25. Funktionen von beschränkter Variation

Definition
Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ und $Z = \{x_0, \ldots, x_n\} \in \mathfrak{Z}$. $V_f(Z) := \sum_{j=1}^{n} |f(x_j) - f(x_{j-1})|$ ist die **Variation** von f bezüglich Z.
Beachte: Sind $Z_1, Z_2 \in \mathfrak{Z}$ und $Z_1 \subseteq Z_2 \implies V_f(Z_1) \leq V_f(Z_2)$. $M_f = \{V_f(Z) : Z \in \mathfrak{Z}\}$. f heißt von **beschränkter Variation**, in Zeichen: $f \in \mathrm{BV}[a,b] \; :\iff \; M_f$ ist nach oben beschränkt. In diesem Fall heißt $V_f[a,b] := \sup M_f$ die **Totalvariation** von f (auf $[a,b]$).

Beispiel

$$f(x) := \begin{cases} x \cos \frac{\pi}{x}, & x \in (0,1] \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

$f \in C[0,1]$. Sei $n \in \mathbb{N}$. $Z_n := \{0, \frac{1}{n}, \frac{1}{n-1}, \frac{1}{n-2}, \ldots, \frac{1}{n-(n-1)}\}$. Nachrechnen: $V_f(Z_n) \to \infty$ ($n \to \infty$). Also: $f \notin \mathrm{BV}[0,1]$.

Hilfssatz
Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ differenzierbar auf $[a,b]$ und f' sei auf $[a,b]$ beschränkt. Dann ist f auf $[a,b]$ Lipschitzstetig.

Beweis
$L := \sup\{|f'(x)| : x \in [a,b]\}$. Sei $x, y \in [a,b]$, etwa $x \leq y$. $|f(x) - f(y)| = |f'(\xi)(x-y)| = |f'(\xi)||x-y| \leq L|x-y|, \xi \in [x,y]$. ∎

Satz 25.1 (Varianzeigenschaften)
(1) Ist $f \in \mathrm{BV}[a,b] \implies f$ ist beschränkt auf $[a,b]$.
(2) Ist f auf $[a,b]$ Lipschitzstetig $\implies f \in \mathrm{BV}[a,b]$.
(3) Ist f differenzierbar auf $[a,b]$ und f' beschränkt auf $[a,b] \implies f \in \mathrm{BV}[a,b]$
(4) $C^1[a,b] \subseteq \mathrm{BV}[a,b]$
(5) Ist f monoton auf $[a,b] \implies f \in \mathrm{BV}[a,b]$ und $V_f[a,b] = |f(b) - f(a)|$
(6) $\mathrm{BV}[a,b]$ ist ein reeller Vektorraum
(7) Ist $c \in (a,b)$, so gilt: $f \in \mathrm{BV}[a,b] \iff f \in \mathrm{BV}[a,c]$ und $f \in \mathrm{BV}[c,b]$. In diesem Fall: $V_f[a,b] = V_f[a,c] + V_f[c,b]$.

Beweis
(1) Sei $x \in [a,b]$ (beliebig, fest). $Z := \{a,x,b\}$, $V_f(Z) = |f(x) - f(a)| + |f(b) - f(x)| \leq V_f[a,b] \implies |f(x)| = |f(x) - f(a) + f(a)| \leq |f(x) - f(a)| + |f(a)| \leq V_f(Z) + |f(a)| \leq V_f[a,b] + |f(a)|$

(2) $\exists\, L \geq 0 : |f(x) - f(y)| \leq L|x-y|\ \forall x, y \in [a,b]$. Sei $Z = \{x_0, \ldots, x_n\} \in \mathfrak{Z}$. $\sum_{j=1}^{n} |f(x_j) - f(x_{j-1})| \leq \sum_{j=1}^{n} L|x_j - x_{j-1}| = L\sum_{j=1}^{n}(x_j - x_{j-1}) = L(b-a)$

(3) folgt aus (2) und dem Hilfssatz

(4) folgt aus (3)

(5) f sei wachsend auf $[a,b]$. Sei $Z = \{x_0, \ldots, x_n\} \in \mathfrak{Z}$. $V_f(Z) = \sum_{j=1}^{n} |f(x_j) - f(x_{j-1})| = \sum_{j=1}^{n} f(x_j) - f(x_{j-1}) = f(b) - f(a) = |f(b) - f(a)|$

(6) Übung.

(7) $I := [a,b], I_1 := [a,c], I_2 := [c,b]$.

„$\Rightarrow$": Sei Z_1 eine Zerlegung von I_1 und Z_2 eine Zerlegung von I_2. $Z := Z_1 \cup Z_2 \implies Z \in \mathfrak{Z}$ und $V_f(Z_1), V_f(Z_2) \leq V_f(Z_1) + V_f(Z_2) = V_f(Z) \leq V_f[a,b] \implies f \in \mathrm{BV}(I_1)$ und $f \in \mathrm{BV}(I_2)$ und $V_f(I_1) + V_f(I_2) \leq V_f[a,b]$

„$\Leftarrow$": Sei $Z \in \mathfrak{Z}, \tilde{Z} := Z \cup \{c\}$, $Z_1 := \tilde{Z} \cap I_1$, $Z_2 := \tilde{Z} \cap I_2$. Z_1 und Z_2 sind Zerlegungen von I_1 bzw. I_2 und $V_f(Z) \overset{s.o.}{\leq} V_f(\tilde{Z}) = V_f(Z_1) + V_f(Z_2) \leq V_f(I_1) + V_f(I_2) \implies f \in \mathrm{BV}[I]$ und $V_f(I) \leq V_f(I_1) + V_f(I_2)$. ■

Satz 25.2 (Eigenschaften Funktion von beschränkter Varianz)

(1) $f \in \mathrm{BV}[a,b] \iff \exists\ f_1, f_2 : [a,b] \to \mathbb{R}$ mit: f_1, f_2 sind wachsend auf $[a,b]$ und $f = f_1 - f_2$.

(2) $\mathrm{BV}[a,b] \subseteq \mathrm{R}[a,b]$.

(3) Ist $f \in C^1[a,b] \implies V_f[a,b] = \int_a^b |f'| \mathrm{d}x$.

Beweis

(3) später in allgemeiner Form (Analysis II, §12 od. §13)

(2) folgt aus (1) und 23.4

(1) „$\Rightarrow$": $V_f[a,a] := 0$, $f_1(x) := V_f([a,x])$ $(x \in [a,b])$, $f_2 := f_1 - f$. Dann: $f = f_1 - f_2$. Seien c,d $\in [a,b]$ und $c < d$. $f_1(d) = V_f[a,d] \overset{25.1(7)}{=} V_f[a,c] + V_f[c,d] = f_1(c) + \underbrace{V_f[c,d]}_{\geq 0} \geq f_1(c) \implies f_1$ ist wachsend. $f(d) - f(c) \leq |f(d) - f(c)| = V_f(\tilde{Z})$ (wobei $\tilde{Z} = \{c,d\}$) $\leq V_f[c,d] = f_1(d) - f_1(c) \implies f_2(d) - f_2(c) \geq 0 \implies f_2$ ist wachsend.

„$\Leftarrow$": 25.1(5), (6) ■