

Also muß gelten: $\phi(x) = x$

$$A_\phi \cdot \hat{x} = \hat{x} \Leftrightarrow (A_\phi - E_n)\hat{x} = 0$$

Löse LGS:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

also: $\hat{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, also $x = U_1$.

Widerspruch zu $U \oplus [x] = V$.

0.15.2 Aufgabe 4

- a) Es gilt: $\text{Bild}(\psi \circ \phi) \subset \text{Bild } \psi$
 $\psi \circ \phi$ surjektiv $\Leftrightarrow \text{Bild } \psi \circ \phi = W \Rightarrow \text{Bild } (\psi \circ \phi) = \text{Bild } \psi \Rightarrow \text{Beh.}$
- b) Ann.: $\text{Bild } \phi \cap \text{Kern } \psi \neq \{0\}$
 $\Rightarrow \exists x \in U, x \neq 0_U: \phi(x) \in \text{Kern } \psi, \phi(x) \neq 0_V$
 $\Rightarrow \exists x \in U, x \neq 0: \psi(\phi(x)) = 0_W$
 $\Rightarrow \text{Kern}(\psi \circ \phi) \neq \{0_W\}$
 $\psi \circ \phi$ nicht injektiv.

Also gilt: $\text{Bild } \phi \oplus \text{Kern } \psi$ ist direkt.

z.Z.: $\text{Bild } \phi \oplus \text{Kern } \psi = V$

Sei $v \in V$. Dann ex. $u \in U$ mit $(\psi \circ \phi)(u) = \psi(v)$.

Sei $v_1 := v - \phi(u)$ und $v_2 := \phi(u)$.

Dann gilt:

$$(i) \psi(v_1) = \psi(v - \phi(u)) = \psi(v) - (\psi \circ \phi)(u) = 0 \Rightarrow v_1 \in \text{Kern } \psi$$

$$(ii) v_2 = \phi(u) \in \text{Bild } \phi$$

$$(iii) v = v_1 + v_2$$

$$\Rightarrow v \in \text{Bild } \phi \oplus \text{Kern } \psi.$$

0.16 Übung 16, 18.04.2005

0.16.1 Aufgabe 1

$$a) \det(A - XE_4) = \begin{vmatrix} 2-x & 2 & 1 & -1 \\ 3 & 3-x & 1 & 1 \\ 3 & 4 & -x & 1 \\ -3 & -2 & -1 & -x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2-x & 2 & 1 & -1 \\ 3 & 3-x & 1 & 1 \\ 3 & 4 & -x & 1 \\ -1-x & 0 & 0 & -1-x \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 &= \begin{vmatrix} 3-x & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 3-x & 1 & 1 \\ 2 & 4 & -x & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1-x \end{vmatrix} = (-1-x) \cdot \begin{vmatrix} 3-x & 2 & 1 \\ 2 & 3-x & 1 \\ 2 & 4 & -x \end{vmatrix} \\
 &= (-1-x) \cdot \begin{vmatrix} 3-x & 2 & 1 \\ -1+x & 1-x & 0 \\ 2 & 4 & -x \end{vmatrix} = (-1-x) \cdot \begin{vmatrix} 5-x & 2 & 1 \\ 0 & 1-x & 0 \\ 0 & 4 & -x \end{vmatrix} \\
 &= (-1-x)(1-x) \cdot \begin{vmatrix} 5-x & 1 \\ 6 & -x \end{vmatrix} = (-1-x)(1-x) \cdot \begin{vmatrix} 6-x & 1 \\ 6-x & -x \end{vmatrix} \\
 &= (-1-x)(1-x) \cdot \begin{vmatrix} 0-x & 1 \\ 0 & 1-x \end{vmatrix} = (-1-x)^2(1-x)(6-x)
 \end{aligned}$$

Eigenraum zum EW -1 : $0 \neq x \in \mathbb{R}^4$ ist EV zum EW $-1 \Leftrightarrow$

$$\begin{aligned}
 &Ax = -x \\
 \Leftrightarrow &Ax + x = 0 \\
 \Leftrightarrow &(A + E_4)x = 0 \\
 \Leftrightarrow &0 \neq x \in \text{Kern}(A) + E_4
 \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & -1 \\ 3 & 4 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 1 \\ -3 & -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{3} & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ d.h. } E_{-1} = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right]$$

ebenso: $E_1 = \left[\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \right], E_6 = \left[\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right].$

b) Offensichtlich $B = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right]$ ist Basis von \mathbb{R}^4 .

Definieren wir eine lineare Abbildung $\Phi : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ durch $\Phi : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4, x \mapsto Ax$ so ist die Abbildung von Φ bzgl. der Std.-Basis.

$$\text{Bzgl. B hat } \Phi \text{ die Abb. } A_\Phi = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ -3 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \text{ dann gilt: } A_\Phi = S^{-1}AS$$

Nebenrechnung:

$$\boxed{\Phi \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} = -1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}, \Phi \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} = A_\Phi \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}$$

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{3} & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ dann gilt: } A_{\Phi} = S^{-1}AS$$

c) c ist EW von A mit EV $x \neq 0 \Leftrightarrow Ax = cx \Leftrightarrow (A - cE)x = 0$

0.16.2 Aufgabe 2

Seien $A, B \in \mathbb{K}^{n \times n}$ mit $AB - E_n$ regulär.

Ann.: $BA - E_n$ nicht regulär.

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \exists x \in \mathbb{K}^n, x \neq 0 : (BA - E_n)x = 0 \\ &\Leftrightarrow \exists 0 \neq x \in \mathbb{K}^n : BAx = x \\ &\Leftrightarrow \exists 0 \neq x \in \mathbb{K}^n : (AB)Ax = Ax \end{aligned}$$

$Ax \neq 0$, sonst: $x = B(AX) = B \times 0 = 0$

Damit gilt $(AB - E_n)(Ax) = 0$. Also ist $AB - E_n$ nicht regulär. Insgesamt $BA - E_n$ ist regulär.

0.16.3 Übungsaufgabe 2

Es sei (G, \circ) eine Gruppe mit neutralem Element e . Weiter sei $M = \{x \in G \mid x \circ x = e\}$.

a) Zeigen Sie: ist G kommutativ so ist M eine Untergruppe von G .

G : Gruppe: G Menge und $\circ : G \times G \rightarrow G$ mit folgenden Eigenschaften:

- (i) $a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c, a, b, c \in G$
- (ii) $\exists e \in G : \forall a \in G : a \circ e = a = e \circ a$
- (iii) $\forall a \in G \exists a^{-1} \in G : a \circ a^{-1} = e = a^{-1} \circ a$

G heisst abelsch falls zusätzlich gilt:

- (i) (iv) $\forall a, b \in G a \circ b = b \circ a$

Sei $M \subset G$: M heisst Untergruppe von G , falls:

(M, \circ) eine Gruppe ist

Untergruppenkriterium:

$$\begin{aligned} M \subset G \text{ ist Untergruppe} &\Leftrightarrow \begin{aligned} &\text{(i)} \quad M \neq \emptyset \\ &\text{(ii)} \quad x, y \in M : x^{-1} \circ y \in M \end{aligned} \\ &\Leftrightarrow \begin{aligned} &\text{(i)} \quad M \neq \emptyset \\ &\text{(ii)} \quad x, y \in M : x \circ y \in M \\ &\text{(iii)} \quad x \in M : x^{-1} \in M \end{aligned} \end{aligned}$$

Beweis: Zu zeigen: