

7. Der komplexe Logarithmus

Definition

Sei $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Jedes $z \in \mathbb{C}$ mit $e^z = w$ heißt **ein Logarithmus von w** . Man schreibt in diesem Fall (ungenau): $z = \log w$.

Satz 7.1

Sei $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $w = |w|e^{i\text{Arg}w}$ ($\text{Arg}w \in (-\pi, \pi]$)

Für $z \in \mathbb{C}$ gilt: $e^z = w \iff \exists k \in \mathbb{Z} : z = \log |w| + i\text{Arg}w + 2k\pi i$ ($\log |w|$ ist der reelle Log)

Beweis

$$" \Leftarrow " : e^z = \underbrace{e^{\log |w|}}_{|w|} e^{i\text{Arg}w} \underbrace{e^{2k\pi i}}_1 = |w|e^{i\text{Arg}w} = w$$

$$" \Rightarrow " \text{ Sei } z = x + iy (x, y \in \mathbb{R}) \text{ und } e^z = w. \text{ Dann: } |w| = |e^z| = e^x \Rightarrow x = \log |w|$$

$$|w|e^{i\text{Arg}w} = w = e^z = e^x e^{iy} = |w|e^{iy}$$

$$\Rightarrow e^{iy} = e^{i\text{Arg}w} \Rightarrow e^{i(y - \text{Arg}w)} = 1 \xrightarrow{6.3} \exists k \in \mathbb{Z} : iy - i\text{Arg}w = 2k\pi i$$

$$\Rightarrow z = \log |w| + i\text{Arg}w + 2k\pi i$$

■

Definition

Die Funktion $\text{Log} : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$ def. durch $\text{Log}w := \log |w| + i\text{Arg}w$ heißt der **Hauptzweig des Logarithmus**.

Beispiele:

(1) Alle Log von $w = 1$: $2k\pi i$ ($k \in \mathbb{Z}$)

$$\text{Log } 1 = 0$$

(2) $\text{Log}(-1) = i\pi$

(3) $w = 1 + i$, $|w| = \sqrt{2}$, $\text{Arg}w = \frac{\pi}{4}$

$$\text{Log}(1 + i) = \log \sqrt{2} + i\frac{\pi}{4}$$

Satz 7.2

Sei $A = \{z \in \mathbb{C} : -\pi < \operatorname{Im} z \leq \pi\}$

$f := \exp|_A$

- (1) f ist auf A injektiv.
- (2) $f(A) = \mathbb{C} \setminus \{0\}$
- (3) $f^{-1}(w) = \operatorname{Log} w$ ($w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$)
- (4) Die Funktion Log ist unstetig in jedem $w \in \mathbb{R}$ und $w < 0$

Beweis

- (1) 6.3, 7.1
- (2) 6.3, 7.1
- (3) 6.3, 7.1
- (4) §3 Beispiel: $w \mapsto \operatorname{Arg} w$ ist in $w < 0$ unstetig. ■

Definition

$\mathbb{C}_- := \mathbb{C} \setminus \{t \in \mathbb{R} : t \leq 0\} (\subseteq \mathbb{C} \setminus \{0\})$

Für $w \in \mathbb{C}_-$ ist $\operatorname{Arg} w \in (-\pi, \pi)$.

Satz 7.3

$\operatorname{Log} \in C(\mathbb{C}_-)$

Beweis

Sei $w_0 \in \mathbb{C}_-$, $z_0 := \operatorname{Log} w_0$, $x_0 := \operatorname{Re} z_0$, $y_0 := \operatorname{Im} z_0$; also: $x_0 = \log |w_0|$, $y_0 = \operatorname{Arg} w_0 \in (-\pi, \pi)$.

$R := \{z = x + iy : x, y \in \mathbb{R}, |x - x_0| \leq \log 2, |y| \leq \pi\}$.

Sei $\varepsilon > 0$ so klein, dass $K := R \cap (\mathbb{C} \setminus U_\varepsilon(z_0)) \neq \emptyset$. Klar: K ist kompakt, $z_0 \notin K$.

Definiere $\varphi : K \rightarrow \mathbb{R}$ durch $\varphi(z) := |e^z - w_0| = |e^z - e^{z_0}|$.

Dann: $\varphi \in C(K)$. 3.3 $\Rightarrow \exists \varrho := \min \varphi(K)$.

Annahme: $\varrho = 0$. Also existiert ein $z \in K : e^z = e^{z_0} \Rightarrow e^{z-z_0} = 1$. 6.3 $\Rightarrow \exists j \in \mathbb{Z} : z - z_0 = 2j\pi i \Rightarrow 2j\pi = \operatorname{Im}(z - z_0) = \operatorname{Im} z - \operatorname{Im} z_0 \Rightarrow 2|j|\pi = |\operatorname{Im} z - \operatorname{Im} z_0| \leq \underbrace{|\operatorname{Im} z|}_{\leq \pi} + \underbrace{|\operatorname{Im} z_0|}_{< \pi} < 2\pi \Rightarrow$

$j = 0 \Rightarrow z_0 = z \in K$. Wid!

Also: $\varrho > 0$

$\delta := \min\{\varrho, \frac{1}{2}e^{x_0}\}$. Sei $w \in \mathbb{C}_-$ und $|w - w_0| < \delta$; $z := \log w$. Z.z: $|z - z_0| < \varepsilon$.

Sei $z = x + iy$ ($x, y \in \mathbb{R}$); $y = \operatorname{Arg} w \in (-\pi, \pi)$, also: $|y| \leq \pi$.

Annahme: $x > x_0 + \log 2$. Dann:

$\frac{1}{2}e^{x_0} \geq \delta > |w - w_0| = |e^z - e^{z_0}| \geq ||e^z| - |e^{z_0}|| = |e^x - e^{x_0}| \geq e^x - e^{x_0} > e^{x_0 + \log 2} - e^{x_0} = e^{x_0}$ Wid!

Also: $x \leq x_0 + \log 2$. Analog: $x \geq x_0 - \log 2$.

Fazit: $z \in R$.

Annahme: $|z - z_0| \geq \varepsilon \Rightarrow z \in K \Rightarrow \delta \leq \varrho \leq \varphi(z) = |e^z - e^{z_0}| = |w - w_0| < \delta$. Wid! ■

Satz 7.4

$\text{Log} \in H(\mathbb{C}_-)$ und $\text{Log}' w = \frac{1}{w} \forall w \in \mathbb{C}_-$

Beweis

Sei $w_0 \in \mathbb{C}_-$; (w_n) eine Folge in \mathbb{C}_- mit: $w_n \neq w_0 \forall n \in \mathbb{N}$ und $w_n \rightarrow w_0$, $z_0 := \text{Log} w_0$, $z_n := \text{Log} w_n$. 7.3 $\Rightarrow z_n \rightarrow z_0$. Dann:

$$\frac{\text{Log} w_n - \text{Log} w_0}{w_n - w_0} = \frac{z_n - z_0}{e^{z_n} - e^{z_0}} = \left(\frac{e^{z_n} - e^{z_0}}{z_n - z_0} \right)^{-1} \rightarrow \frac{1}{e^{z_0}} = \frac{1}{w_0}$$

D.h. Log ist in w_0 komplex differenzierbar und $\text{Log}' w_0 = \frac{1}{w_0}$ ■

Bezeichnung: $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\} = U_1(0)$

Beachte: Für $z \in \mathbb{D}$ ist $1 - z \in \mathbb{C}_-$

Satz 7.5

Für alle $z \in \mathbb{D}$ gilt:

$$\text{Log}(1 + z) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{z^n}{n}$$

Beweis

7.4, 5.4 $\Rightarrow f(z) := \text{Log}(1 + z) - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{z^n}{n}$ ist auf \mathbb{D} holomorph und
 $f'(z) = \frac{1}{1+z} - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} z^{n-1} = \frac{1}{1+z} - \sum_{n=1}^{\infty} (-z)^{n-1} = \frac{1}{1+z} - \frac{1}{1-(-z)} = 0 \forall z \in \mathbb{D}$

\mathbb{D} ist ein Gebiet $\stackrel{4.2}{\Rightarrow} f$ ist auf \mathbb{D} konstant. $f(0) = 0 \Rightarrow \text{Beh.}$ ■

Definition

Sei $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ und $a \in \mathbb{C}$.

$w^a := e^{a \text{Log} w}$ (**Hauptzweig der allgemeinen Potenz**)

Beispiele:

(1) Für $a = k \in \mathbb{Z}$ ist obige Definition die frühere Potenz von w . Denn: $\forall k \in \mathbb{N}$:

$$e^{k \text{Log} w} = e^{\text{Log} w + \text{Log} w + \dots + \text{Log} w} = (e^{\text{Log} w})^k = w^k$$

$$e^{-k \text{Log} w} = \frac{1}{e^{k \text{Log} w}} \stackrel{s.o.}{=} \frac{1}{w^k} = w^{-k}$$

(2) $w = a = i$, $\log |w| = 0$, $\text{Arg} w = \frac{\pi}{2}$, $\text{Log} w = i \frac{\pi}{2} \Rightarrow i^i = e^{i \cdot i \frac{\pi}{2}} = e^{-\frac{\pi}{2}} \in \mathbb{R}$

Satz 7.6

Sei $a \in \mathbb{C}$ und $f : \mathbb{C}_- \rightarrow \mathbb{C}$ definiert durch $f(w) := w^a$. Dann:

$f \in H(\mathbb{C}_-)$ und $f'(w) = a w^{a-1} \forall w \in \mathbb{C}_-$

7. Der komplexe Logarithmus

Beweis

$$7.4, 4.4 \Rightarrow f \in H(\mathbb{C}_-) \text{ und } f'(w) = e^{a \operatorname{Log} w} (a \operatorname{Log} w)' = a e^{a \operatorname{Log} w} \frac{1}{w} \stackrel{Bsp(1)}{=} a e^{a \operatorname{Log} w} e^{-\operatorname{Log} w} = a e^{(a-1) \operatorname{Log} w} = a w^{a-1} \quad \blacksquare$$