

# 18. Normale Endomorphismen

## 18.1. Die adjungierte lineare Abbildung

Seien  $V, W$   $\mathbb{K}$ -Vektorräume mit Skalarprodukt  $\langle \cdot, \cdot \rangle_V, \langle \cdot, \cdot \rangle_W$

**Lemma:**

Sei  $\phi \in \text{Hom}(V, W)$ . Falls  $\Psi \in \text{Hom}(W, V)$  mit der Eigenschaft

$$\langle \phi(x), y \rangle_W = \langle x, \Psi(y) \rangle_V \quad \forall x \in V, y \in W,$$

so ist  $\Psi$  hierdurch eindeutig bestimmt.

**Beweis:** Sei  $\Psi' : W \rightarrow V$  ein Homomorphismus mit derselben Eigenschaft

$\implies$  Für  $\Omega := \Psi - \Psi' \in \text{Hom}(W, V)$  gilt:

$$\begin{aligned} \forall x \in V, y \in W : \langle x, \Omega(y) \rangle_V &= \langle x, \Psi(y) - \Psi'(y) \rangle_V \\ &= \langle x, \Psi(y) \rangle_V - \langle x, \Psi'(y) \rangle_V \\ &= \langle \phi(x), y \rangle_W - \langle \phi(x), y \rangle_W \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\implies \langle \Omega(y), \Omega(y) \rangle_V = 0 \implies \Omega(y) = 0 \quad \forall y$$

Also:  $\Omega = 0$ , d.h.  $\Psi = \Psi'$ . ■

**Definition:** Falls  $\Psi$  existiert wie oben, so heißt  $\Psi$  der zu  $\phi$  adjungierte Homomorphismus.

Schreibe:  $\Psi =: \phi^* \quad \text{Hom}^a(V, W) := \{\phi \in \text{Hom}(V, W) \mid \phi^* \text{ existiert}\}$

**Beispiel:**  $V = \mathbb{K}^n, W = \mathbb{K}^m$  mit Standardskalarprodukt.

$A \in \mathbb{K}^{n \times m}, \phi := \Lambda_A : x \mapsto A \cdot x$

$$\langle \phi(x), y \rangle_W = \langle Ax, y \rangle_W = \bar{y}^T Ax = (y^* A)x = (A^* y)^* = \langle x, A^* y \rangle_V = \langle x, \Lambda_{A^*}(y) \rangle$$

Das heißt:  $(\Lambda_A)^* = \Lambda_{A^*}$ . Insbesondere existiert die Adjungierte.

**Proposition:** (1)  $\text{Hom}^a(V, W) \leq \text{Hom}(V, W)$

(2) Für die Abbildung  $*$  :  $\text{Hom}^a(V, W) \rightarrow \text{Hom}(W, V), \phi \mapsto \phi^*$  gilt:

$$(\alpha\phi + \beta\Psi)^* = \bar{\alpha}\phi^* + \bar{\beta}\Psi^*$$

Die Abbildung ist **semilinear**.

(3) Aus  $\phi \in \text{Hom}^a(V, W)$ ,  $\Theta \in \text{Hom}^a(W, U)$  folgt  $\Theta \circ \phi \in \text{Hom}^a(V, U)$  und  $(\Theta \circ \phi)^* = \phi^* \circ \Theta^*$

(4) Aus  $\phi \in \text{Hom}^a(V, W)$  folgt  $\phi^* \in \text{Hom}^a(W, V)$  und  $(\phi^*)^* = \phi$ , sowie  $\text{Kern } \phi = \text{Bild}(\phi^*)^\perp$ .

**Beweis:** (1) +(2) Sei  $\phi, \Psi \in \text{Hom}^a(V, W)$ ,  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ .  
 $\bar{\alpha}\phi^* + \bar{\beta}\Psi^*$  ist die Adjungierte zu  $\alpha\phi + \beta\Psi$ , denn

$$\begin{aligned} \langle (\alpha\phi + \beta\Psi)(x), y \rangle &= \alpha \underbrace{\langle \phi(x), y \rangle}_{\langle x, \phi^*(y) \rangle} + \beta \underbrace{\langle \Psi(x), y \rangle}_{\langle x, \Psi^*(y) \rangle} \\ &= \langle x, \bar{\alpha}\phi^*(y) + \bar{\beta}\Psi^*(y) \rangle \end{aligned}$$

(3) Für alle  $x \in V$ ,  $y \in U$  gilt:

$$\begin{aligned} \langle \Theta \circ \phi(x), y \rangle &= \langle \Theta(\phi(x)), y \rangle \\ &= \langle \phi(x), \Theta^*(y) \rangle \\ &= \langle x, \phi^*(\Theta^*(y)) \rangle \end{aligned}$$

(4) Es gilt

$$\begin{aligned} \langle \phi^*(y), x \rangle &= \overline{\langle x, \phi^*(y) \rangle} \\ &= \overline{\langle \phi(x), y \rangle} \\ &= \langle y, \phi(x) \rangle \end{aligned}$$

Das heißt  $\phi^*$  hat die Adjungierte  $(\phi^*)^* = \phi$

Weiterhin gilt:

$$\begin{aligned} x \in \text{Kern}(\phi) &\iff \phi(x) = 0 \\ &\iff \forall y \in W : \underbrace{\langle \phi(x), y \rangle}_{\langle x, \phi^*(y) \rangle} = 0 \\ &\iff x \perp \phi^*(W) \end{aligned}$$

■

Sei  $V$  ein Vektorraum mit Skalarprodukt  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ,  $\phi \in \text{End}(V)$  mit  $\langle \phi(x), y \rangle = \langle x, \phi^*(y) \rangle$ .

**Lemma:**

Sei  $\dim V < \infty$ ,  $\phi \in \text{End}(V)$ . Dann gilt:

$$\lambda \in \text{Spec}(\phi) \implies \bar{\lambda} \in \text{Spec}(\phi^*)$$

**Beweis:** Sei  $u \neq 0$ ,  $\phi(u) = \lambda \cdot u$ . Dann gilt für alle  $y \in V$ :

$$0 = \langle (\phi - \lambda \text{id})(u), y \rangle = \langle u, e(\phi - \lambda \text{id})^*(y) \rangle$$

Nach Proposition gilt  $(\phi - \lambda \text{id})^* = \phi^* - \bar{\lambda} \text{id}$ .

Dann ist  $0 = \langle u, \underbrace{(\phi^* - \bar{\lambda} \text{id})(y)}_{\neq u} \rangle$  (wegen der positiven Definitheit und  $u \neq 0$ ).

Daraus folgt:

$$\begin{aligned} \phi^* - \bar{\lambda} \text{id} \text{ ist nicht surjektiv} &\iff \phi^* - \bar{\lambda} \text{id} \text{ ist nicht injektiv} \\ &\iff \exists v \neq 0 : \phi^*(v) = \bar{\lambda}v \\ &\implies \bar{\lambda} \in \text{Spec}(\phi^*) \end{aligned}$$

■

## 18.2. Der Spektralsatz

**Proposition:** Sei  $\phi \in \text{End}^a(V)$

(1) Für  $\lambda, \mu \in \text{Spec}(\phi)$  mit  $\lambda \neq \mu$  gilt:

$$E_\lambda(\phi) \perp E_\mu(\phi)$$

(2) Folgende Aussagen sind äquivalent:

$$(a) \quad \phi \circ \phi^* = \phi^* \circ \phi$$

$$(b) \quad \forall x, y \in V : \langle \phi(x), \phi(y) \rangle = \langle \phi^*(x), \phi^*(y) \rangle$$

$\phi$  heißt **normal**.

(3) Ist  $\phi$  normal, dann folgt  $\text{Kern}(\phi) = \text{Kern}(\phi^*)$ , insbesondere  $E_\lambda(\phi) = E_{\bar{\lambda}}(\phi^*)$ .

**Beweis:** (1) Seien  $u \in E_\lambda(\phi)$ ,  $v \in E_\mu(\phi)$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} \lambda \langle u, v \rangle &= \langle \lambda u, v \rangle \\ &= \langle \phi(u), v \rangle \\ &= \langle u, \phi^*(v) \rangle \\ &= \langle u, \bar{\mu}v \rangle \\ &= \mu \langle u, v \rangle \end{aligned}$$

Mit  $\lambda \neq \mu$  folgt  $\langle u, v \rangle = 0$

■

### Satz 17 (Spektralsatz):

Sei  $\dim V < \infty$ ,  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  Skalarprodukt mit  $\phi \in \text{End}(V)$  normal.

Im Fall  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  habe das charakteristische Polynom  $f_\phi(T)$  nur reelle Nullstellen. Dann existiert eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren von  $\phi$ .

**Beweis:** Sei  $n := \dim V$ ,  $\lambda_1 \in \text{Spec}(\phi)$ ,  $b_1 \neq 0 \in E_{\lambda_1}(\phi)$ . Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei  $\|b_1\| = 1$ .

Betrachte das orthogonale Komplement  $U := b_1^\perp$ . Es gilt

$$V = \langle b_1 \rangle \oplus U,$$

wobei  $\phi(U) \subseteq U$ ,  $\phi^*(U) \subseteq U$  ist, denn für alle  $u \in U$  gilt

$$\begin{aligned} \langle \phi(u), b_1 \rangle &= \langle u, \phi^*(b_1) \rangle \\ &= \langle u, \overline{\lambda_1} b_1 \rangle \\ &= \lambda_1 \underbrace{\langle u, b_1 \rangle}_{=0} = 0 \end{aligned}$$

Daraus folgt  $\phi(u) \perp b_1$ , das heißt  $\phi(U) \perp b_1$ , damit folgt  $\phi(U) \subseteq U$ .

Für  $\phi^*$  ist die Vorgehensweise analog.

Insbesondere ist  $\phi|_U \in \text{End}(U)$ .

Ferner gilt  $(\phi|_U)^* = \phi^*|_U$ , also

$$\begin{aligned} \phi|_U \phi^*|_U &= (\phi\phi^*)|_U \\ &\stackrel{\phi \text{ normal}}{=} (\phi^*\phi)|_U \\ &= \phi^*|_U \phi|_U \end{aligned}$$

Also ist  $\phi$  normal.

Vollständige Induktion nach  $n$ :

$n-1 \rightsquigarrow n$ :  $U$  hat eine Orthonormalbasis  $\{b_2, \dots, b_n\}$  aus Eigenvektoren von  $\phi|_U$ .

Dann ist  $\{b_1, b_2, \dots, b_n\}$  die gesuchte Orthonormalbasis. ■

### Lemma (Transfer zu Matrizen):

Für beliebiges  $\phi \in \text{End}(V)$  sei  $s_\phi$  die Sesquilinearform

$$s_\phi(x, y) := \langle \phi(x), y \rangle$$

$B$  sei eine Orthonormalbasis von  $V$ . Dann gilt:

$$(1) \ D_{BB}(\phi^*) = D_{BB}(\phi)^*$$

$$(2) \ D_{BB}(s_\phi) = D_{BB}(\phi)^\top$$

$$(3) \ \phi \text{ ist normal, genau dann wenn für } A := D_{BB}(\phi) \text{ gilt:}$$

$$A \cdot A^* = A^* \cdot A$$

**Beweis:** Sei  $B = \{b_1, \dots, b_n\}$ .

Erinnere:  $D_{BB}(\phi) = (x_{ij})$  ist definiert durch  $\phi(b_{ij}) = \sum_{i=1}^n \alpha_{ij} b_i$ .

Es gilt

$$\begin{aligned} s_\phi(b_j, b_k) &= \langle \phi(b_j), b_k \rangle \\ &= \sum_{i=1}^n \alpha_{ij} \underbrace{\langle b_i, b_k \rangle}_{=\delta_{ik}} \\ &= \alpha_{kj} \end{aligned}$$

Damit folgt die Behauptung (2).

Sei  $D_{BB}(\phi^*) = (\beta_{ij})$ , das heißt

$$\begin{aligned} \overline{\alpha_{ji}} &= \overline{\langle \phi(b_i), b_j \rangle} \\ &= \langle b_j, \phi(b_i) \rangle \\ &= \langle \phi^*(b_j), b_i \rangle \\ &= \beta_{ij} \end{aligned}$$

Damit folgt die Behauptung (1).

Es bleibt noch Behauptung (3) zu zeigen:

$$\phi \cdot \phi^* \iff \underbrace{D_{BB}(\phi\phi^*)}_{=AA^*} = \underbrace{D_{BB}(\phi^*\phi)}_{=A^*A}$$

■

**Korollar (zum Spektralsatz):**

Für  $\lambda \in \text{Spec}(\phi)$  sei  $U_\lambda := E_\lambda(\phi)$  und  $\Pi_\lambda := \Pi_{U_\lambda}$  (orthogonale Projektion). Dann gilt für  $p(T) \in \mathbb{K}[T]$ :

$$p(\phi) = \sum_{\lambda \in \text{Spec}(\phi)} p(\lambda) \cdot \Pi_\lambda$$

und

$$\phi^* = \sum_{\lambda} \bar{\lambda} \cdot \Pi_\lambda$$

**Beweis:** Da  $U_\lambda \perp U_\mu$  für  $\lambda \neq \mu$  folgt  $\Pi_\lambda \Pi_\mu = \delta_{\lambda\mu} \Pi_\lambda$ .

Spektralsatz: Aus  $V = \bigoplus_{\lambda} U_\lambda$  folgt  $\text{id}_V = \sum_{\lambda} \Pi_\lambda$ .

Aus  $p(\phi)|_{U_\lambda} = p(\lambda) \cdot \text{id}_{U_\lambda}$  folgt  $p(\phi) = \sum_{\lambda} p(\lambda) \Pi_\lambda$ .

$\phi^*|_{U_\lambda} = \bar{\lambda} \cdot \text{id}_{U_\lambda}$  liefert

$$\begin{aligned} \phi^* &= \phi^* \cdot \text{id}_{U_\lambda} \\ &= \phi^* \cdot \sum_{\lambda} \Pi_\lambda \\ &= \sum_{\lambda} \phi^* \Pi_\lambda \\ &= \sum_{\lambda} \bar{\lambda} \Pi_\lambda \end{aligned}$$

■

**Satz 18:**

Seien  $\phi, \Psi \in \text{End}(V)$  normal und  $\phi \cdot \Psi = \Psi \cdot \phi$ .

Falls in  $V$  eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren existiert und eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren zu  $\Psi$ , dann existiert eine Orthonormalbasis aus gemeinsamen Eigenvektoren zu  $\phi$  und  $\Psi$ .

**Beweis:** Seien  $V = \bigoplus_{\lambda} U_{\lambda}$ ,  $U_{\lambda} := E_{\lambda}(\phi)$ .

Zeige:  $\Psi(U_{\lambda}) \subseteq U_{\lambda}$  und  $\Psi|_{U_{\lambda}}$  sind diagonalisierbar.

Dazu:

$$\begin{aligned} u \in U_{\lambda} &\implies \phi(u) = \lambda u \\ &\implies \Psi(\phi(u)) = \Psi(\lambda u) = \lambda \Psi(u) \\ &\iff \phi(\Psi(u)) = \lambda \Psi(u) \implies \Psi(u) \in U_{\lambda} \end{aligned}$$

Analog:  $\phi(E_{\mu}(\Psi)) \subseteq E_{\mu}(\Psi)$ .

Da  $V = \bigoplus_{\mu} E_{\mu}(\Psi)$ , gilt insbesondere für alle  $u \in U_{\lambda}$ :  $u = \sum_{\mu} x_{\mu} \in E_{\mu}(\Psi)$ . Es gilt sogar: jedes  $x_{\mu} \in U_{\lambda}$ , denn:

$$\phi(x_{\mu}) = x'_{\mu} \in E_{\mu}(\Psi)$$

$$\begin{aligned} \lambda \sum_{\mu}^{\oplus} x_{\mu} &= \lambda u \\ &= \phi(u) \\ &= \sum_{\mu} \phi(x_{\mu}) \\ &= \sum_{\mu}^{\oplus} x'_{\mu} \end{aligned}$$

Da die Summe direkt ist, folgt für alle  $\mu$

$$\lambda \cdot x_{\mu} = x'_{\mu} = \phi(x_{\mu}),$$

das heißt  $x_{\mu} \in U_{\lambda}$ .

Insgesamt gezeigt:

$$U_{\lambda} = \bigoplus_{\mu} E_{\mu}(\Psi) \cap U_{\lambda}$$

(d.h.  $\Psi|_{U_{\lambda}}$  ist diagonalisierbar). Damit folgt

$$V = \bigoplus_{\lambda} \bigoplus_{\mu} E_{\mu}(\Psi) \cap E_{\lambda}(\phi)$$

■

## 18.3. Selbstadjungierte Endomorphismen

**Definition:**  $\phi \in \text{End}(V)$  heißt **selbstadjungiert**, falls  $\phi^* = \phi$ .

**Bemerkung:** (1)  $\phi$  ist selbstadjungiert impliziert  $\phi$  ist normal.

(2) Ist  $\dim V < \infty$ ,  $B$  Orthonormalbasis und  $A := D_{BB}(\phi)$ , dann ist  $\phi$  selbstadjungiert genau dann wenn  $A = A^*$ , d.h.  $A$  ist hermitesch.

**Hintergrund:** Viele Problem in Physik und Technik führen auf hermitesche Matrizen.

**Satz 19:**

(1)  $A \in \mathbb{C}^{m \times m}$  mit  $A = A^\top$  impliziert  $\text{Spec}(A) \subseteq \mathbb{R}$  (oder: das charakteristische Polynom hat nur reelle Nullstellen).

(2) Für hermitesche  $A$  gilt:

$$A \text{ ist positiv definit} \iff \forall \lambda \in \text{Spec}(A) : \lambda > 0$$

**Beweis:** (1) Sei  $\lambda \in \text{Spec}(A)$  und  $v \neq 0$  mit  $Av = \lambda v$ . Dann:

$$\begin{aligned} \lambda \langle v, v \rangle &= \langle \lambda v, v \rangle \\ &= \langle Av, v \rangle \\ &= \langle v, A^* v \rangle \\ &= \langle v, Av \rangle \\ &= \langle v, \lambda v \rangle \\ &= \bar{\lambda} \underbrace{\langle v, v \rangle}_{= \|v\|^2 \neq 0} \end{aligned}$$

Also gilt  $\lambda = \bar{\lambda}$ , das heißt  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

(2)  $A$  ist nach Definition genau dann positiv definit wenn  $s_A(x, y) = x^\top A \bar{y}$  positiv definit ist.

Für eine Orthonormalbasis  $\{b_1, \dots, b_n\}$  aus Eigenvektoren von  $A = A^*$  gilt

$$Ab_i = \lambda b_i$$

und Basisdarstellung

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^m \alpha_i b_i \rightsquigarrow x = \sum_{i=1}^m \bar{\alpha_i} \bar{b_i}$$

und somit

$$\begin{aligned}
 s_A(x, x) &= x^\top A \bar{y} \\
 &= \sum_{i=1}^m \bar{\alpha}_i \bar{b}_i \sum_{j=1}^m \alpha_j \underbrace{A b_j}_{\lambda_j b_j} \\
 &= \sum_{i,j} \bar{\alpha}_i \alpha_j \lambda_j \bar{b}_i^\top b_j \\
 &= \sum_{i,j} \bar{\alpha}_i \alpha_j \lambda_j \underbrace{\langle \bar{b}_i, b_j \rangle}_{=\delta_{ij}} \\
 &= \sum_{i=1}^m |\alpha_i|^2 \lambda_i
 \end{aligned}$$

Also:  $s_A(x, x) = \sum_{i=1}^m |\alpha_i|^2 \lambda_i$ .

Dann folgt:

$$s_A(x, x) \geq 0 \forall x \iff \forall \lambda_i \geq 0$$

und

$$s_A(x, x) = 0 \implies x = 0$$

genau dann, wenn alle  $\lambda_i$  größer Null sind. ■

**Bemerkung:** Für selbstadjungierte, reelle  $A$  ist die Extravoraussetzung im Spektralsatz immer erfüllt.

**Korollar:**

Ist  $V$  ein  $\mathbb{R}$ -Vektorraum mit Skalarprodukt,  $\dim V < \infty$  und  $\phi \in \text{End}(V)$  selbstadjungiert, so besitzt  $V$  eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren zu  $\phi$ .

**Definition:** Sei  $V$  ein  $\mathbb{C}$ -Vektorraum und  $\phi \in \text{End}(V)$ .

Dann heißt  $\rho(\phi) := \sup\{|\lambda| \mid \lambda \in \text{Spec}(\phi)\}$  der **Spektralradius** von  $\phi$ . Für  $A \in \mathbb{C}^{m \times m}$  setze  $\rho(A) := \rho(\Lambda_A)$ .

**Bemerkung:** Auf  $\mathbb{K}^{m \times n}$  ist durch

$$\|A\| := \sup\{\|Ax\| \mid x \in \mathbb{K}^n, \|x\| \leq 1\}$$

eine Norm definiert.

**Satz 20:**

Es gilt  $\|A\| = \sqrt{\rho(A^*A)}$ .

Falls  $m = n$  und  $A$  normal ist, gilt sogar  $\|A\| = \rho(A)$ .



**Beweis:**  $A^*A$  ist selbstadjungiert, das heißt es gilt  $(A^*A)^* = A^* \cdot (A^*)^* = A^*A$ .

Dann existiert eine Orthonormalbasis  $\{b_1, \dots, b_n\}$  aus Eigenvektoren, etwa  $A^*Ab_i = \mu_i b_i$  mit  $\mu_i \in \mathbb{R}$ .

Dann gilt:

$$\begin{aligned} \|Ax\|^2 &= \langle Ax, Ax \rangle \\ &= \langle x, A^*Ax \rangle \\ x = \sum_{i=1}^n \alpha_i b_i &= \left\langle x, \sum_{i=1}^n \alpha_i \mu_i b_i \right\rangle \\ &= \sum_{i=1}^n |\alpha_i|^2 \underbrace{\overline{\mu_i}}_{=\mu_i} \end{aligned}$$

Außerdem:

$$\begin{aligned} \|Ax\|^2 &\leq \sum_i |\alpha_i|^2 \underbrace{\max\{|\mu_i|\}}_{=\rho(A^*A)} \\ &= \rho(A^*A) \|x\|^2 \end{aligned}$$

Sei  $x = \sum_i \alpha_i b_i$  die Basisdarstellung. Dann ist  $\|Ax\|^2 = \sum_i |\alpha_i|^2 \mu_i$ , also alle  $\mu_i \geq 0$ .

Weiterhin:  $A^*Ab_i = \mu_i b_i$  und  $\rho(A^*A) = \mu_{\max} = \mu_{i_0}$ , dazu  $b_{i_0}$ . Mit  $x := b_{i_0}$  folgt  $\|Ax\|^2 = \mu_{\max}$ .

**Speziell für normales  $A$  ( $m = n$ ):**

Es gilt  $E_\lambda(A) = E_{\overline{\lambda}}(A^*)$ . Dann:

$$\mu_i = \lambda_i \cdot \overline{\lambda_i} = |\lambda_i|^2$$

und damit folgt

$$\|A\| = |\mu_{\max}| = \rho(A)$$

■

**Vorsicht:** Im allgemeinen ist  $\|A\| \neq \rho(A)$ .

Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

mit  $\rho(A) = 0$  aber  $\|A\| = 1$ . Es ist

$$A^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A^*A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

