§ 18 Fourierreihen

In diesem Paragraphen sei stets $X = [0, 2\pi]$, $L^2 := L^2([0, 2\pi], \mathbb{C})$ und $L^2_{\mathbb{R}} := L^2([0, 2\pi], \mathbb{R})$. Weiter sei $\{b_k \mid k \in \mathbb{Z}\}$ wie in 17.2.

Satz 18.1
Ist $f \in L^2$ und gilt mit einer Folge $(c_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ in $\mathbb{C}$: $f \overset{\|\cdot\|_2}{=} \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k b_k$, so gilt:

$$c_k = (f \mid b_k) \text{ für alle } k \in \mathbb{Z}$$

Beweis
Für $n \in \mathbb{N}_0$ setze

$$\sigma_n := \sum_{|k|\leq n} c_k b_k$$

Aus der Voraussetzung folgt $\|\sigma_n - f\|_2 \to 0$ für $n \to \infty$. Sei $j \in \mathbb{Z}$ und $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq |j|$. Es gilt einerseits

$$(\sigma_n \mid b_j) = \sum_{|k|\leq n} c_k (b_k \mid b_j) = c_j, \text{ da gilt: } (b_k \mid b_j) = \begin{cases} 0, & \text{falls } k \neq j \\ 1, & \text{falls } k = j \end{cases}$$

Andererseits: $(\sigma_n \mid b_j) \to (f \mid b_j)$ für $n \to \infty$ wegen 16.6(3). Daraus folgt $c_j = (f \mid b_j)$ ■

Definition
Sei $f \in L^2$, $n \in \mathbb{N}_0$ und $k \in \mathbb{Z}$.

(1) $S_n f := \sum_{|k|\leq n} (f \mid b_k) b_k$ heißt **n-te Fouriersche Partialsumme**. Also gilt:

$$f \overset{\|\cdot\|_2}{=} \sum_{k\in\mathbb{Z}} (f \mid b_k) b_k \iff \|f - S_n f\|_2 \to 0$$

(2) $(f \mid b_k)$ heißt **k-ter Fourierkoeffizient von f**.

(3) $\sum_{k\in\mathbb{Z}} (f \mid b_k) b_k$ heißt **Fourierreihe von f**.

(4) Für $n_0 \in \mathbb{N}_0$ setze $E_n := [b_{-n}, b_{-(n-1)}, \ldots, b_0, b_1, \ldots, b_n]$ (lineare Hülle). Es ist dann

$$\dim E_n = 2n + 1$$

Beachte: Für $v \in E_n$ gilt $v(0) = v(2\pi)$.

Satz 18.2
Seien $f_1, \ldots, f_n, f \in L^2$.

(1) Gilt $f_\mu \perp f_\nu$ für $\mu \neq \nu$ $(\mu, \nu = 1, \ldots, n)$, so gilt der Satz des Pythagoras
$$\|f_1 + \cdots + f_n\|_2^2 = \|f_1\|_2^2 + \cdots + \|f_n\|_2^2$$

(2) Die Abbildung
$$S_n \colon \begin{cases} L^2 \to E_n \\ S_n f := \sum_{|k| \leq n} (f \mid b_k) b_k \end{cases}$$
ist linear und für jedes $v \in E_n$ gilt $S_n v = v$ und $(f - S_n f) \perp v$ mit $f \in L^2$.

(3) Die **Besselsche Ungleichung** lautet:
$$\|S_n f\|_2^2 = \sum_{|k| \leq n} |(f \mid b_k)|^2 = \|f\|_2^2 - \|(f - S_n f)\|_2^2 \leq \|f\|_2^2$$

(4) Für alle $v \in E_n$ gilt:
$$\|f - S_n f\|_2 \leq \|f - v\|_2$$

Beweis

(1) Es genügt den Fall $n = 2$ zu betrachten, der Rest folgt induktiv.
$$\begin{aligned} \|f_1 + f_2\|_2^2 &= (f_1 + f_2 \mid f_1 + f_2) \\ &= (f_1 \mid f_1) + (f_1 \mid f_2) + (f_2 \mid f_1) + (f_2 \mid f_2) \\ &= (f_1 \mid f_1) + (f_2 \mid f_2) \\ &= \|f_1\|_2^2 + \|f_2\|_2^2 \end{aligned}$$

(2) Übung!

(3) Es gilt
$$\|S_n f\|_2^2 = \left\| \sum_{|k| \leq n} (f \mid b_k) b_k \right\|_2^2 \overset{(1)}{=} \sum_{|k| \leq n} \|(f \mid b_k) b_k\|_2^2 = \sum_{|k| \leq n} |(f \mid b_k)|^2 \|b_k\|_2^2 = \sum_{|k| \leq n} |(f \mid b_k)|^2$$
und
$$\|f\|_2^2 = \| \underbrace{(f - S_n f)}_{\underset{(2)}{\perp} E_n} + \underbrace{S_n f}_{\in E_n} \|_2^2 = \|f - S_n f\|_2^2 + \|S_n f\|_2^2$$

(4) Sei $v \in E_n$. Dann gilt:
$$\begin{aligned} \|f - v\|_2^2 &= \| \underbrace{(f - S_n f)}_{\perp E_n} + \underbrace{(S_n f - v)}_{\in E_n} \|_2^2 \\ &\overset{(1)}{=} \|f - S_n f\|_2^2 + \|S_n f - v\|_2^2 \\ &\geq \|f - S_n f\|_2^2 \end{aligned}$$
■

Bemerkung 18.3
Es sei $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, $a, b \in \mathbb{R}$, $I := [a,b]\,(a < b)$ und f_n, f, $g \in C(I, \mathbb{K})$; es war $\|f\|_\infty := \max_{t \in I}|f(t)|$.

(1) (f_n) konvergiert auf I gleichmäßig gegen f genau dann, wenn $\|f_n - f\|_\infty \to 0\,(n \to \infty)$ (vgl. Analysis I/II).

(2) $f \in \mathrm{L}^p(I, \mathbb{K})$ und $\|f\|_p \leq (b-a)^{\frac{1}{p}}\|f\|_\infty$ (siehe 16.2).

(3) Gilt $f = g$ fast überall, so ist $f = g$ auf I.

Beweis
Es existiert eine Nullmenge $N \subseteq I:\ f(x) = g(x)\,\forall x \in I \setminus N$.
Sei $x_0 \in \mathbb{N}$. Für $\varepsilon > 0$ gilt: $U_\varepsilon(x_0) \cap I \not\subseteq N$ (andernfalls: $\lambda_1(N) \geq \lambda_1(U_\varepsilon(x_0) \cap I) > 0$). Das heißt, es existiert ein $x_\varepsilon \in U_\varepsilon(x_0) \cap I:\ x_\varepsilon \notin N$. Also: $\forall n \in \mathbb{N}\,\exists x_n \in U_{\frac{1}{n}}(x_0) \cap I:\ x_n \notin N$.
Also: $x_n \to x_0$.
Dann: $f(x_0) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} g(x_n) = g(x_0)$ ∎

Satz 18.4 (Approximationssatz von Weierstraß)
Es sei $I = [a, b]$ wie in 18.3 und $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$.

(1) Ist $f \in C(I, \mathbb{K})$ und $\varepsilon > 0$, so existiert ein Polynom p mit Koeffizienten in $\mathbb{K}$ mit:
$$\|f - p\|_\infty < \varepsilon$$

(2) Ist $a = 0$, $b = 2\pi$, $f \in C(I, \mathbb{K})$, $f(0) = f(2\pi)$ und $\varepsilon > 0$, so existiert ein $n \in \mathbb{N}$ und ein $v \in \mathrm{E}_n$ mit:
$$\|f - v\|_\infty < \varepsilon$$

Satz 18.5
Sei $f \in \mathrm{L}^2$. Dann gilt: $f \overset{\|\cdot\|_2}{=} \sum_{k \in \mathbb{Z}} (f \mid b_k) b_k$ und
$$\|f\|_2^2 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |(f \mid b_k)|^2 \quad (\textbf{Parsevalsche Gleichung})$$
Insbesondere gilt: $(f \mid b_k) \to 0 \quad (|k| \to \infty)$.

Beweis
Zu zeigen: $\|f - S_n f\|_2 \to 0\,(n \to \infty)$. Die Parsevalsche Gleichung folgt dann aus 18.2.
Sei $\varepsilon > 0$. Wende 16.8(2) auf $\operatorname{Re} f$ und $\operatorname{Im} f$ an. Dies liefert eine stetige Funktion $g:\ (0, 2\pi) \to \mathbb{C}$ mit: $K := \operatorname{supp}(g) \subseteq (0, 2\pi)$, K kompakt und $\|f - g\|_2 < \varepsilon$.
Setze $g(0) := g(2\pi) := 0$. Dann ist g stetig auf $[0, 2\pi]$. Satz 18.4 liefert nun: $\exists n \in \mathbb{N}\exists v \in \mathrm{E}_n:$ $\|g - v\|_\infty < \varepsilon$.

Damit: $\|g-v\|_2 \leq \sqrt{2\pi}\|g-v\|_\infty < \sqrt{2\pi}\varepsilon$. Somit:

$$\begin{aligned}\|f-S_nf\|_2 &= \|f-g+g-S_ng+S_ng-S_nf\|_2\\ &\leq \underbrace{\|f-g\|_2}_{<\varepsilon} + \underbrace{\|g-S_ng\|_2}_{\overset{18.2(4)}{\leq}\|g-v\|_2} + \underbrace{\|S_n(g-f)\|_2}_{\overset{18.2(3)}{\leq}\|g-f\|_2}\\ &< 2\varepsilon + \sqrt{2\pi}\varepsilon = \varepsilon(2+\sqrt{2\pi})\end{aligned}$$

Sei $m \geq n$. Dann gilt: $\mathrm{E}_n \subseteq \mathrm{E}_m$, also $w := S_nf \in \mathrm{E}_m$. Damit:

$$\|f-S_mf\|_2 \leq \|f-w\|_2 = \|f-S_nf\|_2 < \varepsilon(2+\sqrt{2\pi})$$ ■

Reelle Version

Sei $f \in \mathrm{L}^2_\mathbb{R}$. Es gelten die folgenden Bezeichnungen:

(1) Für $k \in \mathbb{N}$ bezeichnen wir die Funktionen $t \mapsto \cos(kt)$ und $t \mapsto \sin(kt)$ mit $\cos(k\cdot)$ bzw. $\sin(k\cdot)$.

(2) Für $k \in \mathbb{N}_0$: $\alpha_k := \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos(kt)\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\operatorname{Re}(f \mid e_k)$.
Für $k \in \mathbb{N}$: $\beta_k := \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sin(kt)\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\operatorname{Im}(f \mid e_k)$, $\beta_0 := 0$.

Definition
f heißt **gerade** (bezüglich π) genau dann, wenn gilt: $f(t) = f(2\pi - t)$ für fast alle $t \in [0, 2\pi]$.
f heißt **ungerade** (bezüglich π) genau dann, wenn gilt: $f(t) = -f(2\pi-t)$ für fast alle $t \in [0, 2\pi]$.

Satz 18.6
(Dieser Satz folgt aus 18.5 und “etwas” rechnen)
Sei $f \in \mathrm{L}^2_\mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}_0$.

(1) $S_nf = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^n (\alpha_k\cos(k\cdot) + \beta_k\sin(k\cdot))$

(2) $f \overset{\|\cdot\|_2}{=} \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^\infty (\alpha_k\cos(k\cdot) + \beta_k\sin(k\cdot))$

(3) $\frac{1}{\pi}\|f\|_2^2 = \frac{\alpha_0^2}{2} + \sum_{k=1}^\infty (\alpha_k^2 + \beta_k^2)$ (Parsevalsche Gleichung)
Insbesondere gilt: $\alpha_k \to 0$, $\beta_k \to 0$ $(k \to \infty)$

(4) Ist f gerade, so sind alle $\beta_k = 0$ und $\alpha_k = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(t)\cos(kt)\mathrm{d}t$. Die Fourierreihe von f ist eine **Cosinusreihe**.
Ist f ungerade, so sind alle $\alpha_k = 0$ und $\beta_k = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(t)\sin(kt)\mathrm{d}t$. Die Fourierreihe von f ist eine **Sinusreihe**.

Beispiele:
(i) $f(t) := \begin{cases} 1, & 0 \leq t \leq \pi \\ -1, & \pi < t \leq 2\pi \end{cases}$

f ist ungerade, also $\alpha_k = 0\,\forall k \in \mathbb{N}_0$. Es ist $\beta_k = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin(kt)\mathrm{d}t = \begin{cases} 0, & k \text{ gerade} \\ \frac{4}{k\pi}, & k \text{ ungerade} \end{cases}$.

Damit:

$$f \overset{\|\cdot\|_2}{=} \frac{4}{\pi}\sum_{j=0}^{\infty} \frac{\sin((2j+1)\cdot)}{2j+1}$$

Beachte: $(S_n f)(0) = 0 \to 0 \neq 1 = f(0)$ und $(S_n f)(2\pi) = 0 \to 0 \neq -1 = f(2\pi)$.

(ii) $f(t) := \begin{cases} t, & 0 \leq t \leq \pi \\ 2\pi - t, & \pi \leq t \leq 2\pi \end{cases}$

f ist gerade, das heißt $\beta_k = 0\,\forall k \in \mathbb{N}$ und $\alpha_k = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi t\cos(kt)\mathrm{d}t$, $\alpha_0 = \pi$.

Für $k \geq 1:\quad \alpha_k = \begin{cases} 0, & k \text{ gerade} \\ -\frac{4}{\pi k^2}, & k \text{ ungerade} \end{cases}$.

Damit:

$$f \overset{\|\cdot\|_2}{=} \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{j=0}^{\infty} \frac{\cos((2j+1)\cdot)}{(2j+1)^2}$$

Satz 18.7

Sei $f \in L^2$ und $\sum_{k\in\mathbb{Z}} |(f|b_k)| < \infty$. Dann:

(1) Die Reihe $\sum_{k\in\mathbb{Z}} (f \mid b_k)b_k(t)$ konvergiert auf $[0, 2\pi]$ absolut und gleichmäßig. Setzt man $g(t) := \sum_{k\in\mathbb{Z}} (f \mid b_k)b_k(t)$ für $t \in [0, 2\pi]$, so ist g stetig, $g(0) = g(2\pi)$ und $f = g$ f.ü. auf $[0, 2\pi]$.

(2) Ist f stetig, so gilt $f = g$ auf $[0, 2\pi]$, also:

$$f(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} (f \mid b_k)b_k(t) \quad \forall t \in [0, 2\pi]$$

Insbesondere: $f(0) = f(2\pi)$

Beweis

(1) $f_k(t) := (f \mid b_k)b_k(t)$;

$$|f_k(t)| = |(f \mid b_k)| \cdot |b_k(t)| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}|(f \mid b_k)| \quad \forall t \in [0, 2\pi] \forall k \in \mathbb{Z}$$

Aus Analysis I, 19.1(2) (Konvergenzkriterium von Weierstraß) folgt: Die Reihe in (1) konvergiert auf $[0, 2\pi]$ absolut und gleichmäßig. Aus Analysis I, 19.2 folgt: g ist stetig. Klar: $g(0) = g(2\pi)$.

$$s_n(t) := \sum_{|k|\leq n} f_k(t) \quad (n \in \mathbb{N}_0, t \in [0, 2\pi]).$$

Aus 18.5 folgt: $\|f - s_n\|_2 \to 0 (n \to \infty)$. $\|g - s_n\|_2 \overset{18.3(2)}{\leq} \|g - s_n\|_\infty \sqrt{2\pi} \to 0 (n \to \infty)$ Also: $\|g - s_n\|_2 \to 0 (n \to \infty)$ Aus 16.5 folgt: $f = g$ f.ü.

(2) $f = g$ f.ü. $\overset{18.3(3)}{\Longrightarrow}$ $f = g$ auf $[0, 2\pi]$. ■

Satz 18.8
$f \in L^2_{\mathbb{R}}$ und die Folgen (α_k) und (β_k) seien definiert wie im Abschnitt "Reelle Version". Weiter gelte: $\sum_{k=1}^{\infty}|\alpha_k| < \infty$ und $\sum_{k=1}^{\infty}|\beta_k| < \infty$. Dann gelten die Aussagen in 18.7 für die Reihen in 18.6.

Satz 18.9
Sei $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ **stetig differenzierbar** und $f(0) = f(2\pi)$.

(1) Es ist $(f' \mid b_k) = ik(f \mid b_k) \quad \forall k \in \mathbb{Z}$

(2) $\sum_{k\in\mathbb{Z}}|(f \mid b_k)| < \infty$ (d.h.: die Voraussetzungen von 18.7 sind erfüllt)

Beweis

(1)

$$\begin{aligned}(f'|b_k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{2\pi} f'(t)e^{-ikt}\,\mathrm{d}t\\ &\overset{P.I.}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[f(t)e^{-ikt}\right]_0^{2\pi} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{2\pi} f(t)(-ik)e^{-ikt}\,\mathrm{d}t\\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(f(2\pi)-f(0)) + ik(f|b_k).\end{aligned}$$

(2) Setze $\sigma_n := \sum_{|k|\le n}|(f|b_k)| \quad (n \in \mathbb{N}_0)$. Es genügt zu zeigen: (σ_n) ist beschränkt. Klar: $0 \le \sigma_n$.

$$\begin{aligned}\sigma_n - |(f|b_0)| &= \sum_{0<|k|\le n}|(f|b_k)| \overset{(1)}{=} \sum_{0<|k|\le n}\underbrace{\frac{1}{|k|}}_{:=u_k}\underbrace{(f'|b_k)}_{:=v_k}\\ &= \sum_{0<|k|\le n} u_k v_k \overset{\text{CS-Ugl.}}{\le} \left(\sum_{0<|k|\le n} u_k^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{0<|k|\le n} v_k^2\right)^{\frac{1}{2}}\\ &= \left(2\sum_{k=1}^{n} u_k^2\right)^{\frac{1}{2}}\underbrace{\left(\sum_{0<|k|\le n} v_k^2\right)^{\frac{1}{2}}}_{\overset{18.2(3)}{\le}\|f'\|_2}\\ &\le \left(2\sum_{k=1}^{\infty} u_k^2\right)^{\frac{1}{2}}\|f'\|_2\end{aligned}$$

■

Beispiel

(1) f sei wie im Beispiel (2) vor 18.7. Es war:

$$f \overset{\|\cdot\|_2}{=} \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\cos((2j+1)\cdot)}{(2j+1)^2} \qquad \left(\alpha_{2j+1} = \frac{1}{(2j+1)^2}, \alpha_{2j} = 0\right)$$

Aus 18.7 bzw. 18.8 folgt:

$$f(t) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\cos((2j+1)t)}{(2j+1)^2} \quad \forall t \in [0, 2\pi]$$

Setzt man nun $t = 0$, folgt

$$0 = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(2j+1)^2}$$

und man erhält durch Umstellen eine Auswertung für diese eigentlich kompliziert wirkende Reihe:

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(2j+1)^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \ldots = \frac{\pi^2}{8}$$

(dass diese Reihe konvergiert, ist eine einfache Übung aus Ana I; ihren Wert aber haben wir bislang noch nicht berechnet)

(2) $f(t) = (t - \pi)^2 \quad (t \in [0, 2\pi])$. f ist gerade bzgl. π, also ist $\beta_k = 0$. Es ist

$$\alpha_k = \begin{cases} \frac{2}{3}\pi^2, & k = 0 \\ \frac{4}{k^2}, & k \geq 1 \end{cases} \quad \text{(nachrechnen!)}$$

Also:

$$f \overset{\|\cdot\|_2}{=} \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\cos(j\cdot)}{j^2}$$

Aus 18.9 bzw. 18.7(2) folgt:

$$f(t) = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\cos(jt)}{j^2} \quad \forall t \in [0, 2\pi]$$

Setzt man nun $t = 0$, erhält man

$$\pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2}, \text{ also } \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Damit erhält man z.B. auch

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{(2j)^2} = \frac{1}{4} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2} = \frac{\pi^2}{24}$$

und damit

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{j+1}}{j^2} = \frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} \pm \ldots = \frac{\pi^2}{8} - \frac{\pi^2}{24} = \frac{\pi^2}{12}$$