

## 9. Oberer und unterer Limes

**Vereinbarung:** In diesem Paragraphen sei  $(a_n)$  stets eine *beschränkte* Folge in  $\mathbb{R}$ . 8.2  $\implies \mathcal{H}(a_n) \neq \emptyset$ .

### Satz 9.1 (Beschränktheit und Abgeschlossenheit der Häufungswerte)

$\mathcal{H}(a_n)$  ist beschränkt. Weiter existieren  $\max \mathcal{H}(a_n)$  und  $\min \mathcal{H}(a_n)$

#### Beweis

$\exists c > 0 : |a_n| \leq c \ \forall n \in \mathbb{N}$ . Sei  $\alpha \in \mathcal{H}(a_n)$ . 8.1  $\implies \exists \text{TF}(a_{n_k})$  von  $(a_n)$  mit  $a_{n_k} \rightarrow \alpha \ (k \rightarrow \infty)$ ,  
6.2  $\implies |a_{n_k}| \rightarrow |\alpha| \ (k \rightarrow \infty); |a_{n_k}| \leq c \ \forall k \in \mathbb{N} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} |\alpha| \leq c$ . Also:  $|\alpha| \leq c \ \forall \alpha \in \mathcal{H}(a_n)$ .  $\mathcal{H}(a_n)$  ist also beschränkt. Sei  $s := \sup \mathcal{H}(a_n)$ , z.Z.:  $s \in \mathcal{H}(a_n)$  (analog zeigt man:  $\inf \mathcal{H}(a_n) \in \mathcal{H}(a_n)$ )

Sei  $\varepsilon > 0$ . Dann ist  $s - \varepsilon$  keine obere Schranke von  $\mathcal{H}(a_n) \implies \exists \alpha \in \mathcal{H}(a_n) : \alpha > s - \varepsilon$ .

Wähle  $\delta > 0$  so, dass  $U_\delta(\alpha) \subseteq U_\varepsilon(s) \implies a_n \in U_\delta(\alpha)$  für unendlich viele  $n \in \mathbb{N} \implies a_n \in U_\varepsilon(s)$  für unendlich viele  $n \in \mathbb{N} \implies s \in \mathcal{H}(a_n)$ . ■

#### Definition

$\limsup a_n := \lim_{n \rightarrow \infty} \sup a_n := \max \mathcal{H}(a_n)$  heißt **oberer Limes** oder **Limes superior** von  $(a_n)$

$\liminf a_n := \lim_{n \rightarrow \infty} \inf a_n := \min \mathcal{H}(a_n)$  heißt **unterer Limes** oder **Limes inferior** von  $(a_n)$

**Beachte:**  $\liminf a_n \leq \alpha \leq \limsup a_n \ \forall \alpha \in \mathcal{H}(a_n)$ .

#### Beispiele:

(1) Ist  $(a_n)$  konvergent  $\xrightarrow{8.1} \mathcal{H}(a_n) = \{\lim a_n\} \implies \limsup a_n = \liminf a_n = \lim a_n$ .

(2)  $a_n = (-1)^n(1 + \frac{1}{n})^n; |a_n| = (1 + \frac{1}{n})^n \stackrel{7.6}{\leq} 3 \implies (a_n)$  ist beschränkt.

$a_{2n} = (1 + \frac{1}{2n})^{2n} \implies (a_{2n})$  ist eine Teilfolge von  $(a_n)$  und von der Folge  $((1 + \frac{1}{n})^n) \xrightarrow{8.1} e$  ( $a_{2n} \rightarrow e \ (n \rightarrow \infty)$ ). Analog:  $a_{2n-1} = -(1 + \frac{1}{2n-1})^{2n-1} \rightarrow -e$ . Also:  $e, -e \in \mathcal{H}(a_n)$ . Sei  $\alpha \in \mathbb{R} : e \neq \alpha \neq -e$ .

Wähle  $\varepsilon > 0$  so, dass:  $\underbrace{(U_\varepsilon(e) \cup U_\varepsilon(-e))}_{=:U} \cap U_\varepsilon(\alpha) \neq \emptyset \ (*)$

Etwa  $\varepsilon := \frac{1}{2} \min\{|\alpha - e|, |\alpha + e|\}$ .  $a_{2n} \rightarrow e \implies a_n \in U_\varepsilon(e)$  ffa gerade  $n$ .  $a_{2n-1} \rightarrow -e \implies a_n \in U_\varepsilon(-e)$  ffa ungerade  $n$ .  $\implies a_n \in U$  ffa  $n \in \mathbb{N} \implies a_n \in U_\varepsilon(\alpha)$  für höchstens endlich viele  $n \in \mathbb{N} \implies \alpha \notin \mathcal{H}(a_n)$ . Fazit:  $\mathcal{H}(a_n) = \{e, -e\}$ ,  $\limsup a_n = e$ ,  $\liminf a_n = -e$ .

**Satz 9.2 (Eigenschaften des Limes superior und inferior)**

Sei  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Dann:

$$\alpha = \liminf a_n \iff \forall \varepsilon > 0 \text{ gilt:}$$

- (1)  $\alpha - \varepsilon < a_n$  ffa  $n \in \mathbb{N}$
- (2)  $a_n < \alpha + \varepsilon$  für unendlich viele  $n \in \mathbb{N}$ .

$$\alpha = \limsup a_n \iff \forall \varepsilon > 0 \text{ gilt:}$$

- (1)  $\alpha - \varepsilon < a_n$  für unendlich viele  $n \in \mathbb{N}$
- (2)  $a_n < \alpha + \varepsilon$  ffa  $n \in \mathbb{N}$ .

**Beweis**

nur für  $\liminf$ .

„ $\implies$ “: Sei  $\alpha = \liminf a_n$ . Sei  $\varepsilon > 0$ .  $\alpha \in \mathcal{H}(a_n) \implies a_n \in U_\varepsilon(\alpha)$  für unendlich viele  $n \in \mathbb{N} \implies$  (ii).

**Annahme:** (i) gilt nicht. D.h.:  $a_n \leq \alpha - \varepsilon$  für unendlich viele  $n$ , etwa für  $n_1, n_2, n_3, \dots$  mit  $n_1 < n_2 < n_3 < \dots$ . Dann ist  $a_{n_k}$  eine Teilfolge von  $(a_n)$  mit  $a_{n_k} \leq \alpha - \varepsilon \forall k \in \mathbb{N}$ .  $a_{n_k}$  ist beschränkt.

$\xrightarrow{8.2} (a_{n_k})$  enthält eine konvergente Teilfolge  $(a_{n_{k_j}})$ ;  $\beta := \lim_{j \rightarrow \infty} a_{n_{k_j}}$ .  $(a_{n_{k_j}})$  ist auch eine Teilfolge

von  $(a_n) \xrightarrow{8.1} \beta \in \mathcal{H}(a_n) \implies \alpha \leq \beta$ .  $a_{n_{k_j}} \leq \alpha - \varepsilon \forall j \in \mathbb{N} \xrightarrow{j \rightarrow \infty} \beta \leq \alpha - \varepsilon \implies \alpha \leq \alpha - \varepsilon$ , Widerspruch!

„ $\Leftarrow$ “: für jedes  $\varepsilon > 0$  gelte (i) und (ii). Sei  $\varepsilon > 0 \xrightarrow{(i),(ii)} \alpha - \varepsilon < a_n < \alpha + \varepsilon$  für unendlich viele  $n \implies a_n \in U_\varepsilon(\alpha)$  für unendlich viele  $n \implies \alpha \in \mathcal{H}(a_n)$ . Sei  $\beta < \alpha$ . Zu zeigen:  $\beta \notin \mathcal{H}(a_n)$ .  
 $\varepsilon := \frac{\alpha - \beta}{2} \implies \beta + \varepsilon = \alpha - \varepsilon$ . (i)  $\implies a_n > \alpha - \varepsilon = \beta + \varepsilon$  ffa  $n \in \mathbb{N} \implies a_n \in U_\varepsilon(\beta)$  für höchstens endlich viele  $n \implies \beta \notin \mathcal{H}(a_n)$ . ■

**Satz 9.3 (Äquivalenzaussagen zur Konvergenz)**

Die folgende Aussagen sind äquivalent:

- (1)  $\liminf a_n = \limsup a_n$
- (2)  $(a_n)$  hat genau einen Häufungswert
- (3)  $(a_n)$  ist konvergent

**Beweis**

(1) (1)  $\iff$  (2) Klar.

(2) (3)  $\implies$  (2) 8.1.

- (3) (2)  $\implies$  (3) Sei  $\mathcal{H}(a_n) = \{\alpha\} \implies \limsup a_n = \liminf a_n = \alpha$ .  
 Sei  $\varepsilon > 0 \xrightarrow{9.2} \alpha - \varepsilon < a_n < \alpha + \varepsilon \text{ ffa } n \in \mathbb{N} \implies |a_n - \alpha| < \varepsilon \text{ ffa } n \in \mathbb{N} \implies a_n \rightarrow \alpha \text{ (} n \rightarrow \infty \text{)}.$  ■

#### Folgerung 9.4

Sei  $(b_n)$  eine Folge in  $\mathbb{R}$ .  $(b_n)$  ist konvergent genau dann, wenn  $(b_n)$  beschränkt ist und genau einen Häufungswert hat. **Beweis** „ $\implies$ “: 6.1, 9.3; „ $\Leftarrow$ “: 9.3

#### Beispiel

auf die Voraussetzung „ $(b_n)$  beschränkt“ kann in 9.4 nicht verzichtet werden!

**Beispiel:**  $(b_n) = (1, 0, 3, 0, 5, 0, \dots)$

#### Satz 9.5 (Rechenregeln für den Limes superior und inferior)

Sei  $(b_n)$  eine weitere beschränkte Folge in  $\mathbb{R}$ .

- (1) aus  $a_n \leq b_n \text{ ffa } n \in \mathbb{N}$  folgt  $\limsup a_n \leq \limsup b_n$   
 aus  $a_n \leq b_n \text{ ffa } n \in \mathbb{N}$  folgt  $\liminf a_n \leq \liminf b_n$
- (2)  $\limsup(a_n + b_n) \leq \limsup a_n + \limsup b_n$   
 $\liminf(a_n + b_n) \geq \liminf a_n + \liminf b_n$
- (3)  $\limsup(\alpha a_n) = \alpha \limsup a_n \quad \forall \alpha \geq 0$   
 $\liminf(\alpha a_n) = \alpha \liminf a_n \quad \forall \alpha \geq 0$
- (4)  $\limsup(-a_n) = -\liminf a_n$   
 $\liminf(-a_n) = -\limsup a_n$

**Beweis:** Übung

