

# 16. Das Lebesguesche Integral

Es sei  $\tilde{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\infty\}$  Im Folgenden lassen wir Funktionen und Reihen mit Werten in  $\tilde{\mathbb{R}}$  zu.

**Regeln:**  $a < \infty \forall a \in \mathbb{R}$ .  $\infty \leq \infty$ ,  $\infty \pm c = c \pm \infty = \infty \forall c \in \tilde{\mathbb{R}}$ .  $\infty \cdot c = c \cdot \infty = \infty \forall c \in \tilde{\mathbb{R}} \setminus \{0\}$ .  $\infty \cdot 0 = 0 \cdot \infty = 0$ . Ist  $(a_n)$  eine Folge in  $\tilde{\mathbb{R}}$  und  $a_n \geq 0 \forall n \in \mathbb{N}$ ;  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n := \infty$ , falls alle  $a_n \in \mathbb{R}$  und  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  divergiert;  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n := \infty$ , falls  $a_n = \infty$  für ein  $n \in \mathbb{N}$ . Sei  $A \subseteq \tilde{\mathbb{R}}$  und  $a \geq 0 \forall a \in A$ .

$$\inf A := \begin{cases} \infty & , \text{ falls } A = \{\infty\} \\ \inf(A \setminus \{\infty\}) & , \text{ falls } A \setminus \{\infty\} \neq \emptyset \end{cases}$$

**Motivation:**  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  sei eine Funktion,  $f \geq 0$  auf  $\mathbb{R}$  und  $M := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq f(x)\}$ . Es seien  $Q_1, Q_2, \dots$  offene Quader im  $\mathbb{R}^1$  und  $c_1, c_2, \dots \geq 0$ . Es gelte  $f(x) \leq \sum_{k=1}^{\infty} c_k 1_{Q_k}(x) \forall x \in \mathbb{R}$  ( $\sum_{k=1}^{\infty} c_k 1_{Q_k}(x) = \infty$  ist zugelassen!)

Dann kann man  $\sum_{k=1}^{\infty} c_k v_1(Q_k)$  betrachten als obere Approximation an den „Inhalt“ von  $M$ . ( $\sum_{k=1}^{\infty} c_k v_1(Q_k) = \infty$  ist zugelassen)

Im Folgenden bedeutet  $\sum_k$  entweder eine endliche Summe oder eine unendliche Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} \dots$

## Definition

Sei  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \tilde{\mathbb{R}}$  eine Funktion. Seien  $(Q_1, c_1), (Q_2, c_2), \dots$  endlich viele oder abzählbar viele Paare mit  $Q_j$  offener Quader und  $c_j \in [0, \infty)$  und es gelte  $|f(x)| \leq \sum_k c_k 1_{Q_k}(x) \forall x \in \mathbb{R}^n$ .

Dann heißt  $\Phi := \sum_k c_k 1_{Q_k}$  eine **Hüllreihe** für  $f$  und  $I(\Phi) := \sum_k c_k v_n(Q_k)$  ihr **Inhalt**.  $\mathcal{H}(f) := \{\Phi : \Phi \text{ ist eine Hüllreihe für } f\}$   $\|f\|_1 := \inf\{I(\Phi) : \Phi \in \mathcal{H}(f)\}$  ( $L^1$ -**Halbnorm** von  $f$ .)

**Beachte:**  $\|f\|_1 \geq 0$ ,  $\|f\|_1 = \infty$  ist zugelassen.

**Behauptung:**  $\mathcal{H}(f) \neq \emptyset$

**Beweis:** Für  $k \in \mathbb{N}$  sei  $Q_k := (-k, k) \times \dots \times (-k, k) (\subseteq \mathbb{R}^n)$ .  $\Phi := \sum_{k=1}^{\infty} 1 \cdot 1_{Q_k}$ . Sei  $x \in \mathbb{R}^n \implies \exists m_0 \in \mathbb{N} : x \in Q_{m_0} \implies x \in Q_k \forall k \geq m_0 \implies \Phi(x) \geq \sum_{k=m_0}^{\infty} \underbrace{1 \cdot 1_{Q_k}}_{=1} = \infty \implies$

$$|f(x)| \leq \Phi(x) \forall x \in \mathbb{R}^n \implies \Phi \in \mathcal{H}(f). \\ (I(\Phi) = \sum_{k=1}^{\infty} v_n(Q_k) = \sum_{k=1}^{\infty} (2k)^n = \infty).$$

## Beispiel

( $n = 1$ ),  $A = \{0\} (\subseteq \mathbb{R})$ ;  $f := 1_A$  (also:  $f(0) = 1$ ,  $f(x) = 0 \forall x \neq 0$ ).

Sei  $\varepsilon > 0$ ,  $Q := (-\varepsilon, \varepsilon)$ ,  $\Phi := 1_Q \implies \Phi \in \mathcal{H}(f)$ .

$$I(\Phi) = v_1(Q) = 2\varepsilon \implies \|f\|_1 \leq 2\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \|f\|_1 = 0. \text{ Aber: } f \neq 0$$

**Satz 16.1 (Rechenregeln der  $L^1$ -Halbnorm)**

Seien  $f, g, f_1, g_1, \dots : \mathbb{R}^n \rightarrow \tilde{\mathbb{R}}$  Funktionen.

- (1)  $\|cf\|_1 = |c|\|f\|_1 \quad \forall c \in \mathbb{R}$
- (2)  $\|f + g\|_1 \leq \|f\|_1 + \|g\|_1$
- (3) Aus  $|f| \leq |g|$  auf  $\mathbb{R}^n$  folgt  $\|f\|_1 \leq \|g\|_1$
- (4)  $\|\sum_{k=1}^{\infty} f_k\|_1 \leq \sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\|_1$

**Beweis**

(1) Klar

(2) O.B.d.A.:  $\|f\|_1 + \|g\|_1 < \infty$ . Sei  $\varepsilon > 0$ .  $\exists \Phi_1 \in \mathcal{H}(f), \exists \Phi_2 \in \mathcal{H}(g): I(\Phi_1) \leq \|f\|_1 + \varepsilon, I(\Phi_2) \leq \|g\|_1 + \varepsilon$ .  $\Phi := \Phi_1 + \Phi_2 \implies \Phi \in \mathcal{H}(f + g)$  und  $I(\Phi) = I(\Phi_1) + I(\Phi_2) \leq \|f\|_1 + \|g\|_1 + 2\varepsilon \implies \|f + g\|_1 \leq \|f\|_1 + \|g\|_1 + 2\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \text{Beh.}$

(3) Sei  $\Phi \in \mathcal{H}(g) \implies \Phi \in \mathcal{H}(f)$ . Also:  $\mathcal{H}(g) \subseteq \mathcal{H}(f) \implies \text{Beh.}$

(4) In der Übung ■

**Satz 16.2 ( $L^1$ -Halbnorm eines Quaders)**

Es sei  $Q$  ein abgeschlossener Quader im  $\mathbb{R}^n$ . Dann:

$$v_n(Q) = \int_{\mathbb{R}^n} 1_Q dx = \|1_Q\|_1$$

**Beweis**

$f := 1_Q$ .  $\int f dx \stackrel{\S 15}{=} v_n(Q)$ . Zu zeigen:  $v_n(Q) = \|f\|_1$ .

(1) Es sei  $\varepsilon > 0$ . Dann existiert ein offener Quader  $\hat{Q}$  mit:  $Q \subseteq \hat{Q}$  und  $v_n(\hat{Q}) = v_n(Q) + \varepsilon$ .  $\Phi := 1_{\hat{Q}} \implies \Phi \in \mathcal{H}(f)$  und  $I(\Phi) = v_n(\hat{Q}) = v_n(Q) + \varepsilon \implies \|f\|_1 \leq v_n(Q) + \varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \|f\|_1 \leq v_n(Q)$

(2) Sei  $\Phi = \sum_k f_k 1_{Q_k} \in \mathcal{H}(f)$ , also  $c_k \geq 0$ ,  $Q_k$  offene Quader.

Sei  $\varepsilon \in (0, 1)$ . Für  $x \in Q$ :  $1 = 1_Q(x) = f(x) = |f(x)| \leq \sum_k c_k 1_{Q_k}(x)$

$\exists n(x) \leq \mathbb{N}$ :  $\sum_{k=1}^{n(x)} c_k 1_{Q_k}(x) \geq 1 - \varepsilon$  und (o.B.d.A.)  $1_{Q_k}(x) = 1$  ( $k = 1, \dots, n(x)$ ).  $Q_1, \dots, Q_{n(x)}$  offen  $\implies \exists \delta_x > 0 : U_{\delta_x}(x) \subseteq Q_j$  ( $j = 1, \dots, n(x)$ )  $\implies \sum_{k=1}^{n(x)} c_k 1_{Q_k}(z) \geq 1 - \varepsilon \quad \forall z \in U_{\delta_x}(x)$  (\*).

$$Q \subseteq \bigcup_{x \in Q} U_{\delta_x}(x) \xrightarrow{2.2(3)} \exists x_1, \dots, x_p \in Q : Q \subseteq \bigcup_{j=1}^p U_{\delta_{x_j}}(x_j)$$

$N := \max\{n(x_1), \dots, n(x_p)\}$ .  $\varphi_1 := \sum_{k=1}^N c_k 1_{Q_k}$ ,  $\varphi_2(x) := (1 - \varepsilon)1_Q$ . Also:  $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{T}_n$ .

$$\int \varphi_2 dx = (1 - \varepsilon)v_n(Q), \int \varphi_1 dx = \sum_{k=1}^N c_k v_n(Q_k) \leq \sum_k v_k v_n(Q_k) = I(\Phi)$$

Sei  $x \notin Q$ :  $\varphi_2(x) = 0 \leq \varphi_1(x)$ .

Sei  $z \in Q$ :  $\exists j \in \{1, \dots, p\} : z \in U_{\delta_{x_j}}(x_j) \implies \varphi_1(z) = \sum_{k=1}^N c_k 1_{Q_k}(z) \geq \sum_{k=1}^{n(x_j)} c_k 1_{Q_k}(z) \geq 1 - \varepsilon = \varphi_2(z)$ . Also  $\varphi_2 \leq \varphi_1$  auf  $\mathbb{R}^n$ . 15.4  $\implies \int \varphi_2 dx \leq \int \varphi_1 dx \implies (1 - \varepsilon)v_n(Q) \leq I(\Phi)$ .  
 $\Phi \in \mathcal{H}(f)$  beliebig  $\implies (1 - \varepsilon)v_n(Q) \leq \|f\|_1$ . Also:  $(1 - \varepsilon)v_n(Q) \leq \|f\|_1 \quad \forall \varepsilon > 0 \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} v_n(Q) \leq \|f\|_1$ .

(1) und (2)  $\implies v_n(Q) = \|f\|_1$  ■

**Vorbemerkung:** Es sei  $Q \subseteq \mathbb{R}^n$  ein nicht offene Quader. Dann existieren Quader  $Q_1, \dots, Q_\nu \subseteq \partial Q$  mit:  $Q = Q^0 \cup Q_1 \cup \dots \cup Q_\nu$  und  $Q^0, Q_1, \dots, Q_\nu$  paarweise disjunkt. Insbesondere:  $v_n(Q_j) = 0$  ( $j = 1, \dots, \nu$ ) und  $1_Q = 1_{Q^0} + 1_{Q_1} + \dots + 1_{Q_\nu}$ .

### Satz 16.3 ( $L^1$ -Halbnorm einer Treppenfunktion)

Sei  $\varphi \in \mathcal{T}_n$  und  $Q$  ein beliebiger Quader im  $\mathbb{R}^n$ .

$$(1) \quad \mathcal{H}(\varphi) = \mathcal{H}(|\varphi|), \quad \|f\|_1 = \| |\varphi| \|_1$$

$$(2) \quad \|\varphi\|_1 = \int |\varphi| dx$$

$$(3) \quad v_n(Q) = \int 1_Q dx = \|1_Q\|_1$$

### Beweis

(1) Klar

(2) Sei  $\varphi = \sum_{k=1}^m \hat{c}_k 1_{\hat{Q}_k}$  wobei  $\hat{c}_k \in \mathbb{R}$ ,  $\hat{Q}_1, \dots, \hat{Q}_m$  passende disjunkte Quader. Anwendung der Vorbemerkung auf jeden nichtoffenen Quader  $\hat{Q}_j$  liefert:

$$\varphi = \sum_{k=1}^s c_k 1_{Q_k} + \sum_{k=1}^r d_k 1_{R_k}$$

wobei  $Q_1, \dots, Q_s, R_1, \dots, R_r$  paarweise diskunkt,  $Q_1, \dots, Q_s$  offen,  $v_n(R_j) = 0$  ( $j = 1, \dots, r$ ).  
Wegen (1): O.B.d.A:  $\varphi \geq 0$ ; dann:  $c_k, d_k \geq 0$ ,  $\alpha := \sum_{k=1}^r d_k$ . Sei  $\varepsilon > 0$ . Zu jedem  $R_k$  existiert ein Quader  $\hat{R}_k$ :  $v_n(\hat{R}_k) = \varepsilon$ .

$$\Phi := \sum_{k=1}^s c_k 1_{Q_k} + \sum_{k=1}^r d_k 1_{\hat{R}_k} \implies \Phi \in \mathcal{H}(f)$$

und

$$I(\Phi) = \underbrace{\sum_{k=1}^s c_k v_n(Q_k)}_{=\int \varphi dx} + \underbrace{\sum_{k=1}^r d_k v_n(\hat{R}_k)}_{=\varepsilon \alpha} = \int \varphi dx + \varepsilon \alpha \implies \|\varphi\|_1 \leq \int \varphi dx + \varepsilon \alpha$$

$$\xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \|\varphi\|_1 \leq \int \varphi dx$$

Wähle einen *abgeschlossenen* Quader  $Q$  mit  $Q_1 \cup \dots \cup Q_s \cup R_1 \cup \dots \cup R_r \subseteq Q$ . Dann:  
 $\varphi(x) = 0 \ \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus Q$ ,  $m := \max\{\varphi(x) : x \in \mathbb{R}^n\}$ ,  $\psi := m \cdot 1_Q - \varphi \in \mathcal{T}_n \implies \psi \geq 0$   
auf  $\mathbb{R}^n$ . Wie oben:  $\|\psi\|_1 \leq \int \psi dx$ .  $\int \psi dx = \int (m \cdot 1_Q - \varphi) dx = m \int 1_Q dx - \int \varphi dx \leq$   
 $m \int 1_Q dx - \|\psi\|_1 \stackrel{16.2}{=} m \|1_Q\|_1 - \|\psi\|_1 = \|m \cdot 1_Q\|_1 - \|\psi\|_1 = \|\varphi + \psi\|_1 - \|\psi\|_1 \leq$   
 $\|\varphi\|_1 + \|\psi\|_1 - \|\psi\|_1 = \|\varphi\|_1$ .

(3) folgt aus (2) und  $\varphi = 1_Q$  ■

### Satz 16.4 (Integration und Grenzwertbildung bei Treppenfunktionen)

Sei  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \tilde{\mathbb{R}}$ , seien  $(\varphi_k), (\psi_k)$  Folgen in  $\mathcal{T}_n$  mit  $\|f - \varphi_k\|_1 \rightarrow 0$ ,  $\|f - \psi_k\|_1 \rightarrow 0$  ( $k \rightarrow \infty$ ).  
Dann sind  $(\int \varphi_k dx)$  und  $(\int \psi_k dx)$  konvergente Folgen in  $\mathbb{R}$  und

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int \varphi_k dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \int \psi_k dx$$

### Beweis

$a_k := \int \varphi_k dx$ ,  $b_k := \int \psi_k dx$  ( $k \in \mathbb{N}$ ).

$|a_k - a_l| = |\int \varphi_k dx - \int \varphi_l dx| = |\int (\varphi_k - \varphi_l) dx| \stackrel{15.4}{\leq} \int |\varphi_k - \varphi_l| dx \stackrel{16.3}{=} \|\varphi_k - \varphi_l\|_1 = \|\varphi_k - f + f - \varphi_l\|_1 \leq \|\varphi_k - f\|_1 + \|f - \varphi_l\|_1 \implies (a_k)$  ist eine Cauchyfolge in  $\mathbb{R}$  und als solche konvergent.  
Genau so:  $(b_k)$  ist konvergent.

$a := \lim a_k$ ,  $b := \lim b_k$ .  $|a_k - b_k| \stackrel{\text{wie oben}}{\leq} \|f - \varphi_k\|_1 + \|f - \psi_k\|_1 \xrightarrow{k \rightarrow \infty} a = b$ . ■

### Definition

(1)  $L(\mathbb{R}^n) := \{f : \mathbb{R}^n \rightarrow \tilde{\mathbb{R}} : \exists \text{ Folge } (\varphi_k) \in \mathcal{T}_n \text{ mit: } \|f - \varphi_k\|_1 \rightarrow 0 \ (k \rightarrow \infty)\}$

(2) Ist  $f \in L(\mathbb{R}^n)$ , so heißt  $f$  **Lebesgueintegrierbar über  $\mathbb{R}^n$** .

(3) Ist  $f \in L(\mathbb{R}^n)$  und  $(\varphi_k)$  eine Folge in  $\mathcal{T}_n$  mit  $\|f - \varphi_k\|_1 \rightarrow 0$ , so heißt

$$\int f dx := \int f(x) dx := \int_{\mathbb{R}^n} f dx := \int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx := \lim_{k \rightarrow \infty} \int \varphi_k dx$$

das **Lebesgueintegral** von  $f$  über  $\mathbb{R}^n$ .

**Bemerkung:** (1) Wegen 16.4 ist  $\int f dx$  wohldefiniert und reell.

(2) Ist  $\varphi \in \mathcal{T}_n$ , so wähle  $(\varphi_k) = (\varphi, \varphi, \varphi, \dots) \implies \varphi \in L(\mathbb{R}^n)$  und Integral von  $\varphi$  aus §15 stimmt mit obigem Integral überein. Insbesondere:  $\mathcal{T}_n \subseteq L(\mathbb{R}^n)$

### Satz 16.5 (Rechenregeln für Lebesgueintegrale)

Es seien  $f, g \in L(\mathbb{R}^n)$  und  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ .

- (1)  $\alpha f + \beta g \in L(\mathbb{R}^n)$  und  $\int (\alpha f + \beta g) dx = \alpha \int f dx + \beta \int g dx$
- (2)  $|f| \in L(\mathbb{R}^n)$  und  $|\int f dx| \leq \int |f| dx = \|f\|_1$
- (3) Aus  $f \leq g$  auf  $\mathbb{R}^n$  folgt:  $\int f dx \leq \int g dx$
- (4) Ist  $g$  auf  $\mathbb{R}^n$  beschränkt  $\implies fg \in L(\mathbb{R}^n)$ .

### Beweis

(1) Klar.

(2)  $\exists$  Folge  $(\varphi_k)$  in  $\mathcal{T}_n$  mit  $\|f - \varphi_k\|_1 \rightarrow 0$  ( $k \rightarrow \infty$ ).  $|\varphi_k| \in \mathcal{T}_n$  ( $k \in \mathbb{N}$ ).  $\|f| - |\varphi_k|\| \leq \|f - \varphi_k\| \xrightarrow{16.4} \|f| - |\varphi_k|\|_1 \leq \|f - \varphi_k\|_1 \implies |f| \in L(\mathbb{R}^n)$  und  $|\int f dx| = |\lim \int \varphi_k dx| = \lim |\int \varphi_k dx| \stackrel{15.4}{\leq} \lim \underbrace{\int |\varphi_k| dx}_{\stackrel{16.3}{=} \|\varphi_k\|_1} = \int |f| dx.$

$$\|f\|_1 = \|f - \varphi_k + \varphi_k\|_1 \leq \|f - \varphi_k\|_1 + \|\varphi_k\|_1 \stackrel{k \rightarrow \infty}{\implies} \|f\|_1 \leq \int |f| dx. \|\varphi_k\|_1 = \|\varphi_k - f + f\|_1 \leq \|\varphi_k - f\|_1 + \|f\|_1 \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \int |f| dx \leq \|f\|_1$$

(3) Es ist  $g - f \geq 0$  auf  $\mathbb{R}^n$ .  $\int g dx - \int f dx \stackrel{(1)}{=} \int \underbrace{(g - f)}_{>0} dx = \int |g - f| dx \stackrel{(2)}{=} \|g - f\|_1 \geq 0.$

(4)  $\exists M \geq 0 : |g| \leq M$  auf  $\mathbb{R}^n$ . Sei  $k \in \mathbb{N}$ .  $\exists \varphi_k \in \mathcal{T}_n : \|f - \varphi_k\|_1 \leq \frac{1}{2Mk}$ .  $\exists \gamma \geq 0 : |\varphi_k| \leq \gamma$  auf  $\mathbb{R}^n$ .  $\exists \psi_k \in \mathcal{T}_n : \|g - \psi_k\|_1 \leq \frac{1}{2\gamma k}$ . Dann:  $\varphi_k \psi_k \in \mathcal{T}_n$ .

$$|fg - \varphi_k \psi_k| = |gf - g\varphi_k + g\varphi_k - \varphi_k \psi_k| \leq |g||f - \varphi_k| + |\varphi_k||g - \psi_k| \leq M|f - \varphi_k| + \gamma|g - \psi_k| \xrightarrow{16.1} \|fg - \varphi_k \psi_k\|_1 \leq M\|f - \varphi_k\|_1 + \gamma\|g - \psi_k\|_1 \leq M \cdot \frac{1}{2Mk} + \gamma \frac{1}{2\gamma k} = \frac{1}{k} \implies \text{Beh.} \quad \blacksquare$$

### Definition

Sei  $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{R}^n$  und  $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$  (nicht  $\tilde{\mathbb{R}}$ !) seien Funktionen.

$$\max(f, g)(x) := \max\{f(x), g(x)\} \quad (x \in D)$$

$$\min(f, g)(x) := \min\{f(x), g(x)\} \quad (x \in D)$$

$$f^+ := \max(f, 0), \quad f^- := \max(-f, 0) = (-f)^+$$

Es ist  $\max(f, g) = \frac{1}{2}(f + g + |f - g|)$ ,  $\min(f, g) = \frac{1}{2}(f + g - |f - g|)$ ,  $f^+, f^- \geq 0$  auf  $D$  und  $f = f^+ - f^-$ .

### Folgerung 16.6

Gilt für  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , dass  $f, g \in L(\mathbb{R}^n) \implies \max(f, g), \min(f, g), f^+, f^- \in L(\mathbb{R}^n)$ .

### Satz 16.7 („Kleiner“ Satz von Beppo Levi)

$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  sei eine Fkt.,  $(\varphi_k)$  sei eine Folge in  $\mathcal{T}_n$  mit:  $\varphi_1 \leq \varphi_2 \leq \varphi_3 \leq \dots$  auf  $\mathbb{R}^n$ ,  $\varphi_k(x) \rightarrow f(x)$  ( $k \rightarrow \infty$ )  $\forall x \in \mathbb{R}^n$  und  $(\int \varphi_k dx)$  sei beschränkt.

Dann:  $f \in L(\mathbb{R}^n)$  und  $\int f dx = \lim \int \varphi_k dx$  ( $\lim \int \varphi_k dx = \int \lim \varphi_k dx$ )

**Beweis**

$a_j := \int \varphi_{j+1} dx - \int \varphi_j dx$  ( $j \in \mathbb{N}$ ).  $a_j \geq 0$  ( $j \in \mathbb{N}$ ).  $\sum_{j=1}^m a_j = \int \varphi_{m+1} dx - \int \varphi_1 dx \implies (\sum_{j=1}^m a_j)$  ist beschränkt.  $\xrightarrow{\text{Ana I}} \sum_{j=1}^{\infty} a_j$  konvergiert.

Für  $k \in \mathbb{N} : c_k := \sum_{j=k}^{\infty} a_j$ . Ana I  $\implies c_k \rightarrow 0$  ( $k \rightarrow \infty$ ).

Sei  $k \in \mathbb{N}$  und  $m \geq k : \sum_{j=k}^m (\varphi_{j+1} - \varphi_j) = \varphi_{m+1} - \varphi_k \xrightarrow{m \rightarrow \infty} f - \varphi_k = \sum_{j=k}^{\infty} (\varphi_{j+1} - \varphi_j)$ .

$\|f - \varphi_k\|_1 = \|\sum_{j=k}^{\infty} (\varphi_{j+1} - \varphi_j)\|_1 \stackrel{16.1}{\leq} \sum_{j=k}^{\infty} \|\varphi_{j+1} - \varphi_j\|_1 \stackrel{16.3}{=} \sum_{j=k}^{\infty} \int |\varphi_{j+1} - \varphi_j| dx = \sum_{j=k}^{\infty} a_j = c_k \rightarrow 0$  ( $k \rightarrow \infty$ )  $\implies \|f - \varphi_k\|_1 \rightarrow 0$  ( $k \rightarrow \infty$ )  $\implies$  Beh.  $\blacksquare$

**Definition**

Sei  $A \subseteq \mathbb{R}^n$

(1) Ist  $f : A \rightarrow \tilde{\mathbb{R}}$  eine Fkt.:

$$f_A(x) := \begin{cases} f(x) & , x \in A \\ 0 & , x \notin A \end{cases}, f_A : \mathbb{R}^n \rightarrow \tilde{\mathbb{R}}$$

$$\|f\|_{1,A} := \|f_A\|_1$$

(2)  $L(A) := \{f : A \rightarrow \tilde{\mathbb{R}} : f_A \in L(\mathbb{R}^n)\}$ . Ist  $f \in L(A)$ , so heißt  $f$  **auf  $A$  Lebesgueintegrierbar** und  $\int_A f dx := \int_A f(x) dx := \int_{\mathbb{R}^n} f_A dx$  heißt das **Lebesgueintegral von  $f$  über  $A$** .  
Bem.:  $\int_{\emptyset} f dx$  existiert und  $= 0$ .

**Satz 16.8 (Lebesgueintegral und  $L^1$ -Halbnorm)**

Die Sätze 16.5 bis 16.6 gelten sinngemäß für  $L(A)$ . Insbes.:

$$\|f\|_{1,A} = \int_A |f| dx$$

**Beispiel**

( $n = 1$ ),  $A := [0, 1]$ .

$$f(x) := \begin{cases} 1 & , x \in A \setminus \mathbb{Q} \\ 0 & , x \in A \cap \mathbb{Q} \end{cases}$$

Bekannt:  $f \notin R[0, 1]$ . Gr. Übung:  $f \in L(A)$  und  $\int_A f dx = 1$

**Satz 16.9 (Riemann- und Lebesgueintegrale)**

Sei  $I := [a, b]$  ( $a < b$ ),  $I \subseteq \mathbb{R}$  und  $f \in R[a, b]$ . Dann:  $f \in L(I)$ ,

$$\underbrace{\int_a^b f dx}_{\text{R-Int.}} = \underbrace{\int_I f dx}_{\text{L-Int.}}$$

Also:  $R[a, b] \subset L([a, b])$

**Beweis**

$$h := f_I$$

- (1) Sei  $Z = \{x_0, \dots, x_m\} \in \mathfrak{Z}$ ,  $I_j := [x_{j-1}, x_j]$ ,  $m_j := \inf f(I_j)$ ,  $M_j := \sup f(I_j)$ ,  $Q_j := (x_{j-1}, x_j)$  ( $j = 1, \dots, m$ ).

Zu  $Z$  definiere  $\varphi \in \mathcal{T}_1$  durch:

$$\varphi(x) := \begin{cases} f(x) & , x \in Z \\ m_j & , x \in Q_j \\ 0 & , x \notin [a, b] \end{cases}$$

$$\int \varphi dx = \sum_{j=1}^m m_j \underbrace{v_1(Q_j)}_{=|I_j|} = s_f(Z)$$

Def.:  $\Phi := \sum_{j=1}^m (M_j - m_j) 1_{Q_j}$ ; Dann:  $0 \leq h - \varphi \leq \Phi$  auf  $\mathbb{R} \implies \Phi \in \mathcal{H}(h - f)$  und  $I(\Phi) = \sum_{j=1}^m (M_j - m_j) |I_j| = S_f(Z) - s_f(Z) \implies \|h - \varphi\|_1 \leq S_f(Z) - s_f(Z)$

- (2) Sei  $(Z_k)$  eine Folge in  $\mathfrak{Z}$  mit  $|Z_k| \rightarrow 0$ . Ana I, 23.18  $\implies S_f(Z_k) \rightarrow \int_a^b f dx$ ,  $s_f(Z_k) \rightarrow \int_a^b f dx$ . Zu jedem  $Z_k$  konstruiere  $\varphi_k \in \mathcal{T}_1$  wie in (1). Dann:  $\|h - \varphi_k\|_1 \leq S_f(Z_k) - s_f(Z_k) \rightarrow 0$  ( $k \rightarrow \infty$ )  $\implies h \in L(\mathbb{R})$  und  $\int_{\mathbb{R}} h dx = \lim \int \varphi_k dx \stackrel{(1)}{=} \lim s_f(Z_k) = \int_a^b f dx \implies f \in L([a, b])$  und  $\int_{[a, b]} f dx = \int_{\mathbb{R}} h dx = \int_a^b f dx$ . ■

**Satz 16.10 (Konvergente Treppenfunktionsfolge)**

Sei  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  offen,  $f \in C(A, \mathbb{R})$  und  $f \geq 0$  auf  $A$ . Dann:  $\exists$  Folge  $(\varphi_k)$  in  $\mathcal{T}_n$  mit:  $\varphi_1 \leq \varphi_2 \leq \varphi_3 \leq \dots$  auf  $\mathbb{R}^n$  und  $\varphi_k(x) \rightarrow f_A(x) \forall x \in \mathbb{R}^n$ .

Insbes.:  $\varphi_k \leq f_A$  auf  $\mathbb{R}^n \forall k \in \mathbb{N}$

**Beweis**

$$g := f_A, \mathbb{Q}^n := \{(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n : a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Q}\}, \mathbb{Q}^+ := \{r \in \mathbb{Q} : r \geq 0\}$$

Für  $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{Q}^n$ ,  $r \in \mathbb{Q}^+$ :  $W_r(a) := [a_1 - r, a_1 + r] \times \dots \times [a_n - r, a_n + r]$ .

$$m_{r,a} := \inf g(W_r(a)) \geq 0, \psi_{r,a} := m_{r,a} 1_{W_r(a)} \geq 0, \psi_{r,a} \in \mathcal{T}_n.$$

Dann:  $0 \leq \psi_{r,a} \leq g$  auf  $\mathbb{R}^n$  (\*)

$\mathcal{T} := \{\psi_{r,a} : a \in \mathbb{Q}^n, r \in \mathbb{Q}^+\}$ .  $\mathbb{Q}^n, \mathbb{Q}^+$  abzählbar  $\implies \mathcal{T}$  ist abzählbar, etwa  $\mathcal{T} = \{\psi_1, \psi_2, \psi_3, \dots\}$ .

$$s(x) := \sup\{\psi(x) : \psi \in \mathcal{T}\} \quad (x \in \mathbb{R}^n)$$

Aus (\*) folgt:  $s(x) \leq g(x) \forall x \in \mathbb{R}^n$

Sei  $x \in \mathbb{R}^n$ : Fall 1:  $x \notin A$ . Dann:  $0 = g(x) \leq s(x)$

Fall 2:  $x \in A$ . Sei  $\varepsilon > 0$ .  $A$  offen,  $f$  stetig

$\implies \exists a \in \mathbb{Q}^n, r \in \mathbb{Q}^+ : |f(z) - f(x)| < \varepsilon \forall z \in W_r(a) \subseteq A$

## 16. Das Lebesguesche Integral

$$\begin{aligned} \implies g(z) &> f(x) - \varepsilon \quad \forall z \in W_r(a) \implies m_{r,a} \geq f(x) - \varepsilon \\ \implies g(x) - \varepsilon &\leq m_{r,a} = \psi_{r,a}(x) \leq s(x) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} g(x) \leq s(x). \end{aligned}$$

Also:  $s = g$  auf  $\mathbb{R}^n$

$\varphi_k := \max(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_k)$  ( $k \in \mathbb{N}$ )  $\in \mathcal{T}_n$ . ( $\varphi_k$ ) leistet das Verlangte. ■

**Satz 16.11 (Stetige und beschränkte Funktionen sind Lebesgue-Integrierbar)**  
Sei  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  offen und beschränkt und  $f \in C(A, \mathbb{R})$  sei beschränkt. Dann:  $f \in L(A)$ .

### Beweis

$f = f^+ - f^-$ ,  $f^+, f^- \in C(A, \mathbb{R})$ ,  $f^+, f^-$  beschr. auf  $A$ . O.B.d.A:  $f \geq 0$  auf  $A$ .

Sei  $(\varphi_k)$  wie in 16.10. Sei  $Q \subseteq \mathbb{R}^n$  ein Quader mit  $A \subseteq Q$ .  $\gamma := \sup\{f(x) : x \in A\}$ . Dann:  
 $\varphi_1 \leq \varphi_k \leq f_A \leq \gamma \cdot 1_Q$  auf  $\mathbb{R}^n \quad \forall k \in \mathbb{N}$   
 $\implies \int \varphi_1 dx \leq \int \varphi_k dx \leq \gamma \int 1_Q dx = \gamma v_1(Q) \quad \forall k \in \mathbb{N}$   
 $\implies (\int \varphi_k dx)$  ist beschränkt. 16.7  $\implies f_A \in L(\mathbb{R}^n) \implies f \in L(A)$ . ■

**Satz 16.12 (Stetige und beschränkte Funktionen sind Lebesgue-Integrierbar)**  
 $A \subseteq \mathbb{R}^n$  sei abg. und beschr. und  $f \in C(A, \mathbb{R})$ . Dann:  $f \in L(A)$ .

### Beweis

3.4  $\implies \exists F \in C(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) : F = f$  auf  $A$ . Sei  $Q$  ein *offener* Quader mit  $A \subseteq Q$ .  $\bar{Q}$  ist beschr. und abg. 3.3  $\implies F$  ist auf  $\bar{Q}$  beschr.  $\implies F$  ist auf  $Q$  beschr.  $\xrightarrow{16.11} F|_Q \in L(Q) \implies \underbrace{(F|_Q)_Q}_{=F_Q} \in$

$L(\mathbb{R}^n) \implies F_Q \in L(\mathbb{R}^n)$ .

$Q \setminus A$  ist offen und beschr.  $\xrightarrow{16.11} 1 \in L(Q \setminus A) \implies 1_{Q \setminus A} \in L(\mathbb{R}^n) \xrightarrow{16.5} F_Q \cdot 1_{Q \setminus A} \in L(\mathbb{R}^n)$ .

Es ist  $f_A = F_Q - F_Q \cdot 1_{Q \setminus A} \xrightarrow{16.5} f_A \in L(\mathbb{R}^n) \implies f \in L(A)$ . ■

**Bezeichnungen:**  $\mathbb{R}^{n+m} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m = \{(x, y) : x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^m\}$ . Sei  $A \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$ .

Für  $y \in \mathbb{R}^m : A_y := \{x \in \mathbb{R}^n : (x, y) \in A\} \subseteq \mathbb{R}^n$ . Für  $x \in \mathbb{R}^n : A_x := \{y \in \mathbb{R}^m : (x, y) \in A\} \subseteq \mathbb{R}^m$ .

### Satz 16.13 ("Kleiner" Satz von Fubini)

$A \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$  sei beschränkt und offen und  $f \in C(A, \mathbb{R})$  sei beschränkt (also  $f \in L(A)$ , 16.11!).

$A \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$  sei beschränkt und abgeschlossen und  $f \in C(A, \mathbb{R})$  sei beschränkt (also  $f \in L(A)$ , 16.12!).

Dann:



- (1) Für jedes  $y \in \mathbb{R}^m$  ist die Funktion  $x \mapsto f(x, y)$  Lebesgueintegrierbar über  $A_y$   
(2) Die Funktion  $y \mapsto \int_{A_y} f(x, y) dx$  ist Lebesgueintegrierbar über  $\mathbb{R}^n$  und

$$\int_A f(x, y) d(x, y) = \int_{\mathbb{R}^m} \left( \int_{A_y} f(x, y) dx \right) dy$$

- (3) Analog zu (1),(2):

$$\int_A f(x, y) d(x, y) = \int_{\mathbb{R}^n} \left( \int_{A_x} f(x, y) dy \right) dx$$

### Beweis

Nur für  $A$  beschränkt und offen (für  $A$  beschränkt und abgeschlossen ähnlich wie bei 16.12).  
O.B.d.A.:  $f \geq 0$  auf  $A$  ( $f = f^+ - f^-$ ).

- (1) Sei  $(\varphi_k)$  eine Folge in  $\mathcal{T}_{n+m}$  wie in 16.10. Wie im Beweis von 16.11:  $(\int_{\mathbb{R}^{n+m}} \varphi_k(x, y) d(x, y))$  ist beschränkt. 16.7  $\implies \int_A f(x, y) d(x, y) = \int_{\mathbb{R}^{n+m}} f_A(x, y) d(x, y) = \lim \int \varphi_k(x, y) d(x, y)$   
(2) Sei  $y \in \mathbb{R}^m$  (fest).  $\Psi_k(x) := \varphi_k(x, y)$ ,  $g(x) := f_A(x, y)$  ( $x \in \mathbb{R}^n$ ),  $\tilde{f}(x) := f(x, y)$  ( $x \in A_y$ )  
Dann:  $g = \tilde{f}_A$ .

Es gilt:  $\Psi_1 \leq \Psi_2 \leq \dots$  auf  $\mathbb{R}^n$ ,  $\Psi_k(x) = \varphi_k(x, y) \rightarrow f_A(x, y) = g(x) \forall x \in \mathbb{R}^n$ . ( $\Psi_k \in \mathcal{T}_n$ )  
Übung:  $(\int \Psi_k(x) dx)$  beschränkt.

16.7  $\implies g \in L(\mathbb{R}^n)$ , also  $\tilde{f}_{A_y} \in L(\mathbb{R}^n) \implies \tilde{f} \in L(A_y) \implies (1)$ ,

$$\underbrace{\int_{\mathbb{R}^n} g(x) dx}_{\int_{A_y} f(x, y) dx} = \lim \int \Psi_k dx = \lim \int \Psi_k(x, y) dx$$

- (3)  $\Phi_k(y) := \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_k(x, y) dx$  ( $y \in \mathbb{R}^m$ ). Dann:  $\Phi_k \in \mathcal{T}_m$ ,  $\Phi_1 \leq \Phi_2 \leq \dots$  auf  $\mathbb{R}^m$ .

$$\Phi_k(y) \xrightarrow{(2)} \int_{A_y} f(x, y) dx$$

$\forall y \in \mathbb{R}^m$ .

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^m} \Phi_k(y) dy &= \int_{\mathbb{R}^m} \left( \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_k(x, y) dx \right) dy \\ &\stackrel{15.3}{=} \int_{\mathbb{R}^{n+m}} \varphi_k(x, y) d(x, y) \\ &\stackrel{(1)}{\implies} \int_A f(x, y) d(x, y) \end{aligned}$$

16.7  $\implies y \mapsto \int_{A_y} f(x, y) dx$  ist Lebesgueintegrierbar über  $\mathbb{R}^m$  und

$$\int_{\mathbb{R}^m} \left( \int_{A_y} f(x, y) dx \right) dy = \lim \int \Phi_k(y) dy = \int_A f(x, y) d(x, y)$$

■

### Definition

Sei  $A \subseteq \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R} (= \mathbb{R}^n)$ .  $A$  heißt **einfach bezüglich des 1. Faktors**  $(\mathbb{R}^{n-1}) : \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}^{n-1}$  ist  $A_x = \emptyset$  oder ein Intervall in  $\mathbb{R}$ .

Sei  $a \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1} (= \mathbb{R}^n)$ .  $A$  heißt **einfach bezüglich des 2. Faktors**  $(\mathbb{R}^{n-1}) : \Leftrightarrow \forall y \in \mathbb{R}^{n-1}$  ist  $A_y = \emptyset$  oder ein Intervall in  $\mathbb{R}$ .

Aus 16.13 folgt:

#### Satz 16.14 (Aufteilung des Integrals in Doppelintegrale)

$A \subseteq \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$  sei beschränkt und abgeschlossen und einfach bezüglich des 1. Faktors.

$$B := \{x \in \mathbb{R}^{n-1} : A_x \neq \emptyset\}.$$

Dann:

- (1)  $\forall x \in B$  ist  $A_x$  ein beschränktes und abgeschlossenes Intervall in  $\mathbb{R}$
- (2)

$$\forall f \in C(A, \mathbb{R}) : \int_A f(x, y) d(x, y) = \int_B \left( \int_{A_x} f(x, y) dy \right) dx$$

$A \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1}$  sei beschränkt und abgeschlossen und einfach bezüglich des 2. Faktors.

$$B := \{y \in \mathbb{R}^{n-1} : A_y \neq \emptyset\}.$$

Dann:

- (1)  $\forall y \in B$  ist  $A_y$  ein beschränktes und abgeschlossenes Intervall in  $\mathbb{R}$
- (2)

$$\forall f \in C(A, \mathbb{R}) : \int_A f(x, y) d(x, y) = \int_B \left( \int_{A_y} f(x, y) dx \right) dy$$

$Q := [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_n, b_n] \subseteq \mathbb{R}^n$ .  $f \in C(Q, \mathbb{R}) :$

$$\int_Q f(x) dx = \int_{a_n}^{b_n} \left( \dots \left( \int_{a_2}^{b_2} \left( \int_{a_1}^{b_1} f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \right) dx_2 \right) \dots \right) dx_n$$

Die Reihenfolge der Integration darf beliebig vertauscht werden.

### Beispiel

<sup>1</sup>

---

<sup>1</sup>Anmerkung des T<sub>E</sub>Xers: in jedem dieser Beispiele kommt eine Skizze vor, mit deren Hilfe man sich klar machen kann, dass die entsprechenden Mengen einfach bezüglich des 1. Faktors sind. Diese Skizzen sind hier (bisher) nicht wiedergegeben.

- (1)  $(n = 2), Q := [0, 1] \times [1, 2], f(x, y) = xy.$

$$\int_Q xy d(x, y) = \int_1^2 (\int_0^1 xy dx) dy = \int_1^2 ([\frac{1}{2}x^2 y]_{x=0}^{x=1}) dy = \int_1^2 \frac{1}{2} y dy = \frac{1}{4} y^2 \Big|_1^2 = \frac{3}{4}.$$

- (2)  $A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0, 1], x^2 \leq y \leq x\}, f(x, y) = xy^2$

$A$  ist einfach bezüglich des 1. Faktors

$$B = [0, 1]$$

Für  $x \in B : A_x = [x^2, x]$

$$\begin{aligned} \int_A xy^2 d(x, y) &= \int_0^1 (\int_{x^2}^x xy^2 dy) dx \\ &= \int_0^1 ([\frac{1}{3}xy^3]_{y=x^2}^{y=x}) dx = \int_0^1 \frac{1}{3}x^4 - \frac{1}{3}x^7 dx = \frac{1}{40} \end{aligned}$$

- (3)  $A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 1\}, f(x, y) = y$

$$B = [-1, 1]$$

$x \in B : A_x = [0, \sqrt{1-x^2}];$

$$\begin{aligned} \int_A y d(x, y) &= \int_{-1}^1 (\int_0^{\sqrt{1-x^2}} y dy) dx \\ &= \int_{-1}^1 ([\frac{1}{2}y^2]_{y=0}^{y=\sqrt{1-x^2}}) dx = \int_{-1}^1 \frac{1}{2}(1-x^2) dx = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

- (4)  $A := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x, y, z \geq 0, x + y + z \leq 1\}, f(x, y, z) = x$

$A$  ist einfach bezüglich des 1. Faktors ( $\mathbb{R}^2$ )

Für  $(x, y) \in B : A_{(x,y)} = [0, 1 - (x + y)]$

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0, 1], x + y \leq 1, y \geq 0\}$$

$$\begin{aligned} \int_A x d(x, y, z) &= \int_B (\int_0^{1-(x+y)} x dz) d(x, y) = \int_B [xz]_{z=0}^{z=1-(x+y)} d(x, y) \\ &= \int_B x(1 - (x + y)) d(x, y) = \int_0^1 (\int_0^{1-x} x(1 - (x + y)) dy) dx = \frac{1}{24} (?) \end{aligned}$$

