4 Übung vom 19.05.

9. Aufgabe

Gegeben: $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, Rang $A \leq k$ und ein LP

$$\boxed{\begin{array}{rcl} \text{f} & = & \text{max} \\ \text{Ax} & = & \text{b} \\ \text{x} & \geq & 0 \end{array}}$$

zu zeigen: Existiert ein zulässiger Punkt x, so gibt es auch einen zulässigen Punkt y mit höchstens n+1 positiven Komponenten und $f(x) = f(y)$.

Beweis:
Es sei x ein zulässiger Punkt von (LP) und $f = \langle p, \cdot \rangle$, $p \in \mathbb{R}^n$.
Wir setzen

$$\tilde{A} := \begin{pmatrix} A \\ \hline p^T \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(m+1) \times n}, \ \tilde{b} := \begin{pmatrix} b \\ \hline f(x) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m+1}$$

und $\widetilde{M} := \{y \in \mathbb{R}^n | \tilde{A}y = \tilde{b},\, y \geq 0\}$. $\widetilde{M} \neq \varnothing$ (da $x \in \widetilde{M}$), polyedrisch und geradenfrei (wegen der Vorzeichenbedingung).

$\overset{\text{Satz d. V.}}{\Rightarrow}$ $\widetilde{M}$ besitzt eine Ecke, wir bezeichnen diese als y
$\overset{\text{Satz d. V.}}{\Rightarrow}$ mit $\tilde{A} = (a^1 | \dots | a^n)$ ist $\{a^i |\, y_i > 0\}$ l.u.

Aus der Voraussetzung ergibt sich Rang $\tilde{A} \leq$ Rang $A + 1 \leq k + 1$.
Dann folgt $|\{a^i |\, y_i > 0\}| \leq k + 1$ (weil die Menge l.u. sein soll), und wir erhalten: Höchstens k+1 der y_i können echt größer als Null sein.

Für y gilt: $Ay = b$, $f(y) = f(x)$, $y \geq 0$ (da y zulässiger Punkt ist)

Und wir haben die Aufgabe gelöst. :)

10. Aufgabe

(a)

$$\begin{aligned}
Ax = 0, x \geq 0, x \neq 0 \text{ lösbar} \quad & \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} & -A & \\ \hline 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \tilde{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \hline 1 \end{pmatrix}, \tilde{x} \geq 0 \text{ lösbar} \\
& \overset{\text{Farkas}}{\Leftrightarrow} \quad \left(\begin{array}{c|c} & 1 \\ -A^T & \vdots \\ & 1 \end{array} \right) u \geq 0, \langle \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \hline 1 \end{pmatrix}, u \rangle < 0 \text{ unlösbar} \\
& \overset{\text{NR}}{\Leftrightarrow} \quad A^T \tilde{u} \leq \begin{pmatrix} t \\ \vdots \\ t \end{pmatrix} \text{ für alle } t < 0 \text{ unlösbar} \\
& \Leftrightarrow \quad A^T \tilde{u} < 0 \text{ unlösbar}
\end{aligned}$$

NR:
$A = (a_1|\dots|a_n), u = \binom{\tilde{u}}{t}$
Dann folgt (aus der ersten „Ungleichung“): für $i = 1, \dots, n$

$$-a_i^T \cdot \tilde{u} + t \geq 0 \;\Leftrightarrow\; a_i^T \tilde{u} \leq t$$

[*Die nächste Zeile folgt dann, wenn man noch die zweite „Ungleichung“ beachtet.*]

(b) Es sei $A = (a^1|\dots|a^n)$.

$$\begin{aligned}
& [A^T u \leq 0, A^T u \neq 0 \text{ lösbar} \Leftrightarrow Ax = 0, x > 0 \text{ unlösbar}] \\
\Leftrightarrow \quad & [A^T u \leq 0, A^T u \neq 0 \text{ unlösbar} \Leftrightarrow Ax = 0, x > 0 \text{ lösbar}]
\end{aligned}$$

$A^T u \leq 0$, $A^T u \neq 0$ unlösbar
$\Leftrightarrow$ $A^T u \leq 0$ und ($\langle a^1, u\rangle < 0$ oder $\dots$ oder $\langle a^n, u\rangle < 0$) unlösbar
$\Leftrightarrow$ Keines der folgenden Systeme ist lösbar für $i = 1, \dots, n$:

$$\boxed{\begin{array}{rcl} -A^T u & \geq & 0 \\ \langle a^i, u\rangle & < & 0 \end{array}}$$

$\overset{\text{Farkas}}{\Leftrightarrow}$ Jedes der folgenden Systeme ist lösbar ($i = 1, \dots, n$):

$$\boxed{\begin{array}{rcl} \text{-Ax} & = & a^i \\ \text{x} & \geq & 0 \end{array}}$$

$\overset{\text{NR}}{\Leftrightarrow}$ $Ax = 0$, $x > 0$ lösbar

NR:
(i) Seien die Systeme

$$\boxed{\begin{array}{rcl} \text{-Ax} & = & a^i \\ \text{x} & \geq & 0 \end{array}}$$

$i = 1, \dots, n$ lösbar und sei x^i eine entsprechende Lösung.

$$x := x^1 + \dots + x^n + \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} > 0$$

Dann gilt: $Ax = -a^1 - \dots - a^n + a^1 + \dots + a^n = 0$

(ii) Sei $x > 0$ eine Lösung von $Ax = 0$ mit $x = (x_1, \dots, x_n)$.

$$Ax = 0 \;\Leftrightarrow\; x_1 a^1 + \dots + x_n a^n = 0 \quad (*)$$

Sei $i \in \{1, \dots, n\}$.
Aus $(*)$ erhalten wir

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \frac{x_j}{x_i} a^j = -a^i$$

Wir setzen

$$x^i := (\frac{x_1}{x_i}, \dots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, 0, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i}) \geq 0$$

und es gilt: $Ax^i = -a^i \Leftrightarrow -Ax^i = a^i$

11. Aufgabe

V sei ein endlich erzeugter Kegel, d.h. es existieren $y^1, \dots, y^k \in \S^{n-1}$ mit $V = \{\alpha_1 y^1 + \dots + \alpha_k y^k | \; \alpha_i \geq 0\}$
$[S^{n-1} = \{u \in \mathbb{R}^n : \; \|u\| = 1\}$ Einheitssphäre] a)

$$\begin{aligned} V^\circ &= \{x \in \mathbb{R}^n : \; \langle x, \alpha_1 y^1 + \dots + \alpha_k y^k \rangle \leq 0 \;\text{ für alle } \alpha_i \geq 0\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}^n : \; \langle x, y^i \rangle \leq 0 \;\text{ für } i = 1, \dots, k\} \\ &= \bigcap_{i=1}^{k} \{\langle \cdot, y^i \rangle \leq 0\} \qquad\qquad (+) \end{aligned}$$

V° ist nicht leer $(0 \in V^\circ)$, polyedrisch und ein Kegel.

Wir definieren

$$L := \bigcup_{\substack{g \text{ Gerade} \\ g \subset V^\circ}} g$$

Dann ist L ein linearer Unterraum.
$(\forall x, y \in V^\circ: \ x + y \in V^\circ$, da $x + y = 2(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y) \in V^\circ)$ $(*)$
L ist endlich erzeugt.

Wir definieren weiter: $U := V^\circ \cap L^\perp$.
Dann gilt: U ist nicht leer, polyedrisch und geradenfrei. Damit ist U endlich erzeugt (Satz der Vorlesung).

Noch zu zeigen: $V^\circ = L + U$ (dann ist V° endlich erzeugt)

Klar: $L + U \subset V^\circ$ wegen $(+)$
Sei also $x \in V^\circ$ und $z := p_{L^\perp}(x)$ *(Orthogonalprojektion)*.
Dann gilt: $z - x \in L$ und $z = \underbrace{x}_{\in V^\circ} + \underbrace{(z - x)}_{\in V^\circ} \in V^\circ$ wegen $(*)$

Dann ist $z \in U$ und $x = \underbrace{z}_{\in U} + \underbrace{(x - z)}_{\in L} \in U + L$

b) Es gilt $V = \{\alpha_1 y^1 + \ldots + \alpha_k y^k | \ \alpha_i \geq 0\}$ und $A = (y^1 | \ldots | y^k)$.

$$\begin{array}{rcl} b \in V^{\circ\circ} & \Leftrightarrow & \langle b, z \rangle \leq 0 \text{ für alle } z \in V^\circ \\ & \Leftrightarrow & [\langle z, y^i \rangle \leq 0 \text{ für } i = 1, \ldots, k \ \Rightarrow \ \langle b, z \rangle \leq 0] \\ & \overset{u:=-z}{\Leftrightarrow} & [A^T u \geq 0 \ \Rightarrow \ \langle b, u \rangle \geq 0] \\ & \overset{\text{Farkas}}{\Leftrightarrow} & \exists x \geq 0, x = (x_1, \ldots, x_k): \ Ax = b \\ & \Leftrightarrow & \exists x_1, \ldots, x_k \geq 0: \ b = x_1 y^1 + \ldots + x_k y^k \\ & \Leftrightarrow & b \in V \end{array}$$

12. Aufgabe

$$\text{(PP)} \ \boxed{\begin{array}{rcl} \text{f(x)}=\langle x, p \rangle & = & \text{max} \\ \text{Ax} & \leq & \text{b} \\ \text{x} & \geq & 0 \end{array}} \qquad \text{(DP)} \ \boxed{\begin{array}{rcl} \text{g(u)}=\langle u, b \rangle & = & \text{min} \\ A^T u & \geq & \text{p} \\ \text{u} & \geq & 0 \end{array}}$$

Wählt man

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \ b = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \ p = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

so sind (PP) und (DP) beide nicht lösbar.

$$
\text{(PP)} \quad \boxed{\begin{array}{rcl} \text{f(x)=}x_2 & = & \text{max} \\ x_1 - x_2 & \leq & 0 \\ -x_1 + x_2 & \leq & \text{-1} \\ \text{x} & \geq & 0 \end{array}} \qquad \text{(DP)} \quad \boxed{\begin{array}{rcl} \text{g(u)=}-u_2 & = & \text{min} \\ u_1 - u_2 & \geq & 0 \\ -u_1 + u_2 & \geq & 1 \\ \text{u} & \geq & 0 \end{array}}
$$

Anmerkung: Beide haben keine zulässigen Punkte. Die beiden Nebenbedingungen schließen sich jeweils gegenseitig aus.