

Kapitel III

Lokale Eigenschaften von Varietäten

§ 12 Lokale Ringe

Definition + Bemerkung 12.1 Sei \mathbb{K} Körper, V eine quasiprojektive Varietät über \mathbb{K} , $x \in V$.

(i) Der *lokale Ring von V in x* ist definiert als

$$\mathcal{O}_{V,x} := \{(U, f)_{\sim} \mid U \subseteq V \text{ offen}, x \in U, f \in \mathcal{O}_V(U)\}$$

wobei

$$(U_1, f_1) \sim (U_2, f_2) \iff \text{Es existiert } U \subseteq U_1 \cap U_2 \text{ offen mit } f_1|_U = f_2|_U$$

(ii) Die Elemente von $\mathcal{O}_{V,x}$ heißen *Keime von regulären Funktionen*. Notation: $(U, f)_{\sim} =: f_x$.

(iii) $\mathcal{O}_{V,x}$ ist \mathbb{K} -Algebra und die Abbildung

$$\phi_x : \mathcal{O}_{V,x} \longrightarrow \mathbb{K}, \quad (U, f)_{\sim} \mapsto f(x)$$

ist surjektiver Homomorphismus von \mathbb{K} -Algebren.

(iv) $\mathcal{O}_{V,x}$ ist lokaler Ring mit maximalem Ideal

$$\mathfrak{m}_x = \{(U, f)_{\sim} \mid f(x) = 0\} = \ker \phi_x$$

Beweis. (iii) Klar.

(iv) Nach dem Homomorphiesatz und (iii) gilt

$$\mathcal{O}_{V,x} / \mathfrak{m}_x \cong \mathbb{K}$$

also ist \mathfrak{m}_x maximales Ideal. Zeige nun, dass \mathfrak{m}_x das einzige ist. Sei hierfür $f \in \mathcal{O}_V(U)$ für ein $U \subseteq V$ mit $x \in U$ und es gelte $f(x) \neq 0$. Zeige: f_x ist Einheit in $\mathcal{O}_{V,x}$.

Es gilt $x \in D(f) \subseteq V$ offen, d.h. $(U, f) \sim (D(f), f)$. Damit haben wir

$$\frac{1}{f} \in \mathcal{O}_V(D(f))$$

also schließlich

$$\left(D(f), \frac{1}{f}\right) \cdot (D(f), f) = 1_x,$$

was behauptet wurde. □

Bemerkung 12.2 Für jedes offene $U \subseteq V$ mit $x \in U$ ist

$$\psi_x^U : \mathcal{O}_V(U) \longrightarrow \mathcal{O}_{V,x}, \quad f \mapsto f_x = (U, f)_\sim$$

ein Homomorphismus von \mathbb{K} -Algebren.

Dabei sind die ψ_x^U verträglich mit Restriktionsabbildungen und es gilt

$$\mathcal{O}_{V,x} = \varinjlim_{U \subseteq V, x \in U} \mathcal{O}_V(U)$$

Proposition 12.3 Sei V quasiprojektive Varietät über \mathbb{K} , $V_0 \subseteq V$ affin, offen und $x \in V_0$. Dann ist

$$\mathcal{O}_{V,x} \cong \mathbb{K}[V_0]_{\mathfrak{m}_x^{V_0}},$$

wobei

$$\mathfrak{m}_x^{V_0} = \{f \in \mathbb{K}[V_0] \mid f(x) = 0\}$$

das zu x zugehörige maximale Ideal des affinen Koordinatenrings $\mathbb{K}[V_0]$ ist.

Beweis. Sei

$$\alpha : \mathbb{K}[V_0]_{\mathfrak{m}_x^{V_0}} \longrightarrow \mathcal{O}_{V,x}, \quad \frac{f}{g} \mapsto \left(\frac{f}{g}\right)_x$$

wobei $f, g \in \mathbb{K}[V_0]$ und $g \notin \mathfrak{m}_x^{V_0}$, d.h. $g(x) \neq 0$. Dann ist α wohldefinierter Homomorphismus. Zeige, dass dieser die gewünschte Isomorphie der \mathbb{K} -Algebren liefert.

injektiv. Sei

$$\frac{f}{g} \in \ker \alpha, \quad \text{also } \alpha\left(\frac{f}{g}\right) = 0.$$

Dann gibt es eine Umgebung U von x , $U \subseteq D(g)$ mit $f(y) = 0$ für alle $y \in U$.

Sei $W = V_0 \setminus U$. Dann ist W abgeschlossen in V_0 und es gilt $x \notin W$.

Damit existiert $h \in I(W)$ mit $h(x) \neq 0$, also $h \notin \mathfrak{m}_x^{V_0}$ und $(h \circ f)(y) = 0$ für alle $y \in V_0$. Dann ist $h \circ f = 0$ in $\mathbb{K}[V_0]$, also

$$\frac{f}{g} = 0 \text{ in } \mathbb{K}[V_0]_{\mathfrak{m}_x^{V_0}}$$

surjektiv. Sei nun $(U, f)_\sim \in \mathcal{O}_{V,x}$, ohne Einschränkung sei $U \subseteq V_0$ und $U = D(h)$ für ein $h \in \mathbb{K}[V_0]$ mit $h(x) \neq 0$. Dann gilt

$$f \in \mathcal{O}_V(U) = \mathcal{O}_{V_0}(U) = \mathcal{O}_{V_0}(D(h)) = \mathbb{K}[V_0]_h$$

d.h. es ist

$$f = \frac{g}{h^k}, \quad k \geq 0, g \in \mathbb{K}[V_0] \implies \frac{g}{h^k} \in \mathbb{K}[V_0]_{\mathfrak{m}_x^{V_0}}$$

Damit gilt

$$(U, f)_\sim = \left(\frac{g}{h^k} \right)_x = \alpha \left(\frac{g}{h^k} \right),$$

wie behauptet. □

Bemerkung 12.4 Sei $\phi : V \longrightarrow W$ Morphismus quasiprojektiver Varietäten. Für jedes $x \in V$ induziert ϕ einen Homomorphismus von \mathbb{K} -Algebren

$$\phi_x^\# : \mathcal{O}_{W, \phi(x)} \longrightarrow \mathcal{O}_{V, x}$$

Weiter gilt

$$\phi_x^\#(\mathfrak{m}_{\phi(x)}) \subseteq \mathfrak{m}_x$$

Beweis. Ohne Einschränkung seien V, W affin, denn x und $\phi(x)$ sind in affine Teilmengen enthalten. ϕ induziert also

$$\phi^\# : \mathbb{K}[W] \longrightarrow \mathbb{K}[V] \hookrightarrow \mathbb{K}[V]_{\mathfrak{m}_x^V}, \quad f \mapsto f \circ \phi = \phi^\#(f)$$

Dabei ist

$$f \in \mathfrak{m}_{\phi(x)}^W \iff f(\phi(x)) = 0 \iff (f \circ \phi)(x) = 0 \iff f \circ \phi = \phi^\#(f) \in \mathfrak{m}_x^V$$

und es gilt also

$$\phi^\#(\mathbb{K}[W] \setminus \mathfrak{m}_{\phi(x)}^W) \subseteq (\mathbb{K}[V]_{\mathfrak{m}_x^V})^\times.$$

Mit der universellen Eigenschaft der Lokalisierung lässt sich $\phi^\#$ also fortsetzen zu

$$\phi_x^\# : \mathcal{O}_{W, \phi(x)} = \mathbb{K}[W]_{\mathfrak{m}_{\phi(x)}^W} \longrightarrow \mathbb{K}[V]_{\mathfrak{m}_x^V} = \mathcal{O}_{V, x}$$

Weiter gilt

$$\phi_x^\#(\mathfrak{m}_{\phi(x)}) = \phi_x^\#(\mathfrak{m}_{\phi(x)}^W \cdot \mathbb{K}[W]_{\mathfrak{m}_{\phi(x)}^W}) \subseteq \mathfrak{m}_x^V \cdot \mathbb{K}[V]_{\mathfrak{m}_x^V} = \mathfrak{m}_x,$$

was zu zeigen war. □

Proposition 12.5 Seien V, W quasiprojektive Varietäten $x \in V, y \in W$. Gilt

$$\mathcal{O}_{V, x} \cong \mathcal{O}_{W, y}$$

als \mathbb{K} -Algebren, so gibt es offene Umgebungen $U \subseteq V$ von x und $U' \subseteq W$ von y und einen Isomorphismus

$$f : U \longrightarrow U', \quad x \mapsto y$$

Beweis. Ohne Einschränkung seien V, W affin. Sei

$$\phi : \mathcal{O}_{V, x} = \mathbb{K}[V]_{\mathfrak{m}_x^V} \longrightarrow \mathbb{K}[W]_{\mathfrak{m}_y^W} = \mathcal{O}_{W, y}$$

ein Isomorphismus. Seien f_1, \dots, f_r die Erzeuger von $\mathbb{K}[V]$ als \mathbb{K} -Algebra. Für die Keime $(f_i)_x$ gilt also

$$\phi((f_i)_x) = \left(\frac{g_i}{h_i} \right)_y, \quad g_i, h_i \in \mathbb{K}[W], h_i(y) \neq 0$$

Sei $U_2 \subseteq W$ offen, affin mit $y \in U_2$ und es gelte

$$\frac{g_i}{h_i} \in \mathcal{O}_W(U_2) \iff \frac{g_i}{h_i} \text{ regulär für alle } i \in \{1, \dots, r\}$$

Beh. (1) Falls x auf jeder irreduziblen Komponente von V liegt, ist ψ_x^V injektiv.

Dann folgt daraus:

$$\phi \circ \psi_x^V : \mathbb{K}[V] \longrightarrow \mathbb{K}[W]$$

ist injektiv. Damit induziert $\phi \circ \psi_x^V$ einen dominanten Morphismus $g : W \longrightarrow V$. Selbiges Vorgehen mit ϕ^{-1} liefert einen dominanten Morphismus $f : V \longrightarrow W$ mit $g \circ f = \text{id}_V$ und $f \circ g = \text{id}_W$.

Bew. (1) Es gilt:

$$\psi_x^V : \mathbb{K}[V] \longrightarrow \mathbb{K}[V]_{\mathfrak{m}_x^V}$$

ist injektiv genau dann, wenn $\mathbb{K}[V] \setminus \mathfrak{m}_x^V$ keine Nullteiler enthält. Sei also $h \in \mathbb{K}[V] \setminus \mathfrak{m}_x^V$ Nullteiler in $\mathbb{K}[V]$, d.h. es gibt $g \in \mathbb{K}[V] \setminus \{0\}$ mit $h \cdot g = 0$, also $h(x) \neq 0$.

Sei Z eine irreduzible Komponente mit $g|_Z \neq 0$, d.h. $V(g) \cap Z \neq Z$. Da $x \in Z$, gilt auch $V(h) \cap Z \neq Z$. Damit ist $(V(h) \cap V(g)) \cap Z \neq Z$, da Z irreduzibel ist und $V(h), V(g)$ echt abgeschlossen sind. Damit folgt $g \cdot h \neq 0$, ein Widerspruch zur Annahme. \square

§ 13 Dimension

Definition 13.1 Für einen topologischen Raum X heißt

$$\dim(X) := \sup\{n \in \mathbb{N}_0 \mid \text{es existiert eine Kette } V_0 \subsetneq V_1 \subsetneq \dots \subsetneq V_n, V_i \text{ abgeschlossen und irreduzibel}\}$$

die *Krull-Dimension* von X .

Beispiel 13.2 (i) Für einen Hausdorffraum H gilt $\dim(H) = 0$.

(ii) Es gilt $\dim(\mathbb{A}^1(\mathbb{K})) = 1$, falls \mathbb{K} unendlich ist.

Erinnerung 13.3 Sei R ein Ring, $\mathfrak{p} \trianglelefteq R$ ein Primideal.

(i) Die *Höhe* von \mathfrak{p} in R ist

$$\text{ht}(\mathfrak{p}) := \sup\{n \in \mathbb{N}_0 \mid \text{es existiert eine Kette von Primidealen } \mathfrak{p}_0 \subsetneq \mathfrak{p}_1 \subsetneq \dots \subsetneq \mathfrak{p}_n = \mathfrak{p}\}$$

(ii) Die *Krull-Dimension* von R ist

$$\dim(R) := \sup\{\text{ht}(\mathfrak{p}) \mid \mathfrak{p} \trianglelefteq R \text{ prim}\}$$

Proposition 13.4 *Ist \mathbb{K} algebraisch abgeschlossen, $V \subseteq \mathbb{A}^n(\mathbb{K})$ affine Varietät, so gilt*

$$\dim(V) = \dim(\mathbb{K}[V])$$

Beweis. Irreduzible Teilmengen von V entsprechen gerade bijektiv den Primaidealen in $\mathbb{K}[V]$. □

Erinnerung + Bemerkung 13.5 Für eine Körpererweiterung \mathbb{L}/\mathbb{K} ist $\text{trdeg}_{\mathbb{K}}\mathbb{L}$ die Maximalzahl an algebraisch unabhängigen Elementen in \mathbb{L} über \mathbb{K} . Beispielsweise ist $\text{trdeg}_{\mathbb{K}}\mathbb{K}(X) = 1$. Wir halten fest:

- (i) Es gilt $\text{trdeg}_{\mathbb{K}}\mathbb{K}(X_1, \dots, X_n) = n$.
- (ii) Es gilt $\text{trdeg}_{\mathbb{K}}\mathbb{L} = 0$, falls \mathbb{L}/\mathbb{K} algebraisch ist.
- (iii) *Noether-Normalisierung light:* Sei A endlich erzeugte \mathbb{K} -Algebra. Dann ist A ganze Ringerweiterung eines Polynomrings $\mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$.
- (iv) Ist S/R ganze Ringerweiterung, so gilt $\dim R = \dim S$.
- (v) Es gilt $\dim \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n] = n$.
- (vi) *Noether-Normalisierung deluxe:* Sei $I \trianglelefteq A$ ein Ideal. Dann gibt es einen Polynomring, sodass $A/\mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$ ganze Ringerweiterung ist und

$$I \cap \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n] = \langle X_{\delta+1}, \dots, X_n \rangle$$

für ein $0 \leq \delta \leq n$.

Beispiel 13.6 Es sei $A := \mathbb{K}[X, Y]$ und I das vom Polynom $f := Y^2 - X^3 + X \in A$ erzeugte Ideal. Es wird $f = Y^2 - X^3 + X$ als Variable in einem neuen Polynomring betrachtet, setze also $B := \mathbb{K}[X, f] \subseteq A$. Dann wird A als Ringerweiterung von B offenbar durch das Element Y erzeugt. Weiter ist Y ganz über B , denn für das normierte Polynom $g := Z^2 - X^3 + X - f \in B[Z]$ gilt

$$g(Y) = Y^2 - X^3 + X - f = f - f = 0$$

und damit ist A/B ganze Ringerweiterung. Weiter gilt $I \cap B = \langle f \rangle$.

Beachte: f ist nun eine Variable, das heißt, wir haben für $\delta = 1$ ein Beispiel für eine Noether-Normalisierung gefunden.

Lemma 13.7 *Für eine irreduzible Varietät V gilt*

$$\dim V = \text{trdeg}_{\mathbb{K}}\mathbb{K}(V)$$

Beweis. Nach 13.3 gilt $\dim V = \dim \mathbb{K}[V]$. Mit Bemerkung 13.4 (iii) folgt, dass $\mathbb{K}[V]$ als endlich erzeugte \mathbb{K} -Algebra eine ganze Ringerweiterung von $\mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$ für ein $n \in \mathbb{N}$ ist. Mit (iv) gilt

$$\dim \mathbb{K}[V] = \dim \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n] = n.$$

Damit ist $\mathbb{K}(V)/\mathbb{K} = \text{Quot}(\mathbb{K}[V])/\mathbb{K}$ algebraische Erweiterung von $\mathbb{K}(X_1, \dots, X_n)$ und es folgt

$$\text{trdeg}_{\mathbb{K}}\mathbb{K}(V) = \text{trdeg}_{\mathbb{K}}\mathbb{K}(X_1, \dots, X_n) = n,$$

die Behauptung. □

Proposition 13.8 *Sei $V \subseteq \mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ quasiprojektive Varietät.*

(i) *Dann gilt für jede affine Varietät $V_0 \subseteq V$, die in V offen und dicht ist:*

$$\dim(V) = \dim(V_0)$$

(ii) *Seien Z_1, \dots, Z_r die irreduziblen Komponenten von V . Dann ist*

$$\dim(V) = \max_{i \in \{1, \dots, r\}} \dim(Z_i)$$

Beweis. (i) Es gilt:

" \geq " Diese Aussage gilt allgemein für einen topologischen Raum und einer Teilmenge $Y \subseteq X$, denn:

Ist $\emptyset \subsetneq Y_0 \subsetneq \dots \subsetneq Y_d$ eine Kette von abgeschlossenen, irreduziblen Teilmengen von Y , so gilt für die Abschlüsse $X_i := \overline{Y_i}$: X_i ist irreduzibel in Y und $X_i \cap Y = Y_i$ für alle $i \in \{1, \dots, d\}$ und damit $X_{i+1} \neq X_i$. Da die Y_i abgeschlossen sind, folgt die Inklusion.

" \leq " Wegen (ii) dürfen wir V und damit auch V_0 irreduzibel voraussetzen. Sei

$$\emptyset \neq Z_0 \subsetneq Z_1 \subsetneq \dots \subsetneq Z_d$$

eine Kette von abgeschlossenen, irreduziblen Teilmengen von V und $d = \dim V$. Dann ist Z_0 offenbar ein Punkt (andernfalls verlängern wir die Kette).

Sei nun $V_0 \subseteq V$ eine affine, offene, dichte Untervarietät mit $Z_0 \in V_0$. Dann ist $X_i = Z_i \cap V_0$ nichtleer und abgeschlossen in V_0 und damit $\overline{X_i} = Z_i$, da sonst

$$Z_i = \overline{X_i} \cup (Z_i \setminus V_0)$$

eine unerlaubte Zerlegung von Z_i wäre. Damit ist X_i irreduzibel mit $X_{i+1} \neq X_i$, es folgt also die Behauptung.

(ii) Es gilt allgemeiner: Ist X topologischer Raum mit

$$X = \bigcup_{i=1}^r Z_i, \quad Z_i \subseteq X \text{ abgeschlossen,}$$

so gilt

$$\dim X = \max_{i \in \{1, \dots, r\}} \dim Z_i,$$

denn:

" \geq " Klar.

" \leq " Sei $\emptyset \subsetneq X_0 \subsetneq X_1 \subsetneq \dots \subsetneq X_d$ eine Kette von abgeschlossenen, irreduziblen Teilmengen von X . Dann ist

$$X_d = \bigcup_{i=1}^r X_d \cap Z_i$$

und da $X_d \cap Z_i$ abgeschlossen in X_d ist und X_d irreduzibel ist, existiert ein $i \in \{1, \dots, r\}$ mit $X_d \subseteq Z_i$. Damit ist bereits die gesamte Kette in Z_i enthalten und es folgt $d \leq \dim Z_i$. \square

Proposition 13.9 *Ist A endlich erzeugbare, nullteilerfreie \mathbb{K} -Algebra, so haben alle maximalen Primidealketten in A dieselbe Länge. Dabei heißt eine Kette $\langle 0 \rangle \subsetneq \mathfrak{p}_0 \subsetneq \dots \subsetneq \mathfrak{p}_d$ maximal, falls es kein Primideal $\mathfrak{p} \trianglelefteq A$ gibt mit $\mathfrak{p}_{i-1} \subsetneq \mathfrak{p} \subsetneq \mathfrak{p}_i$ für alle $i \in \{1, \dots, d\}$*

Definiton + Proposition 13.10 Sei $V \subseteq \mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ quasiprojektive Varietät, $x \in V$.

- (i) $\dim_x V := \dim \mathcal{O}_{V,x}$ heißt *lokale Dimension* von V in x .
- (ii) Es gilt

$$\dim_x V = \text{ht}(\mathfrak{m}_x) = \text{ht}(\mathfrak{m}_x^{V_0})$$

für jede offene, affine Umgebung $V_0 \subseteq V$ von x .

- (iii) Es gilt $\dim_x V = \dim V$, falls V irreduzibel ist.
- (iv) Allgemeiner gilt

$$\dim_x V = \max\{\dim Z \mid Z \subseteq V \text{ ist irreduzible Komponente von } V \text{ mit } x \in Z\}$$

Beweis. (ii) Es gilt $\mathcal{O}_{V,x} = \mathbb{K}[V_0]_{\mathfrak{m}_x^{V_0}}$ und damit $\dim \mathcal{O}_{V,x} = \text{ht}(\mathfrak{m}_x^{V_0})$.

- (iii) Ohne Einschränkung sei V affin (vgl. 13.4). Dann gilt nach (ii)

$$\dim_x V = \text{ht}(\mathfrak{m}_x^V)$$

Wegen 13.7 haben alle maximalen Ideale in $\mathbb{K}[V]$ dieselbe Höhe. Damit folgt bereits

$$\dim V = \dim \mathbb{K}[V] = \text{ht}(\mathfrak{m}_x^V) = \dim_x V.$$

- (iv) Ohne Einschränkung sei V wieder affin. Es gilt

$$\dim_x V = \dim \mathcal{O}_{V,x} = \text{ht}(\mathfrak{m}_x^V) = \sup\{k \in \mathbb{N} \mid \text{es gibt eine Primidealkette } \langle 0 \rangle \neq \mathfrak{p}_0 \subsetneq \dots \subsetneq \mathfrak{p}_k = \mathfrak{m}_x^V\}$$

Damit entspricht \mathfrak{p}_0 einer irreduziblen Komponente Z mit $x \in Z$. Mit Proposition 13.7 hat diese Kette die Länge $\dim Z$ und damit folgt die Behauptung. \square

Korollar 13.11 *Ist \mathbb{K} algebraisch abgeschlossen, so gilt für jede irreduzible Varietät $V \subseteq \mathbb{A}^n(\mathbb{K})$:*

$$\dim V + \text{ht}(I(V)) = n.$$

Beweis. Sei $0 \subsetneq \mathfrak{p}_1 \subsetneq \dots \subsetneq \mathfrak{p}_d$ eine maximale Primidealkette in $\mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$, die $I(V)$ enthält. Dann gilt $I(V) = \mathfrak{p}_i$ für ein $i \in \{1, \dots, d\}$. Es folgt $i = \text{ht}(I(V))$ und wegen 13.9 auch $d = n$. Außerdem ist

$$0 = \mathfrak{p}_i / I(V) \subsetneq \dots \subsetneq \mathfrak{p}_n / I(V)$$

eine maximale Primidealkette für $\mathbb{K}[X_1, \dots, X_n] / I(V) = \mathbb{K}[V]$, und erneut mit 13.9 folgt

$$n - i = \dim \mathbb{K}[V] = \dim V,$$

was zu zeigen war. \square

Korollar 13.12 Sei \mathbb{K} algebraisch abgeschlossen, $V \subseteq \mathbb{A}^n(\mathbb{K})$ eine Hyperfläche, d.h. $V = V(f)$ für ein $f \in \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$ mit $\deg f \geq 1$. Dann ist

$$\dim V = n - 1.$$

Beweis. Aus 13.9 folgt

$$\dim V = n - \text{ht}(\langle f \rangle).$$

Zeige also: $\text{ht}(\langle f \rangle) = 1$.

" \geq " Klar.

" \leq " Sei $\mathfrak{p} \triangleleft \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$ ein Primideal mit $\langle 0 \rangle \subsetneq \mathfrak{p} \subseteq \langle f \rangle$. Sei $h \in \mathfrak{p} \setminus \{0\}$ mit minimalem Grad. Da $\mathfrak{p} \subseteq \langle f \rangle$, gilt $h = f \cdot g$ für ein $g \in \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$. Wir erhalten

$$\deg h = \deg f + \deg g > \deg g$$

und damit ist $g \notin \mathfrak{p}$. Da \mathfrak{p} prim ist, folgt $f \in \mathfrak{p}$ und damit $\mathfrak{p} = \langle f \rangle$. □

Satz 13.13 ("Going down", Cohen-Seidenberg) Sei A endlich erzeugte, nullteilerfreie \mathbb{K} -Algebra, A/B mit $B := \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$ via Noether-Normalisierung eine ganze Ringerweiterung. Sei weiter $\mathfrak{P}_1 \subset A$ ein Primideal, $\mathfrak{p}_0 \subset B$ mit $\mathfrak{p}_0 \subset \mathfrak{p}_1 := \mathfrak{P}_1 \cap B$. Dann gibt es ein Primideal $\mathfrak{P}_0 \subset A$ mit $\mathfrak{P}_0 \subset \mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_0 \cap B = \mathfrak{p}_0$.

Beweis. Nach dem "Going up"-Theorem in der Algebra (Prop. 13.7) gibt es ein Primideal $\mathfrak{P}'_0 \subset A$ mit $\mathfrak{P}'_0 \cap B = \mathfrak{p}_0$ und ein Primideal $\mathfrak{P}'_1 \subset A$ mit $\mathfrak{P}'_0 \subset \mathfrak{P}'_1$ und $\mathfrak{P}'_1 \cap B = \mathfrak{p}_1$. Setze

$$\mathbb{M} := \text{Quot}(B), \quad \mathbb{L} := \text{Quot}(A).$$

Dann ist \mathbb{L}/\mathbb{M} eine endliche, algebraische Körpererweiterung.

Fall (a) Es ist \mathbb{L}/\mathbb{M} Galoiserweiterung. Dann ist

$$\text{Gal}(\mathbb{L}/\mathbb{M}) = \{\sigma_1 = \text{id}, \sigma_2, \dots, \sigma_n\}, \quad n := [\mathbb{L} : \mathbb{M}].$$

Sei nun $\mathfrak{P}_i := \sigma_i(\mathfrak{P}_1)$ für $i \in \{1, \dots, n\}$. Dann ist \mathfrak{P}_i ein Primideal in A für ein $i \in \{1, \dots, n\}$ (nichttrivial! Warum gilt $\sigma_i(A) \subseteq A$?).

Angenommen, $\mathfrak{P}'_i \neq \mathfrak{P}_i$ für alle $i \in \{1, \dots, n\}$. Dann ist auch $\mathfrak{P}'_1 \not\subseteq \mathfrak{P}_i$, da

$$\mathfrak{P}'_i \cap B = \mathfrak{P}_1 \cap B = \mathfrak{p} = \mathfrak{P}_i \cap B.$$

Dann folgt

$$\mathfrak{P}'_i \not\subseteq \bigcup_{i=1}^n \mathfrak{P}_i$$

(diese Aussage gilt nicht nur für Primideale). Also existiert $a \in \mathfrak{P}'_1$ mit $a \notin \mathfrak{P}_i$ für alle $i \in \{1, \dots, n\}$ und es gilt $\sigma_j(a) \in \mathfrak{P}_i$ für alle $i, j \in \{1, \dots, n\}$. Schließlich ist

$$\mathbb{M} \ni N_{\mathbb{L}/\mathbb{M}} \stackrel{(*)}{=} \prod_{j=1}^n \sigma_j(a) \in \mathfrak{P}_i \quad \text{für alle } i \in \{1, \dots, n\},$$

andererseits aber

$$N_{\mathbb{L}/\mathbb{M}} \in \mathbb{M} \cap \mathfrak{P}'_1 = B \cap \mathfrak{P}'_1 = \mathfrak{p}_1$$

und $\mathfrak{p}_i \subseteq \mathfrak{P}_i$ für alle $i \in \{1, \dots, n\}$, ein Widerspruch!

Damit war die Annahme falsch und es gibt einen Index $i \in \{1, \dots, n\}$, sodass

$$\mathfrak{P}'_i = \sigma_i(\mathfrak{P}_i).$$

Das Ideal $\mathfrak{P}_0 = \sigma_i^{-1}(\mathfrak{P}'_i)$ erfüllt damit

$$\mathfrak{P}_0 \subset \mathfrak{P}_1 \quad \text{und} \quad \mathfrak{P}_0 \cap B = \mathfrak{P}'_i \cap B = \mathfrak{p}_0.$$

Fall (b) \mathbb{L}/\mathbb{M} ist nicht Galois. Ist \mathbb{L}/\mathbb{M} nicht separabel, so ändert dies nichts an dem Beweis, bis auf die Tatsache, dass der Ausdruck in (*) nicht der Norm entspricht, sondern nur eine gewissen Wurzel von ihr.

Ist andererseits \mathbb{L}/\mathbb{M} nicht normal, so betrachten wir die die normale Hülle $\tilde{\mathbb{M}} \supset \mathbb{M}$. Hier wird der Beweis ein wenig technischer, im Wesentlichen ändert sich jedoch trotzdem nicht viel. \square

(Beweis von 13.9) Es sei

$$\langle 0 \rangle = \mathfrak{P}_1 \subsetneq \mathfrak{P}_2 \subsetneq \dots \subsetneq \mathfrak{P}_m$$

eine maximale Kette von Primidealen in A . Sei weiter A/B mit $B := \mathbb{K}[X_1, \dots, X_d]$ eine via Noether-Normalisierung erhaltene ganze Ringerweiterung. Setze

$$\mathfrak{p}_i := \mathfrak{P}_i \cap B \quad \text{für } i \in \{1, \dots, m\}.$$

Beh. (a) Wir haben eine maximale Kette von Primideale in B :

$$\langle 0 \rangle \subsetneq \mathfrak{p}_1 \subsetneq \dots \subsetneq \mathfrak{p}_m$$

Da $\dim A = \dim B$, genügt es nun zu zeigen: $m = d$. Zeige dies über Induktion nach d :

d=1 Klar.

d ≥ 1 Sei C/B mit $C := \mathbb{K}[Y_1, \dots, Y_d]$ eine via Noether-Normalisierung erhaltene ganze Ringerweiterung, sodass gilt $\mathfrak{p}_1 \cap C = \langle Y_{\delta+1}, \dots, Y_d \rangle$ für ein $0 \leq \delta \leq d$. Für

$$\mathfrak{q}_i := \mathfrak{p}_i \cap C, \quad i \in \{1, \dots, m\}$$

ist wegen der Behauptung

$$\langle 0 \rangle \subsetneq \mathfrak{q}_1 \subsetneq \dots \subsetneq \mathfrak{q}_m$$

eine maximale Kette in C . damit folgt $\text{ht}(\mathfrak{q}_1) = 1$, also $\delta = d - 1$.

Sei nun $C' := C/\mathfrak{q}_1 \cong \mathbb{K}[Y_1, \dots, Y_{d-1}]$. Dann ist

$$\langle 0 \rangle = \mathfrak{q}_1/\mathfrak{q}_1 \subsetneq \dots \subsetneq \mathfrak{q}_m/\mathfrak{q}_1$$

eine maximale Kette in C' , d.h. es gilt $m - 1 = d - 1$, also $m = d$.

Es bleibt nun also, die Behauptung (a) zu zeigen.

Bew. (a) Nach Definition ist $\mathfrak{p}_i \subseteq \mathfrak{p}_{i+1}$. Es ist also zu zeigen: $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{p}_{i+1}$. Sei dazu ohne Einschränkung $i = 0$ - andernfalls ersetze A durch A/\mathfrak{p}_i und B durch B/\mathfrak{p}_i .

Sei $b \in \mathfrak{p}_1 \setminus \{0\} = \mathfrak{p}_1 \setminus \mathfrak{p}_0$. Da b ganz ist über B , gibt es eine Gleichung

$$b^n + a_{n-1}b^{n-1} + \dots + a_1b + a_0 = 0, \quad a_i \in B \text{ für alle } i \in \{1, \dots, n-1\}.$$

Wir wählen n minimal, sodass gilt $a_0 = 0$. Dann ist

$$a_0 = -b \cdot (b^{n-1} + a_{n-1}b^{n-2} + \dots + a_1) \in B \cap \mathfrak{p}_1 = \mathfrak{p}_1,$$

also $\mathfrak{p}_1 \neq \langle 0 \rangle$.

Schließlich muss noch gezeigt werden, dass die Kette tatsächlich maximal ist, d.h. es gibt für kein $i \in \{1, \dots, m\}$ ein Primideal \mathfrak{q} mit $\mathfrak{p}_{i-1} \subsetneq \mathfrak{q} \subsetneq \mathfrak{p}_i$. Proposition 13.11 liefert und jedoch genau dies. Damit ist die Behauptung gezeigt.

§ 14 Tangentialraum und Singularitäten

Erinnerung 14.1 Sei $f \in \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$, $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^n$.

(i) Es gilt

$$f = \sum_{(\nu_1, \dots, \nu_n) \in \mathbb{N}_0^n} \frac{1}{(\nu_1 + \dots + \nu_n)!} \left(\left(\frac{\partial}{\partial X_1} \right)^{\nu_1} \dots \left(\frac{\partial}{\partial X_n} \right)^{\nu_n} f \right) (a) \prod_{i=1}^n (X_i - a_i)^{\nu_i}$$

(ii) Es ist

$$f = f(a) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial X_i}(a)(X_i - a_i) + \text{höhere Terme}$$

Definition + Bemerkung 14.2 Sei $f \in \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$, $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^n$.

(i) Die *Linearisierung von f in a* ist

$$f_a^{(1)} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial X_i}(a)X_i =: D_a(f)$$

(ii) Sei $V \subseteq \mathbb{A}^n(\mathbb{K})$ affine Varietät, $a \in V$, $I = I(V) \trianglelefteq \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$. Sei weiter I_a das von den Linearisierungen $f_a^{(1)}$ für alle $f \in I$ erzeugte Ideal in $\mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$. Dann heißt

$$T_a = T_{V,a} := V(I_a)$$

Tangentialraum an V in a .

(iii) Ist $I(V) = \langle f_1, \dots, f_r \rangle$, so ist $I_a = \langle (f_1)_a^{(1)}, \dots, (f_r)_a^{(1)} \rangle$.

(iv) $T_{V,a}$ ist ein Untervektorraum des \mathbb{K}^n . Genauer ist

$$T_{V,a} = \ker \mathcal{J}_{f_1, \dots, f_r}(a), \quad \mathcal{J} := \mathcal{J}_{f_1, \dots, f_r} = \left(\frac{\partial f}{\partial X_i} \right)_{i,j}$$

Beweis. (iii) Es gilt

$$\begin{aligned}
 D_a(f + g) &= D_a(f) + D_a(g) \\
 D_a(fg) &= (f \cdot g)_a^{(1)} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial X_i} (fg)(a) X_i = \sum_{i=1}^n \left(f(a) \frac{\partial g}{\partial X_i}(a) + g(a) \frac{\partial f}{\partial X_i}(a) \right) X_i \\
 &= f(a) \sum_{i=1}^n \frac{\partial g}{\partial X_i}(a) X_i + g(a) \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial X_i}(a) X_i \\
 &= f(a) D_a(g) + g(a) D_a(f)
 \end{aligned}$$

Ist nun also

$$f = \sum_{k=1}^r g_k f_k \in I(V), \quad g_k \in \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n],$$

so ist

$$D_a(f) = \sum_{k=1}^r (f_k(a) D_a(g_k) + g_k(a) D_a(f_k)) = \sum_{k=1}^r g_k(a) (f_k)_a^{(1)} \in \langle (f_a)_a^{(1)}, \dots, (f_r)_a^{(1)} \rangle$$

(iv) Folgt aus (iii).

Beispiel 14.3 (i) Sei $f = Y^2 - X^3 - X^2 \in \mathbb{K}[X, Y]$, $V = V(f)$. Ist $(a, b) \in V$, so gilt

$$f_{(a,b)}^{(1)} = -a(3a+2)X + 2bY$$

Trivial wird dieses Gleichungssystem für $(a, b) = 0$ und $(a, b) = (-\frac{2}{3}, 0)$. Da aber der zweite Punkt nicht auf V liegt, erhalten wir als Tangentialraum eine Gerade außerhalb von $(0, 0)$ und $T_{V,(0,0)} = \mathbb{K}^2$.

(ii) Sei $f = Y^2 - X^3 \in \mathbb{K}[X, Y]$, $V = V(f)$. Dann ist

$$f_{(a,b)}^{(1)} = -3a^2X + 2bY$$

und mit selbiger Argumentation ist $T_{V,(0,0)} = \mathbb{K}^2$ und außerhalb von $(0, 0)$ eine Gerade.

(iii) Sei $f = X^2 + Y^2 - Z^2 \in \mathbb{K}[X, Y, Z]$, $V = V(f)$. Es ist

$$f_{(a,b)}^{(1)} = 2aX + abY - 2cZ,$$

also ist $T_{V,(0,0,0)} = \mathbb{K}^3$ und eine Ebene außerhalb von $(0, 0)$.

Bemerkung 14.4 Seien $V_0 \subseteq V \subseteq \mathbb{A}^n(\mathbb{K})$ affine Varietäten, V_0 dicht in V , $a \in V_0$. Dann ist

$$T_{V_0,a} \cong T_{V,a}.$$

Beweis. Ohne Einschränkung sei $V_0 = D(g)$ für ein $g \in \mathbb{K}[V]$. Sei $I(V) = \langle f_1, \dots, f_r \rangle$. Dann ist $V_0 \cong V'_0 := V(f_1, \dots, f_r, gX_{n+1} - 1) \subseteq \mathbb{A}^{n+1}(\mathbb{K})$. Dabei entspricht der Punkt $a = (a_1, \dots, a_n) \in V_0$ dem Punkt $a' = (a_1, \dots, a_n, \frac{1}{g(a)})$. Weiter ist

$$T_{V'_0,a'} = V \left((f_1)_{a'}^{(1)}, \dots, (f_r)_{a'}^{(1)}, \frac{1}{g(a)} g_{a'}^{(1)} + g(a) X_{n+1} \right) \subseteq \mathbb{K}^{n+1}.$$

Da der Term $\frac{1}{g(a)}g_{a'}^{(1)} + g(a)X_{n+1}$ als einziger X_{n+1} enthält, gilt

$$\begin{aligned}\dim T_{V',a'} &= n+1 - \text{Rang} \left((f_1)_{a'}^{(1)}, \dots, (f_r)_{a'}^{(1)}, \frac{1}{g(a)}g_{a'}^{(1)} + g(a)X_{n+1} \right) \\ &= n - \text{Rang} \left((f_1)_{a'}^{(1)}, \dots, (f_r)_{a'}^{(1)} \right) \\ &= \dim T_{V,a},\end{aligned}$$

was zu zeigen war. \square

Definition 14.5 Sei $V \subseteq \mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ quasiprojektive Varietät, $a \in V$. Dann ist der *Tangentiairaum in a an V* definiert als

$$T_{V,a} := T_{V_0,a},$$

wobei $V_0 \subseteq V$ ein offene, affine Umgebung von a ist.

Definition 14.6 Sei $V \subseteq \mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ quasiprojektive Varietät.

- (i) $a \in V$ heißt *nichtsingulärer* oder *regulärer* Punkt, falls $\dim T_{V,a} = \dim_a V$. Andernfalls heißt a *singulär*.
- (ii) V heißt *nichtsingulär*, wenn jedes $a \in V$ nichtsingulär ist.

Proposition 14.7 (Jacobi-Kriterium) Sei $V \subseteq \mathbb{A}^n(\mathbb{K})$ affine Variteät, $a \in V$, $I = I(V) = \langle f_1, \dots, f_r \rangle$. Dann gilt

$$a \text{ ist nichtsingulär} \iff \text{Rang}(\mathcal{J}_{f_1, \dots, f_r}(a)) = n - \dim_a V.$$

Beweis. Nach Bemerkung 14.2 ist

$$T_{V,a} = \ker \left(\frac{\partial f_i}{\partial X_i}(a) \right)_{i,j}$$

Mit

$$\text{Rang}(\mathcal{J}_{f_1, \dots, f_r}(a)) = n - \dim \ker \mathcal{J}(a) = n - \dim T_{V,a}$$

folgt die Behauptung. \square

Beispiel 14.8 (i) Sei $V = V(f) \subseteq \mathbb{A}^n(\mathbb{K})$ Hyperfläche. Dann ist

$$\mathcal{J}_f(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial X_1}(a), \dots, \frac{\partial f}{\partial X_n}(a) \right)$$

also

$$a \text{ ist singulär} \iff \frac{\partial f}{\partial X_1}(a) = \dots = \frac{\partial f}{\partial X_n}(a) = f(a) = 0.$$

(ii) Sei $f = Y^2 - X^3 + X \in \mathbb{K}[X, Y]$, $V = V(f) \subseteq \mathbb{A}^2(\mathbb{K})$. Dann ist

$$\mathcal{J}_f(x, y) = (-3x^2 + 1, 2y).$$

Dann gilt:

$$a = (x_0, y_0) \text{ ist singulär} \iff y_0 = 0, \quad 3x_0^2 = 1 \iff a = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, 0 \right).$$

Aber es gilt: $f(a) \neq 0 \iff a \notin V$. Damit ist $V(f)$ nichtsingulär.

Wir betrachten nun den projektiven Abschluss $\bar{V} = V(Y^2Z - X^3 + XZ^2) \subseteq \mathbb{P}^2(\mathbb{K})$. Der einzige neu auftretende Punkt ist $P_\infty = (0 : 1 : 0)$. Wir betrachten eine affine Umgebung

$$U := U_Y \cap \bar{V} = V(Z - X^3 + XZ^2).$$

Dann ist für $G = Z - X^3 + XZ^2$:

$$\mathcal{J}_g(x, z) = (-3x^2 + z^2, 2xz + 1) \implies \mathcal{J}_g(P_\infty) = (0, 1)$$

womit P_∞ ein regulärer Punkt ist. Also ist sogar \bar{V} nichtsingulär.

(iii) Wir variieren nun die Varietät aus Beispiel (ii). Setze hierfür

$$f_{a,b} := Y^2 - X^3 - aX - b.$$

Dann ist

$$\mathcal{J}_{f_{a,b}}(x, y) = (-3x^2 - a, 2y)$$

Sei nun $(x_0, y_0) \in E_{a,b} = V(f_{a,b})$ singulär. Dann ist $y_0 = 0$ und $-a = 3x_0^2$. Weiter muss der Punkt auf $E_{a,b}$ liegen, wir erhalten also die Bedingung

$$x_0^3 - 3x_0^3 + b = 0 \iff b = 2x_0^3 \iff b^2 = 4x_0^6 = 4\frac{-a^3}{27} \iff 27b^2 + 4a^3 = 0.$$

Andererseits gilt

$$f_{a,b} = 0 \iff Y^2 = X^3 + aX + b =: g_{a,b}(X)$$

und damit

$$\Delta(a, b) = 0 \iff g_{a,b} \text{ hat eine doppelte Nullstelle.}$$

Wobei mit $\Delta(a, b)$ die Diskriminante von a und b bezeichnet wird. Damit erhalten wir

$$\bar{E}_{a,b} \text{ ist nichtsingulär} \iff \Delta(a, b) \neq 0,$$

was zu zeigen war. □

Satz 14.9 Sei \mathbb{K} algebraisch abgeschlossen, $V \subseteq \mathbb{A}^n(\mathbb{K})$ affine Varietät. Sei $\mathfrak{m}_x = \{f_x \in \mathcal{O}_{V,x} \mid f_x(x) = 0\}$ das zum Punkt $x \in V$ zugehörige maximale Ideal. Bezeichne weiterhin $(\mathfrak{m}_x / \mathfrak{m}_x^2)^*$ den Dualraum des \mathbb{K} -Vektorraums $\mathfrak{m}_x / \mathfrak{m}_x^2$. Dann gibt es einen natürlichen Isomorphismus von \mathbb{K} -Vektorräumen

$$\alpha : T_{V,x} \longrightarrow (\mathfrak{m}_x / \mathfrak{m}_x^2)^*$$

Beweis. Zur Wohldefiniertheit der Behauptung: Es ist $\mathfrak{m}_x / \mathfrak{m}_x^2$ ein Modul über $\mathcal{O}_{V,x}$, das heißt, Multiplikation mit Ringelementen aus $\mathcal{O}_{V,x}$ ist definiert. Multiplikation mit einem Element aus \mathfrak{m}_x ist die Nullabbildung. Damit ist $\mathfrak{m}_x / \mathfrak{m}_x^2$ ein $\mathcal{O}_{V,x} / \mathfrak{m}_x$ -Modul, also ein \mathbb{K} -Vektorraum und der Dualraum dazu ist wohldefiniert. Dieser wird auch als *Zariski-Tangententialraum* bezeichnet.

Nun zur Behauptung. Definiere

$$\alpha : T_{V,x} \longrightarrow (\mathfrak{m}_x / \mathfrak{m}_x^2)^*, \quad v = (v_1, \dots, v_n) \mapsto \alpha(v)(\bar{f}) := \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial X_i}(x) v_i$$

Dann ist α wohldefiniert, denn für $g, h \in \mathfrak{m}_x$ gilt

$$\alpha(v)(gh) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial(gh)}{\partial X_i}(x) v_i = \sum_{i=1}^n \left(g(x) \frac{\partial h}{\partial X_i}(x) + h(x) \frac{\partial g}{\partial X_i}(x) \right) v_i = 0$$

Damit ist dann auch für alle $f \in \mathfrak{m}_x^2$ bereits $\alpha(v)(f) = 0$. Definiere nun umgekehrt

$$\beta : (\mathfrak{m}_x / \mathfrak{m}_x^2)^* \longrightarrow T_{V,x}, \quad l \mapsto (l(\overline{X_1 - x_1}), \dots, l(\overline{X_n - x_n}))$$

Zeige zunächst: $\beta(l) \in T_{V,x}$ für alle $l \in (\mathfrak{m}_x / \mathfrak{m}_x^2)^*$. Sei dazu $f \in I(V)$ und

$$f_x^{(1)} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial X_i}(a) X_i \in I$$

seine Linearisierung. Dann ist

$$f_x^{(1)}(\beta(l)) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial X_i}(x) l(\overline{X_i - x_i}) = l \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial X_i}(x) (X_i - x_i) \right) = l \left(\overline{f_x^{(1)} - f_x^{(1)}(x)} \right) = 0$$

Die letzte Gleichheit gilt, da $f_x^{(1)} - f_x^{(1)}(x) \in \mathfrak{m}_x^2$, denn es gilt

$$\mathbb{K}[V] \ni f = \underbrace{f(x)}_{=0} + f_x^{(1)} - f_x^{(1)}(x) + \text{Terme in } \mathfrak{m}_x^2$$

Wir rechnen nach:

(i) Es gilt

$$\begin{aligned} (\beta \circ \alpha)(v) &= \beta(\alpha(v)) = \beta \left(f \mapsto \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial X_i}(x) v_i \right) \\ &= \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial(\overline{X_i - x_i})}{\partial X_i}(x) v_1, \dots, \sum_{i=1}^n \frac{\partial(\overline{X_n - x_n})}{\partial X_i}(x) v_n \right) \\ &= (v_1, \dots, v_n) \end{aligned}$$

(ii) sowie für $l \in \mathfrak{m}_x / \mathfrak{m}_x^2$ und $f \in \mathfrak{m}_x$

$$\begin{aligned} (\alpha \circ \beta)(l)(f) &= \alpha(l(\overline{X_1 - x_1}), \dots, l(\overline{X_n - x_n})) \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial X_i}(x) l(\overline{X_i - x_i}) \\ &= l \left(\overline{f_x^{(1)} - f_x^{(1)}(x)} \right) \\ &= l(\bar{f}), \end{aligned}$$

es folgt also die Behauptung. □

Folgerung 14.10 Sei V quasiprojektive Varietät, $x \in V$. Dann gilt

$$x \text{ ist nichtsingulär} \iff \dim \mathfrak{m}_x / \mathfrak{m}_x^2 = \dim \mathcal{O}_{V,x}$$

Definition 14.11 Ein noetherscher lokaler Ring R heißt *regulär*, falls

$$\dim_{\mathbb{K}} \mathfrak{m} / \mathfrak{m}^2 = \dim R,$$

wobei \mathfrak{m} das maximale Ideal in R sowie \mathbb{K} den zugehörigen Restklassenkörper bezeichne.

Beispiel 14.12 Betrachte $R = \mathbb{Z}_{\langle p \rangle}$ für eine Primzahl $p \in \mathbb{P}$. Dann ist $\mathfrak{m} = p\mathbb{Z}_{\langle p \rangle}$ sowie $\mathbb{K} = \mathbb{Z}_{\langle p \rangle} / p\mathbb{Z}_{\langle p \rangle} \cong \mathbb{F}_p$. Weiter ist

$$\dim \mathbb{Z}_{\langle p \rangle} = 1 = \dim_{\mathbb{F}_p} \mathbb{F}_p = \dim_{\mathbb{F}_p} p\mathbb{Z}_{\langle p \rangle} / p^2\mathbb{Z}_{\langle p \rangle} = \dim_{\mathbb{F}_p} \mathfrak{m} / \mathfrak{m}^2,$$

folglich ist $\mathbb{Z}_{\langle p \rangle}$ regulär.

Lemma 14.13 (*Nakayama-Lemma*) Sei R lokaler Ring mit maximalem Ideal \mathfrak{m} und M endlich erzeugter R -Modul, $N \subseteq M$ Untermodul. Dann gilt

$$M = N + \mathfrak{m}M \implies M = N.$$

Beweis. Ohne Einschränkung gelte $N = 0$, denn aus $M = \mathfrak{m}M + N$ folgt

$$M/N = (N + \mathfrak{m}M)/N \cong \mathfrak{m}M/N \cap \mathfrak{m}M \cong \mathfrak{m}M/N$$

Sei nun also $M = \mathfrak{m}M$ und nehme an, es gelte $M \neq 0$. Dann sei x_1, \dots, x_n ein minimales Erzeugendensystem von M . Dann gilt

$$x_1 = \sum_{i=1}^n a_i x_i \quad \text{für geeignete } a_i \in \mathfrak{m},$$

also wegen $R^\times = R \setminus \mathfrak{m}$

$$x_1(\underbrace{1 - a_1}_{\notin \mathfrak{m}}) = \sum_{i=2}^n a_i x_i \in \langle x_2, \dots, x_n \rangle,$$

ein Widerspruch zur Minimalität. □

Lemma 14.14 Sei (R, \mathfrak{m}) noetherscher lokaler Ring. Dann bilden $x_1, \dots, x_n \in \mathfrak{m}$ ein minimales Erzeugendensystem von \mathfrak{m} genau dann, wenn die Restklassen $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n \in \mathfrak{m} / \mathfrak{m}^2$ eine \mathbb{K} -Vektorraumbasis von $\mathfrak{m} / \mathfrak{m}^2$ bilden.

Beweis. " \implies " Sei also x_1, \dots, x_n ein minimales Erzeugendensystem von \mathfrak{m} . Sicherlich bildet $S := \{\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n\}$ ein Erzeugendensystem für $\mathfrak{m} / \mathfrak{m}^2$. Angenommen, S ist linear abhängig, d.h. ohne Einschränkung finden wir eine Darstellung

$$\bar{x}_1 = \sum_{i=2}^n \lambda_i \bar{x}_i, \quad \lambda_i \in \mathbb{K}.$$

Für $\tilde{\lambda}_i \in R$ mit $\tilde{\lambda}_i = \lambda_i$ gilt dann

$$x_1 - \sum_{i=2}^n \tilde{\lambda}_i x_i \in \mathfrak{m}^2.$$

Andererseits wird \mathfrak{m}^2 erzeugt von den $x_i x_j$. Schreibe also

$$x_1 - \sum_{i=2}^n \tilde{\lambda}_i x_i = \sum_{j=1}^n \mu_{1j} x_1 x_j + \underbrace{\sum_{i,j=2}^n \mu_{ij} x_i x_j}_{=:y} = y + x_1 \sum_{j=1}^n \mu_{1j} x_j,$$

wobei $\mu_i \in R$ geeignete Konstanten sind. Dann folgt

$$x_1 \left(1 - \underbrace{\sum_{i=1}^n \mu_i x_i}_{\notin \mathfrak{m}} \right) \in \langle x_2, \dots, x_n \rangle,$$

also ein Widerspruch zur Minimalität von S .

" \Leftarrow " Sei nun umgekehrt $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n$ eine \mathbb{K} -Basis von $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$. Zeige nun, dass x_1, \dots, x_n \mathfrak{m} erzeugen. Die Minimalität ist klar. Sei dazu $N := \langle x_1, \dots, x_n \rangle \subseteq \mathfrak{m}$. Dann gilt

$$\mathfrak{m} = N + \mathfrak{m}^2$$

und mit Lemma 14.11 folgt $N = \mathfrak{m}$. □

Proposition 14.15 *Ein noetherscher lokaler Ring (R, \mathfrak{m}) ist genau dann regulär, wenn \mathfrak{m} von $\dim R = \text{ht}(\mathfrak{m})$ Elementen erzeugt werden kann.*

Beweis. " \Rightarrow " Sei R regulär. Dann gilt $\dim R = \dim \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 =: n$. Dann kann \mathfrak{m} also von n Elementen erzeugt werden.

" \Leftarrow " Kann nun umgekehrt \mathfrak{m} von $n := \dim R$ Elementen erzeugt werden, so auch $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$, das heißt, mit Lemma 14.14 gilt bereits $\dim \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \leq \dim R$. Krulls Hauptidealsatz (ohne Beweis) liefert die umgekehrte Ungleichung und damit $\dim R = \dim \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$. □

Folgerung 14.16 Sei $V \subseteq \mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ quasiprojektive Varietät, $x \in V$. Dann gilt

$$x \text{ ist singulär} \iff \dim \mathfrak{m}_x / \mathfrak{m}_x^2 > \dim_x V$$

Proposition 14.17 *Jede irreduzible d -dimensionale Varietät ist birational äquivalent zu einer Hyperfläche in $\mathbb{A}^{d+1}(\mathbb{K})$.*

Beweis. Zuz zeigen: $\mathbb{K}(V)$ ist isomorph zum Funktionenkörper einer Hyperfläche, also

$$\mathbb{K}(V) \cong \text{Quot}(\mathbb{K}[X_1, \dots, X_n] / \langle f \rangle)$$

für ein geeignetes $f \in \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$. Sei hierfür $\mathbb{K}[V]/\mathbb{K}[X_1, \dots, X_d]$ eine durch Noethernormalisierung erhaltene, ganze Ringerweiterung. Dann ist $\mathbb{K}(V)/\mathbb{K}(X_1, \dots, X_d)$ eine endliche Körperweite-

rung. Ohne Einschränkung sei diese separabel. Dann liefert der Satz vom primitiven Element ein $y \in \mathbb{K}(X_1, \dots, X_d)$, sodass gilt

$$\mathbb{K}(V) = \mathbb{K}(X_1, \dots, X_d)[y].$$

Sei $h \in \mathbb{K}(X_1, \dots, X_d)[Y]$ das Minimalpolynom von y und g der Hauptnenner von h . Dann ist

$$f = g \cdot h \in \mathbb{K}[X_1, \dots, X_d, Y] \cong \mathbb{K}[X_1, \dots, X_{d+1}]$$

und

$$\text{Quot}(\mathbb{K}[X_1, \dots, X_d, Y] / \langle f \rangle) = \mathbb{K}(V),$$

was die Behauptung liefert. \square

Satz 14.18 *Sei \mathbb{K} algebraisch abgeschlossen, $V \subseteq \mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ nichtleere, quasiprojektive Varietät. Dann ist*

$$\text{Sing}(V) := \{x \in V \mid x \text{ ist singulär}\}$$

eine echte abgeschlossene Teilmenge.

Beweis. Zeige zunächst, dass $\text{Sing}(V)$ abgeschlossen ist. Ohne Einschränkung sei hierfür V irreduzibel. Denn sind V_1, \dots, V_r die irreduziblen Komponenten von V , so gilt

$$\text{Sing}(V) = \bigcup_{i=1}^r \text{Sing}(V_i) \cup \bigcup_{i \neq j}^r V_i \cap V_j.$$

Weiter sei V ohne Einschränkung affin, denn Abgeschlossenheit ist eine lokale Eigenschaft. Wähle nun Erzeuger f_1, \dots, f_r von $I(V) \trianglelefteq \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$ und betrachte die Jacobimatrix $\mathcal{J} := \left(\frac{\partial f_i}{\partial X_j} \right)_{i,j}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \text{Sing}(V) &= \{x \in V \mid \text{Rang}(\mathcal{J}(x)) < n - \dim V =: s\} \\ &= \{x \in V \mid \det M(x) = 0 \text{ für alle } s \times s \text{ Untermatrizen } M \text{ von } \mathcal{J}\} \end{aligned}$$

Da die Determinante ein Polynom in n Variablen ist, ist $\text{Sing}(V) = V(\det)$ und $\text{Sing}(V)$ als affine Varietät abgeschlossen. Zeige nun, dass $\text{Sing}(V)$ eine echte Teilmenge von V ist. Ohne Einschränkung sei hierfür V irreduzibel, denn: Sei Z eine irreduzible Komponente von V mit $\text{Sing}(Z) \neq Z$, so ist $Z \setminus \text{Sing}(Z)$ offen, nichtleer, also dicht in Z . Damit enthält $Z \setminus \text{Sing}(Z)$ einen Punkt z , die auf keiner anderen irreduziblen Komponente liegt. Wegen $\mathcal{O}_{Z,z} = \mathcal{O}_{V,z}$ folgt $z \in V \setminus \text{Sing}(V)$, also $\text{Sing}(V) \neq V$. Wegen Proposition 14.17 genügt es, denn Spezialfall $V = V(f) \subseteq \mathbb{A}^n(\mathbb{K})$ zu betrachten, wobei $f \in \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$ ein irreduzibles Polynom von Grad $\deg f > 0$ ist. Es ist

$$\text{Sing}(V) = \left\{ x \in V \mid \frac{\partial f}{\partial X_1}(x), \dots, \frac{\partial f}{\partial X_n}(x) = 0 \right\}.$$

Angenommen es gelte $\text{Sing}(V) = V$. Dann wäre $\frac{\partial f}{\partial X_i} \in I(V) = \langle f \rangle$ für alle $i \in \{1, \dots, n\}$. Ist $\text{char}(\mathbb{K}) = 0$, so folgt daraus, dass f konstant ist, ist $\text{char}(\mathbb{K}) = p > 0$, so gilt $f \in \mathbb{K}[X_1^p, \dots, X_n^p]$, also $f = g^p$ für ein $g \in \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$. In beide Fällen erhalten wir einen Widerspruch zur Wahl von f , es folgt die Behauptung. \square

