

## 2 Projektive Varietäten

### §8 Der projektive Raum $\mathbb{P}^n(k)$

Erinnerung

$$\begin{aligned}\mathbb{P}^n(k) &= \{ \text{Geraden in } k^{n+1} \text{ durch } 0 \} \\ &= (k^{n+1} \setminus \{0\}) / \sim \text{ mit } (x_0, \dots, x_n) \sim (y_0, \dots, y_n) : \Leftrightarrow \exists \lambda \in k^\times : \lambda x_i = y_i \text{ für } i = 1, \dots, n\end{aligned}$$

Schreibweise  $(x_0 : \dots : x_n) := [(x_0, \dots, x_n)]_\sim$  ("homogene Koordinaten")

**Beispiele**

$n = 0$ :  $\mathbb{P}^0(k)$  ist ein Punkt.

$n = 1$ :  $\mathbb{P}^1(k) \longrightarrow k \cup \{\infty\}$  ist bijektiv.

$$(x_0 : x_1) \mapsto \begin{cases} \frac{x_1}{x_0} : & x_0 \neq 0 \\ \infty : & x_0 = 0 \end{cases} \quad \text{Also: } \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) = S^1 / \{\pm 1\}$$

$k \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$  :

$$\mathbb{P}^n(k) = (k^{n+1} \setminus \{0\}) / \sim \stackrel{(k=\mathbb{R})}{=} S^n / \pm 1$$

$\Rightarrow \mathbb{P}^n(k)$  ist mit der Quotiententopologie ein kompakter topologischer Raum.

$\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$  ist nicht orientierbar ("Kreuzhaube").

$$\pi_1(\mathbb{P}^2(\mathbb{R})) \cong \mathbb{Z} / 2\mathbb{Z}$$

$$\underline{k = \mathbb{F}_q}: \mathbb{P}^n(\mathbb{F}_q) \text{ hat } \underbrace{\frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}}_{=1+q+q^1+\dots+q^n} \text{ Punkte.}$$

**Bemerkung 2.8.1**

Für  $n \geq 1$  und  $i = 0, \dots, n$  sei

$$U_i := \{(x_0 : \dots : x_n) \in \mathbb{P}^n(k) \mid x_i \neq 0\}$$

$$(a) \quad \mathbb{P}^n(k) = \bigcup_{i=0}^n U_i$$

(b)

$$\begin{array}{ccc} U_i & \longrightarrow & k^n \\ \rho_i : (x_0 : \dots : x_n) & \longmapsto & \left( \frac{x_0}{x_i}, \dots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i} \right) \end{array}$$

ist wohldefiniert und bijektiv.

Umkehrabbildung:

$$(y_1, \dots, y_n) \mapsto (y_1 : \dots : y_i : 1 : y_{i+1} : \dots : y_n)$$

(c)  $\varphi_i : \mathbb{P}^n(k) \setminus U_i \longrightarrow \mathbb{P}^{n-1}(k), (x_0 : \dots : x_n) \mapsto (x_0 : \dots : x_{i-1} : x_{i+1} : \dots : x_n)$  ist bijektiv.

### Folgerung 2.8.2

$\mathbb{P}^n(k)$  ist disjunkte Vereinigung von  $\mathbb{A}^n(k)$  und  $\mathbb{P}^{n-1}(k)$ , oder auch von  $\mathbb{A}^n(k), \mathbb{A}^{n-1}(k), \dots, \mathbb{A}^0(k)$ .

### Beobachtung

- (a) Ist  $f \in k[X_0, \dots, X_n]$  homogen vom Grad  $d \geq 0$ , so gilt für  $(x_0, \dots, x_n) \in k^{n+1}$  und  $\lambda \in k$  stets  $f(\lambda x_0, \dots, \lambda x_n) = \lambda^d f(x_0, \dots, x_n)$ .
- (b) Jedes homogene Polynom in  $k[X_0, \dots, X_n]$  hat eine wohldefinierte Nullstellenmenge in  $\mathbb{P}^n(k)$ .

### Definition 2.8.3

Eine Teilmenge  $V \subseteq \mathbb{P}^n(k)$  heißt **projektive Varietät**, wenn es eine Menge  $\mathcal{F} \subset k[X_0, \dots, X_n]$  von homogenen Polynomen gibt, sodass

$$V = V(\mathcal{F}) := \{x = (x_0 : \dots : x_n) \in \mathbb{P}^n(k) \mid f(x) = 0 \text{ für alle } f \in \mathcal{F}\}.$$

### Beispiele 2.8.4

- (a)  $H_i = V(X_i) = \mathbb{P}^n(k) \setminus U_i (\stackrel{\varphi_i}{=} \mathbb{P}^{n-1}(k))$  ist eine projektive Varietät ("Hyperebene").
- (b)  $V = V(X_0 X_2 - X_1^2) \subset \mathbb{P}^2(k)$  ist eine projektive Varietät.  
 $V \cap U_0 = V(\frac{x_2}{x_0} - (\frac{x_1}{x_0})^2)$  Parabel in  $\mathbb{A}^2(k)$   
 $V \cap U_1 = V(\frac{x_0}{x_1} \cdot \frac{x_2}{x_1} - 1)$  Hyperbel in  $\mathbb{A}^2(k)$

### Definition + Bemerkung 2.8.5

- (a)  $S = k[X_0, \dots, X_n]$  ist **graduierter Ring** (genau: graduierte  $k$ -Algebra), das heißt:

$$S = \bigoplus_{d=0}^{\infty} S_d, \quad S_d \cdot S_e \subseteq S_{d+e}$$

(hier:  $S_d = \{f \in k[X_0, \dots, X_n] \mid f \text{ homogen vom Grad } d\}, S_0 = k$ )

- (b) Ein Ideal  $I \subseteq S$  heißt **homogen**, wenn  $I$  von homogenen Elementen erzeugt wird. Äquivalent:  $I = \bigoplus_{d=0}^{\infty} (I \cap S_d)$
- (c) Summe, Produkt, Durchschnitt und Radikal von homogenen Idealen sind wieder homogen.

**Beweis** (c) Seien  $I_1, I_2$  homogene Ideale mit homogenen Erzeugern  $(f_i)_{i \in \mathcal{I}}$  beziehungsweise  $(g_j)_{j \in \mathcal{J}}$ , dann folgt, dass  $I_1 + I_2$  von den  $f_i$  und  $g_j$  erzeugt wird. Genauso  $I_1 \cdot I_2$ .

$$\begin{aligned} \bigoplus_{d=0}^{\infty} ((I_1 \cap I_2) \cap S_d) &= \bigoplus_{d=0}^{\infty} ((I_1 \cap S_d) \cap (I_2 \cap S_d)) \\ &= \left( \bigoplus_{d=0}^{\infty} I_1 \cap S_d \right) \cap \left( \bigoplus_{d=0}^{\infty} I_2 \cap S_d \right) = I_1 \cap I_2 \end{aligned}$$

$\Rightarrow I_1 \cap I_2$  ist homogen.

Sei  $I := I_1, x \in \sqrt{I}, x = \sum_{d=0}^n x_d, x_d \in S_d$ . Zu zeigen:  $x_d \in \sqrt{I}$ .

Dann gibt es  $m \geq 0$  mit  $x^m \in I$ :  $x^m = x_n^m +$  Terme kleineren Grades

$\Rightarrow x_n^m \in I$  da die Summe aller Monome gleichen Grades auch immer in  $I$  liegen  $\Rightarrow x_n \in \sqrt{I}$ .

Mit Induktion folgt die Behauptung  $(x - x_n = \sum_{d=0}^{n-1} x_d \in \sqrt{I} \Rightarrow x_{n-1} \in I)$   $\square$

**Definition + Bemerkung 2.8.6**

- (a) Für  $V \subseteq \mathbb{P}^n(k)$  sei  $I(V)$  das Ideal in  $k[X_0, \dots, X_n]$ , das von allen homogenen Polynomen  $f$  erzeugt wird, für die  $f(x) = 0 \forall x \in V$  gilt.  $I(V)$  heißt **Verschwundungsideal** von  $V$ .  $I(V)$  ist Radikalideal.
- (b) Für eine Menge  $F \subset k[X_0, \dots, X_n]$  von homogenen Polynomen sei  $V(F) = \{x \in \mathbb{P}^n(k) : f(x) = 0 \forall f \in F\}$  die zugehörige projektive Varietät. Für ein homogenes Ideal  $I$  sei  $V(I) = \{x \in \mathbb{P}^n(k) : f(x) = 0 \text{ für alle homogenen } f \in I\}$ . Dann ist  $V(F) = V((F)) = V(\sqrt{(F)})$  wobei  $(F)$  das von  $F$  erzeugte Ideal sei.

**Beweis** (a)  $\sqrt{I(V)}$  ist nach 2.8.5 c) auch ein homogenes Ideal, wird also von homogenen Elementen  $f_i$  erzeugt.

$$\Rightarrow f_i^m(x) = 0 \forall x \in V \text{ und ein } m \geq 0 \Rightarrow f_i(x) = 0 \Rightarrow f_i \in I(V) \Rightarrow \sqrt{I(V)} = I(V) \quad \square$$

**Proposition 2.8.7**

- (a) Die projektiven Varietäten bilden die abgeschlossenen Mengen einer Topologie. Diese heißt die **Zariski-Topologie** auf  $\mathbb{P}^n(k)$ .
- (b) Eine projektive Varietät  $V$  ist genau dann irreduzibel, wenn  $I(V)$  ein Primideal ist.
- (c) Jede projektive Varietät besitzt eine eindeutige Zerlegung in irreduzible Komponenten.

**Beweis** Wie im affinen Fall.  $\square$

**Definition + Bemerkung 2.8.8**

- (a) Für eine nicht leere projektive Varietät  $V \subseteq \mathbb{P}^n(k)$  heißt  $\tilde{V} := \{x = (x_0, \dots, x_n) \mid (x_0 : \dots : x_n) \in V\} \cup \{(0, \dots, 0)\}$  der **affine Kegel** über  $V$ .
- (b)  $\tilde{V}$  ist affine Varietät. Genauer  $V = V(I)$  für ein homogenes Ideal  $I$  in  $k[X_0, \dots, X_n]$ , so ist  $\tilde{V} = V(I)$  als affine Varietät in  $\mathbb{A}^{n+1}(k)$ .
- (c)  $I(\tilde{V}) = I(V)$

**Beweis** (b) Klar ist  $(x_0 : \dots : x_n) \in V \Leftrightarrow (x_0, \dots, x_n) \in \tilde{V} \setminus \{(0, \dots, 0)\}$ . Da  $V \neq \emptyset$ , enthält das Ideal  $I$ , für das  $V = V(I)$  ist, kein Element aus  $k \setminus \{0\}$ . Für jedes homogene Element  $f \in I$  ist daher  $\deg(f) > 0 \Rightarrow f(0, \dots, 0) = 0 \Rightarrow \tilde{V} = V(I)$ .

(c) Für jedes homogene Polynom  $f \in k[X_0, \dots, X_n]$  gilt  $f \in I(V) \Leftrightarrow f \in I(\tilde{V})$ . Es genügt zu zeigen, dass  $I(\tilde{V})$  ein homogenes Ideal ist.

Sei also  $f \in I(\tilde{V})$  mit  $f = \sum_{i=0}^d f_i$ ,  $f_i$  homogen vom Grad  $i$ . Sei  $x = (x_0, \dots, x_n) \in \tilde{V}$ . Dann ist  $(\lambda x_0, \dots, \lambda x_n) = \lambda x \in \tilde{V} \forall \lambda \in k$ , also  $0 = f(\lambda x) = \sum_{i=0}^d \lambda^i f_i(x) \forall \lambda \in k$ . Dies ist ein lineares Gleichungssystem mit  $|k|$  Zeilen.  $k$  ist aber algebraisch abgeschlossen, hat also unendlich viele Elemente  $\Rightarrow f_i(x) = 0 \forall i \in \{0, \dots, d\} \Rightarrow f_i \in I(\tilde{V})$ .  $\square$

**Proposition 2.8.9 (Projektiver Nullstellensatz)**

Sei  $k$  algebraisch abgeschlossen,  $n \geq 0$ . Für jedes von  $(X_0, \dots, X_n)$  verschiedene Radikalideal  $I \subseteq k[X_0, \dots, X_n]$  gilt  $\underbrace{I(V(I))}_{\subset \mathbb{P}^n(k)} = \sqrt{I}$ .

**Beweis** Für gegebenes Radikalideal  $I$  sei  $V \subseteq \mathbb{P}^n(k)$  die zugehörige projektive Varietät.

Ist  $I = k[X_0, \dots, X_n]$ , so ist  $V(I) = \emptyset$  und  $I(V(I)) = k[X_0, \dots, X_n] = \sqrt{k[X_0, \dots, X_n]}$ .

Ist  $I \subsetneq k[X_0, \dots, X_n]$  homogen, so ist mit der Voraussetzung  $I \neq (X_0, \dots, X_n)$   $I \subsetneq (X_0, \dots, X_n)$ ,

und so ist die affine Nullstellenmenge von  $I$  in  $\mathbb{A}^n(k)$  echte Obermenge von  $\{(0, \dots, 0)\}$ , enthält also einen Punkt  $(x_0, \dots, x_n) \neq (0, \dots, 0)$ . Dann ist  $(x_0 : \dots : x_n) \in V$ , also  $V \neq \emptyset$ . Nach 2.8.8 b) ist  $\tilde{V}$  auch die durch  $I$  bestimmte affine Varietät in  $\mathbb{A}^{n+1}(k)$ . Nach 2.8.8 c) ist  $I(\tilde{V}) = I(V)$ . Nach Satz 3 (Hilbertscher Nullstellensatz) ist  $I(\tilde{V}) = \sqrt{I}$ .  $\square$

### Definition + Bemerkung 2.8.10

Sei  $V \subseteq \mathbb{P}^n(k)$  projektive Varietät mit homogenem Verschwindungsideal  $I(V)$ . Dann heißt  $k[V] := k[X_0, \dots, X_n]/I(V)$  der **homogene Koordinatenring** von  $V$ .  $k[V]$  ist graduierte  $k$ -Algebra. Dabei ist  $k[V]_d := k[X_0, \dots, X_n]_d / (I(V) \cap k[X_0, \dots, X_n]_d)$ .

## §9 Affine und projektive Varietäten

Es ist  $U_i = \{(x_0 : \dots : x_n) \in \mathbb{P}^n(k) : x_i \neq 0\} = \mathbb{P}^n(k) \setminus V(X_i)$  offen.

$\rho_i : U_i \rightarrow \mathbb{A}^n(k)$   $(x_0 : \dots : x_n) \mapsto (\frac{x_0}{x_i}, \dots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i})$  ist bijektiv.

### Proposition 2.9.1

Die Bijektionen  $\rho_i : U_i \rightarrow \mathbb{A}^n(k)$ ,  $i = 0, \dots, n$  sind Homöomorphismen bzgl. der jeweiligen Zariski-Topologie.

**Beweis**  $\mathcal{O}E$   $i = 0, \rho := \rho_0$

(i)  $\rho$  ist stetig: Genügt zu zeigen: Für jedes  $f \in k[X_1, \dots, X_n]$  ist  $\rho^{-1}(D(f))$  offen in  $U_0$ .

Äquivalent dazu:  $\rho^{-1}(V(f))$  ist abgeschlossen in  $U_0$ . Dies folgt aus:

### Bemerkung + Definition 2.9.2

Für  $f \in k[X_1, \dots, X_n]$  ist  $\rho^{-1}(V(f)) = U_0 \cap V(F)$ .

Dabei sei  $f = \sum_{i=0}^d f_i$ ,  $f_i$  homogen vom Grad  $i$ ,  $f_d \neq 0$  und  $F := \sum_{i=0}^d f_i \cdot X_0^{d-i} \in k[X_0, \dots, X_n]$ .  $F$  ist homogen vom Grad  $d$  und heißt die **Homogenisierung** von  $f$ .

**Beweis**  $x = (x_1, \dots, x_n) \in V(f) \Leftrightarrow f(x_1, \dots, x_n) = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=0}^d f_i(x_1, \dots, x_n) = 0$

$\Leftrightarrow F(1 : x_1 : \dots : x_n) = 0 \Leftrightarrow \rho^{-1}(x) \in V(F)$ .  $\square$

Damit ist gezeigt, dass  $\rho$  stetig ist.

(ii)  $\rho^{-1}$  ist stetig: Wie in (i) genügt zu zeigen: Für jedes homogene  $F \in k[X_0, \dots, X_n]$  ist  $\rho(V(F) \cap U_0)$  abgeschlossen in  $\mathbb{A}^n(k)$ .

Beachte: Die  $D(F)$ ,  $F \in k[X_0, \dots, X_n]$  homogen bilden eine Basis der Zariski-Topologie auf  $\mathbb{P}^n(k)$  (Bew. wie in Bemerkung 1.2.7 (ii)).  $\square$

### Bemerkung + Definition 2.9.3

$\rho(V(F) \cap U_0) = V(f)$ , wobei mit  $y_i := \frac{x_i}{x_0}$ ,  $i = 1, \dots, n$ ,  $f \in k[Y_1, \dots, Y_n]$  definiert sei durch  $f(Y_1, \dots, Y_n) = F(1, \frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0})$ .

$f$  heißt **Dehomogenisierung** von  $F$  bzgl.  $x_0$ .

**Beweis**  $x = (x_0 : \dots : x_n) \in V(F) \cap U_0 \Leftrightarrow x_0 \neq 0$  und  $F(x) = 0 \Leftrightarrow F(1, \frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0}) = 0 \Leftrightarrow f(\rho(x)) = 0 \Leftrightarrow \rho(x) \in V(f)$   $\square$

### Beispiele 2.9.4

$F(X_0, X_1, X_2) = X_1^2 - X_0 X_2$ ,  $f_{X_0}(Y_1, Y_2) = F(1, \frac{x_1}{x_0}, \frac{x_2}{x_0}) = Y_1^2 - Y_2$ ,  $f_{X_1}(Y_0, Y_2) = 1 - Y_0 Y_2$

Frage: Wie sieht  $F$  aus, wenn  $V(F) \cap U_0 = \emptyset$ ?

Antwort: z.B.  $F = X_0^d, \sqrt{(F)} = (X_0)$ .

**Bemerkung 2.9.5**

- (a) Sei  $f \in k[X_1, \dots, X_n]$ ,  $F \in k[X_0, \dots, X_n]$  die Homogenisierung. Dann gilt für die Dehomogenisierung  $\tilde{f}$  von  $F$  bzgl.  $X_0$ :  $\tilde{f} = f$ .
- (b) Sei  $F \in k[X_0, \dots, X_n]$  homogen,  $f \in k[Y_1, \dots, Y_n]$  die Dehomogenisierung bzgl.  $X_0$ ,  $\tilde{F}$  die Homogenisierung von  $f$ . Dann gilt:  $F = \tilde{F} \cdot X_0^d$  für ein  $d \geq 0$ .

**Beweis** (a) Sei  $f = \sum_{i=0}^d f_i$ ,  $f_d \neq 0 \Rightarrow F = \sum_{i=0}^d f_i X_0^{d-i} \Rightarrow \tilde{f} = \sum_{i=0}^d f_i \cdot 1 = f$ .

- (b) Schreibe  $F = X_0^d \cdot \tilde{F}$  mit  $X_0 \nmid \tilde{F}$ . Dann hat die Dehomogenisierung von  $\tilde{F}$  bzgl.  $X_0$  denselben Grad wie  $\tilde{F} \Rightarrow$  ihre Homogenisierung ist  $\tilde{F}$ .  $\square$

**Definition + Bemerkung 2.9.6**

Eine Teilmenge  $W \subseteq \mathbb{P}^n(k)$  heißt **quasiprojektive Varietät**, wenn eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:

- (i)  $W$  ist offen in einer projektiven Varietät.  
(ii) Es gibt eine offene Teilmenge  $U \subset \mathbb{P}^n(k)$  und eine abgeschlossene Teilmenge  $V \subset \mathbb{P}^n(k)$ , so dass  $W = U \cap V$ .

**Beispiele 2.9.7**

$\mathbb{P}^2 \setminus \{(0:0:1)\}$  ist quasiprojektiv, aber weder projektiv noch affin (was zu zeigen wäre).

**Proposition 2.9.8**

Betrachte  $\mathbb{A}^n(k)$  über  $\rho_0 : U_0 \xrightarrow{\sim} \mathbb{A}^n(k)$  als Teilmenge von  $\mathbb{P}^n(k)$ . Für ein Radikalideal  $I \subseteq k[X_1, \dots, X_n]$  sei  $I^* \subseteq k[X_0, \dots, X_n]$  das von den Homogenisierungen aller  $f \in I$  erzeugte Ideal. Dann ist  $V_p(I^*) \subseteq \mathbb{P}^n(k)$  der Zariski-Abschluss von  $V_a(I) \subseteq \mathbb{A}^n(k)$ .

**Beweis** (i) “ $V_a(I) \subseteq V_p(I^*)$ “: Sei  $x = (x_1, \dots, x_n) \in V_a(I)$  und sei  $f \in I$ ,  $F \in I^*$  die Homogenisierung von  $f$ .

Dann ist  $F(\rho_0^{-1}(x)) = F(1 : x_1 : \dots : x_n) = f(x_1, \dots, x_n) = 0$ , weil  $f \in I = I(V(I))$ .

- (ii) Sei  $V \in \mathbb{P}^n(k)$  abgeschlossen, mit  $V_a(I) \subseteq V$ .

Zu zeigen:  $V(I^*) \subseteq V$ .

Sei dazu  $V = V(\mathcal{J})$  für ein homogenes Ideal  $\mathcal{J}$ . Zu zeigen also:  $\mathcal{J} \subseteq I^*$ .

Sei  $F \in \mathcal{J}$  homogen,  $f = F(1, \frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0})$  die Dehomogenisierung von  $F$  bzgl.  $x_0$ .

Sei  $y = (y_1, \dots, y_n) \in V_a(I)$ .

Dann ist  $f(y) = F(1, y_1, \dots, y_n) = 0$ , weil  $\rho_0^{-1}(y) \in V(\mathcal{J})$ . Somit folgt  $f \in I$ .

Sei  $\tilde{F}$  die Homogenisierung von  $f$ , also  $\tilde{F} \in I^*$ , dann folgt mit 2.9.5:  $F = \tilde{F} \cdot X_0^d$  für ein  $d \geq 0 \Rightarrow F \in I^*$ .  $\square$

**Bemerkung 2.9.9**

Sei  $W$  eine quasiprojektive Varietät in  $\mathbb{P}^n(k)$ .

- (a) Die Zariski-Topologie auf  $W$  besitzt eine Basis aus affinen Varietäten.  
(b)  $W$  ist quasikompakt (d.h. jede offene Überdeckung von  $W$  besitzt eine endliche Teilüberdeckung)

**Beweis** (a) Sei  $W = \bigcup_{i=0}^n (W \cap U_i)$  mit  $U_i = \{(x_0 : \dots : x_n) \in \mathbb{P}^n(k) : x_i \neq 0\} \cong \mathbb{A}^n(k)$ .

Also  $\text{OE } W \subseteq \mathbb{A}^n(k)$ ,  $W$  ist offen in einer affinen Varietät, nämlich dem Zariski-Abschluss  $V_i$  von  $W \cap U_i$  in  $U_i$ . Nach 1.2.7(ii) bilden die  $D(f)$ ,  $f \in k[V_i]$  eine Basis der Zariski-Topologie auf  $W \cap U_i$ . Jedes  $D(f)$  ist aber isomorph zu einer affinen Varietät mittels

$$\rho : \begin{array}{ccc} D(f) & \longrightarrow & \mathbb{A}^{n+1}(k) \\ (x_1, \dots, x_n) & \longmapsto & (x_1, \dots, x_n, \frac{1}{f(x_1, \dots, x_n)}) \end{array}$$

für  $f \in k[X_1, \dots, X_n]$ . Bild von  $\rho$  ist  $V(Yf - 1)$ .

(b) Sei  $(O_j)_{j \in J}$  offene Überdeckung von  $W$ . Nach dem Beweis von (a) wird jedes  $O_j$  überdeckt von offenen Teilen der Form  $D(f)$  für geeignete  $f \in k[\overline{O_j \cap U_i}]$ .

Also  $O_j = D(f_j)$  für ein  $f_j \in k[X_0, \dots, \hat{X}_i, \dots, X_n]$  (im Folgenden bedeutet  $\hat{X}_i$ : "die  $i$ -te Variable streichen").

Sei  $F_j \in k[X_0, \dots, X_n]$  die Homogenisierung von  $f_j$ . Dann ist

$$W \subseteq \bigcup_{j \in J} D(F_j) = \mathbb{P}^n(k) - \bigcap_{j \in J} V(F_j) = \mathbb{P}^n(k) - V(\underbrace{\sum_{j \in J} (F_j)}_{=: I})$$

$I$  ist endlich erzeugtes Ideal, z.B. von  $F_1, \dots, F_r \Rightarrow W \subseteq \bigcup_{j=1}^r D(F_j) \Rightarrow W \subseteq \bigcup_{j=1}^r D(f_j) \quad \square$

## §10 Reguläre Funktionen

### Definition 2.10.1

Sei  $W \subseteq \mathbb{P}^n(k)$  eine quasiprojektive Varietät. Eine Abbildung  $f : W \rightarrow k$  heißt **reguläre Funktion** auf  $W$ , wenn  $f|_{W \cap U_i}$  reguläre Funktion ist für  $i = 0, \dots, n$ .

### Bemerkung 2.10.2

Sind  $G, H \in k[X_0, \dots, X_n]$  homogen vom gleichen Grad, so ist  $\frac{G(x)}{H(x)}$  wohlbestimmte Funktion auf  $\mathbb{P}^n(k) \setminus V(H)$ .

### Bemerkung 2.10.3

Sei  $V \subseteq \mathbb{P}^n(k)$  quasiprojektive Varietät. Dann gilt:

$f : V \rightarrow k$  ist regulär genau dann, wenn für alle  $p \in V$  eine Umgebung  $U_p$  von  $p$  existiert, sowie homogene Polynome  $G_p, H_p$  vom gleichen Grad, so dass  $f(x) = \frac{G_p(x)}{H_p(x)}$  für alle  $x \in U_p$ .

**Beweis** " $\Rightarrow$ " Sei  $p \in U_i$ ,  $g_p, h_p \in k[V_i]$  ( $V_i = \overline{V \cap U_i}$ ) wie in 1.6.2 (d.h. es gibt ein  $U_p \subseteq U_i$ ,  $g_p, h_p \in k[V_i]$ ,  $h_p(x) \neq 0 \quad \forall x \in U_p : f(x) = \frac{g_p(x)}{h_p(x)}$ ).

Seien  $\tilde{g}_p, \tilde{h}_p$  Repräsentanten von  $g_p$  bzw.  $h_p$  in  $k[X_0, \dots, \hat{X}_i, \dots, X_n]$  und  $G_p, H_p$  Homogenisierungen.

Ist  $\deg(G_p) \neq \deg(H_p)$ , so ersetze  $G_p$  durch  $G_p \cdot X_i^{\deg(H_p) - \deg(G_p)}$  (falls  $\deg(H_p) > \deg(G_p)$ ).

$\forall x \in U_p$  ist dann

$$f(x) = \frac{g_p(x)}{h_p(x)} = \frac{G_p(x_0 : \dots : x_{i-1} : 1 : x_{i+1} : \dots : x_n)}{H_p(x_0 : \dots : x_{i-1} : 1 : x_{i+1} : \dots : x_n)}$$

" $\Leftarrow$ " Dehomogenisieren ...

### Bemerkung 2.10.4

Sei  $V \subseteq \mathbb{P}^n(k)$  eine quasiprojektive Varietät. Für jede offene Teilmenge  $U$  von  $V$  sei  $\mathcal{O}(U) = \mathcal{O}_V(U) = \{f : U \rightarrow k \mid f \text{ regulär}\}$ .

(a)  $\mathcal{O}(U)$  ist  $k$ -Algebra.

(b)  $\mathcal{O}_V$  ist eine Garbe von  $k$ -Algebren auf  $V$ .

**Lemma 1**

Sei  $V \subseteq \mathbb{P}^n(k)$  eine projektive Varietät,  $f \in k[V]$  homogen,  $l \in \mathcal{O}_V(D(f))$ . Dann besitzt  $D(f)$  eine offene Überdeckung  $(U_i)_{i \in J}$  mit  $U_i = D(h_i)$  für homogene  $h_i \in k[V]$ , so dass

$$l(x) = \frac{g_i(x)}{h_i(x)} \quad \forall x \in U_i$$

$g_i \in k[V]$  ebenfalls homogen mit  $\deg(g_i) = \deg(h_i)$

**Beweis** Eine offene Überdeckung  $(U'_i)_{i \in J'}$  mit  $l(x) = \frac{G_i(x)}{H_i(x)} \quad \forall x \in U'_i$ ,  $G_i, H_i$  vom gleichen Grad, existiert nach Bem 10.3. Seien  $g'_i$  und  $h'_i$  deren Restklassen in  $k[V]$ . (Beachte:  $D(h'_i)$  kann größer als  $U'_i$  sein)

Nach dem Beweis von 9.9 a) wird  $U'_i$  überdeckt von offenen Mengen der Form  $D(\tilde{h}'_i)$  für homogene  $\tilde{h}'_i \in k[V]$  (da die  $D(\tilde{h}'_i)$  eine Basis der Zariski-Topologie bilden), also

$$\begin{aligned} D(\tilde{h}'_i) &\subseteq U'_i \subseteq D(h'_i) \\ \Rightarrow V(h'_i) &\subseteq V(\tilde{h}'_i), \text{ also } \tilde{h}'_i \in \sqrt{(h'_i)} \quad (HNS) \\ \Rightarrow (\tilde{h}'_i)^m &= ah'_i \text{ für ein } a \in k[V] \text{ und ein } m \geq 0 \\ \Rightarrow \text{Auf } D(\tilde{h}'_i) &\text{ ist } l = \frac{g'_i}{h'_i} = \frac{g'_i a}{h'_i a} = \frac{g'_i a}{(\tilde{h}'_i)^m} \end{aligned}$$

Da  $D(\tilde{h}'_i) = D((\tilde{h}'_i)^m)$ , ist mit  $h_i := (\tilde{h}'_i)^m$  die Behauptung erfüllt. □

**Satz 5**

Sei  $V \subseteq \mathbb{P}^n(k)$  eine projektive Varietät.

- (a) Ist  $V$  zusammenhängend, so ist  $\mathcal{O}(V) \cong k$ .
- (b) Sei  $k[V]$  der homogene Koordinatenring von  $V$ ,  $f \in k[V]$  homogen. Dann ist  $\mathcal{O}_V(D(f)) \cong k[V]_{(f)} := \{ \frac{g}{f^r} : g \in k[V] \text{ homogen, } \deg(g) = r \cdot \deg(f) \} / \sim$  ("homogene Lokalisierung" von  $k[V]$  nach den Potenzen von  $f$ ).

**Beweis** (b)  $k[V]_{(f)}$  ist  $k$ -Algebra  $\checkmark$

Sonderfälle:  $f = 0$   $\checkmark$

$\deg(f) = 0$ :  $D(f) = V \xrightarrow{a)} \mathcal{O}(D(f)) \cong k$

$k[V]_{(f)} = \{ \frac{g}{f^r} : \deg(g) = 0 \} \cong k$ .

Sei also  $\deg(f) \geq 1$ :

Sei  $\alpha : k[V]_{(f)} \rightarrow \mathcal{O}(D(f))$ ,  $\frac{g}{f^r} \mapsto \frac{G}{F^r}$  ( $G, F \in k[X_0, \dots, X_n]$  Repräsentanten) ist wohldefinierter, injektiver  $k$ -Algebra-Homomorphismus (Kern ist 0).

surjektiv: Sei  $l \in \mathcal{O}(D(f))$

Nach dem Lemma gibt es eine offene Überdeckung  $(U_i)_{i \in J}$  von  $D(f)$  und  $g_i, h_i \in k[V]$  homogen vom gleichen Grad mit

$$l(x) = \frac{g_i}{h_i}(x) \text{ für alle } x \in U_i$$

und  $U_i = D(h_i) \quad \forall i \in J$

Beh.:  $\exists g_i h_j = g_j h_i$  in  $k[V]$  für alle  $i, j$ .

Denn: Auf  $U_i \cap U_j$  gilt  $\frac{g_i}{h_i} = \frac{g_j}{h_j}$ , deshalb ist  $g_i h_j = g_j h_i$

Nach dem Lemma ist  $V \setminus (U_i \cap U_j) = V(h_i) \cup V(h_j) \Rightarrow h_i h_j (g_i h_j - g_j h_i) = 0$  auf ganz  $V$ .

Setze  $\tilde{g}_i = g_i h_i, \tilde{h}_i = h_i^2 \Rightarrow \frac{\tilde{g}_i}{\tilde{h}_i} = \frac{g_i}{h_i} = l$  auf  $U_i$  und  $\tilde{g}_i \tilde{h}_j - \tilde{g}_j \tilde{h}_i = 0$  auf  $V$

$\Rightarrow \tilde{g}_i \tilde{h}_j = \tilde{g}_j \tilde{h}_i$  in  $k[V]$ .

Nach Bem 9.9 und dem Lemma überdecken endlich viele der  $D(h_i)$  ganz  $D(f)$ , also  $\mathfrak{O}_E$

$$\begin{aligned} D(f) &= \bigcup_{i=1}^r D(h_i) \\ \Rightarrow V(f) &= \bigcap_{i=1}^r V(h_i) = V(h_1, \dots, h_r) \\ \Rightarrow f &\in I(V(h_1, \dots, h_r)) \stackrel{HNS}{=} \sqrt{(h_1, \dots, h_r)} \\ \Rightarrow f^m &= \sum_{i=1}^r a_i h_i \text{ für geeignetes } m \geq 0, a_i \in k[V] \text{ homogen.} \end{aligned}$$

Setze  $g := \sum_{i=1}^r a_i g_i$ . Dann ist  $g$  homogen und  $\deg(g) = \deg(f)$ . Für  $j = 1, \dots, r$  gilt

$$f^m g_j = \sum_{i=1}^r (a_i h_i) g_j \stackrel{Beh.}{=} \sum_{i=1}^r a_i g_i h_j = g h_j$$

$\Rightarrow$  auf  $U_j$  ist  $\frac{g}{f^m} = \frac{g_j}{h_j} = l$

(a)  $\mathfrak{O}_E \quad V$  irreduzibel (Die Konstante auf jeder Komponente muss auf den Durchschnitten gleich sein)

Sei  $V_i := V \cap U_i$  (wobei  $U_i = D(X_i) = \{(x_0 : \dots : x_n) \in \mathbb{P}^n(k) : x_i \neq 0\}$ ).  $\mathfrak{O}_E \quad V_i \neq \emptyset$

Sei  $f \in \mathcal{O}(V)$ . Dann ist  $f|_{V_i} \in \mathcal{O}(V_i) \stackrel{b)}{=} k[V]_{(X_i)} \quad (i = 0, \dots, n)$ .

(Beachte: Beim Beweis des (b)-Teils wurde der (a)-Teil nur für den Fall, dass  $\deg f = 0$  ist, verwendet. Hier ist aber  $f = X_i$ , also  $\deg f = 1$ ).

Da  $V$  irreduzibel ist, folgt mit 2.8.7 b), dass  $k[V]$  nullteilerfrei ist.

Sei also  $L := \text{Quot}(k[V])$ . Insbes.  $f_i := f|_{V_i} \in L$ .

Schreibe  $f_i = \frac{g_i}{X_i^{d_i}}$  für ein homogenes  $g_i \in k[V]$  vom Grad  $d_i$ .

$f_i = f_j$  auf  $U_i \cap U_j \Rightarrow f_i = f_j = f$  in  $L$ .

Beh. 1:  $f$  ist ganz über  $k[V]$ .

Dann ist  $f^m + \sum_{j=1}^{m-1} a_j f^j = 0$  für geeignetes  $m \geq 0, a_j \in k[V]$ .

Multipliziere mit  $X_i^{d_i m} \Rightarrow \underbrace{g_i^m}_{\deg=d_i m} + \sum_{j=1}^{m-1} a_j \underbrace{g_i^j \cdot X_i^{d_i(m-j)}}_{\deg=d_i m} = 0$

$\Rightarrow \mathfrak{O}_E \quad a_j$  homogen vom Grad 0  $\Rightarrow a_j \in k$  und damit auch  $f \in k$ .

Beweis von Beh. 1:

Genügt (Alg II):  $k[V][f]$  ist in einem endlich erzeugten  $k[V]$ -Modul enthalten.

Beh. 2:  $k[V][f] \subseteq \frac{1}{X_0^d} k[V]$ , wobei  $d = \sum_{i=0}^n d_i$

Beweis von Beh. 2: Zu zeigen:  $X_0^d \cdot f^j \in k[V]$  für jedes  $j \geq 0$ . Dies folgt aus

Beh. 3:  $k[V]_d \cdot f^j \subseteq k[V]_d$  für alle  $j \geq 0$ .

Beweis von Beh. 3:

$k[V]_d$  wird erzeugt von den Restklassen der Monome  $X_0^{j_0} \cdot \dots \cdot X_n^{j_n}$  mit  $\sum_{i=0}^n j_i = d$  (und  $j_i \geq 0$ )

$\Rightarrow \exists i$  mit  $d_i \leq j_i$

$\Rightarrow X_0^{j_0} \cdot \dots \cdot X_n^{j_n} \cdot f = X_0^{j_0} \cdot \dots \cdot X_i^{j_i - d_i} \cdot \dots \cdot X_n^{j_n} \cdot g_i \in k[V]_d$  □



## §11 Morphismen

### Definition + Bemerkung 2.11.1

Seien  $V \subseteq \mathbb{P}^n(k)$  und  $W \subseteq \mathbb{P}^m(k)$  quasiprojektive Varietäten.

- (a) Eine Abbildung  $f : V \rightarrow W$  heißt **Morphismus** wenn es zu jedem  $x \in V$  eine Umgebung  $U_x$  und homogene Polynome  $f_0^{(x)}, \dots, f_m^{(x)} \in k[X_0, \dots, X_n]$ , alle vom gleichen Grad, sodass  $f(y) = (f_0^{(x)}(y) : \dots : f_m^{(x)}(y))$  für jedes  $y \in U_x$ .
- (b) Die Morphismen  $V \rightarrow \mathbb{A}^1(k)$  entsprechen bijektiv den regulären Funktionen auf  $V$ .
- (c) Morphismen sind stetig.
- (d) Die quasiprojektiven Varietäten über  $k$  bilden mit den Morphismen aus a.) eine Kategorie  $\underline{Var}^o(k)$ .

**Beweis** (a) -

- (b) Sei  $f : V \rightarrow \mathbb{A}^1(k)$  ein Morphismus. Sei  $x \in V, U_x, f_0^{(x)}, f_1^{(x)}$  wie in a.), das heißt:  $f(y) = (f_0^{(x)} : f_1^{(x)})$  für alle  $y \in U_x$  (wobei  $\mathbb{A}^1(k)$  mit  $U_0$  identifiziert sei). Dann ist  $\frac{f_1^{(x)}(y)}{f_0^{(x)}(y)} \in k$  für alle  $y \in U_x$ .  $\Rightarrow f \in \mathcal{O}(V)$ . Die Umkehrung folgt aus Bemerkung 2.10.3.
- (c) Wie für affine Varietäten, siehe 1.5.3. □

### Beispiele

- 1.) Die Abbildung  $(x_0 : x_1 : x_2) \mapsto (x_0 : x_1)$  ist ein Morphismus  $\mathbb{P}^2(k) \setminus \{(0 : 0 : 1)\} \rightarrow \mathbb{P}^1(k)$ , der sich nicht stetig auf ganz  $\mathbb{P}^2(k)$  fortsetzen lässt.

$$\begin{aligned} \text{Für } (\lambda : \lambda : \mu), \lambda \neq 0, \text{ ist } f(\lambda : \lambda : \mu) &= (1 : 1) \\ \text{aber für } (\lambda : -\lambda : \mu), \lambda \neq 0, \text{ ist } f(\lambda : -\lambda : \mu) &= (1 : -1) \end{aligned}$$

$\{(1 : 1)\}$  und  $\{(1 : -1)\}$  sind abgeschlossen, also müssen ihre Urbilder auch abgeschlossen sein. Der Abschluss von  $\{(x_0 : x_1 : x_2) \subseteq \mathbb{P}^2(k) : x_0 = x_1\}$  ist aber in  $V(X_0 - X_1)$  enthalten, denn  $V(X_0 - X_1)$  ist irreduzibel und es gilt:

$$\begin{aligned} V(X_0 - X_1) &= \{(x_0 : x_1 : x_2) \subseteq \mathbb{P}^2(k) : x_0 = x_1\} \\ &= \{(0 : 0 : 1)\} \cup \{(\lambda : \lambda : \mu) \in \mathbb{P}^2(k) : \lambda \in k^\times, \mu \in k\} \end{aligned}$$

Das Urbild von  $\{1, 1\}$  ist  $V(X_0 - X_1) \setminus \{(0 : 0 : 1)\}$ , also nicht abgeschlossen.

- 2.) Sei  $E := V(X_0 X_2^2 - X_1^3 + X_1 X_0^2)$  (elliptische Kurve  $y^2 = x^3 - x$ ).

$$f : \begin{array}{ccc} E \setminus \{(0 : 0 : 1)\} & \longrightarrow & \mathbb{P}^1(k) \\ (x_0 : x_1 : x_2) & \longmapsto & (x_0 : x_1) \end{array}$$

lässt sich zu einem Morphismus  $E \rightarrow \mathbb{P}^1(k)$  fortsetzen.

Sei  $(x_0 : x_1 : x_2) \in E \setminus \{(0 : 0 : 1), (1 : 0 : 0)\}$  mit  $x_2^2 + x_1 x_0 \neq 0$  Dann ist auch  $x_1 \neq 0$  und somit

$$\begin{aligned} f(x_0 : x_1 : x_2) &= (x_0 : x_1) \stackrel{x_2^2 + x_1 x_0 \neq 0}{=} (x_0(x_2^2 + x_1 x_0) : x_1(x_2^2 + x_1 x_0)) \\ &= (x_1^3 : x_1(x_2^2 + x_1 x_0)) \stackrel{x_1 \neq 0}{=} (x_1^2 : x_2^2 + x_1 x_0) \end{aligned}$$

Seien

$$U = E \setminus \{(0 : 0 : 1)\}$$

$$U' = E \setminus \{(1 : 0 : 0)\}$$

$$\Rightarrow E = U \cup U'.$$

$f : U \rightarrow \mathbb{P}^1, (x_0 : x_1 : x_2) \mapsto (x_0 : x_1)$  ist ein Morphismus.

$f' : U' \rightarrow \mathbb{P}^1, (x_0 : x_1 : x_2) \mapsto (x_1^2 : x_2^2 + x_1x_0)$  ist ein Morphismus.

Auf  $U \cap U'$  gilt  $f(y) = f'(y)$ .

### Folgerung 2.11.2

Eine Abbildung  $f : V \rightarrow W$  von quasiprojektiven Varietäten ist genau dann ein Morphismus, wenn  $f$  stetig ist und für jedes offene  $U \subseteq W$  und jedes  $g \in \mathcal{O}_W(U)$  gilt:

$$g \circ f \in \mathcal{O}_V(f^{-1}(U))$$

**Beweis** Folgt aus 2.11.1 b). Alternativ: Beweis von Proposition 1.6.6 anpassen.

“ $\Rightarrow$ “  $f$  ist ein Morphismus  $\Rightarrow f$  ist stetig. Mit 2.11.1.b) folgt:  $g : U \rightarrow k$  ist ein Morphismus ( $U \subseteq W$ )  $\Rightarrow g \circ f$  ist als Komposition von Morphismen auch ein Morphismus, also folgt mit 2.11.1.b), dass  $g \circ f \in \mathcal{O}_V(f^{-1}(U))$

“ $\Leftarrow$ “ Angenommen,  $f$  ist kein Morphismus.

Sei  $f = (f_1, \dots, f_m)$ . Dann existiert ein  $f_i$ , dass sich auf  $U_x$  nicht als Polynom darstellen lässt.

Sei  $g_i$  die Projektion auf diese Komponente.

Dann ist  $g \circ f = f_i$  kein Morphismus, also  $g \circ f \notin \mathcal{O}_V(f^{-1}(U))$  □

### Folgerung 2.11.3

Sind  $V, W$  affine Varietäten, so ist eine Abbildung  $f : V \rightarrow W$  genau dann ein Morphismus von affinen Varietäten, wenn sie ein Morphismus im Sinne von Definition 2.11.1 a) ist.

Elegant: Die Homöomorphismen  $\mathbb{A}^n(k) \xrightarrow{\sim} U_0 \subseteq \mathbb{P}^n(k)$  ( $n \geq 0$ ) induzieren einen volltreuen Funktor  $\underline{Aff}(k) \rightarrow \underline{Var}^o(k)$ .

### Proposition 2.11.4

Für jedes  $n \geq 1$  ist  $\text{Aut}(\mathbb{P}^n(k)) \simeq \text{PGL}_{n+1}(k) = \text{GL}_{n+1}(k) / \{\lambda \cdot I_{n+1} : \lambda \in k^\times\}$

**Beweis** Für  $A \in \text{GL}_{n+1}(k)$  sei

$$\sigma_A : \mathbb{P}^n(k) \rightarrow \mathbb{P}^n(k) \text{ die Abbildung } \sigma_A(x_0 : \dots : x_n) = (y_0 : \dots : y_n) \text{ mit } A \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

$\sigma_A$  ist wohldefiniert, da  $A(\lambda x) = \lambda Ax$ .

$\sigma_A$  ist Morphismus, denn  $y_i$  ist lineares Polynom in den  $x_j$

$\sigma_A$  ist Automorphismus, da  $\sigma_A \circ \sigma_{A^{-1}} = \text{id}$

Es ist  $\sigma_A \circ \sigma_B = \sigma_{A \cdot B} \Rightarrow \sigma : \text{GL}_{n+1}(k) \rightarrow \text{Aut}(\mathbb{P}^n(k)), A \mapsto \sigma_A$  ist Gruppenhomomorphismus.

Noch zu zeigen:

1.  $\{\lambda \cdot I_{n+1} : \lambda \in k^\times\} = \ker \sigma$
2.  $\sigma$  ist surjektiv.

Beweis von 1:

„ $\subseteq$ “: klar.

„ $\supseteq$ “: Sei  $\sigma_A = id$ . Dann gibt es für  $i = 0, \dots, n$  ein  $\lambda_i \in k^\times$  mit

$$\begin{aligned} A \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \lambda_i \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow i \\ \Rightarrow A &= \begin{pmatrix} \lambda_0 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} \\ \Rightarrow A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \lambda_0 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} \lambda \\ \vdots \\ \lambda \end{pmatrix} \text{ für ein } \lambda \in k^\times \\ \Rightarrow \lambda_0 &= \dots = \lambda_n = \lambda \quad \square \end{aligned}$$

### Bemerkung 2.11.5

Sei  $f : \mathbb{P}^n(k) \rightarrow \mathbb{P}^m(k)$  ein Morphismus, dann gibt es homogene Polynome  $f_0, \dots, f_m \in k[X_0, \dots, X_n]$ , so dass  $f(x) = (f_0(x) : \dots : f_m(x))$  für alle  $x \in \mathbb{P}^n(k)$ .

**Beweis** Übungsblatt 8, Aufgabe 3 □

**Beweis (von Beh. 2)** Sei  $f : \mathbb{P}^n(k) \rightarrow \mathbb{P}^n(k)$  Automorphismus, dann gibt es also nach 2.11.5 homogene Polynome  $f_0, \dots, f_n \in k[X_0, \dots, X_n]$  vom gleichen Grad  $d$  mit  $f(x) = (f_0(x) : \dots : f_n(x))$ . Genauso gibt es homogene Polynome  $g_0, \dots, g_n \in k[X_0, \dots, X_n]$  vom gleichen Grad  $e$  mit  $f^{-1}(x) = (g_0(x) : \dots : g_n(x))$ .

Es ist  $(f_0(f^{-1}(x)) : \dots : f_n(f^{-1}(x))) = (x_0 : \dots : x_n)$  für jedes  $x \in \mathbb{P}^n(k)$ .

$\Rightarrow f_i \circ f^{-1} = X_i \cdot h$  für ein homogenes Polynom  $h$  vom Grad  $d \cdot e - 1$ .  $h$  kann keine Nullstelle haben, denn  $f_i \circ f^{-1}$  ist auf ganz  $\mathbb{P}^n(k)$  definiert.

$\Rightarrow h \in k^\times \Rightarrow d \cdot e = 1 \Rightarrow d = 1$  und  $e = 1$

$\Rightarrow f_i = \sum_{j=0}^n a_{ij} X_j$  für geeignete  $a_{ij} \in k$ .

$\Rightarrow f = \sigma_A$  mit  $A = (a_{ij})$ . □

### Beispiele

Seien  $n = 1, A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL_2(k), x = (x_0 : x_1) \in \mathbb{P}^1(k)$

Dann ist  $\sigma_A(x) = (ax_0 + bx_1 : cx_0 + dx_1)$

In  $U_1$  ist also

$$\sigma_A(x) = \frac{ax_0 + bx_1}{cx_0 + dx_1} = \frac{a \frac{x_0}{x_1} + b}{c \frac{x_0}{x_1} + d}$$

### Erinnerung / Definition + Bemerkung 2.11.6

Sei  $V \subset \mathbb{P}^n(k)$  quasiprojektive Varietät.

- (a) Eine **rationale Funktion** auf  $V$  ist eine Äquivalenzklasse von Paaren  $(U, f)$ , wo  $U \subset V$  offen und dicht und  $f \in \mathcal{O}_V(U)$  mit der Äquivalenzrelation  $(U, f) \sim (U', f') : \Leftrightarrow f|_{U \cap U'} = f'|_{U \cap U'}$ .

- (b) Ist  $V$  irreduzibel, so bilden die rationalen Funktionen auf  $V$  einen Körper  $k(V)$ , den **Funktionenkörper** von  $V$ .
- (c) Ist  $V$  irreduzibel, so ist  $k(V) \simeq \text{Quot}(k[U])$  für jede dichte, affine und offene Teilmenge  $U \subset V$ .
- (d) Ist  $W$  eine weitere quasi-projektive Varietät, so ist eine **rationale Abbildung**  $f : V \dashrightarrow W$  eine Äquivalenzklasse von Paaren  $(U, f_U)$ , wo  $U \subset V$  offen, dicht und  $f_U : U \rightarrow W$  Morphismus und  $(U, f_U) \sim (U', f_{U'}) : \Leftrightarrow f_U|_{U \cap U'} = f_{U'}|_{U \cap U'}$ .
- (e) Erinnerung: Eine rationale Abbildung  $f : V \dashrightarrow W$  heißt **dominant**, wenn  $f_U(U)$  dicht in  $W$  ist, für einen (jeden) Repräsentanten  $(U, f_U)$  von  $f$ .
- (f) Die Zuordnung  $V \mapsto k(V)$  ist eine kontravariante Äquivalenz von Kategorien

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{irred. quasi-proj. Varietäten} \\ + \text{ dom. rationale Abb.} \end{array} \right\} \leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{endl. erzeugte Körpererweiterungen } K/k \\ + \text{ } k\text{-Algebra-hom.} \end{array} \right\}$$

## §12 Graßmann-Varietäten

Sei  $k$  ein algebraisch abgeschlossener Körper,  $1 \leq d \leq n$  natürliche Zahlen.

### Definition + Bemerkung 2.12.1

Sei  $V$  ein  $n$ -dimensionaler  $k$ -Vektorraum.

- (a)  $G(d, n)(V) := \{U \subseteq V : U \text{ ist Untervektorraum von } V, \dim(U) = d\}$
- (b)  $G(d, n) := G(d, n)(k^n)$
- (c) Es gibt eine Bijektion  $G(d, n)(V) \rightarrow G(d, n)$ .

### Beispiele

$$d = 1: G(1, n) = \mathbb{P}^{n-1}(k)$$

### Bemerkung 2.12.2

Es gibt "natürliche" Bijektionen

$$G(d, n) \rightarrow G(n - d, n)$$

für alle  $1 \leq d \leq n - 1$ .

**Beweis** Sei  $V^*$  der Dualraum zu  $V$ . Dann ist die Bijektion gegeben durch

$$\begin{aligned} G(d, n)(V) &\rightarrow G(n - d, n)(V^*) \\ U &\mapsto \{l \in V^* : U \subseteq \text{Kern}(l)\} \\ \bigcap_{l \in U^*} \text{Kern}(l) &\hookleftarrow U^* \end{aligned} \quad \square$$

### Bemerkung + Definition 2.12.3

Sei  $\mathcal{F}_n(k) = \{((x_1 : \dots : x_n), (y_1, \dots, y_n)) \in \mathbb{P}^{n-1}(k) \times k^n :$

$$(y_1 : \dots : y_n) = (x_1 : \dots : x_n) \text{ oder } (y_1, \dots, y_n) = (0, \dots, 0)\}$$

Beh.  $\mathcal{F}_n(k)$  ist quasiprojektive Varietät, als Untervarietät von

$$\mathbb{P}^{n-1} \times \mathbb{P}^n \hookrightarrow \mathbb{P}^N$$

$$((x_1 : \dots : x_n), (y_0 : \dots : y_n)) \mapsto (x_1 y_0 : x_1 y_1 : \dots : x_n y_n)$$

mit  $N = n(n+1)$  und  $x_i y_k : x_j y_k = x_i y_l : x_j y_l$

Denn:  $\mathcal{F}_n(k) = V(x_i y_j - x_j y_i, 1 \leq i < j \leq n)$

Sei  $pr : \mathcal{F}_n(k) \rightarrow \mathbb{P}^{n-1}(k)$  die Projektion auf die erste Komponente.

$pr$  ist ein surjektiver Morphismus.

Für  $x := (x_1 : \dots : x_n) \in \mathbb{P}^{n-1}(k)$  ist

$$pr^{-1} = \{((x_1 : \dots : x_n)(y_1, \dots, y_n)) \in \mathbb{P}^{n-1} \times k^n : y_i = \lambda x_i \text{ für ein } \lambda \in k \text{ und alle } i = 1, \dots, n\}$$

$\mathcal{F}_n(k)$  heißt **tautologisches Bündel**

Für die folgende Proposition, sei zunächst folgende

Erinnerung: Ist  $e_1, \dots, e_n$  Basis von  $v$ , so ist  $e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_d}$ ,  $1 \leq i_1 < \dots < i_d \leq n$  Basis von  $\wedge^d V$ . (zwei  $e_{i_j}$  vertauschen dreht das Vorzeichen, zwei gleiche  $e_{i_j}$  gibt deshalb 0)

#### Proposition 2.12.4

$G(d, n)(V)$  "ist" quasiprojektive Varietät.

Genauer: Sei  $\wedge^d V$  die  $d$ -te äußere Potenz von  $V$  und sei

$$\psi := \psi_{d,n} : \begin{array}{ccc} G(d, n)(V) & \longrightarrow & \mathbb{P}(\wedge^d V) \\ U & \longmapsto & [u_1 \wedge \dots \wedge u_d] \end{array}$$

wobei  $u_1, \dots, u_d$  eine Basis von  $U$  ist. Dann gilt:

(a)  $\psi$  ist wohldefiniert.

(b)  $\psi$  ist injektiv

(c)  $\text{Bild}(\psi)$  ist Zariski-abgeschlossen in  $\mathbb{P}(\wedge^d V) = \mathbb{P}^{N-1}(k)$ ,  $N = \dim(\wedge^d V) = \binom{n}{d}$

**Beweis** (a) Sei  $v_1, \dots, v_n$  eine weitere Basis von  $U$ .

$$\text{Dann gibt es ein } A \in \text{GL}_d(k) \text{ mit } A \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow v_1 \wedge \dots \wedge v_d = \sum_{i=1}^d a_{1i} u_i \wedge \dots \wedge \sum_{i=1}^d a_{di} u_i =$$

$$(\sum_{\sigma=S_d} (-1)^{\text{sign}(\sigma)} a_{1\sigma(1)} \dots a_{d\sigma(d)}) \cdot u_1 \wedge \dots \wedge u_d = \det A \cdot u_1 \wedge \dots \wedge u_d$$

(b) Sei  $u_1, \dots, u_d$  eine Basis von  $U$

Zu zeigen:  $U$  ist durch  $[u_1 \wedge \dots \wedge u_d]$  eindeutig bestimmt.

Dies folgt aus der Behauptung:

$$U = \{v \in V : v \wedge (u_1 \wedge \dots \wedge u_d) = 0\}$$

Beweis der Beh.:  $v \wedge (u_1 \wedge \dots \wedge u_d) = 0$

$\Leftrightarrow v, u_1, \dots, u_d$  sind linear abhängig

$\Leftrightarrow v \in \langle u_1, \dots, u_d \rangle = U$

- (c) Wir brauchen homogene Gleichungen, die in allen Punkten in  $\text{Bild}(\psi)$  erfüllt werden.  
Beobachtung:

$$\text{Bild}(\psi) = \{[\omega] : \omega \in \bigwedge^d V \text{ und } \omega = u_1 \wedge \cdots \wedge u_d \text{ für lin. unabh. Vektoren } u_1, \dots, u_d \text{ in } V\}$$

( $\omega$  ist “total zerlegbar” )

Für  $\omega \in \bigwedge^d V$  sei

$$\varphi_\omega : \begin{array}{ccc} V & \longrightarrow & \bigwedge^{d+1} V \\ v & \longmapsto & \omega \wedge v \end{array}$$

und  $L_\omega = (l_{ij}(\omega))$  (“Plücker Koordinaten”) die Darstellungsmatrix von  $\varphi_\omega$  bezüglich der Basen  $e_1, \dots, e_n$  und  $\{e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_{d+1}} : 1 \leq i_1 < \cdots < i_{d+1} \leq n\}$ .  
 Die Abbildung

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \bigwedge^d V & \longrightarrow & \text{Hom}_k(V, \bigwedge^{d+1} V) \\ \omega & \longmapsto & \varphi_\omega \end{array}$$

ist linear. Dabei sind die  $l_{ij}(\omega)$  linear in  $\omega$ , das heißt

$$l_{ij} : \begin{array}{ccc} \bigwedge^d V & \longrightarrow & k \\ \omega & \longmapsto & l_{ij}(\omega) \end{array}$$

ist eine lineare Abbildung.

### Behauptung

$[\omega] \in \text{Bild}(\psi) \Leftrightarrow \det(l_{ij}(\omega))_{\substack{i \in \mathcal{I} \\ j \in \mathcal{J}}} = 0$  für alle  $(n-d+1)$ -Minoren  $\mathcal{I} \times \mathcal{J}$  von  $L_\omega$

Diese Determinanten sind homogene Polynome vom Grad  $n-d+1$  in den Linearformen  $l_{ij}$ . Also ist

$$\text{Bild}(\psi) = V((\det(l_{ij})_{\substack{i \in \mathcal{I} \\ j \in \mathcal{J}}}) : \mathcal{I} \times \mathcal{J} \text{ ist } (n-d+1)\text{-Minor})$$

das heißt  $\text{Bild}(\psi)$  ist abgeschlossen.

### Beweis (der Behauptung)

$$\begin{aligned} \det(l_{ij})_{\substack{i \in \mathcal{I} \\ j \in \mathcal{J}}} &= 0 \text{ für alle } (n-d+1)\text{-Minoren} \\ \Leftrightarrow \text{Rg}(\varphi_\omega) &\leq n-d \\ \Leftrightarrow \dim(\text{Kern}(\varphi_\omega)) &\geq d \end{aligned}$$

Die Behauptung lautet also:

### Behauptung (')

$\omega$  total zerlegbar  $\Leftrightarrow \dim(\text{Kern}(\varphi_\omega)) \geq d$

### Behauptung (")

- a)  $\dim(\text{Kern}(\varphi_\omega)) \leq d$
- b)  $\dim(\text{Kern}(\varphi_\omega)) = d \Leftrightarrow \omega$  total zerlegbar
- c) Für  $v \neq 0$ :  $v \in \text{Kern}(\varphi_\omega) \Leftrightarrow \exists \omega' \in \bigwedge^{d-1} V$  und  $\omega = v \wedge \omega'$

**Beweis** (c)  $\Leftrightarrow v = e_n$

$$\begin{aligned}\omega &= \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_d \leq n} \lambda_{\underline{i}} \cdot e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_d} \\ \Rightarrow 0 = \omega \wedge v &= \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_d \leq n} \lambda_{\underline{i}} \cdot e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_d} \wedge e_n \\ \Leftrightarrow \lambda_{\underline{i}} &= 0 \text{ für alle } \underline{i} = (i_1, \dots, i_d) \text{ mit } i_d \neq n \\ \Rightarrow \omega &= \left( \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_{d-1} \leq n} \lambda_{i_1, \dots, i_{d-1}, n} \cdot e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_{d-1}} \right) \wedge e_n =: \omega' \wedge e_n\end{aligned}$$

“ $\Leftarrow$ ”  $\checkmark$

- (a) Aus (c) folgt mit Induktion über  $m$ : Sind  $v_1, \dots, v_m \in \text{Kern}(\varphi_\omega)$  linear unabhängig, so gibt es  $\omega \in \wedge^{d-m} V$  mit  $\omega = \omega_m \wedge v_1 \wedge \dots \wedge v_m \Rightarrow m \leq d$
- (b) “ $\Rightarrow$ ” Sei  $v_1, \dots, v_m$  eine Basis von  $\text{Kern}(\varphi_\omega)$   
 $\xRightarrow{\text{Bew.a)}} \omega = \lambda \cdot v_1 \wedge \dots \wedge v_d$  für ein  $\lambda \in k^\times$   
 “ $\Leftarrow$ ” Sei  $\omega = u_1 \wedge \dots \wedge u_d$

$$\begin{aligned}v \in \text{Kern}(\varphi_\omega) &\Leftrightarrow v, u_1, \dots, u_d \text{ linear abhängig} \\ &\Leftrightarrow v \in \langle u_1, \dots, u_d \rangle \\ &\Rightarrow \text{Kern}(\varphi_\omega) = \langle u_1, \dots, u_d \rangle \\ &\text{mit } \dim \text{Kern}(\varphi_\omega) = d\end{aligned}$$

□

## §13 Varietäten

Seien  $V_1, V_2$  quasiprojektive Varietäten,  $U_i \subseteq V_i$  offen ( $i = 1, 2$ ),  $\varphi : U_1 \rightarrow U_2$  ein Isomorphismus.

Sei  $V := (V_1 \dot{\cup} V_2) / \sim$ , wobei für  $x \in V_1$  und  $y \in V_2$  gelte

$$x \sim y \Leftrightarrow x \in U_1 \text{ und } y = \varphi(x) \in U_2$$

$V$  ist ein topologischer Raum mit der Quotiententopologie. Für  $U \subseteq V$  offen sei

$$\mathcal{O}_V(U) := \{f : U \rightarrow k \mid \forall x \in U \exists U_x \text{ offen mit } U_x \subseteq V_1 \text{ oder } U_x \subseteq V_2 \text{ und } f|_{U_x} \text{ ist regulär}\}$$

d.h.  $f|_{U_x} \in \mathcal{O}_{V_1}(U_x)$ , bzw.  $\mathcal{O}_{V_2}(U_x)$ .

Ist  $x \in U_1$  (oder  $x \in U_2$ ), so ist  $\Leftrightarrow U_x \subseteq U_1$  und  $\varphi(U_x) \subseteq U_2$  ebenfalls offene Umgebung von  $x$  in  $V$ .

dann ist  $f \in \mathcal{O}_{V_2}(\varphi(U_x)) \Leftrightarrow f \circ \varphi \in \mathcal{O}_{V_1}(U_x)$

### Bemerkung 2.13.1

$\mathcal{O}_V$  ist Garbe von  $k$ -Algebren auf  $V$ .

### Definition 2.13.2

$V$  wie oben heißt die aus  $V_1$  und  $V_2$  durch Verkleben längs  $U_1$  und  $U_2$  via  $\varphi$  entstandene **Prävarietät**. (Begriff nicht so in der Literatur)

### Beispiele 2.13.3

(a)  $V_1 = V_2 = \mathbb{A}^1(k)$ ,  $U_1 = U_2 = \mathbb{A}^1 \setminus \{0\}$

$$\varphi : U_1 \rightarrow U_2, x \mapsto \frac{1}{x}$$

Dann ist die Verklebung  $V$  von  $V_1$  und  $V_2$  längs  $\varphi$  isomorph zu  $\mathbb{P}^1(k)$ .

Dabei heißt  $\Psi : V \rightarrow \mathbb{P}^1(k)$  **Isomorphismus**, wenn  $\Psi$  ein Homöomorphismus ist und für jedes offene  $U \subset \mathbb{P}^1(k)$  gilt:

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1(k)} \rightarrow \mathcal{O}_V(\Psi^{-1}(U)), \quad f \mapsto f \circ \Psi$$

ist ein Isomorphismus von  $k$ -Algebren.  $\Psi : V \rightarrow \mathbb{P}^1(k)$  sei wie folgt definiert:

$$\Psi|_{V_1} = \rho_0 : \mathbb{A}^1(k) \rightarrow \mathbb{P}^1(k), \quad x \mapsto (1 : x)$$

$$\Psi|_{V_2} = \rho_1 : \mathbb{A}^1(k) \rightarrow \mathbb{P}^1(k), \quad y \mapsto (y : 1)$$

für  $x \in U_1$  ist  $(1 : x) = (\varphi(x) : 1) = (\frac{1}{x} : 1)$

Übungsaufgabe: Verklebe  $n + 1$  Kopien von  $\mathbb{A}^n(k)$ , so dass  $\mathbb{P}^n(k)$  entsteht.

(b)  $V_1 = V_2 = \mathbb{A}^1(k)$ ,  $U_1 = U_2 = \mathbb{A}^1(k) \setminus \{0\}$

$$\varphi : U_1 \rightarrow U_2, \quad \varphi = \text{id}, \quad V \text{ Verklebung längs } \varphi.$$

Für jedes offene  $U \subseteq V$  mit  $0_1 \in U$  und  $0_2 \in U$  und jedes  $f \in \mathcal{O}_V(U)$  ist  $f(0_1) = f(0_2)$ .

So ein  $V$  heißt **separiert**.

### Bemerkung 2.13.4

Ein topologischer Raum ist genau dann hausdorffsch, wenn die Diagonale

$$\Delta := \{(x, x) \mid x \in X\} \subset X \times X$$

abgeschlossen in  $X \times X$  ist.

**Beweis** “ $\Rightarrow$ “ Sei  $X$  hausdorffsch,  $(x, y) \in (X \times X) \setminus \Delta$

$\Rightarrow x \neq y$ . Dann gibt es ein  $U \subset X$  offen,  $V \subset X$  offen mit  $U \cap V = \emptyset$

$\Rightarrow U \times V$  ist offene Umgebung von  $(x, y)$  mit  $(U \times V) \cap \Delta = \emptyset$

“ $\Leftarrow$ “ Sei  $x \neq y \in X$ ,  $W$  eine offene Umgebung von  $(x, y)$  in  $X \times X$  mit  $W \cap \Delta = \emptyset$

$\Rightarrow W = U \times V$ , da die  $U \times V$  eine Basis der Topologie auf  $X \times X$  bilden  $\Rightarrow U \cap V = \emptyset$  □

### Definition 2.13.5

Eine Prävarietät  $X$  heißt **separiert**, wenn  $\Delta \subset X \times X$  abgeschlossen ist.

### Beispiele 2.13.6

Sei  $V$  wie im letzten Beispiel. Dann ist  $\Delta \subset V \times V$  nicht abgeschlossen:

In  $V \times V$  gibt es über  $(0, 0)$  die folgenden Punkte:

$$(0_1, 0_1), \quad (0_1, 0_2) \quad (0_2, 0_1) \quad (0_2, 0_2).$$

Davon liegen  $(0_1, 0_1)$  und  $(0_2, 0_2)$  in  $\Delta$ , die beiden anderen nicht. Diese liegen aber in  $\overline{\Delta}$ .

### Definition 2.13.7

- (a) Eine **Prävarietät** über  $k$  ist ein topologischer Raum  $X$ , zusammen mit einer Garbe  $\mathcal{O}_X$  von  $k$ -Algebren, der eine endliche offene Überdeckung  $X = U_1 \cup \dots \cup U_n$  besitzt, so dass  $(U_i, \mathcal{O}_X|_{U_i})$  isomorph zu einer affinen Varietät ist.



(b) Eine separierte Prävarietät heißt ***Varietät***.

**Definition 2.13.8**

Für eine Prävarietät  $X$  mit affiner Überdeckung  $(U_i)_{i=1,\dots,n}$  sei  $X \times X$  die Prävarietät, die durch Verkleben der  $U_i \times U_j$ ,  $i, j = 1, \dots, n$  hervorgeht.

Dabei ist  $U_i \times U_j$  die affine Varietät, die durch  $\mathcal{O}_X(U_i) \otimes_k \mathcal{O}_X(U_j)$  bestimmt ist. Produkt ist folgendes:

