

## Kapitel 5

# Hyperbolische Geometrie im 20. Jahrhundert

### 5.1 $\delta$ -hyperbolische Räume nach Gromov

Sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum. Eine *Geodätische* oder ein *geodätisches Segment* von  $x \in X$  nach  $y \in X$  ist eine Abbildung  $c : [0, l] \rightarrow X$ ,  $c(0) = x$ ,  $c(l) = y$ , sodass für alle  $t_1 \leq t_2 \in [0, l]$  gilt:  $d(c(t_1), c(t_2)) = t_2 - t_1$ . Für das Segment schreiben wir  $[x, y]$ . Ein metrischer Raum heißt *geodätisch*, falls es zwischen je 2 Punkten stets ein geodätisches Segment gibt.

**Beispiel 5.1.1** Die Standardräume  $\mathbb{E}^n, \mathbb{S}^n, \mathbb{H}^n$  sind alle geodätisch. Dabei sind  $\mathbb{E}^n$  und  $\mathbb{H}^n$  sogar eindeutig geodätisch, die Geodätischen zwischen je zwei Punkten sind also eindeutig. Zwischen antipodalen Punkten auf der Sphäre hingegen gibt es unendlich viele Geodätische.

Sei nun  $\delta \geq 0$ . Ein geodätischer, metrischer Raum  $(X, d)$  heißt  *$\delta$ -hyperbolisch*, falls alle geodätischen Dreiecke in  $X$   $\delta$ -dünn sind, d.h. für alle  $x_1, x_2, x_3 \in X$  und ein Dreieck  $\Delta$  beschreibende geodätischen Segmente  $[x_1, x_2]$ ,  $[x_2, x_3]$ ,  $[x_1, x_3]$  gilt

$$[x_i, x_j] \subseteq U_\delta(\Delta \setminus [x_i, x_j])$$

Für eine Teilmenge  $Y \subseteq X$  ist dabei

$$U_\delta(Y) = \{x \in X \mid d(x, y) \leq \delta \text{ für ein } y \in Y\}$$

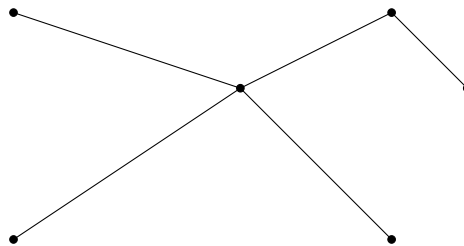
die  $\delta$ -Umgebung von  $Y$ .  $(X, d)$  heißt *Gromov-hyperbolisch*, falls  $(X, d)$   $\delta$ -hyperbolisch ist für ein  $\delta \geq 0$ .

**Beispiel 5.1.2** (i) Sei  $(X, d)$  ein beschränkter metrischer Raum, d.h. es gilt

$$\text{diam}(X) = \max_{x, y \in X} d(x, y) < \infty.$$

Dann ist  $X$  Gromov-hyperbolisch mit  $\delta = \text{diam}(X)$ , dem Durchmesser von  $X$ . Damit ist  $\delta$ -hyperbolisch eine Eigenschaft der "Grob-Geometrie" ("large scale").

- (ii) Kombinatorische Räume (als eindimensionale Simplicialkomplexe) mit der induzierten Längemmetrik (d.h. jeder 1-Simplex besitzt die Länge 1): Erinnerung: Ein *kombinatorischer Graph*  $G$  besteht aus Ecken  $E(G)$  (0-Simplices) und Kanten  $K(G)$  (1-Simplices). Ein *Baum* ist ein Graph ohne Kreise, wobei ein Kreis ein geschlossener Weg ist.

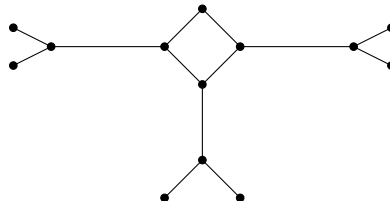


Die Metrik auf einem Graphen ist für  $x, y \in E(G)$  definiert wie folgt:

$$d_G(x, y) = \inf_{c \text{ Kantenzug}} L(c)$$

wobei in Kantenzug zwei Ecken verbindet und jede Kante isometrisch zu  $[0, 1]$  ist. Man kann als Verfeinerung auch den Abstand für Punkte auf den Kanten definieren. Man sieht leicht, dass Bäume 0-hyperbolisch sind.

- (iii) Die euklidische Ebene  $\mathbb{E}^2$  ist nicht Gromov-hyperbolisch, da Dreiecke beliebig groß werden können.
- (iv) Ein Graph, der kein Baum ist, kann trotzdem  $\delta$ -hyperbolisch sein (für  $\delta > 0$ ):



- (v) Es gibt auch Graphen, die nicht  $\delta$ -hyperbolisch sind:



von  $[x', y']$  verschiedenes topologisches Segment zwischen  $x'$  und  $y'$ , ein Widerspruch zur Eindeutigkeit.

" $\Rightarrow$ " Sei nun  $(X, d)$  0-hyperbolisch. Da in einem 0-hyperbolischen Raum geodätische Segmente eindeutig sind, ist lediglich zu zeigen, dass jedes topologische Segment auch ein geodätisches Segment ist. Seien  $x, y \in X$  und  $\gamma : I \rightarrow \gamma(I)$  ein topologisches Segment, das  $x$  und  $y$  verbindet. Weiter sei  $[x, y]$  das eindeutige geodätische Segment zwischen  $x$  und  $y$ .

**Beh. (a)** Für jedes  $\epsilon > 0$  gilt  $[x, y] \subseteq U_\epsilon(\text{Bild } \gamma)$ .

Mit der Behauptung folgt:  $\text{Bild } \gamma = [x, y]$ . Denn als homöomorphes Bild eines Intervalls ist  $\text{Bild } (\gamma)$  vollständig. Für alle  $z \in [x, y]$  existiert also  $t_n \in I$  mit  $d(z, \gamma(t_n)) \leq \frac{1}{n}$ . Die Dreiecksungleichung liefert dann für  $n \leq m$

$$d(\gamma(t_n), \gamma(t_m)) \leq \frac{2}{n},$$

$(\gamma(t_n))_{n \in \mathbb{N}}$  ist also eine Cauchyfolge und konvergiert, da  $\text{Bild } \gamma$  vollständig ist. Damit gilt  $\gamma(t_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \gamma(t^*)$  für ein  $t^* \in I$ . Es folgt

$$d(z, \gamma(t^*)) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(z, \gamma(t_n)) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0,$$

also  $z = \gamma(t^*)$ . Insgesamt gilt also  $[x, y] \subseteq \text{Bild } \gamma$  und schließlich  $\text{Bild } \gamma = [x, y]$ , was zu zeigen war. Es bleibt noch die Behauptung zu beweisen.

**Bew. (a)** Sei  $\epsilon > 0$ . Da  $\text{Bild } \gamma$  als stetiges Bild eines Kompaktums ebenfalls kompakt ist, existieren  $N \in \mathbb{N}$  und Punkte  $x = x_0, x_1, \dots, x_{N-1}, x_N = y$  auf  $\text{Bild } \gamma$ , sodass  $d(x_{i-1}, x_i) \leq 2\epsilon$  für alle  $i \in \{1, \dots, N\}$ . Das eindeutige geodätische Segment  $[x_{i-1}, x_i]$  liegt dann in einer  $\epsilon$ -Umgebung von  $\{x_{i-1}, x_i\}$ , also auch in einer  $\epsilon$ -Umgebung von  $\text{Bild } \gamma$ . Da  $X$  nach Voraussetzung 0-hyperbolisch ist, folgt (mit Induktion)

$$[x, y] = [x_0, x_N] \subseteq \bigcup_{i=1}^N [x_{i-1}, x_i] \subseteq U_\epsilon(\text{Bild } \gamma),$$

woraus die Behauptung folgt. □

## 5.2 Quasi-Isometrien und Quasi-Geodätische

**Definition 5.2.1** Sei  $f : (X, d_X) \rightarrow (Y, d_Y)$  eine Abbildung zwischen metrischen Räumen.

(i)  $f$  heißt *topologische Isometrie*, falls

$$d_X(x, y) = d_Y(f(x), f(y))$$

für alle  $x, y \in X$ .

- (ii)  $f$  heißt  $\lambda$ -Bilipschitz-Abbildung, falls eine Konstante  $\lambda \geq 1$  existiert, sodass

$$\frac{1}{\lambda}d_X(x, y) \leq d_Y(f(x), f(y)) \leq \lambda d_X(x, y)$$

für alle  $x, y \in X$ . Insbesondere sind 1-Bilipschitz-Abbildungen gerade topologische Isometrien.

- (iii)  $f$  heißt  $(\lambda, \epsilon)$ -quasi-isometrische Einbettung, falls Konstanten  $\lambda \geq 1, \epsilon \geq 0$  existieren, sodass

$$\frac{1}{\lambda}d_X(x, y) - \epsilon \leq d_Y(f(x), f(y)) \leq \lambda d_X(x, y) + \epsilon$$

für alle  $x, y \in X$ . Insbesondere sind  $(\lambda, 0)$ -quasi-isometrische Einbettungen gerade  $\lambda$ -Bilipschitz-Abbildungen.

- (iv)  $f$  heißt  $(\lambda, \epsilon)$ -Quasi-Isometrie, falls  $f$  eine  $(\lambda, \epsilon)$ -quasi-isometrische Einbettung ist und zusätzlich eine Konstante  $D \geq 0$  existiert, sodass jeder Punkt von  $Y$  in einer  $D$ -Umgebung von  $f(X) \subseteq Y$  liegt, das Bild also " $D$ -dicht" ist. Insbesondere ist  $f$  für  $D = 0$  surjektiv.
- (v) Zwei metrische Räume  $(X, d_X)$  und  $(Y, d_Y)$  heißen *quasi-isometrisch*, falls eine Quasi-Isometrie  $f : (X, d_X) \longrightarrow (Y, d_Y)$  existiert.

Im Folgenden werden wir quasi-isometrische Invarianten bestimmen, um das Klassifikationsproblem lösen zu können.

**Beispiel 5.2.2** (i) Ein metrischer Raum  $(X, d)$  ist quasi-isometrisch zu einem Punkt genau dann, wenn  $\text{diam} X < \infty$ .

- (ii)  $\mathbb{Z}$  mit der von  $\mathbb{R}$  induzierten Metrik ist quasi-isometrisch zu  $\mathbb{R}$  (mit  $f : \mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{R}, \lambda = 1, \epsilon = 0$  und  $D = 1$ ). Genau so sind  $\mathbb{Z}^n$  und  $\mathbb{R}^n$  quasi-isometrisch.

- (iii) die stetigen Funktionen  $\mathcal{C}(\mathbb{R}, d_{\mathbb{R}})$  sind quasi-isometrisch zu  $\mathbb{R}$ .

- (iv) Aus der geometrischen Gruppentheorie: Jede endlich erzeugte Gruppe  $G = \langle S \rangle$  definiert auf natürliche Weise eine Metrik auf  $G$ , wodurch  $G$  zum metrischen Raum  $(G, d_S)$  wird (beachte, dass die Metrik vom Erzeugendensystem abhängt). Ist  $S'$  ein weiteres Erzeugendensystem, so sind die resultierenden metrischen Räume  $(G, d_S)$  und  $(G, d_{S'})$  quasi-isometrisch.

Was passiert nun mit Geodätischen unter Quasi-Isometrien? Erinnerung: Ist  $(X, d)$  ein metrischer Raum, so ist eine Geodätische eine isometrische Einbettung  $\gamma : I \longrightarrow X$  für ein Intervall  $I \subseteq \mathbb{R}$ . Analog ist eine  $(\lambda, \epsilon)$ -Quasi-Geodätische in einem metrischen Raum  $(X, d)$  eine  $(\lambda, \epsilon)$ -quasi-isometrische Einbettung  $c : I \longrightarrow X$ , wobei  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein Intervall in  $\mathbb{R}$  oder in  $\mathbb{R} \cap \mathbb{Z}$  ist, das heißt

es gilt

$$\frac{1}{\lambda}|t - t'| - \epsilon \leq d(c(t), c(t')) \leq \lambda|t - t'| + \epsilon$$

für alle  $t, t' \in I$ . Falls  $I = [0, \infty) = \mathbb{R}_+^0$ , so heißt  $c$  *geodätischer Strahl*. Beachte: Für  $\epsilon \neq 0$  ist eine  $(\lambda, \epsilon)$ -Quasi-Geodätische nicht zwingend stetig! Wir werden sehen: In hyperbolischen Räumen sind Quasi-Geodätische jedoch "nahe" bei Geodätischen (man nennt dies *Trapping* oder *Stabilität* von Geodätischen). Dies wird zeigen, dass Hyperbolizität eine quasi-isometrische Invariante ist.

**Bemerkung 5.2.3** *Beachte: Trapping gilt in der euklidischen Ebene  $\mathbb{E}^2$  nicht: Die Spirale*

$$c : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{E}^2, \quad t \mapsto \begin{pmatrix} t \cos(\log 1 + t) \\ t \sin(\log 1 + t) \end{pmatrix}$$

*ist ein quasi-geodätischer Strahl, kann aber nicht durch einen geodätischen Strahl "eingefangen" werden.*

Sei nun  $(X, d)$  ein metrischer Raum und  $c : [a, b] \longrightarrow X$  eine stetige Kurve. Wir definieren die *Länge von  $c$*  durch

$$l(c) := \sup_{a=t_0 \leq \dots \leq t_n=b} \sum_{i=0}^{n-1} d(c(t_i), c(t_{i+1})).$$

$c$  heißt *rektifizierbar*, falls  $l(c) < \infty$ .

**Bemerkung 5.2.4 (Parametrisierung nach Bogenlänge)** *Sei  $c : [a, b] \longrightarrow X$  rektifizierbar mit  $l := l(c)$ . Weiter sei*

$$\lambda : [a, b] \longrightarrow [0, l], \quad t \mapsto \lambda(t) = l(c|_{[a, t]}).$$

*Dann ist  $\tilde{c} : [0, l] \longrightarrow X$  mit  $\tilde{c} \circ \lambda = c$  rektifizierbar und es gilt  $l(\tilde{c}|_{[a, t]}) = t$ .*

*Beweis.* Siehe Bridson-Haifliger, S.13. □

**Satz 5.2.5** *Sei  $(X, d)$  ein  $\delta$ -hyperbolischer, geodätischer metrischer Raum und  $c : [a, b] \longrightarrow X$  ein stetiger, rektifizierbarer Weg in  $X$  mit Anfangspunkt  $p = c(a)$  und Endpunkt  $q = c(b)$ . Sei Weiter  $[p, q]$  ein geodätischer Segment, das  $p$  und  $q$  verbindet. Dann gilt für alle  $x \in [p, q]$ :*

$$d(x, \text{Bild } c) \leq \delta |\log_2 l(c)| + 1.$$

*Beweis.* Ist  $l(c) \leq 1$ , so gilt

$$d(x, \text{Bild } c) \leq d(x, p) \leq d(p, q) \leq l(c) \leq 1 \leq \delta |\log_2 l(c)| + 1,$$

die Behauptung ist also klar. Sei also  $l(c) > 1$ . Nach Bemerkung 2.4 können wir ohne Einschränkung annehmen, dass  $c$  eine Abbildung  $c : [0, 1] \rightarrow X$  ist, die Bild  $c$  proportional zur Bogenlänge parametrisiert, das heißt es gilt

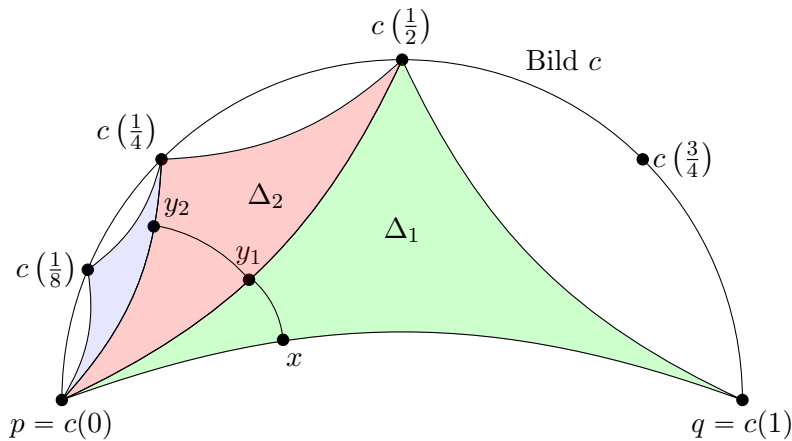
$$d(c(t), c(t')) = l(c)|t - t'|$$

für  $t, t' \in [0, 1]$ . Wähle  $N \in \mathbb{N}$  so groß, dass

$$\frac{l(c)}{2^{N+1}} < 1 \leq \frac{l(c)}{2^N}.$$

Betrachte nun das Dreieck

$$\Delta_1 := \Delta \left( \left[ c(0), c\left(\frac{1}{2}\right) \right], \left[ c\left(\frac{1}{2}\right), c(1) \right], [c(0), c(1)] \right)$$



Dann ist  $\Delta_1$  ein geodätisches Dreieck, dass die Seite  $[p, q]$  enthält. Sei nun  $x \in [p, q] = [c(0), c(1)]$ . Da  $X$   $\delta$ -hyperbolisch ist, können wir  $y_1 \in [c(0), c(\frac{1}{2})] \cup [c(\frac{1}{2}), c(1)]$  derart wählen, dass  $d(x, y_1) \leq \delta$ . Falls  $y_1 \in [c(0), c(\frac{1}{2})]$ , betrachte ein weiteres Dreieck

$$\Delta_2 := \Delta \left( \left[ c(0), c\left(\frac{1}{2}\right) \right], \left[ c(0), c\left(\frac{1}{4}\right) \right], \left[ c\left(\frac{1}{4}\right), c\left(\frac{1}{2}\right) \right] \right).$$

Dann ist  $\Delta_2$  ebenfalls ein geodätisches Dreieck und besitzt  $[c(0), c(\frac{1}{2})]$  als gemeinsame Seite mit  $\Delta_1$ . Ist hingegen  $y_1$  auf der anderen Seite, also  $y_1 \in [c(\frac{1}{2}), c(1)]$ , so definiere  $\Delta_2$  wie folgt:

$$\Delta_2 := \Delta \left( \left[ c\left(\frac{1}{2}\right), c(1) \right], \left[ c\left(\frac{1}{2}\right), c\left(\frac{3}{4}\right) \right], \left[ c\left(\frac{3}{4}\right), c(1) \right] \right).$$

In jedem Fall existiert wieder wegen der Hyperbolizität von  $X$  ein  $y_2 \in \Delta_2 \setminus \Delta_1$  mit  $d(y_1, y_2) \leq \delta$ . Diese Konstruktion setzen wir iterativ fort: Im  $n+1$ -ten Schritt betrachte das geodätische Dreieck

$\Delta_{n+1}$ , das die Seite  $[c(t_n), c(t'_n)]$  mit  $\Delta_n$  gemeinsam hat und  $y_n$  enthält. Weiter sei  $c(t_{n+1})$  die dritte Ecke des Dreiecks mit  $t_{n+1} = \frac{t_n + t'_n}{2}$ . Wann wählen wir  $y_{n+1} \in \Delta_{n+1} \setminus [c(t_n), c(t'_n)]$  mit  $d(y_n, y_{n+1}) \leq \delta$ .

Im  $N$ -ten Schritt erhalten wir somit einen Punkt  $y_N$  mit

$$d(x, y_N) \leq d(x, y_1) + d(y_1, y_2) + \dots + d(y_{N-2}, y_{N-1}) + d(y_{N-1}, y_N) \leq N\delta,$$

der auf einem geodätischen Segment der Länge  $\frac{l(c)}{2^N}$  (beachte, dass  $c$  nach Bogenlänge parametrisiert ist, also sukzessives Halbieren der Intervallenlänge auch eine Halbierung der Bildkurve herbeiführt) mit Endpunkten in Bild  $c$  liegt. Sei  $y$  derjenige Endpunkt, der am nächsten bei  $y_N$  liegt. Dann gilt

$$d(x, y) \leq d(x, y_N) + d(y_N, y) \leq N\delta + \frac{1}{2} \frac{l(c)}{2^N} = N\delta + \frac{l(c)}{2^{N+1}}.$$

Nach der Wahl von  $N$  ist  $\frac{l(c)}{2^{N+1}} < 1$  und  $2^N \leq l(c)$ , also  $N \leq \log_2 l(c)$  und damit

$$d(x, \text{Bild } c) \leq d(x, y) \leq N\delta + \frac{l(c)}{2^{N+1}} \leq \delta |\log_2 l(c)| + 1,$$

was gerade zu zeigen war. □

**Bemerkung 5.2.6** Eine vergleichbare Aussage in  $\mathbb{E}^2$  gibt es nicht.

**Definition 5.2.7** Sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum und  $A, B \subseteq X$  Teilmengen von  $X$ . Dann ist

$$\text{Hd}(A, B) := \inf\{\epsilon \geq 0 \mid A \subseteq U_\epsilon(B), B \subseteq U_\epsilon(A)\}$$

der *Hausdorff-Abstand* von  $A$  und  $B$ .

**Satz 5.2.8 (Stabilität von Quasi-Geodätischen)** Sei  $(X, d)$  ein  $\delta$ -hyperbolischer, geodätischer, metrischer Raum,  $c : [a, b] \rightarrow X$  eine  $(\lambda, \epsilon)$ -Quasi-Geodätische mit Anfangs- und Endpunkten  $c(a) = p$ ,  $c(b) = q$  und  $[p, q]$  ein geodätisches Segment, dass  $p$  und  $q$  verbindet. Dann existiert eine Konstante  $R = R(\delta, \lambda, \epsilon)$ , sodass

$$\text{Hd}([p, q], \text{Bild } c) \leq R.$$

Bevor wir die Aussage beweisen, leiten wir die wichtigste Folgerung her. Ein  $(\lambda, \epsilon)$ -quasi-geodätisches Dreieck besteht aus drei  $(\lambda, \epsilon)$ -Quasi-Geodätischen  $q_i : [0, T_i] \rightarrow X$  ( $i \in \{1, 2, 3\}$ ) mit

$$q_1(T_1) = q_2(0), \quad q_2(T_2) = q_3(0), \quad q_3(T_3) = q_1(0).$$



Das Dreieck heißt  $K$ -dünn für eine Konstante  $K \geq 0$ , falls für jedes  $i \in \{1, 2, 3\}$  gilt: Jeder Punkt  $x \in \text{Bild } q_i$  ist in einer  $K$ -Umgebung von  $\Delta \setminus \text{Bild } q_i$  enthalten.

**Korollar 5.2.9** *Ein geodätischer, metrischer Raum  $(X, d)$  ist Gromov-hyperbolisch genau dann, wenn für jedes  $\lambda \geq 1$  und jedes  $\epsilon \geq 0$  eine Konstante  $M \geq 0$  existiert, sodass jedes  $(\lambda, \epsilon)$ -quasi-geodätische Dreieck  $M$ -dünn ist.*

**Satz 5.2.10** *Seien  $(X, d_X)$ ,  $(Y, d_Y)$  geodätische, metrische Räume und  $f : Y \rightarrow X$  eine  $(\lambda, \epsilon)$ -quasi-isometrische Einbettung. Dann gilt: Ist  $X$   $\delta$ -hyperbolisch, so ist  $Y$   $\delta'$ -hyperbolisch für ein  $\delta \geq 0$ .*

*Beweis.* Sei  $\Delta \subseteq Y$  ein geodätisches Dreieck in  $Y$ . Wir müssen zeigen, dass  $\Delta$  mit einer uniformen Konstante dünn ist. Es bezeichnen  $c_1([0, 1])$ ,  $c_2([0, 1])$ ,  $c_3([0, 1])$  die Seiten von  $\Delta$ . Dann ist  $f(\Delta)$  ein  $(\lambda, \epsilon)$ -quasi-isometrisches Dreieck mit Seiten  $(f \circ c_1)([0, 1])$ ,  $(f \circ c_2)([0, 1])$  und  $(f \circ c_3)([0, 1])$ . Nach Korollar 2.9 ist  $f(\Delta)$   $M$ -dünn für eine Konstante  $M := M(\lambda, \epsilon) \geq 0$ , das heißt es gibt (beispielsweise) für  $x \in \text{Bild } c_1$  ein  $y \in \text{Bild } c_2 \cup \text{Bild } c_3$ , sodass  $d_X(f(x), f(y)) \leq M$ . Da  $f$  eine  $(\lambda, \epsilon)$ -quasi-isometrische Einbettung ist, gilt weiter

$$d_Y(x, y) \leq \lambda d_X(f(x), f(y)) + \epsilon \leq \lambda M + \epsilon =: \delta'$$

und analog für die anderen Seiten. Damit  $\Delta$   $\delta'$ -dünn, was zu zeigen war.  $\square$

**Lemma 5.2.11** *Sei  $(X, d)$  ein geodätischer, metrischer Raum und  $c : [a, b] \rightarrow X$  eine  $(\lambda, \epsilon)$ -Quasi-Geodätische. Dann existiert eine stetige  $(\lambda, \epsilon')$ -Quasi-Geodätische  $c' : [a, b] \rightarrow X$  mit*

- (i)  $c$  und  $c'$  haben dieselben Anfangs- und Endpunkte, das heißt es gilt  $c(a) = c'(a)$  sowie  $c(b) = c'(b)$ .
- (ii)  $\epsilon' = 2(\lambda + \epsilon)$ .
- (iii) Für alle  $t, t' \in [a, b]$  gilt

$$l(c'|_{[t, t']}) \leq k_1 d(c'(t), c'(t')) + k_2,$$

wobei  $k_1 = \lambda(\lambda + \epsilon)$  und  $k_2 = (\lambda\epsilon' + 3)(\lambda + \epsilon)$ .

- (iv) Für den Hausdorff-Abstand der beiden Quasi-Geodätischen gilt

$$\text{Hd}(\text{Bild } c, \text{Bild } c') \leq \lambda + \epsilon.$$

*Beweis.* Es sei  $\Sigma := \mathbb{Z} \cap (a, b) \cup \{a, b\} = \{a = s_0, s_1, \dots, s_{n-1}, s_n = b\}$ . Für  $s \in \Sigma$  setze  $c'(s) := c(s)$ . zwischen aufeinanderfolgenden Punkten  $c(s_i)$  und  $c(s_{i+1})$  wähle ein linear, proportional zur Bogenlänge parametrisiertes geodätisches Segment. Definiere anschließend  $c'$  als die Verkettung dieser Segmente. Zu den einzelnen Eigenschaften:

- (i) Nach Definition von  $c'$  gilt  $c'(a) = c(a)$  sowie  $c'(b) = c(b)$ .  
 (iv) Für die Länge jedes Teilsegments gilt

$$l(c'|_{[s_i, s_{i+1}]}) = d(c'(s_i), c'(s_{i+1})) = d(c(s_i), c(s_{i+1})) \leq \lambda d(s_i, s_{i+1}) + \epsilon \leq \lambda + \epsilon.$$

Da jeder Punkt von Bild  $c \cup \text{Bild } c'$  in einer  $\frac{\lambda+\epsilon}{2}$ -Umgebung von  $c(\Sigma) = c'(\Sigma)$  liegt, folgt bereits die Behauptung.

- (ii) Für beliebiges  $t \in [a, b]$  sei  $[t]$  derjenige Punkt von  $\Sigma$ , welcher am nächsten zu  $t$  ist. Da  $c$  eine  $(\lambda, \epsilon)$ -Quasi-Geodätische ist und  $c([t]) = c'([t])$  gilt, folgt

$$\begin{aligned} d(c'(t), c'(t')) &\leq d(c'(t), c'([t])) + d(c'([t]), c'([t'])) + d(c'([t']), c'(t')) \\ &\leq \frac{\lambda + \epsilon}{2} + d(c'([t]), c'([t'])) + \frac{\lambda + \epsilon}{2} \\ &= d(c([t]), c([t'])) + \lambda + \epsilon \\ &\leq \lambda d_{\mathbb{R}}([t], [t']) + \epsilon + \lambda + \epsilon \\ &= \lambda |[t] - [t']| + \lambda + 2\epsilon \\ &\leq \lambda (|[t] - t| + |t - t'| + |t' - [t']|) + \lambda + 2\epsilon \\ &\leq \lambda (|t - t'| + 1) + \lambda + 2\epsilon \\ &= \lambda |t - t'| + 2(\lambda + \epsilon). \end{aligned}$$

Wir erhalten außerdem

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda} |t - t'| - 2(\lambda + \epsilon) &\leq \frac{1}{\lambda} (|t - t'| - 1) - (\lambda + 2\epsilon) \\ &\leq \frac{1}{\lambda} (|t - [t]| + |[t] - [t']| + |[t'] - t'| - 1) - (\lambda + 2\epsilon) \\ &\leq \frac{1}{\lambda} \left( \frac{1}{2} + |[t] - [t']| + \frac{1}{2} - 1 \right) - (\lambda + 2\epsilon) \\ &= \frac{1}{\lambda} |[t] - [t']| - \epsilon - (\lambda + \epsilon) \\ &\leq d(c([t]), c([t'])) - (\lambda + \epsilon) \\ &= d(c'([t]), c'([t'])) - (\lambda + \epsilon) \\ &\leq d(c'([t]), c'(t)) + d(c'(t), c'(t')) + d(c'(t'), c'([t'])) - (\lambda + \epsilon) \\ &\leq \frac{\lambda + \epsilon}{2} + d(c'(t), c'(t')) + \frac{\lambda + \epsilon}{2} - (\lambda + \epsilon) \\ &= d(c'(t), c'(t')), \end{aligned}$$

wobei die erste Ungleichung wegen

$$\frac{1}{\lambda} (|t - t'| - 1) - (\lambda + 2\epsilon) = \frac{1}{\lambda} |t - t'| - \frac{1}{\lambda} - (\lambda + 2\epsilon) \geq \frac{1}{\lambda} |t - t'| - \lambda - (\lambda + 2\epsilon) = \frac{1}{\lambda} |t - t'| - 2(\lambda + \epsilon)$$

gilt. Für  $\epsilon' := 2(\lambda + \epsilon)$  gilt also

$$\frac{1}{\lambda} |t - t'| - \epsilon' \leq d(c(t), c(t')) \leq \lambda |t - t'| + \epsilon'$$

für alle  $t, t' \in [a, b]$ ,  $c' : [a, b] \rightarrow X$  ist also eine  $(\lambda, \epsilon')$ -quasi-isometrische Einbettung und damit  $(\lambda, \epsilon')$ -quasi-geodätisch.

(iii) Für ganze Zahlen  $m \leq n \in [a, b]$  gilt

$$l(c'|_{[m, n]}) = \sum_{i=m}^{n-1} d(c'(i), c'(i+1)) = \sum_{i=m}^{n-1} d(c(i), c(i+1)) \leq (\lambda + \epsilon)|n - m|$$

sowie

$$l(c'|_{[a, n]}) \leq (\lambda + \epsilon)(n - a + 1), \quad l(c'|_{[n, b]}) \leq (\lambda + \epsilon)(b - n + 1).$$

Für  $t, t' \in [a, b]$  folgt also

$$\begin{aligned} l(c'|_{[t, t']}) &\leq l(c'|_{[t, [t]]}) + l(c'|_{[[t], [t']]}) + l(c'|_{[[t'], t']}) \\ &\leq (\lambda + \epsilon) ([t] - [t'] + 2) \end{aligned}$$

Außerdem gilt

$$d(c'(t), c'(t')) \geq \frac{1}{\lambda} |t - t'| - \epsilon' \geq \frac{1}{\lambda} ([t] - [t'] - 1) - \epsilon'$$

und damit

$$\begin{aligned} l(c'|_{[t, t']}) &\leq (\lambda + \epsilon) ([t] - [t'] + 2) \\ &= \lambda(\lambda + \epsilon) \left( \frac{1}{\lambda} ([t] - [t'] - 1) + \frac{3}{\lambda} \right) \\ &= \lambda(\lambda + \epsilon) \left( \frac{1}{\lambda} ([t] - [t'] - 1) - \epsilon' \right) + (\lambda + \epsilon)(3 + \lambda\epsilon') \\ &\leq \lambda(\lambda + \epsilon) d(c'(t), c'(t')) + (\lambda + \epsilon)(3 + \lambda\epsilon') \\ &= k_1 d(c'(t), c'(t')) + k_2, \end{aligned}$$

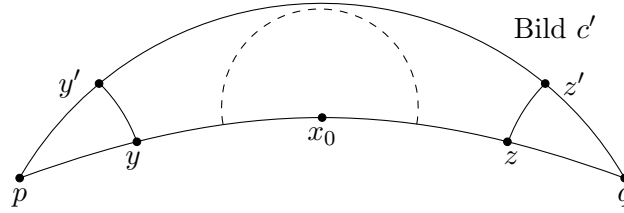
was zu zeigen war. □

*Beweis von Satz 2.8* Zunächst ersetzen wir die Quasi-Geodätische  $c$  durch eine stetige Quasi-

Geodätische  $c'$  wie in Lemma 2.11. Sei  $[p, q]$  das geodätische Segment zwischen den Endpunkten von  $c$  bzw.  $c'$ . Weiter sei

$$D := \max_{x \in [p, q]} \{d(x, \text{Bild } c')\}$$

und  $x_0 \in [p, q]$  ein Punkt, in dem das Maximum angenommen wird.



Der offene Ball mit Radius  $D$  und Zentrum  $x_0$  trifft dann Bild  $c'$  nicht. Idee: Benutze Satz 5.2.5, um eine Schranke für  $D$  zu finden, die nicht von der Kurve abhängt (sondern nur von  $\lambda, \epsilon$  und  $\delta$ ). Wähle hierzu  $y \in [p, x_0] \subseteq [p, q]$ , sodass  $d(y, x_0) = 2D$ . Ist  $d(p, x_0) < 2D$ , so wähle stattdessen  $y = p$ . Analog finden wir einen Punkt  $z \in [x_0, q]$ . Wähle weiter  $y', z' \in \text{Bild } c'$  mit  $d(y, y') \leq D$  und  $d(z, z') \leq D$  sowie geodätische Segmente  $[y, y']$  und  $[z, z']$ . Sei nun  $\gamma$  der parametrisierte Weg, welcher zunächst entlang  $[y, y']$ , dann  $c'$  und anschließend  $[z', z]$  läuft. Dann liegt Bild  $\gamma$  nach Konstruktion außerhalb des  $D$ -Balls um  $x_0$ . Es gilt

$$d(y', z') \leq d(y', y) + d(y, z) + d(z, z') \leq D + 4D + D = 6D.$$

Aus Lemma 2.11 (iii) folgt nun

$$l(\gamma) \leq d(y, y') + k_1 d(y', z') + k_2 + d(z, z') \leq k_1 6D + k_2 + 2D$$

und Satz 2.5 liefert wegen  $D = d(x_0, \text{Bild } c')$

$$D - 1 \leq \delta |\log_2 l(\gamma)| \leq \delta |\log_2 (k_1 6D + k_2 + 2D)|$$

Diese Ungleichung zwischen einem linearen Term in  $D$  und einem logarithmischen Term in  $D$  kann nur erfüllt sein, falls  $D$  beschränkt ist, das heißt Satz 5.2.5 liefert implizit eine obere Schranke für  $D$ , welche nur von  $\lambda, \epsilon$  und  $\delta$  abhängt. Sei  $D_0$  eine solche Schranke.

**Beh. (a)** Es gilt  $\text{Bild } c' \subseteq U_{R'}([p, q])$  mit  $R' = D_0(1 + k_1) + \frac{k_2}{2}$ .

**Bew. (a)** Betrachte ein maximales Teilintervall  $[a', b'] \subseteq [a, b]$ , sodass  $c'|_{[a', b']}$  außerhalb der  $D_0$ -Umgebung  $U_{D_0}([p, q])$  liegt (existiert kein solches, so folgt die Behauptung mit  $R' = D_0$ ).

Jeder Punkt von  $[p, q]$  liegt per Definition von  $D_0$  in  $U_{D_0}(\text{Bild } c')$ , das heißt es gilt

$$[p, q] \subseteq U_{D_0} (\text{Bild } c'|_{[a, a']} \cup \text{Bild } c'|_{[b', b]}) .$$

Da Intervalle zusammenhängend sind, existieren  $w \in [p, q]$ ,  $t \in [a, a']$  und  $t' \in [b', b]$ , sodass

$$d(w, c'(t)) \leq D_0, \quad d(w, c'(t')) \leq D_0.$$

Mit der Dreiecksungleichung folgt insbesondere

$$d(c'(t), c'(t')) \leq d(c'(t), w) + d(w, c'(t')) \leq 2D_0$$

und nach Lemma 2.11 (iii) gilt damit

$$l(c'|_{[t, t']}) \leq k_1 d(c'(t), c'(t')) + k_2 \leq k_1 2D_0 + k_2.$$

Für beliebiges  $z = c'(t) \in \text{Bild } c'$  gibt es also  $t' \in [a, a'] \cup [b', b]$  mit

$$d(c'(t), c'(t')) \leq \frac{1}{2} (k_1 2D_0 + k_2) = k_1 D_0 + \frac{k_2}{2}$$

und es folgt

$$d(z, [p, q]) \leq d(z, x_0) \leq d(z, c'(t')) + d(c'(t')) \leq k_1 D_0 + \frac{k_2}{2} + D_0 \leq D_0(1 + k_1) + \frac{k_2}{2} = R',$$

also  $z \in U_{R'}([p, q])$  und damit  $\text{Bild } c' \subseteq U_{R'}([p, q])$ .

Wir können den Beweis nun abschließen. Nach Lemma 2.11 (iv) gilt

$$\text{Hd}(\text{Bild } c, \text{Bild } c') \leq \lambda + \epsilon$$

und da Hd eine Metrik auf der Menge der abgeschlossenen Teilmengen von  $X$  bildet folgt

$$\text{Hd}([p, q], \text{Bild } c) \leq \text{Hd}([p, q], \text{Bild } c') + \text{Hd}(\text{Bild } c', \text{Bild } c) \leq R' + \lambda + \epsilon =: R = R(\lambda, \epsilon, \delta),$$

die Behauptung des Satzes. □

## 5.3 Hyperbolische Gruppen

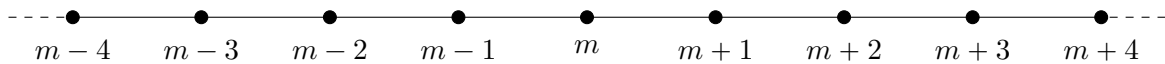
In diesem Abschnitt soll auf Verbindungen zwischen Geometrie und Gruppentheorie eingegangen werden. Sei  $G$  eine endlich erzeugte Gruppe mit  $G = \langle S \rangle$  für ein Erzeugendensystem  $S = \{s_i | i \in$

$I\}$  mit endlicher Indexmenge  $I$  und  $S^{-1} = S$ , das heißt für alle  $g \in G$  gibt es  $s_1, \dots, s_k \in S$  mit  $g = s_1 \cdots s_k$  (Beachte, dass  $S$  keineswegs eindeutig ist).

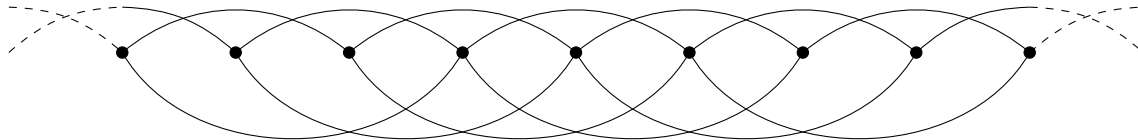
**Beispiel 5.3.1** Für  $G = (\mathbb{Z}, +)$  wähle  $S = \{-1, 1\}$  oder  $\tilde{S} = \{-3, -2, 2, 3\}$ . Wegen  $\text{ggT}(2, 3) = 1$  gilt  $\langle \tilde{S} \rangle = \mathbb{Z}$ .

Dies wollen wir nun geometrisieren (nach A. Cayley, 1878): Zu  $G = \langle S \rangle$  assoziiere einen Graphen, einen *Cayley-Graphen*  $\text{Cay}(G, S)$  zu  $(G, S)$  mit  $G$  als Menge der Eckpunkte sowie Kanten zwischen  $g, h \in G$  genau dann, wenn es  $s \in S$  gibt, sodass  $h = gs$ .

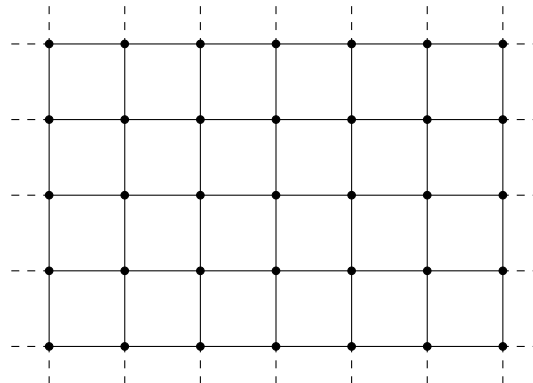
**Beispiel 5.3.2** Betrachte zu nächst  $(\mathbb{Z}, +) = \langle \{-1, 1\} \rangle =: \langle S \rangle$ . Dann existiert zwischen zwei ganzen Zahlen  $m, n \in \mathbb{Z}$  eine (nicht orientierte) Kante genau dann, wenn sie sich um ein Element in  $S$  unterscheiden, also genau dann, wenn  $|m - n| = 1$ . Der zugehörig Cayley-Graph  $\text{Cay}(\mathbb{Z}, S)$  sieht dann wie folgt aus:



**Beispiel 5.3.3** Betrachte nun  $(\mathbb{Z}, +) = \langle \{-3, -2, 2, 3\} \rangle =: \langle \tilde{S} \rangle$ . Wir erhalten dann ein den Cayley-Graphen  $\text{Cay}(\mathbb{Z}, \tilde{S})$

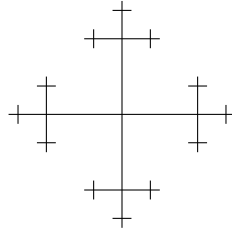


**Beispiel 5.3.4** Sei  $G = (\mathbb{Z}^2, +)$  mit  $S = \{\pm e_1, \pm e_2\}$ . Der zugehörige Cayley-Graph hat dann die Gestalt



**Beispiel 5.3.5** Für die freie Gruppe  $F_2 = F(a, b)$  in zwei Erzeugern mit  $S = \{a, b\}$  erhalten wir

einen Cayley-Graphen



Nun wollen wir auf einem Cayley-Graphen eine topologische Struktur definieren. Definiere hierfür die *Wortmetrik* auf  $G$  bzw. auf  $\text{Cay}(G, S)$

$$d_S(g, h) := \min \{m \in \mathbb{N}_0 \mid \text{es existieren } s_1, \dots, s_m \in S \text{ mit } g^{-1}h = s_1 \cdots s_m\} = d_S(e, g^{-1}h).$$

Dann ist  $d_S$  eine linksinvariante Metrik auf  $\text{Cay}(G, S)$  und entspricht der kombinatorischen Graphenmetrik. Eine Gruppe  $G = \langle S \rangle$  wird so zu einem geometrischen Objekt. Allerdings hängt die geometrische Struktur von der Wahl des Erzeugendensystems  $S$  von  $G$  ab. Welcher Zusammenhang besteht zwischen den entstehenden metrischen Räumen? Wir haben einen entscheidenden Satz:

**Satz 5.3.6** *Sei  $G$  eine Gruppe sowie  $S, \tilde{S}$  Erzeugendensysteme für  $G$ . Dann induziert die Identitätsabbildung  $\text{id}_G$  eine  $(\lambda, 0)$ -Quasi-Isometrie zwischen den metrischen Räumen  $(\text{Cay}(G, S), d_S)$  und  $(\text{Cay}(G, \tilde{S}), d_{\tilde{S}})$ .*

*Beweis.* Vorlesung über Geometrische Gruppentheorie oder Übung. □

Eine geometrische Eigenschaft einer endlich erzeugten Gruppe entspricht also einer Eigenschaft eines Cayley-Graphen, welche invariant unter Quasi-Isometrien ist (Gromov, 1987). Wir führen nun die Definition einer hyperbolischen Gruppe ein:

**Definition 5.3.7** Eine endlich erzeugte Gruppe  $G = \langle S \rangle$  heißt *hyperbolisch*, falls der Cayley-Graph  $\text{Cay}(G, S)$  als metrischer Raum  $\delta$ -hyperbolisch ist für ein  $\delta = \delta(S) \geq 0$ .

Nach Satz 5.4 ist Hyperbolizität eines geodätischen, metrischen Raums eine Quasi-Isometrie-Invariante, Hyperbolizität einer endlich erzeugten Gruppe ist also eine geometrische Eigenschaft.

**Beispiel 5.3.8** (i)  $F_2 = F(a, b)$  ist  $\delta$ -hyperbolisch, da sein Graph ein Baum und damit 0-hyperbolisch ist.

(ii)  $\mathbb{Z}^2$  ist nicht hyperbolisch, wie wir in Beispiel 5.1.2 bereits gesehen haben.

Eine wichtige Beobachtung: Jeder metrische Raum  $(X, d)$ , der quasi-isometrisch zu  $(\text{Cay}(G, S), d_S)$  ist, ist auch quasi-isometrisch zu  $(\text{Cay}(G, \tilde{S}), d_{\tilde{S}})$  ist. Die Frage ist nun: Wie findet man zu einer gegebenen Gruppe  $G = \langle S \rangle$  einen zu  $(\text{Cay}(G, S), d_S)$  quasi-isometrischen metrischen Raum  $(X, d)$ ? Eine Antwort bietet der folgende Satz:

**Satz 5.3.9 (Satz von Schwarz-Milnor)** Sei  $G$  eine endlich erzeugte Gruppe, welche auf einem geodätischen, metrischen Raum  $(X, d)$  durch Isometrien operiere. Weiter existiere eine Teilmenge  $B \subseteq X$  mit  $\text{diam} B < \infty$  und

- (i)  $X = \bigcup_{g \in G} g \cdot B$
- (ii) Die Menge  $S = \{g \in G \mid g \cdot B \cap B \neq \emptyset\}$  ist endlich.

Dann gilt: Für alle  $x \in X$  ist die Bahn-Abbildung

$$\phi_x : G \longrightarrow G \cdot x \subseteq X, \quad g \mapsto g \cdot x$$

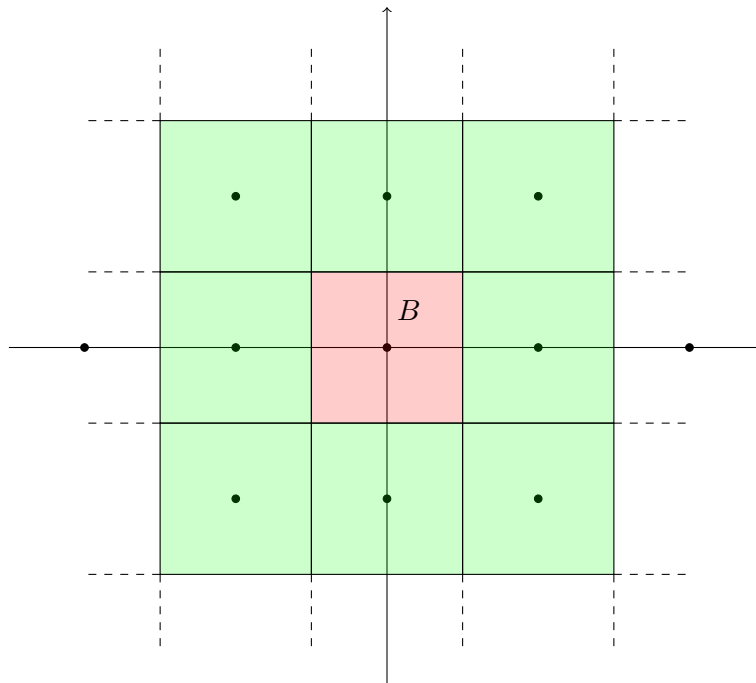
eine Quasi-Isometrie.

*Beweis.* Siehe Vorlesung über Geometrische Gruppentheorie oder Übung. □

**Beispiel 5.3.10** Die Gruppe  $(\mathbb{Z}^2, +)$  operiert auf  $\mathbb{R}^2$  durch Isometrien via

$$\cdot : \mathbb{Z}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad (m, n) \cdot (x, y) \mapsto (x + m, y + n).$$

Wähle  $B = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \times [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ :



Offenbar gilt

$$\bigcup_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2} g \cdot B = \mathbb{R}^2$$



sowie

$$\begin{aligned} S &= \{(m, n) \in \mathbb{Z}^2 \mid (m, n) \cdot B \neq \emptyset\} \\ &= \{(1, 0), (-1, 0), (0, 1), (0, -1), (1, 1), (-1, -1), (1, -1), (-1, 1)\} \end{aligned}$$

Satz 3.9 liefert also eine Quasi-Isometrie.

**Beispiel 5.3.11** Mit Dreiecksgruppen können ähnliche Konstruktionen durchgeführt werden.

Welche Quasi-Isometrie-Invarianten gibt es noch?

- z.B. Wachstumsfunktionen (quadratisch, exponentiell,...)
- isoperimetrische Ungleichungen

Aus der Topologie betrachten wir nun die Klassifikation von kompakten, orientierbaren, 2-dimensionalen Mannigfaltigkeiten ("Flächen"): Hier für bezeichne das Geschlecht  $g$  eine Fläche die Anzahl der "Henkel" der Mannigfaltigkeit. Dann gibt es zu jedem  $g$  bis auf Homöomorphie genau eine solche Fläche  $F_g$ : Für  $g = 0$  erhalten wir die Sphäre,  $g = 1$  entspricht dem Torus (welcher durch das Anbringen eines Henkels an die Sphäre hervorgeht), für  $g = 2$  die Sphäre mit zwei Henkeln usw.

- Für  $g = 0$  ist  $F_0$  die 2-Sphäre. Sie hat konstante Krümmung 1.
- $F_1$  ist der flache Torus  $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2 / \mathbb{Z}^2$ . Er ist lokal euklidisch (als Quotient der euklidischen Ebene), hat also konstante Krümmung 0.
- Für  $g \geq 2$  gilt wegen des Satzes von Gauß-Bonnet, welcher

$$\int_{F_g} \kappa dA = 2\pi\chi(F_g) = 2\pi(2 - 2g)$$

besagt, dass  $F_g$  negativ gekrümmt ist. Man kann zeigen, dass  $F_g$  als Quotient von  $\mathbb{H}^2$  nach einer direkten Gruppe realisiert wird.

