

# 17. Stetigkeit

**Vereinbarung:** In diesem Paragraphen seien stets:  $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{R}$ ,  $x_0 \in D$  und  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion.

## Definition

- (1)  $f$  heißt stetig in  $x_0 : \iff$  für jede Folge  $(x_n)$  in  $D$  mit  $x_n \rightarrow x_0$  gilt:  $f(x_n) \rightarrow f(x_0)$ .
- (2)  $f$  heißt stetig auf  $D : \iff$   $f$  ist in jedem  $x \in D$  stetig.
- (3)  $C(D) := \{g : D \rightarrow \mathbb{R} : g \text{ ist stetig auf } D\}$ .

## Beispiele:

$$(1) D := [0, 1] \cup 2. f(x) := \begin{cases} x^2 & \text{für } x \in [0, 1) \\ 0 & \text{für } x = 1 \\ 1 & \text{für } x = 2 \end{cases}$$

Klar:  $f$  ist stetig in jedem  $x \in [0, 1)$ .

$x_0 = 1$ :  $x_n = 1 - \frac{1}{n} \implies x_n \rightarrow 1$ .  $f(x_n) = (1 - \frac{1}{n})^2 \rightarrow 1 \neq 0 = f(1) \implies f$  ist in  $x_0 = 1$  nicht stetig.

$x_0 = 2$ : Sei  $(x_n)$  eine Folge in  $D$  mit  $x_n \rightarrow 2 \implies x_n = 2$  ffa  $n \in \mathbb{N} \implies f(x_n) = 1$  ffa  $n \in \mathbb{N} \implies f(x_n) \rightarrow 1 = f(2)$ . Das heißt:  $f$  ist stetig in  $x_0 = 2$ .

$$(2) D := [0, \infty), p \in \mathbb{N}, f(x) := \sqrt[p]{x}, \S 16 \implies f \in C[0, \infty).$$

## Satz 17.1 (Stetigkeitssätze)

- (1)  $f$  ist stetig in  $x_0 \iff \forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) : |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \forall x \in D_\delta(x_0)$ .
- (2) Ist  $x_0$  Häufungspunkt von  $D$ , so gilt:  $f$  ist stetig in  $x_0 \iff \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  existiert und ist gleich  $f(x_0)$ .
- (3) Ist  $g : D \rightarrow \mathbb{R}$  eine weitere Funktion und sind  $f, g$  stetig in  $x_0$ , dann sind  $f + g, fg$  und  $|f|$  stetig in  $x_0$ .
- (4) Sei  $\tilde{D} := \{x \in D : f(x) \neq 0\}$  und  $x_0 \in \tilde{D}$  und  $f$  sei stetig in  $x_0$ . Dann ist  $\frac{1}{f} : \tilde{D} \rightarrow \mathbb{R}$  stetig in  $x_0$ .

## Beweis

- (1) Wie bei 16.1
- (2) Als Übung
- (3) und
- (4) wie bei 16.2

■

**Satz 17.2 (Stetigkeit der Potenzreihen)**

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  sei Potenzreihe mit dem Konvergenzradius  $r > 0$ . Es sei  $D = (-r, r)$  und  $f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  ( $x \in D$ ). Dann:  $f \in C(D)$ . Insbesondere gilt für  $x_0 \in D$ :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \stackrel{17.1(2)}{=} f(x_0) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n = \sum_{n=0}^{\infty} \lim_{x \rightarrow x_0} a_n x^n$$

**Beweis**

Später in §19 ■

**Beispiel 17.3**

(1)  $e^x, \sin x, \cos x$  sind auf  $\mathbb{R}$  stetig.

(2)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$

(3)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$

(4)  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{x_0+h} - e^{x_0}}{h} = e^{x_0}.$

**Beweis**

(1) Folgt aus 17.2

(2) Für  $x \neq 0$ :

$$\frac{1}{x} \sin x = \frac{1}{x} \cdot \left( x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots \right) = 1 - \underbrace{\frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \dots}_{\text{Potenzreihe mit KR } \infty, \text{ also stetig (in } x=0)} \xrightarrow{17.2} 1 \quad (x \rightarrow 0)$$

(3) Für  $x \neq 0$ :

$$\frac{e^x - 1}{x} = \frac{1}{x} \cdot \left( 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots - 1 \right) = 1 + \underbrace{\frac{x}{2!} + \frac{x^2}{3!} + \dots}_{\text{Potenzreihe mit KR } \infty, \text{ also stetig (in } x=0)} \xrightarrow{17.2} 1 \quad (x \rightarrow 0)$$

(4)  $\frac{e^{x_0+h} - e^{x_0}}{h} = e^{x_0} \frac{e^h - 1}{h} \xrightarrow{(3)} e^{x_0} \cdot 1 = e^{x_0} \quad (h \rightarrow 0)$  ■

**Satz 17.4 (Stetigkeit von verketteten stetigen Funktionen)**

Sei  $E \subseteq \mathbb{R}$ ,  $g : E \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion und  $f(D) \subseteq E$ .  $f$  sei stetig in  $x_0 \in D$  und  $g$  sei stetig in  $y_0 := f(x_0)$ . Dann ist  $g \circ f : D \rightarrow \mathbb{R}$  stetig in  $x_0$ .

**Beweis**

Sei  $(x_n)$  eine Folge in  $D$  mit  $x_n \rightarrow x_0$ .  $f$  ist stetig in  $x_0 \implies \underbrace{f(x_n)}_{=:y_n} \rightarrow f(x_0) = y_0$ .  $g$  stetig in

$$y_0 \implies \underbrace{g(y_n)}_{=:g(f(x_n))=(g \circ f)(x_n)} \rightarrow g(y_0) = g(f(x_0)) = (g \circ f)(x_0). \quad \blacksquare$$

