

## 4. Topologie Übung

Ferdinand Szekeresch

28. September 2017

### Aufgabe 1

$(X, \leq)$ ,  $X$  Menge,  $\leq$  Ordnungsrelation auf  $X$ .

Beh.:  $O := \{U \subseteq X \mid \forall u \in U, x \in X : u \leq x \Rightarrow x \in U\}$  ist Topologie auf  $X$ .

Bew.:

- $\emptyset, X$  klar.

- Seien  $U_i$  Mengen aus  $O$ ,  $i \in I$  bel. Indexmenge. Dann gilt:

Sei  $u \in \bigcup_{i \in I} U_i, x \in X$  mit  $u \leq x \Rightarrow \exists i \in I : u \in U_i$

$\stackrel{U_i \in O}{\Rightarrow} x \in U_i \Rightarrow x \in \bigcup_{i \in I} U_i$

$u \in \bigcap_{i \in I} U_i, x \in X$  mit  $u \leq x \Rightarrow \forall i \in I : x \in U_i \Rightarrow x \in \bigcap_{i \in I} U_i$  Beh.:

Die Ordnungserhaltenden und die stetigen Abbildungen von  $X$  nach  $Y$  stimmen überein.

Bew.:

„ $\supseteq$ “: Sei  $f : X \rightarrow Y$  stetig,  $x_1, x_2 \in X$  mit  $x_1 \leq x_2$ . Zu zeigen:  $f(x_1) \leq f(x_2)$ .

Betrachte folgende offene Menge in  $Y$ :

$$V := \{u \in Y \mid f(x) \leq u\}$$

Das Urbild  $f^{-1}(V) =: U$  ist eine offene Menge in  $X$ , da  $f$  stetig ist.

$\Rightarrow \forall u \in U \forall x \in X : u \leq x \stackrel{x_1 \in U}{\Rightarrow} x_1 \leq x_2 \Rightarrow x_2 \in U \Rightarrow f(x_2) \in V$

$\Rightarrow \stackrel{\text{Def. } V}{\Rightarrow} f(x_1) \leq f(x_2)$ . Also:  $f$  ist abstandserhaltend.

„ $\subseteq$ “: Sei  $f$  ordnungserhaltend. Sei  $V$  eine offene Menge in  $Y$ . Zu zeigen:  $U := f^{-1}(V)$  ist offen in  $X$ .

Seien also  $u \in U, x \in X$  mit  $u \leq x \stackrel{f \text{ ordnungserh.}}{\Rightarrow} f(u) \leq f(x)$

Da  $V$  offen in  $Y$  ist und  $f(u) \in V$  ist, nach Definition von „offen“ ist auch  $f(x) \in V \Rightarrow x \in U$ .

Also:  $U$  ist offen in  $X$ .

■

## Aufgabe 2

Beh.:  $\text{SO}(n) := \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid \det(A) = 1 \text{ und } A^T A = E\}$  ist zusammenhängend.

Bew.:  $\text{SO}(n)$  ist wegzusammenhängend, denn:

Lineare Algebra: Zu jedem  $A \in \text{SO}(n)$  existiert  $U \in \text{GL}(n, \mathbb{R})$  mit:

$$A = U \cdot \begin{pmatrix} 1 & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & D_{\theta_1} & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & D_{\theta_m} \end{pmatrix} \cdot U^{-1}$$

und  $D_{\theta_i} = \begin{pmatrix} \cos(\theta_i) & -\sin(\theta_i) \\ \sin(\theta_i) & \cos(\theta_i) \end{pmatrix}$  Somit: Definiere Weg von  $E$  nach  $A$  durch  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \text{SO}(n)$

$$t \mapsto U \cdot \begin{pmatrix} 1 & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & D_{\theta_1(t)} & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & D_{\theta_m(t)} \end{pmatrix} \cdot U^{-1}$$

mit  $\theta_i(t) := t \cdot \theta_i$

Das ist ein Weg von  $E$  nach  $A$ ! Also:  $\text{SO}(n)$  ist zusammenhängend (da wegzusammenhängend).

Beh.:  $O(n) := \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid A^T A = E\}$  ist nicht zusammenhängend.

Bew.: es gilt:  $\det : O(n) \rightarrow \{-1, 1\}$  ist stetig (Leibniz-Formel) und surjektiv.

$\Rightarrow O(n) = f^{-1}(-1) \cup f^{-1}(1) \Rightarrow O(n)$  ist nicht zusammenhängend

■

## Aufgabe 3

(a) Beh.: Für  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  offen gilt:  $U$  zusammenhängend  $\Leftrightarrow U$  wegzusammenhängend.

Bew.: „ $\Leftarrow$ “ klar.

„ $\Rightarrow$ “: Definiere Äquivalenzrelation  $\sim$  auf  $\mathbb{R}^n$  durch  $x \sim y \Leftrightarrow x$  kann mit  $y$  durch Weg verbunden werden.

Sei  $U \neq \emptyset$  zusammenhängende offene Teilmenge von  $\mathbb{R}^n$ . Zu zeigen:  $U$  ist wegzusammenhängend.

Wähle  $a \in U$  beliebig und setze  $A := \{x \in U \mid x \sim a\}$ . Zu zeigen:  $A = U$ .

Dazu zeige:  $A$  ist offen und abgeschlossen in  $U$  bzgl. der Teilraumtopologie. (Dann folgt  $A = U$  oder  $A = \emptyset$ , weil  $U$  zsh.  $\Rightarrow A = U$ , da  $a \in A$  ist.)

Beh.:  $A$  ist offen in  $U$ .

Bew.:  $U$  offen in  $\mathbb{R}^n$ ,  $A \subseteq U \Rightarrow \forall x \in A \exists \varepsilon > 0 B_\varepsilon(x) \subseteq U$

$B_\varepsilon(x)$  ist konvex  $\Rightarrow$  jedes  $y \in B_\varepsilon(x)$  ist durch einen Weg mit  $x$  verbindbar.

$\forall y \in B_\varepsilon(x) : x \sim y$ .

$x \in A \Rightarrow x \sim a \stackrel{\sim \text{transitiv}}{\Rightarrow} y \sim a \Rightarrow y \in A$ . Also:  $B_\varepsilon(x) \subseteq A \Rightarrow A$  ist offen.

Beh.:  $A$  ist abgeschlossen und  $U$ .

bew.: Sei  $x \in \bar{A}$ , dem Abschluss von  $A$  bzgl. der Teilraumtopologie.

$x \in U \Rightarrow \exists \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(x) \subseteq U \stackrel{\text{Blatt 3}}{\Rightarrow} \emptyset \neq (B_\varepsilon(x) \cap U) \cap A = B_\varepsilon(x) \cap A$ .

Wie eben gilt für  $y \in B_\varepsilon(x) \cap A : y \sim x$ .

Wegen  $y \in A$  gilt auch  $y \sim a \stackrel{y \text{ transitiv}}{\Rightarrow} x \sim a \rightarrow x \in A \Rightarrow \bar{A} = A \Rightarrow A$  abgeschlossen.

■

- (b)  $U := \{(x, \sin(\frac{1}{x}) \mid x > 0\} \cup \{(0, 0)\}$   
 $U \setminus \{(0, 0)\}$  ist zsh., da  $U \setminus \{(0, 0)\}$  Bild von  $(0, 1]$  unter der stetigen Abbildung

$$(0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$x \mapsto (x, \sin(\frac{1}{x}))$$

$(0, 0)$  liegt im Abschluss von  $U \setminus \{(0, 0)\}$ , da jede Umgebung von  $(0, 0)$  einen Punkt aus  $U \setminus \{(0, 0)\}$  enthält.

$\stackrel{\text{Blatt 3}}{\Rightarrow} U$  ist zusammenhängend.

Ann.:  $U$  ist wegzsh.  $\Rightarrow$  es ex. ein stetiger Weg  $\gamma : [0, 1] \rightarrow U, \gamma(0) = (0, 0), \gamma(1) = (1, 0)$ .

Sei  $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t)) \Rightarrow \gamma_1$  ist ebenfalls stetig.

Zwischenwertsatz  $\Rightarrow \forall y \in (0, 1) \exists t \in (0, 1) : \gamma(t) = y$

Sei insbes.  $y = \frac{1}{n} \Rightarrow \exists t_n \in (0, 1) : \gamma_1(t_n) = \frac{1}{n} \Rightarrow \gamma(t_n) = (\gamma_1(t_n), \gamma_2(t_n)) = (\frac{1}{n}, \sin(n))$

$\gamma$  ist stetig  $\Rightarrow \gamma(t_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} (0, 0) \nmid$

#### Aufgabe 4

$X$  Top. Raum,  $\sim$  Äquivalenzrel. auf  $X$ .

- (a)  $Y := X/\sim$  sei versehen mit der Quotiententopologie.

Beh.: Ist  $Z$  weiterer top. Raum und  $f : Y \rightarrow Z$ , dann ist  $f$  stetig  $\Leftrightarrow f \circ \pi$  stetig. „ $\Rightarrow$ “ Sei  $f : X/\sim \rightarrow Z$  stetig. Dann ist  $f \circ \pi$  Verkettung stetiger Abbildungen, also stetig.

„ $\Leftarrow$ “ Sei  $f \circ \pi$  stetig und  $U \subseteq Z$  offen.

$\Rightarrow \pi^{-1}(f^{-1}(U)) = (f \circ \pi)^{-1}(U)$  offen in  $X \Rightarrow f^{-1}$  ist offen in  $X/\sim \Rightarrow f$  ist stetig.

- (b) Beh.: Durch (a) ist die Quotiententopologie eindeutig bestimmt.

Bew.: Seien  $J_1, J_2$  zwei Topologien auf  $X/\sim$ , die obige Eigenschaften erfüllen.

Z.z.  $J_1 = J_2$ .

Betrachte  $\text{id}_{X/\sim} : (X/\sim, J_1) \rightarrow (X/\sim, J_2)$ . Nach obiger Eigenschaft ist  $\text{id}$  stetig  $\Rightarrow$  alle  $U \in J_2$  sind in  $J_1$  enthalten.

$J_1 \subseteq J_2$ .

Analog umgekehrt,