

## 8. Häufungswerte und Teilfolgen

**Erinnerung:**  $a_n \rightarrow a \iff \forall \varepsilon > 0 \text{ gilt: } a_n \in U_\varepsilon(a) \text{ ffa } n \in \mathbb{N}.$

### Definition (Häufungswerte)

$(a_n)$  sei eine Folge und  $\alpha \in \mathbb{R}$ .  $\alpha$  heißt ein **Häufungswert** (HW) von  $(a_n)$  :  $\iff \forall \varepsilon > 0$  gilt:  $a_n \in U_\varepsilon(\alpha)$  für unendlich viele  $n \in \mathbb{N}$ .  $\mathcal{H}(a_n) := \{\alpha \in \mathbb{R} : \alpha \text{ ist ein Häufungswert von } (a_n)\}.$

### Beispiele:

- (1)  $a_n = (-1)^n$ .  $a_{2n} = 1, a_{2n-1} = -1$ . Sei  $\varepsilon > 0$  :  $a_{2n} \in U_\varepsilon(1) \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow a_n \in U_\varepsilon(1)$  für unendlich viele  $n \in \mathbb{N} \Rightarrow 1 \in \mathcal{H}(a_n)$ . Analog:  $a_n \in U_\varepsilon(-1)$  für unendlich viele  $n \in \mathbb{N} \Rightarrow -1 \in \mathcal{H}(a_n)$ . Sei  $\alpha \in \mathbb{R}$  und  $1 \neq \alpha \neq -1$ . Wähle  $\varepsilon > 0$  so, dass  $1, -1 \notin U_\varepsilon(\alpha) \Rightarrow a_n \notin U_\varepsilon(\alpha) \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \alpha \notin \mathcal{H}(a_n)$ . Fazit:  $\mathcal{H}(a_n) = \{1; -1\}$ .
- (2)  $a_n = n$ . Sei  $\alpha \in \mathbb{R}$  und  $\varepsilon > 0$ .  $\exists n_0 \in \mathbb{N} : n_0 > \alpha + \varepsilon \Rightarrow n > \alpha + \varepsilon \forall n \geq n_0 \Rightarrow a_n \notin U_\varepsilon(\alpha) \forall n \geq n_0 \Rightarrow a_n \in U_\varepsilon(\alpha)$  für höchstens endlich viele  $n \in \mathbb{N}$ .  $\Rightarrow \alpha \notin \mathcal{H}(a_n)$ . Fazit:  $\mathcal{H}(a_n) = \emptyset$ .
- (3)  $\mathbb{Q}$  ist abzählbar. Also:  $\mathbb{Q} = \{a_1, a_2, \dots\}$ .  
Behauptung:  $\mathcal{H}(a_n) = \mathbb{R}$ .  
Beweis: Sei  $\alpha \in \mathbb{R}$  und  $\varepsilon > 0$ .  $\alpha_n := \alpha + \frac{\varepsilon}{n+1}$  ( $n \in \mathbb{N}$ ),  $\alpha_n \in U_\varepsilon(\alpha) \forall n \in \mathbb{N}$ .  
 $2.4 \Rightarrow \exists r \in \mathbb{Q} : \alpha_2 < r < \alpha_1$  (dann:  $r \in U_\varepsilon(\alpha)$ );  $\exists n_1 \in \mathbb{N} : r = a_{n_1}$ .  
Also:  $a_{n_1} \in U_\varepsilon(\alpha)$ .  $2.4 \Rightarrow \exists n_2 \in \mathbb{N} : \alpha_3 < a_{n_2} < \alpha_2$ . Dann:  $n_2 \neq n_1$ .  $2.4 \Rightarrow \exists n_3 \in \mathbb{N} : \alpha_4 < a_{n_3} < \alpha_3$  und  $n_3 \neq n_2, n_3 \neq n_1$ . Etc.  
Wir erhalten so eine Folge von Indices  $(n_1, n_2, n_3, \dots)$  in  $\mathbb{N}$  mit  $a_{n_k} \in U_\varepsilon(\alpha)$  und  $n_k \neq n_j$  für  $k \neq j$ .  
 $\Rightarrow a_n \in U_\varepsilon(\alpha)$  für unendlich viele  $n \in \mathbb{N} \Rightarrow \alpha \in \mathcal{H}(a_n)$ .

### Definition (Teilfolge)

Sei  $(a_n)$  eine Folge in  $\mathbb{R}$  und  $(n_1, n_2, \dots)$  sei eine Folge in  $\mathbb{N}$  mit:  $n_1 < n_2 < n_3 < \dots$ . Dann heißt  $(a_{n_k}) = (a_{n_1}, a_{n_2}, \dots)$  eine **Teilfolge** (TF) von  $(a_n)$ .

### Beispiele:

- (1)  $n_k = 2k : (a_2, a_4, a_6, \dots)$  ist eine Teilfolge von  $(a_n)$ .
- (2)  $n_k = 2k - 1 : (a_1, a_3, a_5, \dots)$  ist eine Teilfolge von  $(a_n)$ .
- (3)  $n_k = k^2 : (a_1, a_4, a_9, \dots)$  ist eine Teilfolge von  $(a_n)$ .
- (4)  $(a_1, a_3, a_2, a_4, a_5, a_7, \dots)$  ist *keine* Teilfolge.

### Satz 8.1 (Sätze zu Teilfolgen)

- (1) Sei  $(a_n)$  eine Folge und  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Dann:  $\alpha \in \mathcal{H}(a_n) \iff$  Es existiert eine TF  $(a_{n_k})$  von  $(a_n)$  mit:  $a_{n_k} \rightarrow \alpha$  ( $k \rightarrow \infty$ )

- (2) Ist  $\alpha \in \mathbb{R}$ , so existiert eine Folge  $(r_k)$  in  $\mathbb{Q}$ :  $r_k \rightarrow \alpha$  ( $k \rightarrow \infty$ )
- (3) Ist  $(a_n)$  konvergent und  $a := \lim a_n \implies \mathcal{H}(a_n) = \{a\}$ . Ist  $(a_{n_k})$  eine Teilfolge von  $(a_n)$ , so ist  $(a_{n_k})$  konvergent und  $a_{n_k} \rightarrow a$  ( $k \rightarrow \infty$ )

**Beweis**

- (1) „ $\implies$ “: Sei  $\alpha \in \mathcal{H}(a_n)$ . Zu  $\varepsilon = 1$  existiert  $n_1 \in \mathbb{N}$ :  $a_{n_1} \in U_1(\alpha)$ .  
 Zu  $\varepsilon = \frac{1}{2}$  existiert  $n_2 \in \mathbb{N}$ :  $a_{n_2} \in U_{\frac{1}{2}}(\alpha)$  und  $n_2 > n_1$   
 Zu  $\varepsilon = \frac{1}{3}$  existiert  $n_3 \in \mathbb{N}$ :  $a_{n_3} \in U_{\frac{1}{3}}(\alpha)$  und  $n_3 > n_2$ . etc  
 Wir erhalten so eine Teilfolge von  $(a_n)$  mit  $a_{n_k} \in U_{\frac{1}{k}}(\alpha) \forall k \in \mathbb{N}$ , also:  $|a_{n_k} - \alpha| < \frac{1}{k} \forall k \in \mathbb{N} \implies a_{n_k} \rightarrow \alpha$  ( $k \rightarrow \infty$ ).  
 „ $\impliedby$ “: Sei  $(a_{n_k})$  eine Teilfolge von  $(a_n)$  und  $a_{n_k} \rightarrow \alpha$  ( $k \rightarrow \infty$ ). Sei  $\varepsilon > 0 \implies \exists k_0 \in \mathbb{N}$ :  
 $a_{n_k} \in U_\varepsilon(\alpha) \forall k > k_0 \implies a_n \in U_\varepsilon(\alpha)$  für unendlich viele  $n \in \mathbb{N} \implies \alpha \in \mathcal{H}(a_n)$
- (2) Sei  $\mathbb{Q} = \{a_1, a_2, \dots\}$ . Bekannt:  $H(a_n) = \mathbb{R}$ . Also:  $\alpha \in \mathcal{H}(a_n) \xrightarrow{(1)} \text{Behauptung.}$
- (3) Klar:  $a \in \mathcal{H}(a_n)$   
 Sei  $(a_{n_k})$  eine Teilfolge von  $(a_n)$  und  $\varepsilon > 0$ .  $a = \lim a_n \implies a_n \in U_\varepsilon(a) \text{ ffa } n \in \mathbb{N} \implies$   
 $a_{n_k} \in U_\varepsilon(a) \text{ ffa } k \in \mathbb{N} \implies a_{n_k} \rightarrow a$  ( $k \rightarrow \infty$ ). Aus (1) folgt noch  $H(a_n) = a$ . ■

**Hilfssatz (Monotone Teilfolge)**

Sei  $(a_n)$  eine Folge. Dann enthält  $(a_n)$  eine *monotone* Teilfolge.

**Beweis**

$m \in \mathbb{N}$  heißt *niedrig* (für  $(a_n)$ ) :  $\iff a_n \geq a_m \forall n \geq m$ .

**Fall 1:** Es existieren unendlich viele niedrige Indices  $n_1, n_2, n_3, \dots$  etwa:  $n_1 < n_2 < n_3 < \dots$  (s. 2.3!). Sei  $k \in \mathbb{N}$ :  $n_k$  ist niedrig.  $n_{k+1} > n_k \implies a_{n_{k+1}} \geq a_{n_k} \implies$  die Teilfolge  $(a_{n_k})$  ist monoton wachsend.

**Fall 2:** Es gibt höchstens endlich viele niedrige Indices  $\implies \exists m \in \mathbb{N}$ :  $m, m+1, m+2, \dots$  sind alle nicht niedrig  $\implies n_3 > n_2 : a_{n_3} < a_{n_2}$  etc.

Wir erhalten so eine monotone Teilfolge  $(a_{n_k})$ . ■

**Satz 8.2 (Satz von Bolzano-Weierstraß)**

$(a_n)$  sei eine beschränkte Folge. Dann  $H(a_n) \neq \emptyset$ .

**Beweis**

$\exists c > 0 : |a_n| \leq c \forall n \in \mathbb{N}$ . Hilfssatz  $\implies (a_n)$  enthält eine monotone Teilfolge  $(a_{n_k})$ .  $|a_{n_k}| \leq c \forall k \in \mathbb{N}$ .  $(a_{n_k})$  ist aber schränkt. 6.3  $\implies (a_{n_k})$  ist konvergent.  $\alpha := \lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k}$ . 8.1(1)  $\implies \alpha \in \mathcal{H}(a_n)$ . ■