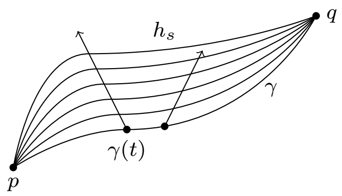
Kapitel 8.

Geodätische und die Exponentialabbildung

Heuristik: Geodätische sind Minimalstellen des Energiefunktionals $\gamma \mapsto E(\gamma) = \int \|\dot{\gamma}\|^2$. Was sind kritische Punkte dieser Abbildung? Für $f \in C^\infty(M)$ ist p kritischer Punkt, wenn alle Richtungsableitungen verschwinden, das heißt $0 = X(f) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0} (f(c(t)))$.



Eine „Kurve" durch γ ist eine sogenannte **glatte Variation** $h\colon [0,1] \times [0,1] \to M$, $h(s,t) = h_s(t)$ mit $h_0 = \gamma$ und $h_s(0) = p$, sowie $h_s(1) = q$ für alle $s \in [0,1]$. Dann ist

$$X(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\Big|_{s=0} h_s(t)$$

ein glattes Vektorfeld entlang γ. Ferner gilt $X(0) = 0$ und $X(1) = 0$. Nun betrachte

$$\begin{aligned}
0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\Big|_{s=0} E(h_s) &= \int_0^1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\Big|_{s=0} \left\langle \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} h_s(t), \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} h_s(t) \right\rangle \\
&= \int_0^1 2 \left\langle \nabla_s \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} h_s(t), \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} h_s(t) \right\rangle \\
&= \int_0^1 2 \left\langle \nabla_t \underbrace{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} h_s(t)}_{=X(t)}, \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} h_s(t) \right\rangle \\
&= \int_0^1 2 \left\langle \nabla_t X, \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} h_s(t) \right\rangle \\
&= 2 \int_0^1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left\langle X, \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} h_s(t) \right\rangle - \left\langle X, \nabla_t \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} h_s(t) \right\rangle \\
&= \underbrace{2 \int_0^1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left\langle X, \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} h_s(t) \right\rangle}_{=0} - 2 \int_0^1 \left\langle X, \nabla_t \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} h_s(t) \right\rangle \\
&= -2 \int_0^1 \langle X(t), \nabla_t \dot{\gamma}(t) \rangle \,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

Definition 8.1 *Eine glatte Kurve c in M heißt **Geodätische**[1], wenn $\nabla_t \dot{c} \equiv 0$ gilt.*

Ist c Geodätische, so ist c proportional zur Bogenlänge parametrisiert, das heißt $\|\dot{c}\|$ =const, denn $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\dot{c}(t)\|^2 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\langle \dot{c}(t), \dot{c}(t)\right\rangle = 2\left\langle \nabla_t \dot{c}(t), \dot{c}(t)\right\rangle = 0$. Mit c ist auch jede affine Umparametrisierung $t \mapsto c(at+b)$ eine Geodätische.

Proposition 8.2 *Für jedes $p \in M$ und $v \in \mathrm{T}_p M$ existiert genau eine Geodätische $\gamma_{p,v}\colon [0,\varepsilon] \to M$ mit $\gamma_{p,v}(0) = p$ und $\dot{\gamma}_{p,v}(0) = v$. Zudem hängt $\gamma_{p,v}$ glatt von p und v ab.*

Beweis (A) Es sei (φ, U) eine Karte um p, $\gamma^i(t) = \varphi^i(\gamma(t))$. Dann besitzt das folgende Anfangswertproblem

$$\begin{cases} 0 = \nabla_t \dot{\gamma}|_t = \sum_k \left(\ddot{\gamma}^k(t) + \sum_{ij} \Gamma_{ij}^k(\gamma(t))\dot{\gamma}^i(t)\gamma^j(t)\right) \frac{\partial}{\partial x^k}\Big|_{\gamma(t)} \\ \gamma^i(0) = \varphi^i(p) \\ \dot{\gamma}^i(0) = \xi_p^i, \quad v = \sum \xi_p^i \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p \end{cases}$$

eine eindeutige Lösung (lokal), welche glatt von den Startwerten p und v abhängt.

(B) (Alternativ) Ist (φ, U) eine Karte von M um p, dann ist

$$\overline{\varphi}\colon \begin{cases} \mathrm{T} M|_U & \to & \mathbb{R}^{2m} & \\ X_p = \sum \xi_p^i \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p & \mapsto & \overline{\varphi}(X_p) & = (\varphi^1(p), \ldots, \varphi^m(p), \xi_p^1, \ldots, \xi_p^m) \\ & & & =: (y^1, \ldots, y^{2m}) \end{cases}$$

eine Karte von $\mathrm{T} M$. Es sei S das durch

$$S\colon \begin{cases} \mathrm{T} M & \to & \mathrm{T}\,\mathrm{T} M \\ X = \sum \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i} & \mapsto & \sum_i^m \xi^i \frac{\partial}{\partial y^i} - \sum_{i,j,k=1}^m \Gamma_{ij}^k \xi^i \xi^j \frac{\partial}{\partial y^{m+k}} \end{cases}$$

definierte glatte Vektorfeld auf $\mathrm{T} M$. g^t ist genau dann Integralkurve von S durch $X_p = \sum \xi_p^i \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p$, wenn

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} g^t = \dot{g}^t = S(g^t) \text{ und } g^0 = X_p.$$

Setzt man $\overline{\varphi}(g^t) = (\gamma^1(t), \ldots, \gamma^m(t), \eta^1(t), \ldots, \eta^m(t))$, so ist dies genau dann der Fall, wenn gilt:

$$(\dot{\gamma}^1, \ldots, \dot{\gamma}^m, \dot{\eta}^1, \ldots, \dot{\eta}^m) = \left(\eta^1, \ldots, \eta^m, -\sum_{i,j} \Gamma_{ij}^1 \eta^i \eta^j, \ldots, -\sum_{i,j} \Gamma_{ij}^m \eta^i \eta^j\right)$$

$$\rightsquigarrow \eta^i = \dot{\gamma}^i \text{ und } \ddot{\gamma} = -\sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k \dot{\gamma}^i \dot{\gamma}^j$$

und

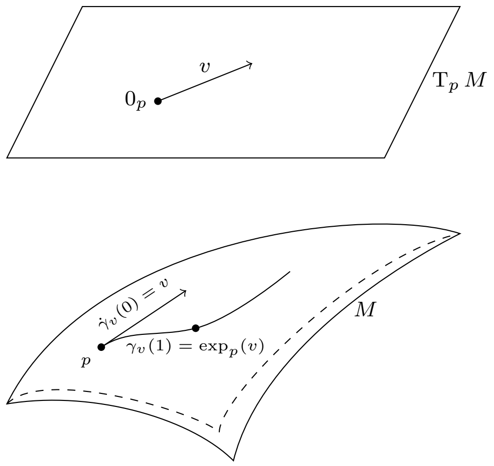
$$(\gamma^1(0), \ldots, \gamma^m(0), \eta^1(0), \ldots, \eta^m(0) = \overline{\varphi}(X_p) = (\varphi^1(p), \ldots, \varphi^m(p), \xi_p^1, \ldots, \xi_p^m)$$

also genau dann, wenn

$$\gamma(t) = \overline{\varphi}^{-1}(\gamma^1(t), \ldots, \gamma^m(t))$$

eine Geodätische durch p mit $\dot{\gamma}(0) = X_p$ ist. Der maximale Fluss g^t von S heißt **geodätischer Fluss**. Mit Satz 4.9 folgt die Aussage der Proposition. □

[1] Die Äquivalenz zur bereits bekannten Definition wird in Kürze gezeigt.



Für $v \in \mathrm{T}_p\, M$ sei $\gamma_v(t) = \pi(g^t(v))$ die eindeutige Geodätische mit $\gamma_v(0) = p$ und $\dot\gamma_v(0) = v$. Ist $\delta \in \mathbb{R}$ und $c(t) = \gamma_v(\delta t)$, so ist c eine Geodätische durch p mit $\dot c(0) = \delta v$, das heißt $c = \gamma_{\delta v}$, beziehungsweise $\gamma_{\delta v}(t) = \gamma_v(\delta t)$.
Der Definitionsbereich $\mathcal{D}_S$ des geodätischen Flusses ist eine offene Menge in $\mathbb{R} \times \mathrm{T}_p\, M$ und somit sind sowohl $\mathcal{D} = \{v \in \mathrm{T}\, M \mid (1, v) \in \mathcal{D}_S\}$, als auch $\mathcal{D}_p = \mathcal{D} \cap T_p M$ offen für alle $p \in M$ (in $\mathrm{T}\, M$, beziehungsweise $\mathrm{T}_p\, M$). Weiterhin gilt $0_p \in \mathcal{D}_p$.

Definition 8.3 *Die Abbildung* $\exp_p \colon \mathcal{D}_p \to M,\ v \mapsto \gamma_v(1)$ *heißt* ***Exponentialabbildung***.

Es wurde bereits gezeigt, dass $\nabla_t \dot\gamma_v \equiv 0$ ist (Geodätische Differentialgleichung). Die Exponentialabbildung ist nach Satz 4.6 glatt. Es gilt $\exp_p(0_p) = p$. Zur Berechnung des Differentials von $\exp_p$ in 0_p

$$\exp_{p*0_p} \colon\ \mathrm{T}_{0_p}\, \mathrm{T}_p\, M \to \mathrm{T}_p\, M$$

identifiziert man $\mathrm{T}_{0_p}\, \mathrm{T}_p\, M$ mit $\mathrm{T}_p\, M$. Es gilt

$$\exp_{p*0_p}(v) = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \exp_p(tv) = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \gamma_{tv}(1) = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \gamma_v(t) = \dot\gamma_v(0) = v,$$

also $\exp_{p*0_p} = \mathrm{id}_{\mathrm{T}_p\, M}$. Es existiert für alle $p \in M$ eine Umgebung V von $0_p \in \mathrm{T}_p\, M$ und U von p, so dass $\exp_p \colon V \to U$ ein Diffeomorphismus ist. Wählt man eine Orthonormalbasis $e_1, \dots, e_m$ von $\mathrm{T}_p\, M$ und setzt

$$\psi \colon\ \mathrm{T}_p\, M \to \mathbb{R}^m, v = \sum_i b^i e_i \mapsto (b^1, \dots, b^m),$$

so ist $(\psi \circ \exp_p|_U^{-1}, U)$ eine Karte von M um p. Im Allgemeinen ist dies keine Isometrie!

Definition 8.4 *Diese Karte bezeichnet man als* ***Riemannsche Normalkoordinaten***.

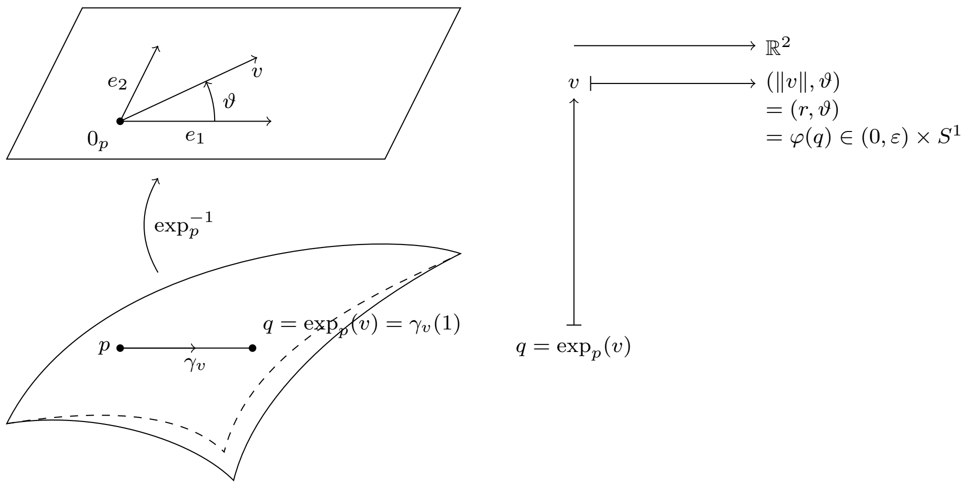
Proposition 8.5 *In Riemannschen Normalkoordinaten gilt für alle* $i, j, k \le m$*:*

(i) $g_{ij}(0) = \delta_{ij}$
(ii) $\Gamma^k_{ij}(0) = 0$
(iii) $\partial_k g_{ij}(0) = \left.\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\right|_0 = 0$

Der Beweis sei zur Übung überlassen.

1. Polarkoordinaten

Es ist $\varphi = (r, \vartheta^1, \dots, \vartheta^{m-1})$ die Hintereinanderausführung von Riemannschen Normalkoordinaten des $\mathbb{R}^m$.



Die Umkehrabbildung ist ein Diffeomorphismus

$$f\colon (0, \varepsilon) \times S^{m-1} \to U \subseteq M, \ (t, v) \mapsto \exp_p(tv) = \gamma_v(t).$$

Für jedes $v \in S^{m-1}$ ist $t \mapsto f(t, v) = \gamma_v(t)$ eine Geodätische in M. Wir bezeichnen solche Geodätischen im Folgenden als **radiale Geodätische**.

Lemma 8.6 (Gauß-Lemma) *Jede radiale Geodätische γ_v ist orthogonal zu der geodätischen Sphäre*

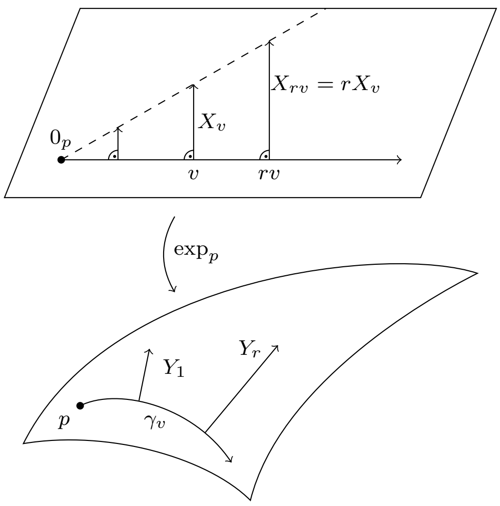
$$S_r = \{q \in M \mid \ \exists v \in \mathrm{T}_p M : \|v\| = r \ \text{und}\ q = \exp_p(v)\}.$$

Beweis Man zeigt das Folgende: Ist X ein Vektorfeld auf S^{m-1} und bezeichnet man seine Fortsetzung auf $(0, \varepsilon) \times S^{m-1}$ „$\subseteq$“ $\mathbb{B}_\varepsilon(0) \setminus \{0\}$ bzw. $\mathbb{B}_\varepsilon(0_p) \setminus \{0_p\} \subseteq \mathrm{T}_p M$ mit $X_{rv} = X_v$, so ist

$$Y_q = Y_{f(r,v)} = f_{*(r,v)}(0, X_v) = \exp_{p*}(rX_v)$$

orthogonal zu

$$\left.\frac{\partial}{\partial r}\right|_q = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=r} \exp_p(tv) = \dot\gamma_v(r)$$



$Y(t) = Y_{\gamma_v(t)}$ als Vektorfeld entlang γ_v. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\bigg|_{t=r} \left\langle Y, \frac{\partial}{\partial r} \right\rangle_{\gamma_v(t)} &= \langle \nabla_t Y|_r, \dot\gamma_v(r) \rangle + \langle Y(r), \underbrace{\nabla_t \dot\gamma_v|_r}_{=0} \rangle \\
&= \left\langle \nabla_{Y(r)} \dot\gamma_v(r), \dot\gamma_v(r) \right\rangle + \left\langle \underbrace{[\dot\gamma_v(r), Y(r)]}_{\substack{=[f_*(\frac{\partial}{\partial r}), f_*(0, X_v)] \\ = f_*[\frac{\partial}{\partial r}, X] = 0}}, \dot\gamma_v(r) \right\rangle \\
&= \frac{1}{2} Y(t) \|\dot\gamma_v\|^2 = 0.
\end{aligned}$$

Ferner gilt

$$\left\langle Y(r), \frac{\partial}{\partial r} \right\rangle_{\gamma_v(r)} = \left\langle \exp_{p*}(rX_v), \dot\gamma_v(r) \right\rangle \xrightarrow{r \to 0} \left\langle \exp_{p*}(0_p), v \right\rangle = 0,$$

also $\left\langle Y, \frac{\partial}{\partial r} \right\rangle \equiv 0$. □

Bemerkung Insbesondere gilt für alle $i \leq m-1$:

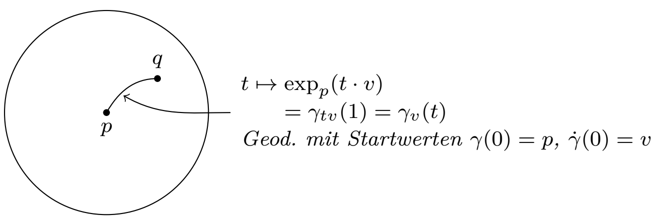
$$\left\langle \frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial \vartheta^i} \right\rangle = 0.$$

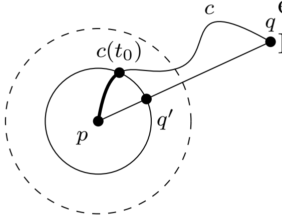
Satz 8.7 *Für jedes $p \in M$ existiert ein $\varepsilon > 0$, so dass für alle $q \in \mathbb{B}_\varepsilon(p)$ genau eine minimierende Geodätische von p nach q existiert, das heißt eine Geodätische γ im Sinne der Definition 8.1 mit $\mathcal{L}(\gamma) = \mathrm{d}(p,q)$. Ist $q \notin \exp_p(\mathbb{B}_\varepsilon(0_p)) = \mathbb{B}_\varepsilon(p)$, so existiert ein $q' \in \partial\, \mathbb{B}_\varepsilon(p)$ mit*

$$\mathrm{d}(p,q) = \varepsilon + \mathrm{d}(q', q).$$

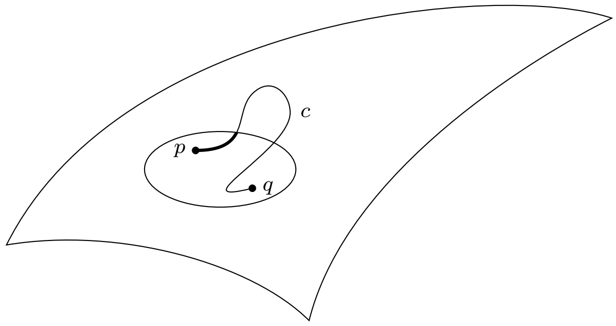
Ferner, ist $\delta < \varepsilon$ und $q \notin \mathbb{B}_\delta(p)$, so existiert ein $q' \in \mathbb{B}_\delta(q)$ mit

$$\mathrm{d}(p,q) = \delta + \mathrm{d}(q', q)$$





Beweis Es sei $\varepsilon > 0$ so, dass auf $\mathbb{B}_\varepsilon(p)$ Polorkoordinaten $\varphi = (r, \vartheta^1, \ldots, \vartheta^{m-1})$ existieren. Sei weiter $c\colon [0,1] \to M$ eine beliebige glatte Kurve von p nach q mit Koordinaten $\varphi(c(t)) = (r(t), \vartheta^1(t), \ldots, \vartheta^{m-1}(t))$.



Das Bild von c ist nicht notwendig in $\mathbb{B}_\varepsilon(0)$ enthalten

Für $t_0 = \inf\{t \in [0,1] \mid c(t) \notin \mathbb{B}_\varepsilon(p)\}$ ist $c|_{[0,t_0]}$ eine Kurve zu $\mathbb{B}_\varepsilon(p)$. Es gilt

$$\left\| \frac{\partial}{\partial r}\bigg|_t \right\| = \|\dot\gamma_w(t)\| = \|w\| = 1.$$

Aus der Cauchy-Schwarz-Ungleichung folgt

$$\begin{aligned}
\|\dot c(t)\| &= \|\dot c(t)\| \left\| \frac{\partial}{\partial r}\bigg|_{c(t)} \right\| \\
&\geq \left| \left\langle \dot c(t), \frac{\partial}{\partial r}\bigg|_{c(t)} \right\rangle \right| \\
&= \left| \left\langle \dot r(t) \frac{\partial}{\partial r} + \sum_{i=1}^{m-1} \dot\vartheta^i(t) \frac{\partial}{\partial \vartheta^i}, \frac{\partial}{\partial r}\bigg|_{c(t)} \right\rangle \right| \\
&= \left| \left\langle \dot r(t) \frac{\partial}{\partial r}\bigg|_{c(t)}, \frac{\partial}{\partial r}\bigg|_{c(t)} \right\rangle \right| \\
&= |\dot r(t)|\,,
\end{aligned}$$

wobei die Gleichheit genau dann gilt, wenn $\dot c(t)$ und $\frac{\partial}{\partial r}\big|_{c(t)}$ linear abhängig sind.

$$\mathcal{L}(c) = \int_0^{t_0} \|\dot c\| + \int_{t_0}^{T} \|\dot c\| \geq \int_0^{t_0} \left| \left\langle \dot c, \frac{\partial}{\partial r} \right\rangle \right| = \int_0^{t_0} |\dot r| = r(t_0)$$

Gleichheit gilt genau dann, wenn $\vartheta^1(t), \ldots, \vartheta^{m-1}(t)$ konstant sind und $\dot r(t) \geq 0$ gilt, also genau dann, wenn c eine monotone Umparametrisierung von $t \mapsto \exp_p(tv)$ für $v \in S^{m-1}$ ist.

Für den zweiten Teil sei ε so, dass Polarkoordinaten $\varphi = (r, \vartheta^1, \ldots, \vartheta^{m-1})$ um p existieren. Es sei $q \in \mathbb{B}_\delta(p)$ und c sei eine glatte Kurve von p nach q. Für $t_0 = \inf\{t \in [0,1] \mid c(t) \notin \mathbb{B}_\delta(p)\}$ gilt dann:

$$\mathcal{L}(c) \geq \delta + \mathrm{d}(c(t_0), q) \geq \delta + \mathrm{d}(\partial\,\mathbb{B}_\delta(p), q),$$

also $d(p,q) = \inf_c \mathcal{L}(c) \geq \delta + \mathrm{d}(\partial\,\mathbb{B}_\delta(p), q)$. Da $\partial\,\mathbb{B}_\delta(p)$ kompakt ist, die Abstandsfunktion $\mathrm{d}(\cdot, q)$ auf $\partial\,\mathbb{B}_\delta(p)$ ihr Minimum in q' an. Damit gilt

$$\begin{aligned}
&\mathrm{d}(q', q) = \mathrm{d}(\partial\,\mathbb{B}_\delta(p), q) \qquad \text{und} \\
&\mathrm{d}(p, q) = \mathrm{d}(p, q') + \mathrm{d}(q', q) = \delta + \mathrm{d}(q', q)
\end{aligned}$$

somit gilt dann die Behauptung. $\square$

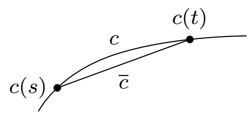
Korollar 8.8 *Für alle $p \in M$ existiert ein $\varrho > 0$, so dass für alle $q, q' \in \mathbb{B}_\varrho(p)$ genau eine minimierende Geodätische von q nach q' existiert.*

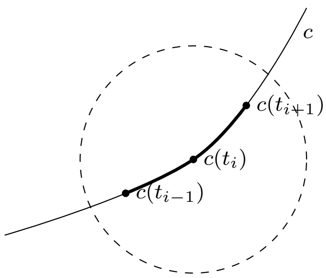
Beweis Für $q \in M$ existiert ein $\varrho = \varrho(q) > 0$, so dass exp auf $\mathbb{B}_\varrho(q)$ ein Diffeomorphismus ist. Da $\exp : \mathcal{D} \to \mathcal{D}$ glatt und $\mathcal{D}$ offen ist, existiert eine Umgebung U_q von q, so dass $\exp_p : \mathbb{B}_{\frac{\varrho}{2}}(0_q) \to \mathbb{B}_{\frac{\varrho}{2}}(q')$ ein Diffeomorphismus ist für alle $q' \in U_q$. Für $p \in M$ existiert nach Satz 8.7 ein $\varepsilon > 0$, so dass $\overline{\mathbb{B}}_\varepsilon(p)$ kompakt ist. Die Überdeckung $\bigcup_{q \in \overline{\mathbb{B}}_\varepsilon(q)} \mathbb{B}_{\frac{\varrho(q)}{2}}(q)$ besitzt eine endliche Teilüberdeckung. Für $\varrho = \min_{i \leq k}\{\frac{\varrho(q_i)}{4}\}$ existieren auf jedem $\mathbb{B}_{2\varrho}(q)$, $q \in \mathbb{B}_\varepsilon(p)$, Polarkoordinaten; insbesondere existiert für $q, q' \in \mathbb{B}_\varrho(p)$ eine eindeutige minimierende Geodätische von q nach q'. $\square$

Bemerkung Die Geodätischen im obigen Korollar hängen stetig von ihren Endpunkten ab.

Korollar 8.9 *Es seien $p, q \in M$ und $c : [0,1] \to M$ stückweise glatte Kurven von p nach q, so dass $\mathcal{L}(c) = \mathrm{d}(p,q)$. Damit ist c eine umparametrisierte Geodätische im Sinne von Definition 8.1.*

Beweis Die Kurve ist lokal längenminimierend, denn ist $\bar{c}$ eine Kurve von $c(s)$ nach $c(t)$ mit $\mathcal{L}(\bar{c}) < \mathcal{L}(c|_{[s,t]})$, so wäre $c|_{[0,s]} \cup \bar{c} \cup c|_{[t,1]}$ eine Kurve kürzer als c. Da c kompaktes Bild hat, exisitert ein minimales $\varrho > 0$ für alle $c(t)$ wie in Korollar 8.8. Dann findet man eine Partition $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_k = 1$ mit $\mathrm{d}(c(t_{i-1}), c(t_i)) < \frac{\varrho}{2}$, so dass $c|_{[t_{i-1}, t_{i+1}]}$ glatt ist.





Dann stimmt $c|_{[t_{i-1}, t_{i+1}]}$ für jedes $i < k$ mit der nach Korollar 8.8 eindeutigen Geodätischen (bis auf Umparametrisierung) überein. $\square$

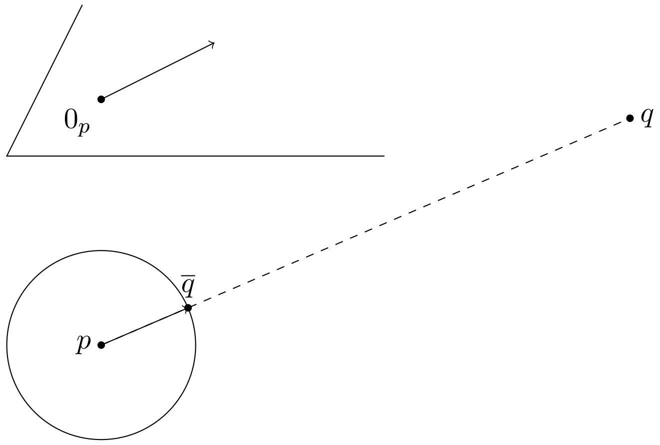
Definition 8.10 *Eine Riemannsche Mannigfaltigkeit heißt **geodätisch vollständig**, wenn jede Geodätische auf ganz $\mathbb{R}$ fortgesetzt werden kann.*

Satz 8.11 (Satz von Hopf-Rinow) *Für eine Riemannsche Mannigfaltigkeit sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

- *(i) M ist geodätisch vollständig, das heißt jede Geodätische existiert für alle Zeiten.*
- *(ii) Für alle $p \in M$ gilt $\mathcal{D}_p = \mathrm{T}_p M$, also exp ist auf ganz M definiert.*
- *(iii) Es existiert ein $p \in M$ mit $\mathcal{D}_p = \mathrm{T}_p M$, also $\exp_p$ ist auf $\mathrm{T}_p M$ für ein $p \in M$ definiert.*
- *(iv) Abgeschlossene und beschränkte Teilmengen sind kompakt.*
- *(v) M ist vollständig (als metrischer Raum).*

Jede dieser Eigenschaften impliziert, dass je zwei Punkte p, q in M durch eine minimierende Geodätische von p nach q verbunden werden können.

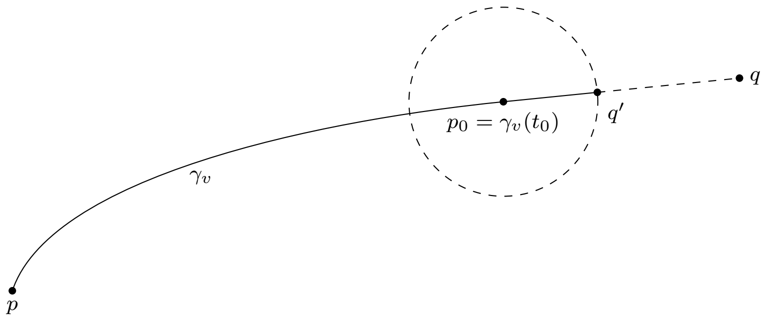
Beweis Man zeigt zunächst, dass es, falls (iii) für $p \in M$ gilt, zu jedem $q \in M$ eine minimierende Geodätische von p nach q gibt. Es gelte $\mathcal{D}_p = \mathrm{T}_p\, M$ und es sei $q \in M$.



Für $\varepsilon > 0$ wie in Satz 8.7 ist $\partial\, \mathbb{B}_{\frac{\varepsilon}{2}}(p)$ kompakt; es sei $\overline{q} \in \partial\, \mathbb{B}_{\frac{\varepsilon}{2}}(p)$ ein Punkt minimalen Abstandes zu q. Dann gilt $\overline{q} = \exp_p(\frac{\varepsilon}{2} v)$ für ein $v \in \mathrm{T}_p\, M$ mit $\|v\| = 1$.

Behauptung: Dann ist $\gamma_v|_{[0,R]} : t \mapsto \exp_p(tv)$ minimierende Geodätische nach q für $R = \mathrm{d}(p, q)$.

Es sei $\mathcal{I} = \{t \in [0, R] \mid \mathrm{d}(\gamma_v(t), q) = R - t\}$. Dann ist $\mathcal{I}$ nichtleer und abgeschlossen, denn $t \mapsto \mathrm{d}(\gamma_v(t), q) + t$ ist stetig.



Für $t_0 \in \mathcal{I}$ und $0 < \varrho < \varepsilon_0$ sei $q' \in \partial\, \mathbb{B}_\varrho(\gamma_v(t_0))$ wie in Satz 8.7 angewandt auf $p_0 = \gamma_v(t_0)$. Dann gilt $\mathrm{d}(p_0, q) = \varrho + \mathrm{d}(q', q)$ und es folgt:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}(p, q') &\geq \mathrm{d}(p, q) - \mathrm{d}(q', q) \\ &= \mathrm{d}(p, q) - \mathrm{d}(p_0, q) + \varrho \\ &= R - (R - t) + \varrho = t_0 + \varrho \end{aligned}$$

Damit ist die Verkettung von $\gamma_v|_{[0,t_v]}$ und der minimalen Geodätischen von p_0 nach q' nach Korollar 8.9 eine Geodätische. Aus der Eindeutigkeit von kurzen Geodätischen folgt, dass diese Zusamensetzung mit γ_v übereinstimmt. Es gilt also $q' = \gamma_v(t_0 + \varrho)$ und mit $\mathrm{d}(\gamma_v(t_0 + \varrho), q) = \mathrm{d}(p_0, q) - \varrho = R - (t_0 + \varrho)$ gilt $t_0 + \varrho \in \mathcal{I}$.

Wir können nun die einzelnen Implikationen zeigen. Dabei gelten (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii) offensichtlich.

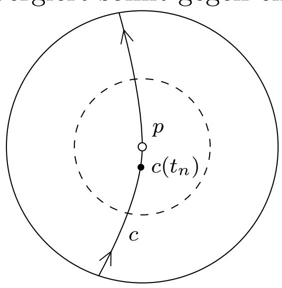
(iii) $\Rightarrow$ (iv): Es gelte $\mathcal{D}_p = \mathrm{T}_p\, M$ und es sei $K \subseteq M$ abgeschlossen und beschränkt. Dann existiert R mit $K \subseteq \overline{\mathbb{B}}_R(p)$. Da $\overline{\mathbb{B}}_R(0_p)$ kompakt ist, ist auch K kompakt.

(iv) $\Rightarrow$ (v): gilt offensichtlich

(v) $\Rightarrow$ (i): Es sei c eine nach Bogenlänge parametrisierte Geodätische mit maximalem Definitionsintervall $\mathcal{I}$. $\mathcal{I}$ ist nichtleer und offen. Ist (t_n) eine Folge in $\mathcal{I}$ mit Grenzwert t. Dann ist $q_n = c(t_n)$ wegen

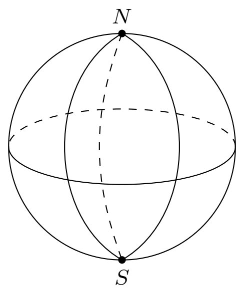
$$\mathrm{d}(c(t_n), c(t_m)) \leq |t_m - t_n|$$

eine Cauchy-Folge und konvergiert somit gegen ein $p \in M$.

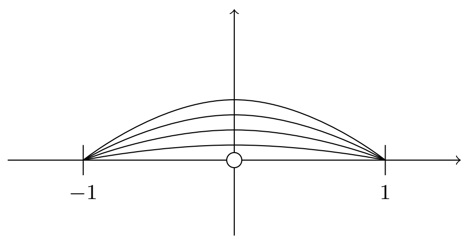


Es sei $\varrho > 0$ wie in Korollar 8.8. Für hinreichend großes n gilt dann $|t_n - t| < \frac{\varrho}{2}$. Die nach Bogenlänge parametrisierte Geodätische von $q_n = c(t_n)$ mit Startvektor $\dot{c}(t_n)$ existiert auf $(-\frac{\varrho}{2}, \frac{\varrho}{2})$, setzt also c bis zum Zeitpunkt $|t_n| + \frac{\varrho}{2} > |t|$ fort. $\square$

Bemerkungen/Beispiele (1) Geodätische sind im Allgemeinen nicht eindeutig. Betrachte die Einheitssphäre mit Geodätischen vom Nord- zum Südpol:



(2) $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$



(3) $\mathbb{B}_1(0) \subseteq \mathbb{R}^2$ ist geodätisch konvex aber nicht vollständig.

Korollar 8.12 *Es seien M eine vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit und c eine Geodätische. Dann gilt:*

(i) c ist lokal längenminimierend.

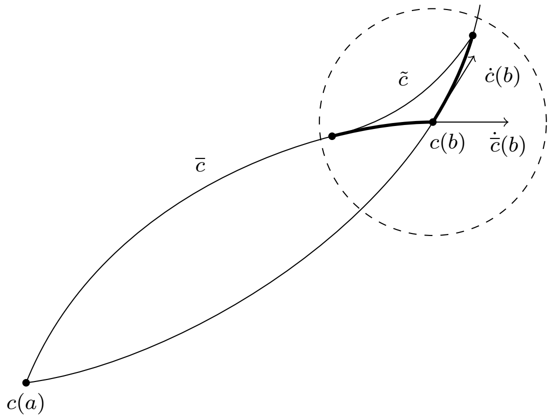
(ii) Falls es keine kürzere Geodätische von $c(a)$ nach $c(b)$ gibt, so ist $c|_{[a,b]}$ minimal.

(iii) Falls es eine weitere Geodätische $\overline{c}$ von $c(a)$ nach $c(b)$ mit $\mathcal{L}(\overline{c}) = \mathcal{L}(c|_{[a,b]})$ gibt, so ist $c|_{[a,b+\varepsilon]}$ für kein ε minimierend.

Beweis (i) Siehe Korollar 8.9.

(ii) Nach dem Satz von Hopf-Rinow existiert eine minimale Geodätische von $c(a)$ nach $c(b)$. Ist c also die Kürzeste von $c(a)$ nach $c(b)$, so ist c auch minimierend.

(iii) Ist $\overline{c}$ eine weitere Geodätische von $c(a)$ nach $c(b)$, so gilt $\dot{c}(b) \neq \dot{\overline{c}}(b)$.



Die zusammengesetzte Kurve kann keine Geodätische sein, da die Tangentialvektoren nicht übereinstimmen.

Für hinreichend kleines $\varepsilon > 0$ existiert dann nach Satz 8.7 eine minimierende Geodätische $\tilde{c}$ von $\overline{c}(b - \varepsilon)$ nach $c(b + \varepsilon)$. Die Länge von $\overline{c}|_{[a,b-\varepsilon]} \cup \tilde{c}$ ist strikt kleiner als die Länge von $c|_{[a,b+\varepsilon]}$. Damit ist $c|_{[a,b+\varepsilon]}$ nicht minimierend. $\square$