10. Folgerungen aus den Integralformeln

Satz 10.1 (Cauchysche Abschätzungen)
Sei $z_0 \in \mathbb{C}, r > 0, f \in H(U_r(z_0))$ und f sei auf $U_r(z_0)$ beschränkt mit $M := \sup\limits_{U_r(z_0)} |f(z)|$.

Dann: $|f^{(n)}(z_0)| \leq \frac{Mn!}{r^n} \, \forall n \in \mathbb{N}_0$.

Beweis
Sei $0 < \rho < r, \gamma(t) := z_0 + \rho e^{it} (t \in [0, 2\pi])$. 9.6 $\implies f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int\limits_\gamma \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}} dw$.

Für $w \in \operatorname{Tr}(\gamma) : |w - z_0| = \rho$, also $\frac{|f(w)|}{|w-z_0|^{n+1}} \leq \frac{M}{\rho^{n+1}}$

$\overset{8.4}{\implies} |f^{(n)}(z_0)| \leq \frac{n!}{2\pi} \cdot \frac{M}{\rho^{n+1}} 2\pi\rho = \frac{Mn!}{\rho^n} \overset{\rho \to r}{\implies}$ Beh. ■

Satz 10.2 (Satz von Liouville)
Ist $f \in H(\mathbb{C})$ auf $\mathbb{C}$ beschränkt, so ist f konstant.

Beweis
Sei $z_0 \in \mathbb{C}$ und $r > 0$. 10.1 $\implies |f'(z_0)| \leq \frac{M}{r}; r > 0$ beliebig.
$\overset{r \to \infty}{\implies} f'(z_0) = 0, z_0 \in \mathbb{C}$ beliebig $\implies f' = 0$ auf $\mathbb{C}$.4.2 $\implies$ Beh. ■

Bemerkung: 10.2 ist in $\mathbb{R}$ falsch. Z.B. ist $x \to \cos x$ auf $\mathbb{R}$ beschränkt aber nicht konstant. Für $t \in \mathbb{R} : \cos(it) = \frac{1}{2}(e^{i(it)} + e^{i(-it)}) = \frac{1}{2}(e^t + e^{-t})$
$= \cosh t \to \infty (t \to \pm\infty)$

Hilfssatz
Sei $n \in \mathbb{N}. a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{C}, a_n \neq 0$ und $p(z) := a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n$.
Dann ex. ein $R > 0 : |p(z)| \geq 1 \, \forall z \in \mathbb{C}$ mit $|z| > R$.

Beweis
Für $z \neq 0 : \varphi(z) := \frac{|a_0|}{|z^n|} + \frac{|a_1|}{|z^{n-1}|} + \ldots + \frac{|a_{n-1}|}{|z|} + |a_n|$.
$\implies \varphi(z) \to \underbrace{|a_n|}_{\neq 0} (|z| \to \infty) \implies |p(z)| = |z|^n |\varphi(z)| \to \infty (|z| \to \infty) \implies$ Beh. ■

Satz 10.3 (Fundamentalsatz der Algebra)
Sei p wie in obigem Hilfssatz. Dann ex. ein $z_0 \in \mathbb{C} : p(z_0) = 0$

Beweis
Hilfssatz $\implies \exists R > 0 : |p(z)| \geq 1 \forall z \in \mathbb{C}$ mit $|z| > R$.
Annahme: $p(z) \neq 0 \forall z \in \mathbb{C}$. Dann $q := \frac{1}{p} \in H(\mathbb{C})$ und $|q(z)| \leq 1$ für $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| > R$.
q ist stetig $\implies$ q ist beschränkt auf $\overline{U_R(0)}$ $\implies$ q ist auf $\mathbb{C}$ beschränkt.
10.2 $\implies$ q ist konstant $\implies$ p ist konstant, Wid! ∎

Satz 10.4 (Potenzreihenentwicklung)
Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ offen, $f \in H(D), z_0 \in D$ und $r > 0$ so, dass $U_r(z_0) \subseteq D$. Dann:

$$(*) f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad \forall z \in U_r(z_0)$$

wobei

$$(**) a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}} dw$$

mit $\gamma(t) = z_0 + \rho e^{it}, t \in [0, 2\pi], 0 < \rho < r$

Beweis
(**) folgt aus (*), 5.4 und 9.6. O.B.d.A.: $z_0 = 0$.
Sei $z \in U_r(0)$ und sei $R > 0$ so, dass $|z| < R < r$;
$\gamma_0(t) := z_0 + R \cdot e^{it}$ $(t \in [0, 2\pi])$.
Sei $w \in \text{Tr}(\gamma_0)$. Dann $\frac{|z|}{|w|} = \frac{|z|}{R} < 1$, also $\frac{f(w)}{w-z} = \frac{f(w)}{w} \cdot \frac{1}{1-\frac{z}{w}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(w)}{w^{n+1}} z^n$.
Also $\underbrace{\int_{\gamma_0} \frac{f(w)}{w - z} dw}_{\overset{9.4}{=} 2\pi i f(z)} = \int_{\gamma_0} (\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(w)}{w^{n+1}} z^n) dw$

$\overset{8.4}{=} \sum_{n=0}^{\infty} (\underbrace{\int_{\gamma_0} \frac{f(w)}{w^{n+1}} dw}_{\overset{9.6}{=} 2\pi i \cdot \frac{f^{(n)}(0)}{n!}}) z^n \implies f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (\frac{f^{(n)}(0)}{n!}) z^n$ ∎

Bemerkungen:
(1) 10.4 ist in $\mathbb{R}$ falsch.
Bekannt aus der Analysis: Die Funktion

$$f(x) := \begin{cases} e^{-1/x^2} & , x \in \mathbb{R} \backslash \{0\} \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$$

ist auf $\mathbb{R}$ bel. oft db und $f^{(n)}(0) = 0 \, \forall n \in \mathbb{N}_0$.
Also: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \equiv 0$ auf $\mathbb{R}$.

(2) Die Entwicklung (*) gilt in der größten offenen Kreisscheibe um z_0, die noch ganz in D liegt. Sei r_0 der Radius dieser Kreisscheibe (ist $D = \mathbb{C}$, so ist $r = \infty$). Sei R der KR der PR in (*). Also : $R \geq r_0$.

Satz 10.5 (Konvergenzsatz von Weierstraß)
$D \subseteq \mathbb{C}$ sei offen, (f_n) sei eine Folge in $H(D)$ und (f_n) konvergiere auf D **lokal gleichmäßig** gegen eine Funktion $f : D \to \mathbb{C}$.

(1) $f \in H(D)$

(2) (f_n') konvergiere auf D lokal gleichmäßig gegen f'.

Beweis

(1) 5.1 $\Rightarrow f \in C(D)$. Sei $\Delta \subseteq D$ ein Dreieck. (f_n) konvergiere auf $\partial\Delta$ gleichmäßig $\Rightarrow \int_{\partial\Delta} f(z)dz \overset{8.4}{=} \lim_{n\to\infty} \int_{\partial\Delta} f_n(z)dz \overset{9.1}{=} 0$.
9.7 $\Rightarrow f \in H(D)$.

(2) O.B.d.A. $f = 0$ auf D (ansonsten betrachte $f_n - f$). Sei $z_0 \in D$ und $r > 0$ so, daß $\overline{U_r(z_0)} \subseteq D$. Es genügt zu zeigen:
(f_n') konvergiert auf $\overline{U_{\frac{r}{2}}(z_0)}$ gleichmäßig gegen 0.
$\gamma(t) := z_0 + r \cdot e^{it} (t \in [0, 2\pi])$. $M_n := \max\limits_{w \in \mathrm{Tr}(\gamma)} |f_n(w)|$
Vor $\Rightarrow M_n \to 0$.
Sei $z \in \overline{U_{\frac{r}{2}}(z_0)}. f'_n(z) \overset{9.6}{=} \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f_n(w)}{(w-z)^2} dw$
$w \in \mathrm{Tr}(\gamma) : |w - z| \geq \frac{r}{2} \Rightarrow \frac{|f_n(w)|}{|w-z|^2} \leq \frac{4M_n}{r^2}$
$\Rightarrow |f_n'(z)| \leq \frac{1}{2\pi} \frac{4M_n}{r^2} 2\pi r = \frac{4M_n}{r}$
Also: $|f_n'(z)| \leq \frac{4M_n}{r} \forall z \in \overline{U_{\frac{r}{2}}(z_0)} \forall n \in \mathbb{N}$ und $M_n \to 0$. ■