§ 3 Messbare Funktionen

In diesem Paragraphen seien $\varnothing \neq X, Y, Z$ Mengen.

Definition
Ist $\mathfrak{A}$ eine σ-Algebra auf X, so heißt $(X, \mathfrak{A})$ ein **messbarer Raum**.

Definition
Sei $\mathfrak{A}$ eine σ-Algebra auf X, $\mathfrak{B}$ eine σ-Algebra auf Y und $f : X \to Y$ eine Funktion. f heißt genau dann **$\mathfrak{A}$-$\mathfrak{B}$-messbar**, wenn gilt:

$$\forall B \in \mathfrak{B} : f^{-1}(B) \in \mathfrak{A}$$

Bemerkung: Seien die Bezeichnungen wie in obiger Definition, dann gilt:

(1) f sei $\mathfrak{A}$-$\mathfrak{B}$-messbar, $\mathfrak{A}'$ eine weitere σ-Algebra auf X mit $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{A}'$ und $\mathfrak{B}'$ sei eine σ-Algebra auf Y mit $\mathfrak{B}' \subseteq \mathfrak{B}$.
Dann ist f $\mathfrak{A}'$-$\mathfrak{B}'$-messbar.

(2) Sei $X_0 \in \mathfrak{A}$, dann gilt $\mathfrak{A}_{X_0} \subseteq \mathfrak{A}$ nach 1.5. Nun sei $f : X \to Y$ $\mathfrak{A}$-$\mathfrak{B}$-messbar, dann ist $f_{|X_0} : X_0 \to Y$ $\mathfrak{A}_{X_0}$-$\mathfrak{B}$-messbar.

Beispiel

(1) Sei $\mathfrak{A}$ eine σ-Algebra auf X und $A \subseteq X$. $\mathbb{1}_A : X \to \mathbb{R}$ ist genau dann $\mathfrak{A}$-$\mathfrak{B}_1$-messbar, wenn $A \in \mathfrak{A}$ ist.

(2) Sei $X = \mathbb{R}^d$. Ist $A \in \mathfrak{B}_d$, so ist $\mathbb{1}_A$ $\mathfrak{B}_d$-$\mathfrak{B}_1$-messbar.

(3) Ist C wie in 2.11, so ist $\mathbb{1}_C$ nicht $\mathfrak{B}_d$-$\mathfrak{B}_1$-messbar.

(4) Es sei $f : X \to Y$ eine Funktion und $\mathfrak{B}$ ($\mathfrak{A}$) eine σ-Algebra auf Y (X), dann ist f $\times(X)$-$\mathfrak{B}$-messbar ($\mathfrak{A}$-$\{Y, \varnothing\}$-messbar).

Satz 3.1
Seien $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ σ-Algebren auf X, Y bzw. Z. Weiter seien $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ Funktionen.

(1) Ist f $\mathfrak{A}-\mathfrak{B}-$messbar und ist g $\mathfrak{B}-\mathfrak{C}-$messbar, so ist $g \circ f : X \to Z$ $\mathfrak{A}-\mathfrak{C}-$messbar.

(2) Sei $\varnothing \neq \mathcal{E} \subseteq \times(Y)$ und $\sigma(\mathcal{E}) = \mathfrak{B}$. Dann:

$$f \text{ ist } \mathfrak{A}-\mathfrak{B}-\text{messbar, genau dann, wenn gilt: } \forall E \in \mathcal{E} : f^{-1}(E) \in \mathfrak{A}$$

Beweis

(1) Sei $C \in \mathfrak{C}$; g ist messbar, daraus folgt $g^{-1}(C) \in \mathfrak{B}$; f ist messbar, daraus folgt $f^{-1}(g^{-1}(C)) = (g \circ f)^{-1}(C) \in \mathfrak{A}$

(2) $\Rightarrow$ ✓

$\Leftarrow$ $\mathfrak{D} := \{B \subseteq Y \mid f^{-1}(B) \in \mathfrak{A}\}$ Übung: $\mathfrak{D}$ ist eine σ-Algebra auf Y.

Aus der Voraussetzung folgt: $\mathcal{E} \subseteq \mathfrak{D}$. Dann: $\mathfrak{B} = \sigma(\mathcal{E}) \subseteq \mathfrak{D}$. Ist $B \in \mathfrak{B}$, so ist $B \in \mathfrak{D}$, also $f^{-1}(B) \in \mathfrak{A}$. ■

Definition
Sei $X \in \mathfrak{B}_d$. Ist $f : X \to \mathbb{R}^k$ $\mathfrak{B}(X) - \mathfrak{B}_k$−messbar, so heißt f **(Borel-)messbar**.

Ab jetzt sei stets $X \in \mathfrak{B}_d$. (Erinnerung: $\mathfrak{B}(X) = \{A \in \mathfrak{B}_d \mid A \subseteq X\}$)

Satz 3.2
Seien $f, g : X \to \mathbb{R}^k$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

(1) Ist f auf X stetig, so ist f messbar.

(2) Ist $f = (f_1, \ldots, f_k)$, so gilt: f ist messbar $\Leftrightarrow$ alle f_j sind messbar.

(3) Sind f und g messbar, so ist $\alpha f + \beta g$ messbar.

(4) Sei $k = 1$ und f und g seien messbar. Dann:

   (i) fg ist messbar

   (ii) Ist $f(x) \neq 0 \forall x \in X$, so ist $\frac{1}{f}$ messbar

   (iii) $\{x \in X \mid f(x) \geq g(x)\} \in \mathfrak{B}(X)$

Beweis
(1) Sei $G \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^k)$. Mit f stetig folgt: $f^{-1}(G) \in \mathcal{O}(X) \in \mathfrak{B}(X)$

$\sigma(\mathcal{O}(\mathbb{R}^k)) = \mathfrak{B}_k$. Die Behauptung folgt aus 3.1.(2).

(2) $\Leftarrow$: Sei $I = (a, b] = \prod_{j=1}^{k} (a_j, b_j] \in I_k$ $\quad (a = (a_1, \ldots, a_k),\, b = (b_1, \ldots, b_k),\, a \leq b)$

Dann: $f^{-1}(I) = \bigcap_{j=1}^{k} \underbrace{f_j^{-1}(\underbrace{(a_j, b_j]}_{\in \mathfrak{B}_1})}_{\in \mathfrak{B}(X)} \in \mathfrak{B}(X)$

Aus $\sigma(I_k) = \mathfrak{B}_k$ folgt mit 3.1.(2): f ist messbar.

$\Rightarrow$: Für $j = 1, ..., k$ sei $p_j : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ definiert durch $p_j(x_1, \ldots, x_k) := x_j$

p_j ist stetig, also messbar (nach (1)). Es ist $f_j = p_j \circ f$. Mit 3.1.(1) folgt: f_j ist messbar.

(3) $h := (f, g) : X \to \mathbb{R}^{2k}$; aus (2): h ist messbar.

$\varphi(x, y) := \alpha x + \beta y \, (x, y \in \mathbb{R}^k)$

φ ist stetig, also messbar (nach (1)). Es ist $\alpha f + \beta g = \varphi \circ h$. Mit 3.1.(1) folgt: $\alpha f + \beta g$ ist messbar.

(4) (i) $h := (f, g) : X \to \mathbb{R}^{2k}$ ist messbar (nach (2)); $\varphi(x, y) := xy$, φ ist stetig, also messbar.

Es ist $fg = \varphi \circ h$. Mit 3.1.(1) folgt: fg ist messbar.

(ii) $\varphi(x) := \frac{1}{x}$, φ ist stetig auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, also messbar.

$\frac{1}{f} = \varphi \circ f$. Mit 3.1.(1) folgt: $\frac{1}{f}$ ist messbar.

(iii) $A := \{x \in X \mid f(x) \geq g(x)\} = \{x \in X \mid f(x) - g(x) \in [0, \infty)\} = \underbrace{\overset{-1}{(f - g)}}_{\text{messbar nach (3)}} \overbrace{([0, \infty))}^{\in \mathfrak{B}_1} \in \mathfrak{B}(X)$ ■

Folgerungen 3.3

(1) Seien $A, B \in \mathfrak{B}(X)$, $A \cap B = \varnothing$ und $X = A \cup B$. Weiter seien $f : A \to \mathbb{R}^k$ und $g : B \to \mathbb{R}^k$ messbar. Dann ist $h : X \to \mathbb{R}^k$, definiert durch

$$h(x) := \begin{cases} f(x) & x \in A \\ g(x) & x \in B \end{cases},$$

messbar.

(2) Ist $f : X \to \mathbb{R}^k$ messbar und $g(x) := \|f(x)\|$ $(x \in X)$, so ist g messbar.

Beweis

(1) Sei $C \in \mathfrak{B}_k$. Dann:

$$h^{-1}(C) = \underbrace{f^{-1}(C)}_{\in \mathfrak{B}(A) \subseteq \mathfrak{B}(X)} \cup \underbrace{g^{-1}(C)}_{\in \mathfrak{B}(B) \subseteq \mathfrak{B}(X)} \in \mathfrak{B}(X)$$

(2) Definiere $\varphi(z) = \|z\| \quad (z \in \mathbb{R}^k)$; φ ist stetig, also messbar.

Es ist $g = \varphi \circ f$. Mit 3.1 folgt: g ist messbar. ■

Beispiel

$X = \mathbb{R}^2$, $f(x, y) := \begin{cases} \frac{\sin(y)}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

für $x \neq 0 :$ $f(x, x) = \frac{\sin(X)}{x} \overset{x \to 0}{\to} 1 \neq 0 = f(0, 0)$, daraus folgt: f ist nicht stetig.

$A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0\}$, $B := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq 0\}$, $X = A \cup B$, $A \cap B = \varnothing$. A ist abgeschlossen, das heißt: $A \in \mathfrak{B}_2$, $B = A^C \in \mathfrak{B}_2$

$$f_1(x, y) := 0 \quad ((x, y) \in A)$$
$$f_2(x, y) := \frac{\sin(y)}{x} \quad ((x, y) \in B)$$

f_1 ist stetig auf A, f_2 ist stetig auf B. Also: f_1, f_2 ist messbar; mit 3.3.(1) folgt: f ist messbar.

Ein neues Symbol kommt hinzu: $-\infty$

$\overline{\mathbb{R}} := [-\infty, +\infty] := \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$

In $\overline{\mathbb{R}}$ gelten folgende Regeln, wobei $a \in \mathbb{R}$:

(1) $-\infty < a < +\infty$

(2) $\pm\infty + (\pm\infty) = \pm\infty$

(3) $\pm\infty + a := a + (\pm\infty) := \pm\infty$

(4) $a \cdot (\pm\infty) := (\pm\infty) \cdot a = \begin{cases} \pm\infty & a > 0 \\ 0 & a = 0 \\ \mp\infty & a < 0 \end{cases}$

(5) $\frac{a}{\pm\infty} := 0$

Definition

(1) Sei (x_n) eine Folge in $\overline{\mathbb{R}}$. $x_n \to +\infty :\Leftrightarrow \forall c \in \mathbb{R} \exists n_c \in \mathbb{N} : x_n \geq c \forall n \geq n_c$
Analog für $-\infty$.

(2) Seien $f, g : X \to \overline{\mathbb{R}}$. Dann:

$$\begin{aligned} \{f \leq g\} &:= \{x \in X \mid f(x) \leq g(x)\} \\ \{f \geq g\} &:= \{x \in X \mid f(x) \geq g(x)\} \\ \{f \neq g\} &:= \{x \in X \mid f(x) \neq g(x)\} \\ \{f < g\} &:= \{x \in X \mid f(x) < g(x)\} \\ \{f > g\} &:= \{x \in X \mid f(x) > g(x)\} \end{aligned}$$

(3) Sei $a \in \overline{\mathbb{R}}$ und $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$. Dann:

$$\begin{aligned} \{f \leq a\} &:= \{x \in X \mid f(x) \leq a\} \\ \{f \geq a\} &:= \{x \in X \mid f(x) \geq a\} \\ \{f \neq a\} &:= \{x \in X \mid f(x) \neq a\} \\ \{f < a\} &:= \{x \in X \mid f(x) < a\} \\ \{f > a\} &:= \{x \in X \mid f(x) > a\} \end{aligned}$$

Definition

$\overline{\mathfrak{B}}_1 := \{B \cup E \mid B \in \mathfrak{B}_1,\ E \subseteq \{-\infty, +\infty\}\}$. Dann: $\mathfrak{B}_1 \subseteq \overline{\mathfrak{B}}_1$
Übung: $\overline{\mathfrak{B}}_1$ ist eine σ-Algebra auf $\overline{\mathbb{R}}$.
$\overline{\mathfrak{B}}_1$ heißt **Borelsche σ-Algebra** auf $\overline{\mathbb{R}}$. Sei $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$. f heißt **(Borel-)messbar** (mb) $:\Leftrightarrow$ f ist $\mathfrak{B}(X) - \overline{\mathfrak{B}}_1-$ messbar.

Beispiel

$f(x) := +\infty \quad (x \in X)$, also: $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$

Sei $B \in \overline{\mathfrak{B}}_1$, $A := f^{-1}(B) = \{x \in X \mid f(x) \in B\}$

Fall 1: $+\infty \notin B$, dann: $A = \varnothing \in \mathfrak{B}(X)$

Fall 2: $+\infty \in B$, dann: $A = X \in \mathfrak{B}(X)$

f ist messbar.

Satz 3.4

(1) Definiere die Mengen:

$$\mathcal{E}_1 := \{[-\infty, a] \mid a \in \mathbb{Q}\} \qquad \mathcal{E}_2 := \{[-\infty, a) \mid a \in \mathbb{Q}\}$$
$$\mathcal{E}_3 := \{(a, \infty] \mid a \in \mathbb{Q}\} \qquad \mathcal{E}_4 := \{[a, \infty] \mid a \in \mathbb{Q}\}$$

Dann gilt:

$$\overline{\mathfrak{B}_1} = \sigma(\mathcal{E}_j) \qquad \text{für } j \in \{1, 2, 3, 4\}$$

(2) Für $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(i) f ist messbar.

(ii) $\forall a \in \mathbb{Q} : \{f \leq a\} \in \mathfrak{B}(X)$.

(iii) $\forall a \in \mathbb{Q} : \{f \geq a\} \in \mathfrak{B}(X)$.

(iv) $\forall a \in \mathbb{Q} : \{f < a\} \in \mathfrak{B}(X)$.

(v) $\forall a \in \mathbb{Q} : \{f > a\} \in \mathfrak{B}(X)$.

(3) Die Äquivalenzen in (2) gelten auch für Funktionen $f : X \to \mathbb{R}$.

Beweis

Die folgenden Beweise erfolgen exemplarisch für einen der Unterpunkte und funktionieren fast analog für die anderen.

(1) Für $a \in \mathbb{Q}$ gilt:

$$[-\infty, a]^c = (a, \infty] \in \sigma(\mathcal{E}_1)$$

D.h. es gilt $\mathcal{E}_3 \subseteq \sigma(\mathcal{E}_1)$ und damit auch $\sigma(\mathcal{E}_3) \subseteq \sigma(\mathcal{E}_1)$.

(2) Es gilt:

$$\{f \leq a\} = \{x \in X \mid f(x) \leq a\} = f^{-1}([-\infty, a])$$

Die Äquivalenz folgt dann aus (1) und 3.1.

(3) Die Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ kann aufgefasst werden als Funktion $\overline{f} : X \to \overline{\mathbb{R}}$. Es ist f genau dann $\mathfrak{B}(X)$-$\mathfrak{B}_1$-messbar wenn $\overline{f}$ $\mathfrak{B}(X)$-$\overline{\mathfrak{B}_1}$-messbar ist. ∎

Definition

Sei $M \subseteq \overline{\mathbb{R}}$.

(1) Ist $M = \varnothing$ oder $M = \{-\infty\}$, so sei

$$\sup M := -\infty$$

(2) Ist $M \setminus \{-\infty\} \neq \varnothing$ und nach oben beschränkt (also insbesondere $\infty \notin M$), so sei

$$\sup M := \sup(M \setminus \{-\infty\})$$

(3) Ist $M \setminus \{-\infty\}$ nicht nach oben beschränkt oder $\infty \in M$, so sei

$$\sup M := \infty$$

(4) Es sei $\inf M := -\sup(-M)$, wobei $-M := \{-m \mid m \in M\}$.

Definition
Sei (f_n) eine Folge von Funktionen $f_n : X \to \overline{\mathbb{R}}$.

(1) Die Funktion $\sup_{n\in\mathbb{N}}(f_n) : X \to \overline{\mathbb{R}}$ $\big(\inf_{n\in\mathbb{N}}(f_n) : X \to \overline{\mathbb{R}}\big)$ ist definiert durch:

$$(\sup_{n\in\mathbb{N}} f_n)(x) := \sup\{f_n(x) \mid n \in \mathbb{N}\} \quad x \in X$$

$$\Big((\inf_{n\in\mathbb{N}} f_n)(x) := \inf\{f_n(x) \mid n \in \mathbb{N}\} \quad x \in X\Big)$$

(2) Die Funktion $\limsup_{n\to\infty} f_n : X \to \overline{\mathbb{R}}$ $\big(\liminf_{n\to\infty} f_n : X \to \overline{\mathbb{R}}\big)$ ist definiert durch:

$$\limsup_{n\to\infty} f_n := \inf_{j\in\mathbb{N}}(\sup_{n\geq j} f_n) \tag{$*$}$$

$$\liminf_{n\to\infty} f_n := \sup_{j\in\mathbb{N}}(\inf_{n\geq j} f_n)$$

Erinnerung: Für eine beschränkte Folge (a_n) in $\mathbb{R}$ war

$$\limsup_{n\to\infty} a_n := \inf\{\sup\{a_n \mid n \geq j\} \mid j \in \mathbb{N}\}$$

(3) Sei $N \in \mathbb{N}$ und $g_j := f_j$ (für $j = 1, \ldots, N$), $g_j := f_N$ (für $j > N$). Definiere:

$$\max_{1\leq n\leq N} f_n := \sup_{j\in\mathbb{N}} g_n$$

$$\min_{1\leq n\leq N} f_n := \inf_{j\in\mathbb{N}} g_n$$

(4) Ist $f_n(x)$ für jedes $x \in \overline{\mathbb{R}}$ konvergent, so ist $\lim_{n\to\infty} f_n : X \to \overline{\mathbb{R}}$ definiert durch:

$$(\lim_{n\to\infty} f_n)(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

(In diesem Fall gilt $\lim_{n\to\infty} f_n = \limsup_{n\to\infty} f_n = \liminf_{n\to\infty} f_n$.)

Satz 3.5
Sei (f_n) eine Folge von Funktionen $f_n : X \to \overline{\mathbb{R}}$ und jedes f_n messbar.

(1) Dann sind ebenfalls messbar:

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} f_n \qquad \inf_{n\in\mathbb{N}} f_n \qquad \limsup_{n\in\mathbb{N}} f_n \qquad \liminf_{n\in\mathbb{N}} f_n$$

(2) Ist $(f_n(x))$ für jedes $x \in X$ in $\overline{\mathbb{R}}$ konvergent, so ist $\lim_{n\to\infty} f_n$ messbar.

Beweis

(1) Sei $a \in \mathbb{Q}$, dann gilt (nach 3.4(2)):

$$\{\sup_{n\in\mathbb{N}} f_n \leq a\} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \{f_n \leq a\} \in \mathfrak{B}(X)$$

Also ist $\sup_{n\in\mathbb{N}} f_n$ messbar. Analog lässt sich die Messbarkeit von $\inf_{n\in\mathbb{N}} f_n$ zeigen, der Rest folgt dann aus $(*)$.

(2) Folgt aus (1) und obiger Bemerkung in der Definition. ∎

Beispiel

Sei $X = I$ ein Intervall in $\mathbb{R}$ und $f : I \to \mathbb{R}$ sei auf I differenzierbar.
Für $x \in I, n \in \mathbb{N}$ sei $f_n := n(f(x - \frac{1}{n}) - f(x))$. Da f stetig ist, ist auch jedes f_n stetig, also insbesondere messbar und es gilt:

$$f_n(x) = \frac{f(x-\frac{1}{n}) - f(x)}{\frac{1}{n}} \overset{n\to\infty}{\to} f'(x)$$

Aus 3.5(2) folgt, dass f' messbar ist.

Definition

Sei $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ eine Funktion.

(1) $f_+ := \max\{f, 0\}$ heißt **Positivteil** von f.

(2) $f_- := \max\{-f, 0\}$ heißt **Negativteil** von f.

Es gilt $f_+, f_- \geq 0$, $f = f_+ - f_-$ und $|f| = f_+ + f_-$.

Satz 3.6

Seien $f, g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

(1) Sind f, g messbar und ist $\alpha f(x) + \beta g(x)$ für jedes $x \in X$ definiert, so ist $\alpha f + \beta g$ messbar.

(2) Sind f, g messbar und ist $f(x)g(x)$ für jedes $x \in X$ definiert, so ist fg messbar.

(3) f ist genau dann messbar, wenn f_+ und f_- messbar sind. In diesem Fall ist auch $|f|$ messbar.

Beweis

(1)+(2) Für alle $n \in \mathbb{N}, x \in X$ seien f_n und g_n wie folgt definiert:

$$f_n(x) := \max\{-n, \min\{f(x), n\}\}$$
$$g_n(x) := \max\{-n, \min\{g(x), n\}\}$$

Dann sind $f_n(x), g_n(x) \in [-n, n]$ für alle $n \in \mathbb{N}, x \in X$. Nach 3.2(3) sind also $\alpha f_n + \beta g_n$ und $f_n g_n$ messbar. Außerdem gilt:

$$\alpha f_n(x) + \beta g_n(x) \overset{n\to\infty}{\to} \alpha f(x) + \beta g(x)$$
$$f_n(x) g_n(x) \overset{n\to\infty}{\to} f(x)g(x)$$

Die Behauptung folgt aus 3.5(2).

(3) Nach 3.5(1) sind f_+ und f_- messbar, wenn f messbar ist. Die umgekehrte Implikation folgt aus 3.6(1). Sind f_+ und f_- messbar, so folgt ebenfalls aus 3.6(1), dass $|f| = f_+ + f_-$ messbar ist. ■

Beispiel
Sei $C \subseteq \mathbb{R}^d$ wie in 2.11, also $C \notin \mathfrak{B}_d$. Definiere $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ wie folgt:

$$f(x) := \begin{cases} 1 & , x \in C \\ -1 & , x \notin C \end{cases}$$

Dann ist $\{f \geq 1\} = C$, also f **nicht** messbar. Aber für alle $x \in \mathbb{R}^d$ ist $|f(x)| = 1$, also $|f| = \mathbb{1}_{\mathbb{R}^d}$ und damit messbar.

Definition
$f : X \to \mathbb{R}$ sei messbar.

(1) f heißt **einfach** oder **Treppenfunktion**, genau dann wenn $f(X)$ endlich ist.

(2) f sei einfach und $f(X) = \{y_1, \dots, y_m\}$ mit $y_i \neq y_j$ für $i \neq j$. Sei weiter $A_j := f^{-1}(\{y_j\})$ für $j = 1, \dots, m$. Dann sind $A_1, \dots, A_m \in \mathfrak{B}(X)$ und $X = \bigcup_{j=1}^m A_j$ disjunkte Vereinigung.

$$f = \sum_{j=1}^m y_j \mathbb{1}_{A_j}$$

heißt **Normalform** von f.

Beispiel
Sei $A \in \mathfrak{B}(X)$. Definiere:

$$f := \mathbb{1}_A = 2 \cdot \mathbb{1}_A - \mathbb{1}_X + \mathbb{1}_{X \setminus A} = \mathbb{1}_A + 0 \cdot \mathbb{1}_{X \setminus A}$$

Wobei das letzte die Normalform von f ist. Man sieht also, dass einfache Funktionen mehrere Darstellungen haben können.

Satz 3.7
Linearkombinationen und Produkte, sowie endliche Maxima und Minima einfacher Funktionen, sind einfach.

Satz 3.8
Sei $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ messbar.

(1) Ist $f \geq 0$ auf X, so existiert eine Folge (f_n) von einfachen Funktionen $f_n : X \to [0, \infty)$, sodass $0 \leq f_n \leq f_{n+1}$ auf X $(\forall n \in \mathbb{N})$ und $f_n(x) \overset{n\to\infty}{\to} f(x)$ $(\forall x \in X)$. In diesem Fall heißt (f_n) **zulässig** für f.

(2) Es existiert eine Folge (f_n) von einfachen Funktionen $f_n : X \to \mathbb{R}$, sodass $|f_n| \leq |f|$ auf X $(\forall n \in \mathbb{N})$ und $f_n(x) \overset{n\to\infty}{\to} f(x)$ $(\forall x \in X)$.

(3) Ist f beschränkt auf X (also insbesondere $\pm\infty \notin f(X)$), so kommt in (2) noch hinzu, dass (f_n) auf X gleichmäßig gegen f konvergiert.

Folgerungen 3.9 ((Beweis mit 3.8(2) und 3.5))
Sei $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ eine Funktion, dann ist f genau dann messbar, wenn eine Folge einfacher Funktionen (f_n) mit $f_n : X \to \mathbb{R}$ und $f_n(x) \overset{n\to\infty}{\to} f(x)$ für alle $x \in X$ existiert.

Beweis

(1) Für $n \in \mathbb{N}$ definiere $\varphi_n : [0,\infty] \to [0,\infty)$ durch

$$\varphi_n(t) := \begin{cases} \frac{[2^n t]}{2^n} & , 0 \leq t < n \\ n & , n \leq t \leq \infty \end{cases}$$

Dann ist φ_n $(\mathfrak{B}_1)_{[0,\infty]}$-$\mathfrak{B}_1$-messbar, außerdem gilt:

$$\forall t \in [0,\infty] \forall n \in \mathbb{N} : 0 \leq \varphi_1 \leq \dots \leq t$$
$$\forall t \in [0,n] \forall n \in \mathbb{N} : t - \frac{1}{2^n} \leq \varphi_n(t) \leq t$$

und es ist $\varphi_n(t) \overset{n\to\infty}{\to} t$ für alle $t \in [0\infty]$. Setze $f_n := \varphi_n \circ f$. Dann leistet (f_n) das gewünschte.

(2) Es ist $f = f_+ - f_-$ und $f_+, f_- \geq 0$ auf X. Seien $(g_n), (h_n)$ zulässige Folgen für f_+ bzw. f_-. Definiere $f_n := g_n - h_n$. Dann ist klar, dass gilt:

$$\forall x \in X : f_n(x) = g_n(x) - h_n(x) \overset{n\to\infty}{\to} f_+(x) - f_-(x) = f(x)$$

Weiter gilt:

$$|f_n| \leq g_n + h_n \leq f_+ + f_- = |f|$$

(3) Ohne Beweis. ∎