

17. Quadrierbare Mengen

Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$. A heißt **quadrierbar** (qb) : $\iff 1_A \in L(\mathbb{R}^n)$ ($\iff 1 \in L(A)$)

In diesem Fall heißt $v_n(A) := \int_{\mathbb{R}^n} 1_A dx = \int_A 1 dx$ das n -dimensionale **Volumen** oder **Lebesguemaß** von A . **Beachte:** $v_n(A) \in \mathbb{R}$

Satz 17.1

Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$ beschränkt. Ist A offen oder abgeschlossen, dann ist A quadrierbar.

Beweis

16.11, 16.12 ■

Beispiele:

- (1) \emptyset ist quadrierbar und $v_n(\emptyset) = 0$.
- (2) Sei Q ein Quader im $\mathbb{R}^n \implies 1_Q \in \mathcal{T}_n \subseteq L(\mathbb{R}^n) \implies Q$ ist quadrierbar und n -dimensionale Volumen von oben gleich dem n -dimensionalen Volumen aus §15
- (3) Sei $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{R}^n$, D beschränkt und abgeschlossen, $f \in C(D, \mathbb{R})$ und $f \geq 0$ auf D .
 $A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^{n+1} : x \in D, 0 \leq y \leq f(x)\}$. A ist beschränkt und abgeschlossen $\xrightarrow{17.1}$ A ist quadrierbar (im \mathbb{R}^{n+1}). $v_{n+1}(A) = \int_A 1 d(x, y) \stackrel{16.3}{=} \int_D \left(\int_0^{f(x)} 1 dy \right) dx = \int_D f(x) dx$
- (4) $A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^n : x^2 + y^2 \leq r^2\}$ ($r > 0$). $A = \overline{U_r(0)}$. A ist beschränkt und abgeschlossen $\xrightarrow{17.1}$ A ist quadrierbar. $v_2(A) = \int_A 1 dx$. Für $x \in [-r, r]$: $A_x = [-\sqrt{r^2 - x^2}, \sqrt{r^2 - x^2}] \implies$
 $v_n(A) = \int_{-r}^r \left(\int_{-\sqrt{r^2 - x^2}}^{\sqrt{r^2 - x^2}} 1 dy \right) dx = \int_{-r}^r 2\sqrt{r^2 - x^2} dx \stackrel{\text{AI}}{=} \pi r^2$.

Satz 17.2

A, B, A_1, \dots, A_m seien $\subseteq \mathbb{R}^n$ und quadrierbar.

- (1) $A \cap B, A \cup B, A \setminus B$ sind quadrierbar und
 $v_n(A \cup B) = v_n(A) + v_n(B) - v_n(A \cap B)$.
- (2) Aus $A \subseteq B$ folgt $v_n(A) \leq v_n(B)$.
- (3) $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_m$ ist quadrierbar und
 $v_n(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_m) \leq v_n(A_1) + \dots + v_n(A_m)$

Beweis

- (1) $1_{A \cap B} = 1_A \cdot 1_B \xrightarrow{16.5} 1_{A \cap B} \in L(\mathbb{R}^n) \implies A \cup B$ ist quadrierbar.
 $1_{A \cup B} = 1_A + 1_B - 1_{A \cap B} \xrightarrow{16.5} 1_{A \cup B} \in L(\mathbb{R}^n) \implies A \cup B$ ist quadrierbar. $v_n(A \cup B) = \int_{\mathbb{R}^n} 1_{A \cup B} dx = \int_{\mathbb{R}^n} 1_A dx + \int_{\mathbb{R}^n} 1_B dx - \int_{\mathbb{R}^n} 1_{A \cap B} dx = v_n(A) + v_n(B) - v_n(A \cap B)$.
 $1_{A \setminus B} = 1_A(1 - 1_B) \xrightarrow{16.5} 1_{A \setminus B} \in L(\mathbb{R}^n) \implies A \setminus B$ ist quadrierbar.
- (2) $A \subseteq B \implies 1_A \leq 1_B$ auf $\mathbb{R}^n \implies v_n(A) = \int_{\mathbb{R}^n} 1_A dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} 1_B dx = v_n(B)$
- (3) folgt aus (1) mit Induktion ■

Satz 17.3 (Prinzip von Cavalieri)

Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^{n+1} = \{(x, z) : x \in \mathbb{R}^n, z \in \mathbb{R}\}$ beschränkt und abgeschlossen (also quadrierbar im \mathbb{R}^{n+1}). Dann:

- (1) $\forall z \in \mathbb{R}$ ist A_z beschränkt und abgeschlossen (also quadrierbar im \mathbb{R}^n).
- (2) $v_{n+1}(A) = \int_{\mathbb{R}} v_n(A_z) dz$

Beweis

- (1) Übung

$$(2) v_{n+1}(A) = \int_A 1 d(x, z) \stackrel{16.3}{=} \int_{\mathbb{R}} \underbrace{\left(\int_{A_z} 1 dx \right)}_{=v_n(A_z)} dz. \quad \blacksquare$$

Beispiele:

- (1) $A := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z \in [0, 1], x^2 + y^2 \leq z^2\}$. A ist beschränkt und abgeschlossen $\implies A$ ist quadrierbar. Für $z \notin [0, 1] : A_z = \emptyset$. Für $z \in [0, 1] : A_z = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq z^2\} \implies v_2(A_z) = \pi z^2 \implies v_3(A) = \int_0^1 \pi z^2 dz = \frac{\pi}{3}$
- (2) Sei $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$, $f \in C([a, b], \mathbb{R})$ und $f \geq 0$ auf $[a, b]$. Graph von f rotiert um die x -Achse \longrightarrow Rotationskörper A . $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \in [a, b], y^2 + z^2 \leq f(x)^2\}$. $A_x = \{(y, z) \in \mathbb{R}^2 : y^2 + z^2 \leq f(x)^2\}$ für $x \in [a, b]$. $v_2(A_x) = \pi f(x)^2$. $v_3(A) = \pi \int_a^b f(x)^2 dx$.

Speziell: $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$ ($r > 0$), $x \in [-r, r]$.

Rotationskörper $A = \overline{U_r(0)} \subseteq \mathbb{R}^3$. $v_3(A) = \pi \int_{-r}^r (r^2 - x^2) dx = \frac{4}{3} \pi r^3$.

Definition

Sei $N \subseteq \mathbb{R}^n$. N heißt eine **Nullmenge** genau dann, wenn F quadrierbar und $v_n(N) = 0$ ist.

Satz 17.4

Sei $N \subseteq \mathbb{R}^n$. N ist eine Nullmenge $\iff \|1_N\|_1 = 0$.

Beweis

„ \Rightarrow “: N Nullmenge $\Rightarrow 1_N \in L(\mathbb{R}^n)$. 16.5 $\Rightarrow \|1_N\|_1 = \int_{\mathbb{R}^n} 1_N dx = v_n(N) = 0$. „ \Leftarrow “: Setze $(\varphi_k) := (0, 0, 0, \dots)$; (φ_k) ist eine Folge in \mathcal{T}_n : $\|1_N - \phi_k\|_1 = \|1_N\|_1 = \|1_N\|_1 \stackrel{\text{Vor.}}{=} 0 \forall k \in \mathbb{N} \Rightarrow 1_N \in L(\mathbb{R}^n)$ und $\int 1_N dx = \lim \int \varphi_k dx = 0 \Rightarrow N$ ist quadrierbar und $v_n(N) = 0$. ■

Satz 17.5

N, N_1, N_2, \dots seien Nullmengen im \mathbb{R}^n .

(1) Ist $M \subseteq N \Rightarrow M$ ist eine Nullmenge.

(2) $\bigcup_{k=1}^{\infty} N_k$ ist eine Nullmenge.

Beweis

(1) $1_M \leq 1_N \stackrel{16.1}{\Rightarrow} \|1_M\|_1 \leq \|1_N\|_1 \stackrel{17.4}{=} 0 \Rightarrow \|1_M\|_1 = 0 \Rightarrow \text{Beh.}$

(2) $A := \bigcup_{k=1}^{\infty} N_k$; $1_A \leq \sum_{k=1}^{\infty} 1_{N_k} \stackrel{16.1}{\Rightarrow} \|1_A\|_1 \leq \sum_{k=1}^{\infty} \|1_{N_k}\|_1 \stackrel{17.4}{=} 0 \Rightarrow \text{Beh.}$ ■

Beispiele:

(1) Sei $x_0 = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $N := \{x_0\} = \{x_1\} \times \{x_2\} \times \dots \times \{x_n\}$. N ist ein Quader, also quadrierbar, $v_n(N) = 0$, N ist eine Nullmenge.

(2) Beispiel (1) und 17.5(2) liefern: Jede abzählbare Teilmenge des \mathbb{R}^n ist eine Nullmenge

(3) Ist $Q = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3] \times \dots \times [a_n, b_n] \subseteq \mathbb{R}^n$. Q ist eine Nullmenge $\iff a_j = b_j$ für ein $j \in \{1, \dots, n\}$.

Satz 17.6

Sei $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{R}^n$, D sei beschränkt und abgeschlossen, es sei $f \in C(D, \mathbb{R})$ und $G_f := \{(x, f(x)) : x \in D\} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$. Dann ist G_f eine Nullmenge im \mathbb{R}^{n+1} .

Beweis

G_f ist beschränkt und abgeschlossen $\stackrel{17.1}{\Rightarrow} G_f$ ist qb. $v_{n+1}(G_f) = \int_{G_f} 1 d(x, y) \stackrel{16.13}{=} \int_D \left(\int_{f(x)}^{f(x)} 1 dy \right) dx = 0$. ■

Definition

Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$ und (E) eine Eigenschaft, welche die Elemente von A betrifft. (E) gilt **fast überall** (**f.ü.**) auf A : $\iff \exists$ Nullmenge $N \subseteq A$ mit: (E) gilt für alle $x \in A \setminus N$.

Beispiel

$f : A \rightarrow \tilde{\mathbb{R}}$ sei eine Funktion. $f = 0$ f.ü. auf A $\iff \exists$ Nullmenge $N \subseteq A$: $f(x) = 0 \forall x \in A \setminus N$.

Satz 17.7

- (1) $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \tilde{\mathbb{R}}$ seien Funktionen mit $f = g$ f.ü. auf \mathbb{R}^n . Dann: $f \in L(\mathbb{R}^n) \iff g \in L(\mathbb{R}^n)$. I. d. Fall: $\int f dx = \int g dx$.
- (2) Seien $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$, $f \in L(A) \cap L(B)$ und $A \cap B$ sei eine Nullmenge. Dann: $f \in L(A \cup B)$ und $\int_{A \cup B} f dx = \int_A f dx + \int_B f dx$.

Beweis

- (1) \exists Nullmenge $N \subseteq \mathbb{R}^n : f(x) = g(x) \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus N$. Sei $f \in L(\mathbb{R}^n) \implies \exists$ Folge (φ_k) von Treppenfunktionen mit: $\|f - \varphi_k\|_1 \rightarrow 0$ und $\int f dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \int \varphi_k dx$.

$$f_k := 1_N \ (k \in N), \ h := \sum_{k=1}^{\infty} f_k, \ \|h\|_1 \stackrel{16.1}{\leq} \sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\|_1 \stackrel{17.4}{=} 0 \implies \|h\|_1 = 0.$$

$$\text{Es ist } |g - \varphi_k| \leq |f - \varphi_k| + h \text{ auf } \mathbb{R}^n \stackrel{16.1}{\implies} \|g - \varphi_k\|_1 \leq \|f - \varphi_k\|_1 + \|h\|_1 = \|f - \varphi_k\|_1 \implies \|g - \varphi_k\|_1 \rightarrow 0 \implies g \in L(\mathbb{R}^n) \text{ und } \int g dx = \lim \int \varphi_k dx = \int f dx.$$

- (2) Wegen (1) o.B.d.A: $f = 0$ auf $A \cap B$. Dann: $f_{A \cup B} = f_A + f_B \stackrel{16.5}{\in} L(\mathbb{R}^n) \implies f \in L(A \cup B)$ und $\int_{A \cup B} f dx = \int_{\mathbb{R}^n} f_{A \cup B} dx = \int_{\mathbb{R}^n} f_A dx + \int_{\mathbb{R}^n} f_B dx = \int_A f dx + \int_B f dx$. ■

Satz 17.8

$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \tilde{\mathbb{R}}$ sei eine Funktion.

- (1) Ist $\|f\|_1 < \infty$ und $N := \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) = \infty\} \implies N$ ist eine Nullmenge. Dies ist z.B. der Fall, wenn $f \in L(\mathbb{R}^n)$ (16.5: $\|f\|_1 = \int |f| dx$)
- (2) $\|f\|_1 = 0 \iff f = 0$ f.ü. auf \mathbb{R}^n .

Beweis

- (1) Sei $\varepsilon > 0 : 1_N \leq \varepsilon |f|$ auf $\mathbb{R}^n \stackrel{16.1}{\implies} \|1_N\|_1 \leq \varepsilon \|f\|_1 \stackrel{\varepsilon \rightarrow 0}{\implies} \|1_N\|_1 = 0 \stackrel{17.4}{\implies} \text{Beh.}$

- (2) „ \implies “: Für $k \in \mathbb{N} : N_k := \{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| \geq \frac{1}{k}\}$. Dann: $1_{N_k} \leq k|f|$ auf $\mathbb{R}^n \stackrel{16.1}{\implies} \|1_{N_k}\|_1 \leq k\|f\|_1 = 0 \stackrel{17.4}{\implies} N_k$ ist eine Nullmenge $\stackrel{17.5}{\implies} N := \bigcup_{k=1}^{\infty} N_k$ ist eine Nullmenge. Es ist $N = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \neq 0\} \implies f = 0$ f.ü. auf \mathbb{R}^n .

$$\text{„}\Leftarrow\text{“: } |f| = 0 \text{ f.ü. auf } \mathbb{R}^n \stackrel{17.7}{\implies} |f| \in L(\mathbb{R}^n) \text{ und } \int |f| dx = \int 0 dx = 0. \ 16.5 \implies \|f\|_1 = \int |f| dx = 0. \quad \blacksquare$$

Definition

Seien Q_1, Q_2, \dots, Q_m abgeschlossene Quader im \mathbb{R}^n und $A := Q_1 \cup Q_2 \cup \dots \cup Q_m$. Dann heißt A eine **Figur**.

Satz 17.9

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Dann ex. Figuren A_1, A_2, \dots mit $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \dots$ und $U = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$. Ist U qb $\implies v_n(U) = \lim_{k \rightarrow \infty} v_n(A_k) = \sup\{v_n(A_k) : k \in \mathbb{N}\}$.

Beweis

Für $a \in \mathbb{Q}^n$ und $r \in \mathbb{Q}^+$ sei $W_r(a)$ wie im Beweis von 16.10.

$\mathcal{Q} := \{W_r(a) : a \in \mathbb{Q}^n, r \in \mathbb{Q}^+, W_r(a) \subseteq U\}$, U offen $\implies \mathcal{Q} \neq \emptyset$.

Es ist $\mathcal{Q} = \{Q_1, Q_2, \dots\}$, $A_k := Q_1 \cup Q_2 \cup \dots \cup Q_k$ ($k \in \mathbb{N}$). (A_k) leistet das Verlangte.

Sei U qb. $\varphi_k := 1_{A_k}$ ($k \in \mathbb{N}$) $\implies \varphi_k \in \mathcal{T}_n$, $\varphi_1 \leq \varphi_2 \leq \dots$ auf \mathbb{R}^n und $\varphi_k(x) \rightarrow 1_U(x) \forall x \in \mathbb{R}^n$ und $\varphi_1 \leq \varphi_k \leq 1_U$ auf $\mathbb{R}^n \implies \int \varphi_1 dx \leq \int \varphi_k dx \leq \int 1_U dx = v_n(U)$. 16.7 $\implies \lim \underbrace{\int \varphi_k dx}_{v_n(A_k)} = \int 1_U dx = v_n(U)$. ■

Satz 17.10

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Dann ex. Quader $Q_1, Q_2, \dots \subseteq \mathbb{R}^n$ mit:

$$U = \bigcup_{k=1}^{\infty} Q_k \text{ und } Q_k^\circ \cap Q_j^\circ = \emptyset \ (j \neq k)$$

Ist U qb $\implies v_n(U) = \sum_{k=1}^{\infty} v_n(Q_k)$.

Beweis

In der gr. Übung. ■

Satz 17.11

Sei $N \subseteq \mathbb{R}^n$. N ist eine Nullmenge $\iff \forall \varepsilon > 0 \exists$ Quader Q_1, Q_2, \dots im \mathbb{R}^n mit: (*) $N \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} Q_k$ und $\sum_{k=1}^{\infty} v_n(Q_k) < \varepsilon$.

Beweis

„ \Leftarrow “: Sei $\varepsilon > 0$. Seien Q_1, Q_2, \dots wie in (*). Dann: $1_N \leq \sum_{k=1}^{\infty} 1_{Q_k}$ auf $\mathbb{R}^n \xrightarrow{16.1} \|1_N\|_1 \leq \sum_{k=1}^{\infty} \|1_{Q_k}\|_1 = \sum_{k=1}^{\infty} \int 1_{Q_k} dx = \sum_{k=1}^{\infty} v_n(Q_k) < \varepsilon \implies \|1_N\|_1 = 0 \xrightarrow{17.4} N$ ist eine Nullmenge.

„ \Rightarrow “: Sei $\varepsilon > 0$. Es genügt z.z.: \exists offene Menge U mit: $N \subseteq U$, U ist qb und $v_n(U) < \varepsilon$ (wegen 17.10).

$\|2 \cdot 1_N\|_1 = 2\|1_N\|_1 \stackrel{17.4}{=} 0 \implies \exists \Phi \in \mathcal{H}(2 \cdot 1_N) : I(\Phi) < \varepsilon$. Sei $\Phi = \sum_k c_k 1_{R_k}$, wobei $c_k \geq 0$, R_k offene Quader. O.B.d.A: $\Phi = \sum_{k=1}^{\infty} c_k 1_{R_k}$.

17. Quadrierbare Mengen

$\varphi_m := \sum_{k=1}^m c_k 1_{R_k} \in \mathcal{T}_n$; $\varphi_1 \leq \varphi_2 \leq \dots \leq \Phi$; $\varphi_m(x) \rightarrow \Phi(x) \forall x \in \mathbb{R}^n$. $\int \varphi_1 dx \leq \int \varphi_m dx = \sum_{k=1}^m c_k v_n(R_k) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{\infty} c_k v_n(R_k) = I(\Phi) < \varepsilon$.

16.7 $\implies \Phi \in L(\mathbb{R}^n)$ und $\int \Phi dx = \lim \int \varphi_m dx = I(\Phi) < \varepsilon$.

$U := \{x \in \mathbb{R}^n : \Phi(x) > 1\}$. $x \in N \implies \Phi(x) \geq 2 \cdot 1_N(x) = 2 \implies x \in U$. Also: $N \subseteq U$. U offen, U qb, $v_n(U) < \varepsilon$. ■

Folgerung 17.12

Sei $N \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Nullmenge und $\varepsilon > 0$. Dann existiert eine Menge $U \subseteq \mathbb{R}^n$: U ist offen, U ist quadrierbar, $N \subseteq U$ und $v_n(U) < \varepsilon$.

Beweis

Beweis von 17.11 ■

Satz 17.13

Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$ beschränkt und abgeschlossen, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ sei beschränkt und fast überall stetig auf A . Dann: $f \in L(A)$.

Beweis

$\exists \gamma \geq 0 : |f| \leq \gamma$ auf A . \exists Nullmenge $N \subseteq A$: f ist stetig auf $A \setminus N$. Sei $\varepsilon > 0$. 17.12 $\implies \exists$ offene und quadrierbare Menge U mit $N \subseteq U, v_n(U) < \varepsilon$. $A \setminus U \subseteq A \setminus N$, f stetig auf $A \setminus U$, $A \setminus U$ ist beschränkt und abgeschlossen. 16.12 $\implies f \in L(A \setminus U) \implies f_{A \setminus U} \in L(\mathbb{R}^n) \implies \exists \varphi \in \mathcal{T}_n : \|f_{A \setminus U} - \varphi\|_1 \leq \varepsilon$. Es ist $|f_A - f_{A \setminus U}| \leq \gamma \cdot 1_U$ auf \mathbb{R}^n . $\xrightarrow{16.1} \|f_A - f_{A \setminus U}\|_1 \leq \gamma \|1_U\|_1 \stackrel{16.5}{=} \gamma \int 1_U dx = \gamma v_n(U) < \gamma \varepsilon$. Dann:

$$\begin{aligned} \|f_A - \varphi\|_1 &= \|f_A - f_{A \setminus U} + f_{A \setminus U} - \varphi\|_1 \\ &\leq \|f_A - f_{A \setminus U}\|_1 + \|f_{A \setminus U} - \varphi\|_1 \\ &\leq \gamma \varepsilon + \varepsilon \\ &= (\gamma + 1) \varepsilon \end{aligned}$$

D.h: $\forall k \in \mathbb{N} \exists \varphi_k \in \mathcal{T}_n : \|f_A - \varphi_k\|_1 < \frac{\gamma+1}{k} \implies f_A \in L(\mathbb{R}^n) \implies f \in L(A)$. ■