ist. Ferner gilt

$$\begin{aligned} \int_{\partial D} (\alpha \cdot f + \beta \cdot g) d\sigma &\stackrel{\text{Def}}{=} \sum_{k=1}^m \int_{U_k} \varphi_k \cdot (\alpha \cdot f + \beta \cdot g) \circ F_k \cdot \sqrt{g_k} dt \\ &\stackrel{\text{Satz 2.25}}{=} \sum_{k=1}^m \left( \alpha \cdot \int_{U_k} (\varphi_k \cdot f) \circ F_k \cdot \sqrt{g_k} dt \right. \\ &\quad \left. + \beta \cdot \int_{U_k} (\varphi_k \cdot g) \circ F_k \cdot \sqrt{g_k} dt \right) \\ &= \alpha \cdot \int_{\partial D} f d\sigma + \beta \cdot \int_{\partial D} g d\sigma. \end{aligned}$$

d) Geht analog zu c) unter Verwendung von Kapitel 2.

e) Geht analog zu c) unter Verwendung von Kapitel 2.

Ana III, 19.01.2009

- f) Sei  $h$  [messbar](#) und beschränkt. Dann gilt  $|h \circ F_k| \cdot \sqrt{g_k} \leq \|h\|_\infty \cdot \sqrt{g_k}$ , wobei wegen [Def 4.1](#)  $\|h\|_\infty \cdot \sqrt{g_k}$  integrierbar ist, d.h.  $h : \partial D \rightarrow \mathbb{R}$  ist integrierbar. Ferner gilt

$$\left| \int_{\partial D} h d\sigma \right| \stackrel{\text{e)}}{\leq} \int_{\partial D} \underbrace{|h|}_{\leq \|h\|_\infty \cdot \mathbf{1}_{\partial D}} d\sigma \stackrel{\text{d)}}{\leq} \int_{\partial D} \|h\|_\infty d\sigma = \|h\|_\infty \cdot \sigma(\partial D).$$

- g) Sei  $A \dot{\cup} B = \partial D$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} \int_{\partial D} f d\sigma &= \int_{\partial D} (\mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B) \cdot f d\sigma \stackrel{\text{c)}}{=} \int_{\partial D} \mathbf{1}_A \cdot f d\sigma + \int_{\partial D} \mathbf{1}_B \cdot f d\sigma \\ &\stackrel{\text{Def}}{=} \int_A f d\sigma + \int_B f d\sigma. \end{aligned}$$

- h) Sei  $N$  eine  $(d-1)$ -dimensionale Nullmenge mit  $B \subset F_k(N)$  und  $N \subset U_k$  für ein  $k \in \{1, \dots, m\}$ . Dann folgt  $\mathbf{1}_B \leq \mathbf{1}_{F_k(N)}$ . Damit gilt

$$\left| \int_B f d\sigma \right| \stackrel{\text{b)}}{=} \left| \int_{V_k} \mathbf{1}_B \cdot f d\sigma \right| \stackrel{\text{e)}}{\leq} \int_{U_k} \underbrace{\mathbf{1}_{F_k(N)}(F_k(t))}_{=\mathbf{1}_N(t)} \cdot |f(F_k(t))| \cdot \sqrt{g_k(t)} dt = 0,$$

da der Integrand fast überall den Wert 0 hat ( $t \in N$ ).

- i) Sei  $f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f$  punktweise mit  $|f_n| \leq g$  ( $\forall n \in \mathbb{N}$ ) für integrierbare  $f_n : \partial D \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ ,  $g : \partial D \rightarrow [0, \infty]$ . Setze  $h_{n,k} := (\varphi \circ F_k) \cdot (f_n \circ F_k) \cdot \sqrt{g_k}$ . Dann ist  $|h_{n,k}| \leq |g \circ F_k| \sqrt{g_k} = g \circ F_k \cdot \sqrt{g_k}$  integrierbar. Außerdem gilt  $h_{n,k} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} h_k := (\varphi_k \circ F_k) \cdot (f \circ F_k) \cdot \sqrt{g_k}$  punktweise. Mit [Thm 3.10](#) folgt dann  $\int_{U_k} h_{n,k} dt \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_{U_k} h_k dt$ . Summenbildung für  $k = 1, \dots, m$  liefert

$$\int_{\partial D} f_n d\sigma \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_{\partial D} f d\sigma.$$

Den Satz von der monotonen Konvergenz ([Thm 2.19](#)) zeigt man analog. □

**Beispiel 4.15.** a) Sei  $D = B(0, R) \subset \mathbb{R}^d$ ,  $H_d = \mathbb{R}_+ \times \{0\} \times \mathbb{R}^{d-2}$  für  $d \geq 2$ . Mit [Bsp 4.9](#) folgt  $\partial D \setminus H_d = F(W_d)$  mit  $W_d = (0, 2\pi) \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})^{d-2}$ , wobei  $F(\varphi, \Theta) = \phi_d(R, \varphi, \Theta)$  (Polarkoordinaten).

Setze  $\hat{F}(\varphi, \Theta) := Q \cdot F(\varphi, \Theta)$  für  $(\varphi, \Theta) \in W_d$ ,

$Q(x_1, \dots, x_d) := (-x_1, x_d, x_3, \dots, x_{d-1}, x_2)$  ( $d \geq 3$ ). Dann folgt  $\hat{F}(W_d) = \partial B(0, R) \setminus (\mathbb{R}_- \times \mathbb{R}^d \times \{0\})$ . Daraus folgt  $\partial B(0, R) \subset F(W_d) \cup \hat{F}(W_d)$  und  $\partial B(0, R) \cap H_d = \hat{F}(N)$  mit  $N = (\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}) \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})^{d-3} \times \{0\}$ , da  $F(N) = \{x \in \mathbb{R}^d : x_1 < 0, x_d = 0\}$ . Damit gilt

$$\begin{aligned} \sigma(\partial B(0, R)) &\stackrel{\sigma \text{ ist Maß}}{=} \sigma(\partial D(0, R) \setminus H_d) + \underbrace{\sigma(\partial B(0, R) \cap H_d)}_{=0} \\ &\stackrel{\text{Satz 4.14}}{=} \int_{W_d} 1 \cdot \sqrt{G_F(\varphi, \Theta)} d(\varphi, \Theta) \\ &\stackrel{\text{Fub}}{=} \int_0^{2\pi} \int_{(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})^{d-2}} R^{d-1} \cdot \cos(\Theta_1) \cdots \cos(\Theta_{d-2}) d\Theta d\varphi \\ &\stackrel{\text{Bsp 3.35}}{=} R^{d-1} \frac{2\pi^{\frac{d}{2}}}{\Gamma(\frac{d}{2})} \stackrel{(3.12)}{=} R^{d-1} \cdot \omega_d, \end{aligned}$$

wobei  $\omega_2 = 2\pi$ ,  $\omega_3 = 4\pi$ .

- b) Sei  $f(x, y, z) = |xyz|$ ,  $D = B(0, R) \subset \mathbb{R}^3$ . Setze  $J := \int_{\partial D} f d\sigma$ . Seien  $O_j$ ,  $j = 1, \dots, 8$  die offenen Oktanten,  $H$  = Vereinigung der Koordinatenebenen.  $\partial D =$

$\biguplus_{j=1}^8 (\partial D \cap O_j) \dot{\cup} (\partial D \cap H)$ , wobei  $O_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x > 0, y > 0, z > 0\} = F((0, \frac{\pi}{2}) \times (0, \frac{\pi}{2}))$ ,  $\sigma(\partial D \cap H) = 0$ , wie in a) mit [Satz 4.14h](#)). Damit folgt

$$\begin{aligned}
J &\stackrel{\text{Satz 4.14g}}{=} \underbrace{\sum_{j=1}^8 \int_{O_j \cap \partial D} f d\sigma}_{\text{alle Integrale gleich}} + \underbrace{\int_{H \cap \partial D} f d\sigma}_{\stackrel{\text{Satz 4.14h}}{=} 0} = 8 \cdot \int_{O_1} xyz \, d\sigma(x, y, z) \\
&\stackrel{\text{Sphären-koord.}}{=} 8 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} R \cos \varphi \cos \Theta \cdot R \sin \varphi \cos \Theta \cdot R \sin \Theta \cdot R^2 \cos \Theta d\Theta d\varphi \\
&= 8R^5 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(\varphi) \cos(\varphi) d\varphi \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3(\Theta) \sin(\Theta) d\Theta \\
&= 8R^5 \cdot \frac{1}{2} \left[ -\frac{1}{4} \cos^4(\Theta) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = R^5.
\end{aligned}$$

### 4.3 Die Sätze von Gauß und Stokes

**Bemerkung 4.16.** Sei  $r > 0$ ,  $x_0 \in \mathbb{R}^d$ . Die Funktion

$$\phi_{r,x_0}(x) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{r^2 - |x-x_0|^2}\right), & x \in B(x_0, r) \\ 0, & x \in \mathbb{R}^d \setminus B(x_0, r) \end{cases}$$

ist auf  $\mathbb{R}^d$  beliebig oft differenzierbar (vgl. Ana1, Aufgabe 12.7). Ferner gilt

$$\phi_{r,x_0}(x) > 0 \Leftrightarrow x \in B(x_0, r), \quad \phi_{r,x_0} = 0 \Leftrightarrow x \notin B(x_0, r).$$

Seien  $X, Y$  normierte Vektorräume,  $D \subset X$ ,  $f : X \rightarrow Y$ . Der Träger (support) von  $f$  ist

$$\text{supp } f := \{x \in X : f(x) \neq 0\}.$$

Bild zu  $f$  in  $d = 1$ : TODO

Sei  $U \subset \mathbb{R}^d$  offen. Wir schreiben  $f \in C^k(\overline{U}, \mathbb{R}^l)$ , wenn  $f \in C^k(U, \mathbb{R}^l)$  und alle partiellen Ableitungen von  $f$  der Ordnung kleiner oder gleich  $k$  eine stetige Fortsetzung auf  $\partial U$  haben, wobei  $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ . Wir schreiben etwa zum Beispiel

$$\partial_j f(x) := \lim_{y \rightarrow x, y \in D} \partial_j f(y), \text{ in diesem Fall für } j = 1, \dots, d, \, x \in \partial D.$$

**Satz 4.17.** Sei  $D \subset \mathbb{R}^d$  offen und beschränkt und  $\overline{D} \subset U_1 \cup \dots \cup U_m$  für offene, beschränkte  $U_k \subset \mathbb{R}^d$ . Dann gibt es  $\varphi_k \in C^\infty(\overline{D})$ , sodass  $0 \leq \varphi_k \leq 1$ ,  $\text{supp } \varphi_k \subset U_k$  und  $\sum_{k=1}^m \varphi_k = 1$  ( $\forall k = 1, \dots, m, \, x \in \overline{D}$ ). (Man nennt  $\{\varphi_k : k = 1, \dots, m\}$  glatte Zerlegung der Eins auf  $\overline{D}$  zu  $U_1, \dots, U_m$ )

TODO: Bild in  $d = 1$ ,  $D = (a, b)$ .

*Beweis.*  $\forall x \in \overline{D} \exists r(x) > 0, h \in \{1, \dots, m\}$  mit  $x \in B(x, r(x)) \subset \overline{B}(0, r(x)) \subset U_k$ . (Kugeln bezüglich der sup-Norm.) Da  $\overline{D}$  kompakt ist, existieren  $x_j \in \overline{D}$  mit  $B_j = B(x_j, r(x_j))$ , ( $j = 1, \dots, n$ ), sodass  $\overline{D} \subset \bigcup_{j=1}^n B_j$  und  $\forall j \exists : \overline{B}_j \subset U_k$ . Setze

$$\phi_k := \sum_{j_0: B_j \subset U_k} \phi_{r(x_j), x_j}$$

Damit gilt  $\phi_k \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ ,  $k = 1, \dots, m$  und  $\text{supp } \phi_k \subset \bigcup_{j: B_j \subset U_k} \overline{B}_j \subset U_k$  und  $\phi_k > 0$ . Ferner gilt  $\forall x \in \overline{D} \exists B_j$  mit  $x \in B_j$ . Dann folgt  $\phi_{r(x_j), x_j}(x) > 0$ . Dann folgt  $\alpha(x) := \sum_{k=1}^m \phi_k(x) > 0$ . Damit setze  $\varphi_k := \frac{1}{\alpha} \phi_k \in C^\infty(\overline{D})$ . Dann gilt  $\varphi_k \geq 0$ ,  $\text{supp } \varphi_k = \text{supp } \phi_k \subset U_k$ ,  $\sum_{k=1}^m \varphi_k(x) = \frac{1}{\alpha(x)} \sum_{k=1}^m \phi_k(x) = 1$  ( $\forall x \in \overline{D}$ ). Daraus folgt  $\phi_k \in [0, 1]$ .  $\square$

Man setzt für offene  $U \subset \mathbb{R}^d$ ,  $k \in \mathbb{N} \cup \{0, \infty\}$

$$C_b^k(U, \mathbb{R}^l) := \{f \in C^k(U, \mathbb{R}^l) : f \text{ und alle partiellen Ableitungen von } f \text{ bis Ordnung } k \text{ sind beschränkt}\}.$$

**Bemerkung.** Sei  $a < b$  in  $\mathbb{R}$ ,  $g \in C_b^1((a, b) \times U)$ ,  $U \subset \mathbb{R}^d$  offen,  $h \in C^1(U, \mathbb{R})$ . Setze

$$G(t, x) := \int_a^b g(s, x) ds, \quad t \in (a, b), \quad x \in U.$$

Mit dem Diff-/Stetigkeitssatz und dem Hauptsatz folgt  $G \in C^1((a, b) \times U, \mathbb{R})$ . Mit der Kettenregel gilt dann für alle  $j = 1, \dots, d$ ,  $x \in U$

$$\begin{aligned} \exists \frac{\partial}{\partial x_j} \int_a^{h(x)} g(s, x) ds &= \frac{\partial}{\partial x_j} G(h(x), x) \\ &= g(h(x), x) \partial_j h(x) + \int_a^{h(x)} \frac{\partial}{\partial x_j} g(s, x) ds \end{aligned} \quad (4.6)$$

Ana III, 23.01.2009

Sei  $g \in C([a, b])$  mit  $g|_{(a, b)} \in C^1((a, b))$  und  $g' \in C^1((a, b))$ . Dann gilt

$$\int_a^b g'(t) dt \stackrel{\text{vgl. Kor 3.15}}{=} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{a+\epsilon}^{b-\epsilon} g'(t) dt \stackrel{\text{HS}}{=} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} (g(b-\epsilon) - g(a+\epsilon)). \quad (4.7)$$

Seien  $U \subset \mathbb{R}^d$  offen,  $f, g \in C^1(U, \mathbb{R}^d)$ . Die Divergenz von  $f$  ist folgendermaßen definiert:

$$\text{div } f = \partial_1 f_1(x) + \partial_2 f_2(x) + \dots + \partial_d f_d(x) = \text{Spur}(f'(x)), \quad x \in U. \quad (4.8)$$

Beachte dabei  $\text{div}(f + g) = \text{div } f + \text{div } g$ .

**Theorem 4.18** (Divergenzsatz von Gauß). Sei  $D \subset \mathbb{R}^d$  offen und beschränkt mit  $\partial D \in C^1$ ,  $f \in C(\overline{D}, \mathbb{R}^d)$  mit  $f|_D \in C_b^1(D, \mathbb{R}^d)$ . Dann gilt

$$\int_D \operatorname{div} f(x) dx = \int_{\partial D} (f(x) | \nu(x)) d\sigma(x),$$

wobei  $\nu$  die äußere Einheitsnormale von  $D$  ist (vgl. [Lem 4.7](#)).

(Eine allgemeinere Version findet man im Königsberger Ana2, §12.4)

*Beweis.* 1) Aus [Lem 4.7](#) folgt:  $\forall x \in \partial D \exists$  eine Karte  $(\psi, \tilde{V})$ , sodass (eventuell nach orthogonaler Transformation  $y = Qx$ )  $D$  lokal bei  $x$  unter einem Graph liegt. Da  $\partial D$  kompakt ist, existieren offene  $V_1, \dots, V_m \subset \mathbb{R}^d$  mit  $\partial D \subset V_1 \cup \dots \cup V_m$  (die Tilde wurde weggelassen), orthogonale Matrizen  $Q_1, \dots, Q_m$ ,  $a_1, \dots, a_m \in \mathbb{R}$  und offene  $U_1, \dots, U_m \subset \mathbb{R}^{d-1}$ ,  $h_1, \dots, h_m \in C^1(U_k, \mathbb{R})$  mit beschränkter Ableitung, sodass

$$Q_k(V_k \cap D) = \{y = (\underbrace{y_1, \dots, y_{d-1}}_{=: y'}, y_d) \in \mathbb{R}^d : y' \in U_k, y_d \in (a_k, h_k(y'))\}$$

und

$$Q_k(\partial D \cap V_k) = \{(y', y_d) : y' \in U_k, y_d = h_k(y')\} \quad (k = 1, \dots, m).$$

Wähle  $V_0 \subset \mathbb{R}^d$  offen mit  $\overline{V_0} \subset D$  und  $D \subset V_0 \cup \dots \cup V_m$ .

TODO: Bild

Wähle  $\varphi_k$  wie in [Lem 4.7](#) auf  $\overline{D}$  zu  $\{V_0, V_1, \dots, V_m\}$ . Setze  $f^k := \varphi_k f$ . Dann gelten  $f^k \in C_b^1(D, \mathbb{R}^d) \cap C(\overline{D}, \mathbb{R}^d)$ ,  $\operatorname{supp} f^k \subset V_k \cap \overline{D}$  ( $k = 1, \dots, m$ ) und

$$\sum_{k=0}^m f^k(x) = \sum_{k=0}^m \underbrace{\varphi_k \cdot f(x)}_{=1} = f(x) \quad \forall x \in \overline{D}.$$

Beachte dabei, dass  $f^k(x) = 0 \quad \forall x \in \partial V_k \cap D$ , aber dass  $f^k(x) \neq 0$  möglich ist, wenn  $x \in \partial N_k \cap \partial D$ .

TODO: Bild

2) Sei  $W \subset \mathbb{R}^n$  offen,  $g \in C^1(W, \mathbb{R})$  mit  $\operatorname{supp} g \subset W$ ,  $\operatorname{supp} g$  kompakt. Sei  $j \in \{1, \dots, n\}$ . Setze  $g$  mit 0 zu  $\tilde{g} \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$  fort. Dann gilt

$$\begin{aligned} \int_W \partial_j g(x) dx &= \int_{\mathbb{R}^n} \partial_j \tilde{g}(x) dx = \\ &\stackrel{\text{Fub}}{=} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_{\mathbb{R}} \partial_j \tilde{g}(x_1, \dots, x_j, \dots, x_n) dx_j d(x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n) \\ &= \int_{-r}^r \partial_j \tilde{g}(x_1, \dots, x_j, \dots, x_n) dx_j = [\tilde{g}]_{x_j=-r}^{x_j=r} = 0, \end{aligned}$$



wobei  $r$  so gewählt ist, dass  $\text{supp } g \subset B(0, r)$ . Also gilt

$$\int_W \partial_j g dx = 0.$$

Speziell gilt für  $k = 0$

$$\int_D \partial_j f_j^0(x) dx = 0 \quad \forall j = 1, \dots, n,$$

denn  $\text{supp } f^0 \subset V_0 \subset D$ . Daraus folgt

$$\int_D \text{div } f^0(x) dx = 0 = \int_{\partial D} \underbrace{(f^0(x) | \nu(x))}_{=0} d\sigma(x).$$

3) Sei  $k \in \{1, \dots, m\}$ . Setze  $\tilde{f}^k(y) := Q_k f^k(Q_k^{-1}y)$  für alle  $y = Q_k x$ ,  $x \in D$ . Sei  $\tilde{\nu}$  die äußere Einheitsnormale von  $Q_k D$ . Es gilt

$$\begin{aligned} \text{div } \tilde{f}^k(y) &= \text{Spur} \left[ Q_k \cdot (f^k \cdot Q_k^{-1})'(y) \right] = \text{Spur} \left[ Q_k (f^k)'(x) Q_k^{-1} \right] \\ &\stackrel{\text{LA}}{=} \text{Spur}(f^k)'(x) = \text{div } f^k(x) \quad (\forall x \in D). \end{aligned}$$

Damit gilt

$$\begin{aligned} \int_D \text{div } f^k(x) dx &\stackrel{\text{Trafo}}{=} \int_{x=Q_k^{-1}y} \text{div } \tilde{f}^k(y) \cdot \underbrace{|\det Q_k^{-1}|}_{=1} dy \\ &\stackrel{!}{=} \int_{\partial Q_k D} \left( \tilde{f}^k(y) | \tilde{\nu}(y) \right) d\sigma(y) \\ &\stackrel{\text{Trafo}}{=} \int_{y=Q_k x} \left( \tilde{f}^k(Q_k x) | \underbrace{\tilde{\nu}(Q_k x)}_{=Q_k \nu(x)} \cdot \underbrace{|\det Q_k|}_{=1} \right) d\sigma(x) \\ &= \int_{\partial D} (Q_k f^k(x) | Q_k \nu(x)) d\sigma(x) \\ &\stackrel{Q_k^T = Q_k^{-1}}{=} \int_{\partial D} (f^k(x) | \nu(x)) d\sigma(x). \end{aligned}$$

Zeige nun das Gleichheitszeichen (+). Es gilt  $f = \tilde{f}$  auf  $Q_k D$ . Schreibe dann  $f^k$  statt  $\tilde{f}^k$ ,  $D$  statt  $Q_k D$ ,  $x$  statt  $y$ ,  $\nu$  statt  $\tilde{\nu}$ .

$$\begin{aligned} \int_D \partial_d \cdot f_d^k(x) dx &\stackrel{\text{Fubini}}{=} \int_{\text{supp } f^k \subset V_k \cap \overline{D}} \int_{U_k} \underbrace{\int_{a_k}^{h_k(x')} \partial_d f_d^k(x', x_d) dx_d}_{\stackrel{(4.7)}{=} f_d^k(x', h_k(x')) \cdot \underbrace{f_d(x', a_k)}_{=0}} dx' \\ &= \int_{U_k} f_d^k(x', h_k(x')) dx'. \end{aligned} \quad (*)$$

Sei  $j \in \{1, \dots, d-1\}$ . Dann gilt

$$\underbrace{\partial_j \cdot \int_{a_k}^{h_k(x')} f_j^k(x', x_d) dx_d}_{=\varphi(x')} \stackrel{(4.6)}{=} f_j^k(x', h_k(x')) \partial_j h_k(x') + \int_{a_k}^{h_k(x')} \partial_j f_j^k(x', x_d) dx_d.$$

Damit folgt dann

$$\begin{aligned} \int_D \partial_j f_j^k(x) dx &\stackrel{\text{Fub}}{=} \int_{U_k} \int_{a_k}^{h_k(x')} \partial_j f_j^k(x', x_d) dx_d dx' \\ &\stackrel{\text{s.o.}}{=} \int_{U_k} f_j^k(x', h_k(x')) \partial_j h_k(x') dx' + \underbrace{\int_{U_k} \partial_j \varphi(x') dx'}_{\stackrel{2)}{=} 0, \text{ da } \text{supp } \varphi \subset U_k} \end{aligned} \quad (**)$$

Durch Aufsummieren über  $j$  ergibt sich dann

$$\begin{aligned} &\int_D \text{div } f^k(x) dx \\ &\stackrel{(*)}{=} \int_{U_k} \left( f^k(x', h_k(x')) \begin{pmatrix} -\nabla h_k(x') \\ 1 \end{pmatrix} \right) \cdot \frac{\sqrt{1 + |\nabla h_k(x')|_2^2}}{\sqrt{1 + |\nabla h_k(x')|_2^2}} dx' \\ &\stackrel{\text{Lem 4.7}}{=} \int_{\partial D} (f^k(x) | \nu(x)) d\sigma(x). \end{aligned}$$

4)

$$\begin{aligned} \int_D \text{div } f dx &= \int_D \text{div} \left( \sum_{k=0}^m f^k \right) dx \stackrel{(4.8)}{=} \sum_{k=0}^m \int_D \text{div } f^k dx \\ &\stackrel{2)}{=} \sum_{k=0}^m \int_{\partial D} (f^k(x) | \nu(x)) d\sigma(x) = \int_{\partial D} (f(x) | \nu(x)) d\sigma(x). \end{aligned}$$

□

Erinnerung: für  $u \in C^2(U, \mathbb{R})$  ist der Laplace-Operator gegeben durch

$$\Delta u(x) = \partial_{11} u(x) + \dots + \partial_{dd} u(x) = \text{Spur } \nabla^2 u(x).$$

Damit gilt

$$\Delta u = \text{div} \begin{pmatrix} \partial_1 u \\ \vdots \\ \partial_d u \end{pmatrix} = \text{div } \nabla u \quad (4.9)$$

**Korollar 4.19** (Greensche Formeln). Sei  $D \subset \mathbb{R}^d$  offen und beschränkt mit  $\partial D \in C^1$ .

a) Sei  $f \in C_b^1(D, \mathbb{R}^d) \cap C(\overline{D}, \mathbb{R}^d)$ ,  $u \in C_b^1(D, \mathbb{R}) \cap C(\overline{D}, \mathbb{R})$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(u(x) \cdot f(x)) &= \sum_{j=1}^d ((\partial_j u)(x) \cdot f_j(x) + u(x) \cdot \partial_j f_j(x)) \\ &= (\nabla u(x) | f(x)) + u(x) \cdot \operatorname{div} f(x). \end{aligned}$$

Dann folgt mit **Gauss**

$$\int_D (\nabla u(x) | f(x)) dx = - \int_D u(x) \operatorname{div} f(x) dx + \int_{\partial D} u(x) \cdot (f(x) | \nu(x)) d\sigma(x).$$

b) Seien  $u, v \in C_b^2(D, \mathbb{R}) \cap C^1(\overline{D}, \mathbb{R})$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} \int_D u \cdot \Delta v dx &\stackrel{(4.9)}{=} - \int_D (\nabla u | \nabla v) dx + \int_D u(x) \underbrace{(\nabla v(x) | \nu(x))}_{=\partial_\nu v(x)} d\sigma(x) \\ &= \int_D v \Delta u dx + \int_{\partial D} u(x) \partial_\nu v(x) - v(x) \partial_\nu u(x) d\sigma(x). \end{aligned}$$

Ana III, 26.01.2009

### Zur Interpretation vom Divergenzsatz von Gauß

Seien  $D, f$  wie in **Thm 4.18**. Dabei entspreche  $f$  einem elektrischen Feld. Setze den Durchfluss von  $f$  durch  $\partial D$

$$\phi := \int_{\partial D} (f | \nu) d\sigma.$$

Zu  $\nu$ : TODO: Bild

Mit **Gauss** folgt

$$\phi = \int_D \operatorname{div} f dx. \quad (*)$$

Also entspricht  $\operatorname{div} f$  einer Quellstärke.

**Beispiel 4.20.** Sei  $d = 3$ ,  $q \in \mathbb{R}$ ,  $p \in \mathbb{R}^3$ ,  $D \subset \mathbb{R}^3$  offen und beschränkt mit  $\partial D \in C^1$ . Setze für  $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{p\}$

$$f(x) := q \frac{1}{|x - p|_2^3} (x - p).$$

Dann folgt für alle  $x \neq p$ ,  $k = 1, 2, 3$

$$\partial_k f_k(x) = q \left( \sum_{k=1}^3 (x_k - p_k)^2 \right)^{\frac{3}{2}} + q \cdot \left( -\frac{3}{2} \right) \cdot 2(x_k - p_k) \cdot |x - p|_2^{-5} (x_k - p_k).$$

Damit ergibt sich für die **Divergenz** von  $f$  für alle  $x \neq p$

$$\operatorname{div} f(x) = 3q|x-p|_2^{-3} - 3q|x-p|_2^{-5} \cdot |x-p|_2^2 = 0.$$

1. Fall:  $p \notin \overline{D}$ . Dann gilt  $f \in C^1(\overline{D}, \mathbb{R}^3)$ . Mit (\*) folgt dann  $\int_D \operatorname{div} f dx = 0$ .

2. Fall:  $p \in D$ . Dann ist  $f \notin C^1(D, \mathbb{R}^3)$ . Wähle  $r > 0$  mit  $\overline{B}(p, r) \subset D$ . Setze  $D_r = \partial D \setminus \overline{B}(p, r)$ . Daraus folgt  $\partial D = \partial D \cup \partial B(p, r)$  und damit  $f \in C^1(\overline{D}_r, \mathbb{R}^3)$ . Somit gilt

$$\phi_r := \int_{\partial D} (f|\nu) d\sigma \stackrel{\text{Gauss}}{=} \int_{D_r} \underbrace{\operatorname{div} f}_{=0} dx = 0.$$

Die äußere Einheitsnormale  $\nu_B$  von  $B(p, r)$  ist  $\nu_B = \frac{1}{r}(x-p)$  ( $x \in \partial B(p, r)$ ). Daraus folgt, dass die äußere Einheitsnormale  $\nu$  von  $D_r$  bei  $x \in \partial B(p, r)$   $\nu(x) = -\nu_B(x)$  ist. Damit folgt

$$0 = \phi_r = \int_{\partial D} (f|\nu) d\sigma = \int_{\partial B(p, r)} \left( f(x) \middle| \frac{1}{r}(x-p) \right) d\sigma(x).$$

Daraus folgt

$$\phi = \frac{q}{r} \cdot \int_{\partial B(p, r)} \underbrace{|x-p|_2^{2-3}}_{=\frac{1}{r}} d\sigma(x) = \frac{q}{r^2} \cdot \int_{\partial B(p, r)} d\sigma = \frac{q}{r^2} \cdot 4\pi r^2 = 4\pi q.$$

**Beispiel 4.21.** Sei  $C \subset \mathbb{R}^3$  offen und beschränkt mit  $\partial D \in C^1$ . Sei  $u(t, x)$  die Konzentration eines Stoffes bei  $x \in D$  zur Zeit  $t \geq 0$ . Es sei  $u \in C^1(\mathbb{R}_+ \times \overline{D})$ . Dann existiert  $\frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_l} \in C_b(\mathbb{R}_+ \times D)$  ( $k, l = 1, 2, 3$ ). Der Stoff diffundiere gemäß des ‘‘Fickschen Gesetz’’ mit konstanter Diffusionsrate  $a > 0$ . Gegeben sei weiter eine Anfangskonzentration  $u_0 \in C^1(\overline{D}) \cap C_b^2(D)$ . Durch  $\partial D$  fließe keine Substanz. Insbesondere sei  $\partial_\nu u_0(x) = 0$ ,  $x \in \partial D$ . Wir betrachten die Diffusionsgleichung

$$\begin{cases} \partial_t u(t, x) = a \Delta_x u(t, x), & t \geq 0 \\ \partial_\nu u(t, x) = 0, & t \geq 0, x \in \partial D \\ u(0, x) = u_0(x), & x \in D. \end{cases} \quad (4.10)$$

Behauptung:

$$\int_D |u(t, x)|^2 dx \leq \int_D |u_0(x)|^2, \quad \forall t \geq 0.$$

Wenn die Behauptung gilt, gibt es höchstens eine Lösung von (4.10), denn:

Sei  $v$  eine weitere Lösung. Setze  $w = u - v \in C^1(\mathbb{R}_+ \times \overline{D})$ . Dann folgt  $\frac{\partial^2 w}{\partial x_k \partial x_l} \in C_b(\mathbb{R}_+ \times D)$  und  $w$  erfüllt (4.10) mit  $w(0) = 0$ . Mit der Behauptung folgt dann

$$\int_D |w(t, x)|^2 dx \leq 0.$$

Also ist  $w(t, x) = 0 \ \forall t \geq 0, (f.a.)x$ . Da  $w$  stetig ist, folgt  $w(t, x) = 0 \ \forall t, x$ . Mit [Bem 5.9](#) folgt dann  $u = v$ .

Beweis von der Behauptung:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial t} \int_D \frac{1}{2} |u(t, x)|^2 dx \\
& \stackrel{\text{Thm 3.16}}{=} \int_D \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (u(t, x))^2 dx = \int_D u(t, x) \partial_t u(t, x) dx \\
& \stackrel{(4.10)}{=} a \cdot \int_D u(t, x) \triangle_x u(t, x) dx \\
& \stackrel{\text{Green}}{=} -a \cdot \int_D \underbrace{(\nabla_x u(t, x) | \nabla_x u(t, x))}_{=|\nabla u(t, x)|_2^2} dx + a \cdot \int_{\partial D} u(t, x) \underbrace{\partial_\nu u(t, x)}_{(4.10)} d\sigma(x) \leq 0
\end{aligned}$$

## Stokes

Sei  $d = 3$ ,  $F : U_0 \rightarrow V_0 \subset \mathbb{R}^3$  eine [Parametrisierung](#) mit  $F \in C^2(U_0, \mathbb{R}^3)$ ,  $U \subset \bar{U} \subset U_0 \subset \mathbb{R}^2$ . Dabei seien  $U$  und  $U_0$  offen und beschränkt. Setze außerdem  $V := F(U)$ . Sei  $\partial U \in C^1$  eine geschlossene  $C^1$ -Kurve mit [Parametrisierung](#)  $\gamma : [a, b] \rightarrow \partial U$ , die im Gegenuhrzeigersinn läuft. Damit ist  $\gamma'(t) \neq 0, \ \forall t$ . Dann folgt, dass  $\partial V$  eine Kurve mit [Parametrisierung](#)  $\varphi = F \circ \gamma : [a, b] \rightarrow \partial V$

TODO: Bild

Dabei ist  $\nu(\tau) = \frac{1}{|\gamma'(\tau)|_2} \begin{pmatrix} \gamma'_2(\tau) \\ -\gamma'_1(\tau) \end{pmatrix}$  äußere Einheitsnormale von  $\partial U$  ( $\gamma'(\tau)$  um  $\frac{\pi}{2}$  nach rechts gedreht und normiert. Vgl. Walter Ana2, §5.17) Mit der Bemerkung nach [Def 4.8](#) folgt, dass die Normale an  $\partial V$  gegeben ist durch

$$n(F(t)) = \frac{1}{|\partial_1 F(t) \times \partial_2 F(t)|_2} \cdot \partial_1 F(t) \times \partial_2 F(t). \quad (4.11)$$

Erinnerung

$$\text{rot } f(x) = \begin{pmatrix} \partial_2 f_3(x) - \partial_3 f_2(x) \\ \partial_3 f_1(x) - \partial_1 f_3(x) \\ \partial_1 f_2(x) - \partial_2 f_1(x) \end{pmatrix} = \nabla \times f(x).$$

Das Kurvenintegral zweiter Art ist definiert durch

$$\int_{\partial V} f \bullet dx = \int_a^b (f(\varphi(\tau)) | \varphi'(\tau)) d\tau.$$

**Theorem 4.22** (Stokes).  *$V$  erfülle die obigen Voraussetzungen und es sei  $f \in C^1(D, \mathbb{R}^3)$  für ein offenes  $D \subset \mathbb{R}^3$  mit  $\bar{V} \subset D$ . Dann gilt*

$$\int_V (\text{rot } f(x) | n(x)) d\sigma(x) = \int_{\partial V} f \bullet dx.$$

*Zum Beweis.* Der Beweis erfolgt durch direktes Nachrechnen unter Verwendung obiger Formeln, Kettenregel und Gauß (Thm 4.18) für  $\partial U$  vgl. Walter Ana2, §8.12.  $\square$

Zur Interpretation: Sei  $f$  ein elektrisches Feld. Dann entspricht  $\int_{\partial V} f \bullet dx$  der Zirkulation in der Leiterschleife  $\partial V$ . Stokes sagt dann

$$\int_{\partial V} f \bullet dx = \int_V (\operatorname{rot} f|u) d\sigma.$$

**Beispiel 4.23.** a) Wenn  $u \in C^2(D, \mathbb{R})$  und  $f = \nabla u = (\partial_1 u, \partial_2 u, \partial_3 u)^T$ , folgt mit Schwarz (Ana2), dass  $\operatorname{rot} f = \operatorname{rot} \nabla u = 0$ . ( $f$  ist ein Radialfeld). Dann folgt

$$\int_{\partial V} f \bullet dx \stackrel{\text{Stokes}}{=} 0.$$

**Beispiel.** Sei  $u = |x|_2^\alpha$  für  $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Dann gilt  $f(x) = \nabla u(x) = \alpha |x|_2^{\alpha-2} x$ . Also gilt  $\operatorname{rot} f = 0$ .

b) Einfaches Wirbelfeld:  $f(x_1, x_2, x_3) = (-x_2, x_1, 0)^T$ . Hier gilt  $\partial_2 f_1 = -1$ ,  $\partial_1 f_2 = 1$ . Alle anderen partiellen Ableitungen sind 0. Also gilt  $\operatorname{rot} f(x) = (0, 0, 2)^T$ . Dann folgt

$$\int_{\partial V} f \bullet dx \stackrel{\text{Stokes}}{=} \int_V (\operatorname{rot} f(x)|n(x)) d\sigma(x) = 2 \cdot \int_V n_3(x) d\sigma(x) \quad (*)$$

**Beispiel.** Eine Kugelkappe lässt sich mit dem Graph von  $h(x_1, x_2, x_3) = \sqrt{R^2 - x_1^2 - x_2^2}$  für  $(x_1, x_2) \in B(0, r) \subset \mathbb{R}^2$ , wobei  $0 < r < R$  fest seien.

Hier gelten  $F(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ h(x_1, x_2) \end{pmatrix}$  und

$V = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in B(0, r) \subset \mathbb{R}^2, x_3 = h(x_1, x_2) \right\}$ . Damit gilt  $\partial_1 F = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \partial_1 h \end{pmatrix}$ ,  $\partial_2 F = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \partial_2 h \end{pmatrix}$ . Dann gilt  $(\partial_1 F \times \partial_2 F)_3 = 1 \stackrel{(4.11)}{=} n_3 |\partial_1 F \times \partial_2 F|_2$ . Dann folgt

$$\begin{aligned} \int_{\partial V} f \bullet dx &\stackrel{(*)}{=} \int_{\partial V} f \bullet dx \stackrel{\text{Def 4.8}}{=} 2 \cdot \int_{B(0, r)} 1 \cdot \frac{1}{|\partial_1 F \times \partial_2 F|_2} \cdot \underbrace{|\partial_1 F \times \partial_2 F|_2}_{=\sqrt{g_F}} dx_1 dx_2 \\ &= 2 \cdot \int_{B(0, r)} dx_1 dx_2 = 2\pi r^2. \end{aligned}$$