5 Anhang: Geometrische Integrationstheorie

5.1 Multilineare Algebra

In diesem Abschnitt sind V, W stets endlich-dimensionale reelle Vektorräume. Für $p \in \mathbb{N}$ sei $V^p := V \times \cdots \times V$ das p-fache kartesische Produkt von V. Schließlich sei V^* der duale Vektorraum der Linearformen auf V. Wir werden Tensoren und alternierende Tensoren auf elementarem Weg einführen und die Bildung von Restklassen sowie die Verwendung universeller Eigenschaften vermeiden.

Definition. Ein p-*Tensor* über V ist eine multilineare Abbildung $T : V^p \to \mathbb{R}$. Die Menge $\mathcal{T}^p(V)$ aller p-Tensoren über V ist mit den Operationen

$$\begin{aligned}(S+T)(v_1,\dots,v_p) &:= S(v_1,\dots,v_p) + T(v_1,\dots,v_p)\\ (\lambda S)(v_1,\dots,v_p) &:= \lambda S(v_1,\dots,v_p)\end{aligned}$$

für $v_1, \dots, v_p \in V$ ein reeller Vektorraum. Wir setzen $\mathcal{T}^0(V) := \mathbb{R}$.

Die aufgestellten Behauptungen gelten offensichtlich. Ferner ist $V^* = \mathcal{T}^1(V)$.

Eine wichtige Verknüpfung von Tensoren ist gegeben durch das Tensorprodukt.

Definition. Für $S \in \mathcal{T}^p(V)$, $T \in \mathcal{T}^q(V)$ ist das *Tensorprodukt* $S \otimes T$ erklärt durch

$$(S \otimes T)(v_1,\dots,v_p,v_{p+1},\dots,v_{p+q}) := S(v_1,\dots,v_p)T(v_{p+1},\dots,v_{p+q})$$

für $v_1, \dots, v_{p+q} \in V$. Es gilt $S \otimes T \in \mathcal{T}^{p+q}(V)$ (leicht!).

Satz 5.1
Für $S, S_i \in \mathcal{T}^p(V)$, $T, T_i \in \mathcal{T}^q(V)$, $U \in \mathcal{T}^r(V)$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt

(a) $(S_1 + S_2) \otimes T = S_1 \otimes T + S_2 \otimes T$,

(b) $S \otimes (T_1 + T_2) = S \otimes T_1 + S \otimes T_2$,

(c) $(\lambda S) \otimes T = S \otimes (\lambda T) = \lambda(S \otimes T)$,

(d) $(S \otimes T) \otimes U = S \otimes (T \otimes U)$.

Wegen (d) *können wir*

$$S \otimes T \otimes U := (S \otimes T) \otimes U$$

erklären.

In der linearen Algebra erklärt man zu einer linearen Abbildung $f : V \to W$ die duale lineare Abbildung $f^* : W^* \to V^*$. Dies wird jetzt verallgemeinert.

Definition. Sei $f : V \to W$ eine lineare Abbildung. Die Abbildung $f^* : \mathcal{T}^p(W) \to \mathcal{T}^p(V)$ werde definiert durch

$$(f^*T)(v_1, \dots, v_p) := T(f(v_1), \dots, f(v_p))$$

für $v_1, \dots, v_p \in V$ und $T \in \mathcal{T}^p(W)$. Die Abbildung f^* ist linear (leicht!).

Man beachte, daß f^* eigentlich von p abhängt.

Definition. Ein p-Tensor $\omega \in \mathcal{T}^p(V)$ $(p \geq 2)$ heißt *alternierend*, wenn

$$\omega(v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_p) = -\omega(v_1, \dots, v_j, \dots, v_i, \dots, v_p) \quad \text{für } i \neq j$$

und $v_1, \dots, v_p \in V$ gilt. Sei $\Omega^p(V)$ die Menge aller alternierenden p-Tensoren; sei ferner $\Omega^0(V) := \mathbb{R}$ und $\Omega^1(V) := \mathcal{T}^1(V)$. Dann ist $\Omega^p(V)$ ein linearer Unterraum von $\mathcal{T}^p(V)$; seine Elemente heißen auch p-Kovektoren über V.

Beispiel. Ist $n := \dim(V)$, so ist $\det \in \Omega^n(V)$.

Sei S_p die Gruppe der Permutationen (Bijektionen) von $\{1, \dots, p\}$. Sie hat $p!$ Elemente. Mit $(i, j) \in S_p$ wird die Permutation bezeichnet, die i und j vertauscht und die übrigen Elemente fest läßt. Jede solche Permutation heißt *Transposition*. Jedes $\sigma \in S_p$ $(p > 1)$ läßt sich als Produkt von Transpositionen schreiben. Ob die Anzahl der dabei verwendeten Transpositionen gerade oder ungerade ist, hängt nur von σ ab. Im geraden Fall nennt man σ gerade und setzt $\operatorname{sgn}(\sigma) = 1$, im ungeraden Fall heißt σ ungerade und man setzt $\operatorname{sgn}(\sigma) = -1$. Die Abbildung sgn ist ein Gruppenhomomorphismus von $(S_p, \circ)$ nach $(\{-1, 1\}, \cdot)$.

Definition. Für $T \in \mathcal{T}^p(V)$ sei

$$\operatorname{Alt}(T)(v_1, \dots, v_p) := \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in S_p} \operatorname{sgn}(\sigma) T(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(p)})$$

für $v_1, \dots, v_p \in V$.

Satz 5.2
Die Abbildung Alt: $\mathcal{T}^p(V) \to \Omega^p(V)$ ist eine lineare Projektionsabbildung, d.h.

(a) $T \in \mathcal{T}^p(V) \Rightarrow \operatorname{Alt}(T) \in \Omega^p(V)$;

(b) $\omega \in \Omega^p(V) \Rightarrow \operatorname{Alt}(\omega) = \omega$.

Beweis. Die Linearität ist offensichtlich gegeben.

(a) Sei $i \neq j$ (fest), $(i,j) \in S_p$ die zugehörige Transposition und $\sigma' := \sigma \circ (i,j)$ für $\sigma \in S_p$. Dann ist

$$\begin{aligned}
& \operatorname{Alt}(T)(v_1, \dots, v_j, \dots, v_i, \dots, v_p) \\
= \; & \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in S_p} \operatorname{sgn}(\sigma) T(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(j)}, \dots, v_{\sigma(i)}, \dots, v_{\sigma(p)}) \\
= \; & \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in S_p} \operatorname{sgn}(\sigma) T(v_{\sigma'(1)}, \dots, v_{\sigma'(i)}, \dots, v_{\sigma'(j)}, \dots, v_{\sigma'(p)}) \\
= \; & \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in S_p} - \operatorname{sgn}(\sigma') T(v_{\sigma'(1)}, \dots, v_{\sigma'(i)}, \dots, v_{\sigma'(j)}, \dots, v_{\sigma'(p)}) \\
= \; & -\operatorname{Alt}(T)(v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_p).
\end{aligned}$$

(b) Für $\omega \in \Omega^p(V)$ und $\sigma = (i,j)$ gilt

$$\omega(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(p)}) = -\omega(v_1, \dots, v_p) = \operatorname{sgn}(\sigma)\omega(v_1, \dots, v_p).$$

Da jede Permutation Produkt von Transpositionen ist und da sgn multiplikativ ist, gilt diese Gleichung für jede Permutation σ. Also ist

$$\begin{aligned}
\operatorname{Alt}(\omega)(v_1, \dots, v_p) &= \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in S_p} \operatorname{sgn}(\sigma) \omega(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(p)}) \\
&= \frac{1}{p!} \left(\sum_{\sigma \in S_p} 1 \right) \omega(v_1, \dots, v_p) = \omega(v_1, \dots, v_p).
\end{aligned}$$

Jetzt wird die Bildung des Tensorprodukts mit der Alt-Operation verknüpft. Man beachte, daß i.a. $\omega \otimes \eta \notin \Omega^{p+q}(V)$ für $\omega \in \Omega^p(V)$, $\eta \in \Omega^q(V)$. Daher wendet man noch einmal den Alt-Operator an und normiert geeignet, um auf diesem Weg wieder zu einem alternierenden Tensor zu gelangen.

Definition. Für $\omega \in \Omega^p(V)$, $\eta \in \Omega^q(V)$ ist das *alternierende* (oder *äußere*) *Produkt* $\omega \wedge \eta$ erklärt durch

$$\omega \wedge \eta := \frac{(p+q)!}{p!q!} \operatorname{Alt}(\omega \otimes \eta).$$

Es gilt $\omega \wedge \eta \in \Omega^{p+q}(V)$.

Als nächstes halten wir die wichtigsten Eigenschaften des alternierenden Produktes fest.

Satz 5.3
Für $\omega, \omega_i \in \Omega^p(V)$, $\eta, \eta_i \in \Omega^q(V)$, $\lambda \in \mathbb{R}$ und für eine lineare Abbildung $f : W \to V$ gilt

(a) $(\omega_1 + \omega_2) \wedge \eta = \omega_1 \wedge \eta + \omega_2 \wedge \eta$,

(b) $\omega \wedge (\eta_1 + \eta_2) = \omega \wedge \eta_1 + \omega \wedge \eta_2$,

(c) $(\lambda\omega) \wedge \eta = \omega \wedge (\lambda\eta) = \lambda(\omega \wedge \eta)$,

(d) $\omega \wedge \eta = (-1)^{pq} \eta \wedge \omega$,

(e) $f^*(\omega \wedge \eta) = f^*(\omega) \wedge f^*(\eta)$.

Beweis. Die Aussagen (a), (b), (c) und (e) folgen leicht, der Nachweis zu (d) ist eine Übungsaufgabe.

Für das alternierende Produkt von drei Kovektoren gilt auch das Assoziativgesetz. Der Nachweis erfordert eine Vorbereitung.

Lemma 5.4
Es gilt:

(a) Für $S \in \mathcal{T}^p(V)$, $T \in \mathcal{T}^q(V)$ mit $\mathrm{Alt}(S) = 0$ ist

$$\mathrm{Alt}(S \otimes T) = \mathrm{Alt}(T \otimes S) = 0.$$

(b) Für $\omega \in \Omega^p(V)$, $\eta \in \Omega^q(V)$, $\theta \in \Omega^r(V)$ ist

$$\mathrm{Alt}(\mathrm{Alt}(\omega \otimes \eta) \otimes \theta) = \mathrm{Alt}(\omega \otimes \eta \otimes \theta) = \mathrm{Alt}(\omega \otimes \mathrm{Alt}(\eta \otimes \theta)).$$

Beweis. (a) Sei $G \subset S_{p+q}$ die Untergruppe aller Permutationen von $\{1, \ldots, p+q\}$, die $p+1, \ldots, p+q$ fest lassen. Für $\tau \in S_{p+q}$ ist dann τG eine Linksnebenklasse und $LNK := \{\tau G : \tau \in S_{p+q}\}$ ist die Menge aller Linksnebenklassen von G. Setze $v_{\tau(i)} =: w_i$ für $i = 1, \ldots, p+q$

und ein fest gewähltes $\tau \in G$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
& \sum_{\sigma \in \tau G} \operatorname{sgn}(\sigma) S(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(p)}) T(v_{\sigma(p+1)}, \ldots, v_{\sigma(p+q)}) \\
= & \sum_{\sigma' \in G} \operatorname{sgn}(\tau \circ \sigma') S(v_{\tau(\sigma'(1))}, \ldots, v_{\tau(\sigma'(p))}) T(v_{\tau(\sigma'(p+1))}, \ldots, v_{\tau(\sigma'(p+q))}) \\
= & \operatorname{sgn}(\tau) \left(\sum_{\sigma' \in G} \operatorname{sgn}(\sigma') S(w_{\sigma'(1)}, \ldots, w_{\sigma'(p)}) \right) T(w_{p+1}, \ldots, w_{p+q}) \\
= & \operatorname{sgn}(\tau)(p! \operatorname{Alt}(S)(w_1, \ldots, w_p)) T(w_{p+1}, \ldots, w_{p+q}) \\
= & 0.
\end{aligned}$$

Da die Linksnebenklassen von G eine disjunkte Zerlegung von S_{p+q} bilden, folgt

$$\begin{aligned}
& (p+q)! \operatorname{Alt}(S \otimes T)(v_1, \ldots, v_{p+q}) \\
= & \sum_{\sigma \in S_{p+q}} \operatorname{sgn}(\sigma) S(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(p)}) T(v_{\sigma(p+1)}, \ldots, v_{\sigma(p+q)}) \\
= & \sum_{\tau G \in LNK} \sum_{\sigma \in \tau G} \operatorname{sgn}(\sigma) S(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(p)}) T(v_{\sigma(p+1)}, \ldots, v_{\sigma(p+q)}) \\
= & 0.
\end{aligned}$$

Analog folgt $\operatorname{Alt}(T \otimes S) = 0$.

(b) Es ist

$$\begin{aligned}
& \operatorname{Alt}(\operatorname{Alt}(\omega \otimes \eta) \otimes \theta) - \operatorname{Alt}(\omega \otimes \eta \otimes \theta) \\
= & \operatorname{Alt}(\operatorname{Alt}(\omega \otimes \eta) \otimes \theta - (\omega \otimes \eta) \otimes \theta) \\
= & \operatorname{Alt}([\operatorname{Alt}(\omega \otimes \eta) - \omega \otimes \eta] \otimes \theta) \\
= & 0
\end{aligned}$$

nach (a), da $\operatorname{Alt}(\operatorname{Alt}(\omega \otimes \eta) - (\omega \otimes \eta)) = 0$ ist.

Satz 5.5
Für $\omega \in \Omega^p(V)$, $\eta \in \Omega^q(V)$, $\theta \in \Omega^r(V)$ gilt

$$(\omega \wedge \eta) \wedge \theta = \omega \wedge (\eta \wedge \theta).$$

Beweis. Es gilt

$$\begin{aligned}(\omega \wedge \eta) \wedge \theta &= \frac{(p+q+r)!}{(p+q)!r!}\mathrm{Alt}((\omega \wedge \eta) \otimes \theta) \\ &= \frac{(p+q+r)!}{(p+q)!r!}\mathrm{Alt}\left(\frac{(p+q)!}{p!q!}\mathrm{Alt}(\omega \otimes \eta) \otimes \theta\right) \\ &= \frac{(p+q+r)!}{p!q!r!}\mathrm{Alt}(\omega \otimes \eta \otimes \theta),\end{aligned}$$

wobei Lemma 5.4 (b) verwendet wurde. Für die rechte Seite der behaupteten Gleichung erhält man denselben Ausdruck.

In der Folge können wir somit

$$\omega \wedge \eta \wedge \theta := (\omega \wedge \eta) \wedge \theta = \omega \wedge (\eta \wedge \theta)$$

setzen und Klammern weglassen. Die im Beweis gewonnene Gleichung

$$\omega \wedge \eta \wedge \theta = \frac{(p+q+r)!}{p!q!r!}\mathrm{Alt}(\omega \otimes \eta \otimes \theta)$$

überträgt sich sofort auf mehr als drei Faktoren. Insbesondere gilt für $\omega_1, \dots, \omega_p \in \Omega^1(V) = V^*$ die Gleichung

$$\mathrm{Alt}(\omega_1 \otimes \cdots \otimes \omega_p) = \frac{1}{p!}\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_p.$$

Voraussetzung. Nachfolgend schreiben wir n für die Dimension des Vektorraums V.

Zur Erinnerung. Sei $(e_1, \dots, e_n)$ eine Basis von V. Definiere $\varphi_i \in V^*$ durch

$$\varphi_i(e_j) := \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{für } i = j, \\ 0, & \text{für } i \neq j \end{cases}$$

für $i, j = 1, \dots, n$ und lineare Erweiterung, d.h.

$$\varphi_i\left(\sum_{j=1}^n a_j e_j\right) = \sum_{j=1}^n a_j \varphi_i(e_j) = a_i.$$

Dann ist $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ eine Basis des Dualraumes V^*. Sie heißt die zu $(e_1, \dots, e_n)$ duale Basis. Für $f \in V^*$ und $v = \sum_{i=1}^n a_i e_i \in V$ gilt

$$f(v) = f\left(\sum_{i=1}^n a_i e_i\right) = \sum_{i=1}^n a_i f(e_i) = \sum_{i=1}^n f(e_i)\varphi_i(v) = \left(\sum_{i=1}^n f(e_i)\varphi_i\right)(v).$$

Also ist

$$f = \sum_{i=1}^n f(e_i)\varphi_i,$$

was man auch einfach durch Einsetzen von $e_1, \dots, e_n$ bestätigen kann.

Wir verallgemeinern nun diese Vorgehensweise, um eine Basis von $\Omega^p(V)$ anzugeben.

Satz 5.6
Sei $(e_1, \dots, e_n)$ eine Basis von V und $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ die hierzu duale Basis von V^*. Dann ist die Menge

$$B := \{\varphi_{i_1} \wedge \dots \wedge \varphi_{i_p} : 1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n\}$$

eine Basis von $\Omega^p(V)$; sie heißt die Standardbasis von $\Omega^p(V)$ bezüglich $(e_1, \dots, e_n)$. Insbesondere gilt

$$\dim \Omega^p(V) = \binom{n}{p}.$$

Beweis. Sei zunächst $T \in \mathcal{T}^p(V)$. Sei $v_1, \dots, v_p \in V$ und

$$v_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} e_j, \qquad i = 1, \dots, p.$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} T(v_1, \dots, v_p) &= T\left(\sum_{i_1=1}^{n} a_{1i_1} e_{i_1}, \dots, \sum_{i_p=1}^{n} a_{pi_p} e_{i_p}\right) \\ &= \sum_{i_1, \dots, i_p=1}^{n} a_{1i_1} \cdots a_{pi_p} T(e_{i_1}, \dots, e_{i_p}). \end{aligned}$$

Nun ist

$$\varphi_{i_1} \otimes \dots \otimes \varphi_{i_p}(v_1, \dots, v_p) = \varphi_{i_1}(v_1) \cdots \varphi_{i_p}(v_p) = a_{1i_1} \cdots a_{pi_p},$$

also

$$T = \sum_{i_1, \dots, i_p=1}^{n} T(e_{i_1}, \dots, e_{i_p}) \varphi_{i_1} \otimes \dots \otimes \varphi_{i_p}.$$

Jetzt sei speziell $T = \omega \in \Omega^p(V)$. Dann erhält man

$$\begin{aligned} \omega = \mathrm{Alt}(\omega) &= \sum_{i_1, \dots, i_p=1}^{n} \omega(e_{i_1}, \dots, e_{i_p}) \mathrm{Alt}(\varphi_{i_1} \otimes \dots \otimes \varphi_{i_p}) \\ &= \frac{1}{p!} \sum_{i_1, \dots, i_p=1}^{n} \omega(e_{i_1}, \dots, e_{i_p}) \varphi_{i_1} \wedge \dots \wedge \varphi_{i_p}. \end{aligned}$$

Für $\sigma \in S_p$ gilt

$$\varphi_{i_1} \wedge \dots \wedge \varphi_{i_p} = \mathrm{sgn}(\sigma) \varphi_{i_{\sigma(1)}} \wedge \dots \wedge \varphi_{i_{\sigma(p)}}$$

sowie

$$\omega(e_{i_1},\dots,e_{i_p}) = \mathrm{sgn}(\sigma)\omega(e_{i_{\sigma(1)}},\dots,e_{i_{\sigma(p)}}).$$

Die zweite Gleichung haben wir schon gezeigt, die erste folgt analog durch wiederholte Anwendung von Satz 5.3 (d) auf 1-Kovektoren. Insbesondere ist

$$\omega(e_{i_1},\dots,e_{i_p}) = 0 \quad \text{und} \quad \varphi_{i_1}\wedge\cdots\wedge\varphi_{i_p} = 0,$$

falls zwei der Indizes $i_1,\dots,i_p$ gleich sind. Man erhält somit

$$\omega = \sum_{1\le j_1<\cdots<j_p\le n} \omega(e_{j_1},\dots,e_{j_p})\varphi_{j_1}\wedge\cdots\wedge\varphi_{j_p}.$$

Dies zeigt, daß B ein Erzeugendensystem ist. Sei nun eine Linearkombination

$$\sum_{1\le i_1<\cdots<i_p\le n} a_{i_1\dots i_p}\varphi_{i_1}\wedge\cdots\wedge\varphi_{i_p} = 0$$

gegeben. Sei $1\le j_1<\cdots<j_p\le n$. Dann ist

$$\begin{aligned}
\varphi_{i_1}\wedge\cdots\wedge\varphi_{i_p}(e_{j_1},\dots,e_{j_p}) &= p!\mathrm{Alt}(\varphi_{i_1}\otimes\cdots\otimes\varphi_{i_p})(e_{j_1},\dots,e_{j_p})\\
&= \sum_{\sigma\in S_p} \mathrm{sgn}(\sigma)\varphi_{i_1}(e_{j_{\sigma(1)}})\cdots\varphi_{i_p}(e_{j_{\sigma(p)}}).
\end{aligned}$$

Hier ist

$$\begin{aligned}
\varphi_{i_1}(e_{j_{\sigma(1)}})\cdots\varphi_{i_p}(e_{j_{\sigma(p)}}) &= \begin{cases} 1, & \text{falls } i_1 = j_{\sigma(1)},\dots,i_p = j_{\sigma(p)}\\ 0, & \text{sonst}\end{cases}\\
&= \begin{cases} 1, & \text{falls } i_1 = j_1,\dots,i_p = j_p, \sigma = id\\ 0, & \text{sonst,}\end{cases}
\end{aligned}$$

da die Indizes der Größe nach geordnet sind. Es folgt

$$0 = \sum_{1\le i_1<\cdots<i_p\le n} a_{i_1\dots i_p}\varphi_{i_1}\wedge\cdots\wedge\varphi_{i_p}(e_{j_1},\dots,e_{j_p}) = a_{j_1\dots j_p}.$$

Dies zeigt die lineare Unabhängigkeit von B.

Aus Satz 5.6 folgt insbesondere

$$\Omega^p(V) = \{0\} \qquad \text{für } p > n$$

und

$$\dim\Omega^n(V) = 1.$$

Satz 5.7
Sei $(e_1,\dots,e_n)$ eine Basis von V, sei $\omega\in\Omega^n(V)$ und sei $v_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}e_j$ für $i = 1,\dots,n$. Dann ist

$$\omega(v_1,\dots,v_n) = \det(a_{ij})_{i,j=1}^n\omega(e_1,\dots,e_n).$$

Beweis. Für $v_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} e_j$, $i = 1, \ldots, n$ definiere

$$\eta(v_1, \ldots, v_n) \coloneqq \det(a_{ij})_{i,j=1}^n.$$

Dann gilt $\eta \in \Omega^n(V)$. Wegen $\dim \Omega^n(V) = 1$ ist $\omega = \lambda\eta$ mit einem $\lambda \in \mathbb{R}$. Ferner gilt

$$\omega(e_1, \ldots, e_n) = \lambda\eta(e_1, \ldots, e_n) = \lambda.$$

Bezeichnung. Im folgenden verwenden wir gelegentlich die Abkürzung

$$\sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_p \le n} a_{i_1 \ldots i_p} \varphi_{i_1} \wedge \cdots \wedge \varphi_{i_p} =: \sum_{I \in M_p^n} a_I \varphi_I.$$

Dabei durchläuft der Multi-Index I die Menge

$$M_p^n \coloneqq \{(i_1, \ldots, i_p) \in \{1, \ldots, n\}^p : 1 \le i_1 < \cdots < i_p \le n\}.$$

Insbesondere sei

$$\varphi_I \coloneqq \varphi_{i_1} \wedge \cdots \wedge \varphi_{i_p}$$

für $I = (i_1, \ldots, i_p)$.

5.2 Differentialformen

In diesem Abschitt betrachten wir Funktionen, deren Werte alternierende Tensoren sind.

Definition. Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ und $p \in \mathbb{N}_0$. Eine *Differentialform* vom Grad p (eine p-Form) auf M ist eine Abbildung von M in $\Omega^p(\mathbb{R}^n)$.

Eine Differentialform vom Grad 0 ist also einfach eine reellwertige Funktion. Ist ω eine p-Form auf M, so ist $\omega(X) \in \Omega^p(\mathbb{R}^n)$ für jedes $X \in \mathbb{R}^n$ ein p-Kovektor über $\mathbb{R}^n$. Algebraische Operationen werden nun wieder punktweise erklärt.

Definition. Seien ω_i, ω, η Differentialformen auf M (ω_1, ω_2 vom selben Grad), sei $f : M \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann werden die Differentialformen $\omega_1 + \omega_2$, $f\omega$ und $\omega \wedge \eta$ erklärt durch

$$\begin{aligned}
(\omega_1 + \omega_2)(X) &\coloneqq \omega_1(X) + \omega_2(X), \\
(f\omega)(X) &\coloneqq f(X)\omega(X) =: (f \wedge \omega)(X), \\
(\omega \wedge \eta)(X) &\coloneqq \omega(X) \wedge \eta(X).
\end{aligned}$$

Beispiel.

- Sei $f : M \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion und $M \subset \mathbb{R}^n$ offen. Für $X \in M$ ist das Differential $Df_X : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine lineare Abbildung mit
$$\lim_{H\to 0} \frac{f(X+H) - f(X) - Df_X(H)}{\|H\|} = 0.$$
Für das Differential einer reellwertigen Funktionen schreiben wir künftig df_X statt Df_X. Insbesondere gilt also $df_X \in \Omega^1(\mathbb{R}^n) = \mathcal{T}^1(\mathbb{R}^n)$ für $X \in M$. Das Differential df von f, d.h. die Abbildung
$$df : M \to \Omega^1(\mathbb{R}^n), \qquad X \mapsto df_X$$
ist eine Differentialform vom Grad 1 auf M.

- Eine spezielle differenzierbare Abbildung auf $\mathbb{R}^n$ ist die Projektionsabbildung
$$p_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \qquad (x_1, \dots, x_n) \mapsto x_i,$$
wobei $i \in \{1, \dots, n\}$. Anstelle von dp_i schreiben wir prägnanter dx^i, $i = 1, \dots, n$. Dies sind also sehr spezielle Differentialformen vom Grad 1 mit
$$(dx^i)_X = p_i \quad \text{für } X \in \mathbb{R}^n$$
und
$$(dx^i)_X(E_j) = \delta_{ij},$$
wenn $(E_1, \dots, E_n)$ die Standard-Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^n$ ist. Insbesondere ist also die Basis $((dx^1)_X, \dots, (dx^n)_X)$ die zu $(E_1, \dots, E_n)$ duale Basis, und zwar für alle $X \in \mathbb{R}^n$. Aus Satz 5.6 erhalten wir folglich zu jedem $X \in \mathbb{R}^n$ eine Basis von $\Omega^p(\mathbb{R}^n)$ und können ω_X für eine gegebene p-Form ω in dieser Basis ausdrücken.

Definition. Sei ω eine Differentialform vom Grad p auf M. Dann gibt es Funktionen $a_{i_1 \dots i_p} : M \to \mathbb{R}$ für $1 \le i_1 < \dots < i_p \le n$, die *Koordinatenfunktionen* von ω, mit
$$\omega_X = \sum_{1 \le i_1 < \dots < i_p \le n} a_{i_1 \dots i_p}(X) (dx^{i_1})_X \wedge \dots \wedge (dx^{i_p})_X, \quad X \in M,$$
abgekürzt
$$\omega = \sum_{1 \le i_1 < \dots < i_p \le n} a_{i_1 \dots i_p} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p} = \sum_{I \in M_p^n} a_I dx^I. \tag{5.1}$$
Ist M offen, so heißt die Form ω von der Klasse C^r (mit $r \in \mathbb{N}_0$), wenn ihre Koordinatenfunktionen von der Klasse C^r sind.

Bemerkungen.

- Gilt (5.1), so kann man die Koordinatenfunktion von ω ausdrücken in der Form
$$a_{i_1 \dots i_p}(X) = \omega_X(E_{i_1}, \dots, E_{i_p}).$$

- Für eine differenzierbare Funktion $f : M \to \mathbb{R}$ erhält man insbesondere
$$df = \sum_{i=1}^n df(E_i) dx^i = \sum_{i=1}^n (\partial_i f) dx^i.$$

Wir hatten für eine lineare Abbildung $L : V \to W$ und $p \in \mathbb{N}$ die duale Abbildung $L^* : \mathcal{T}^p(W) \to \mathcal{T}^p(V)$ erklärt durch

$$(L^*T)(v_1, \ldots, v_p) := T(Lv_1, \ldots, Lv_p), \quad T \in \mathcal{T}^p(W), v_i \in V.$$

Für $p = 0$ ist L^* sinngemäß als die Identität auf $\mathbb{R}$ erklärt. Nun sei $M \subset \mathbb{R}^n$ offen und $F : M \to \mathbb{R}^k$ eine differenzierbare Abbildung. Für jedes $X \in M$ ist dann $DF_X : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ eine lineare Abbildung. Somit ist für $p \in \mathbb{N}$ auch

$$(DF_X)^* : \Omega^p(\mathbb{R}^k) \to \Omega^p(\mathbb{R}^n)$$

eine lineare Abbildung. Daß $(DF_X)^*(T)$ für $T \in \Omega^p(\mathbb{R}^k)$ ein alternierender Tensor ist, folgt direkt aus der Definition. Wir können auf diese Weise jeder p-Form auf $F(M)$ eine p-Form auf M zuordnen.

Definition. Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ offen und $F : M \to \mathbb{R}^k$ eine differenzierbare Abbildung. Für eine p-Form ω auf $F(M)$ ist die p-Form $F^*\omega$ auf M erklärt durch

$$(F^*\omega)_X := (DF_X)^*\omega_{F(X)}, \qquad X \in M.$$

Man sagt, $F^*\omega$ entstehe aus ω durch Zurückholen mittels F.

Speziell für $p = 0$ bedeutet dies, daß

$$F^*\omega = \omega \circ F$$

gilt, da $(DF_X)^*$ für $p = 0$ die Identität auf $\mathbb{R}$ ist.

Wir halten einige Rechenregeln fest.

Satz 5.8
Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ offen und $F : M \to \mathbb{R}^k$ eine differenzierbare Abbildung mit $F = (f_1, \ldots, f_k)$. Sei dy^i das i-te Koordinatendifferential auf $\mathbb{R}^k$. Dann gilt für p-Formen ω_i, ω, Funktionen g und q-Formen η, die jeweils auf $F(M)$ erklärt sind,

(a) $F^*dy^i = df_i, \qquad i = 1, \ldots, k,$

(b) $F^*(\omega_1 + \omega_2) = F^*\omega_1 + F^*\omega_2,$

(c) $F^*(g\omega) = g \circ F\, F^*(\omega),$

(d) $F^*(\omega \wedge \eta) = F^*\omega \wedge F^*\eta.$

(e) Ist $N \subset \mathbb{R}^k$ offen, $F(M) \subset N$ und $G : N \to \mathbb{R}^m$ differenzierbar, dann gilt für jede p-Form ω auf $G \circ F(M)$
$$(G \circ F)^*\omega = F^*G^*\omega.$$

Beweis. Sei $X \in \mathbb{R}^n$, $H \in \mathbb{R}^n$ und $(E'_1, \ldots, E'_k)$ die Standardbasis des $\mathbb{R}^k$. Dann gilt

$$\begin{aligned}(F^* dy^i)_X(H) &= (DF_X)^*(dy^i)_{F(X)}(H) \\ &= (dy^i)_{F(X)}(DF_X(H)) \\ &= (dy^i)_{F(X)}\left(\sum_{j=1}^{k}(Df_j)_X(H)E'_j\right) \\ &= (df_i)_X(H).\end{aligned}$$

(b) und (c) gelten nach Definition, (d) folgt aus Satz 5.3 (e).

(e) folgt aus

$$\begin{aligned}((G \circ F)^*\omega)_X &= (D(G \circ F)_X)^*\omega_{G\circ F(X)} \\ &= (DG_{F(X)} \circ DF_X)^*\omega_{G(F(X))} \\ &= (DF_X)^*\left((DG_{F(X)})^*\omega_{G(F(X))}\right) \\ &= (DF_X)^*\left((G^*\omega)_{F(X)}\right) \\ &= (F^*(G^*\omega))_X = (F^*G^*\omega)_X.\end{aligned}$$

Wir kombinieren jetzt obige Rechenregeln und erhalten so

$$F^*\left(\sum a_{i_1\ldots i_p} dy^{i_1} \wedge \cdots \wedge dy^{i_p}\right) = \sum a_{i_1\ldots i_p} \circ F\, df_{i_1} \wedge \cdots \wedge df_{i_p} \tag{5.2}$$

mit

$$df_i = \sum_{j=1}^{n}(\partial_j f_i)\, dx^j. \tag{5.3}$$

Man kann (5.3) in (5.2) einsetzen, um eine Darstellung bezüglich der Standardbasis zu erhalten. Wir betrachten explizit nur den folgenden Spezialfall.

Satz 5.9
Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ offen und $F : M \to \mathbb{R}^n$ differenzierbar. Dann ist für eine Funktion $a : F(M) \to \mathbb{R}$

$$F^*(a dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n) = a \circ F \det(JF)\, dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n.$$

Beweis. Wir erhalten

$$
\begin{aligned}
F^*(adx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n) &= a \circ F\, df_1 \wedge \cdots \wedge df_n \\
&= a \circ F \left(\sum_{i_1} (\partial_{i_1} f_1) dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge \sum_{i_n} (\partial_{i_n} f_n) dx^{i_n} \right) \\
&= a \circ F \sum_{i_1,\ldots,i_n=1}^{n} \partial_{i_1} f_1 \cdots \partial_{i_n} f_n \, dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_n} \\
&= a \circ F \sum_{\sigma \in S_n} \partial_{\sigma(1)} f_1 \cdots \partial_{\sigma(n)} f_n \, dx^{\sigma(1)} \wedge \cdots \wedge dx^{\sigma(n)} \\
&= a \circ F \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \partial_{\sigma(1)} f_1 \cdots \partial_{\sigma(n)} f_n \, dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n \\
&= a \circ F \det(\partial_i f_j)_{i,j=1}^n \, dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n.
\end{aligned}
$$

Alternativ kann man mit Satz 5.7 argumentieren:

$$
\begin{aligned}
& F^*(dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n)_X (E_1, \ldots, E_n) \\
= {} & (dx^1)_X \wedge \cdots \wedge (dx^n)_X (DF_X(E_1), \ldots, DF_X(E_n)) \\
= {} & (dx^1)_X \wedge \cdots \wedge (dx^n)_X \left(\sum_{i=1}^n (\partial_1 f_i)_X E_i, \ldots, \sum_{i=1}^n (\partial_n f_i)_X E_i \right) \\
= {} & \det(\partial_i f_j(X))_{i,j=1}^n (dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n)_X (E_1, \ldots, E_n),
\end{aligned}
$$

d.h.

$$
F^*(dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n) = \det(\partial_i f_j)_{i,j=1}^n \, dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n.
$$

Von grundlegender Bedeutung ist der folgende Differentiationsprozeß für Differentialformen.

Definition. Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ offen und

$$
\omega = \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_p \le n} a_{i_1 \ldots i_p} dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p} = \sum_{I \in M_p^n} a_I dx^I
$$

eine Differentialform vom Grad p der Klasse C^1 auf M. Die *äußere Ableitung* oder das *äußere Differential* von ω ist die $(p+1)$-Form

$$
\begin{aligned}
d\omega &:= \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_p \le n} da_{i_1 \ldots i_p} \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p} \\
&= \sum_{I \in M_p^n} da_I \wedge dx^I \\
&= \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_p \le n} \sum_{j=1}^n (\partial_j a_{i_1 \ldots i_p}) dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p}.
\end{aligned}
$$

Die angegebene Definition ist konsistent mit dem Fall $p = 0$, wo für $f : M \to \mathbb{R}$ von der Klasse C^1 gilt

$$df = \sum_{j=1}^{n} (\partial_j f)\, dx^j .$$

Der folgende Satz faßt die wichtigsten Rechenregeln für die äußere Differentiation von Differentialformen zusammen.

Satz 5.10
Die p-Formen ω, ω_i und eine q-Form η seien auf der offenen Menge $M \subset \mathbb{R}^n$ jeweils von der Klasse C^1. Dann gilt

(a) $d(\omega_1 + \omega_2) = d\omega_1 + d\omega_2$,

(b) $d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta + (-1)^p \omega \wedge d\eta$,

(c) $dd\omega = 0$, *falls* ω *von der Klasse* C^2 *ist.*

(d) *Ist* $M \subset \mathbb{R}^n$ *offen,* $F : M \to \mathbb{R}^k$ *eine Abbildung von der Klasse* C^2 *und* ω *eine* p*-Form der Klasse* C^1 *auf einer offenen Obermenge von* $F(M)$*, so gilt* $F^* d\omega = dF^*\omega$.

Beweis. (a) ist klar. Zusammen mit (b) im Fall einer 0-Form ω zeigt dies die Linearität der äußeren Ableitung.

(b) Sei $f : M \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Ist $I \in M_p^n$, $J \in M_q^n$, so gilt

$$d(f\, dx^I \wedge dx^J) = df \wedge dx^I \wedge dx^J . \tag{5.4}$$

Sind die Indexmengen zu I, J nicht disjunkt, dann sind beide Seiten Null. Sonst gibt es $m \in \mathbb{N}$ und Indizes $1 \le k_1 < \cdots < k_{p+q} \le n$ mit

$$dx^I \wedge dx^J = (-1)^m dx^{k_1} \wedge \cdots \wedge dx^{k_{p+q}},$$

so daß die Behauptung nach Definition gilt.

Nun sei

$$\omega = \sum_{I \in M_p^n} a_I dx^I, \quad \eta = \sum_{J \in M_q^n} b_J\, dx^J,$$

also

$$d(\omega \wedge \eta) = \sum_{I,J} d\left(a_I b_J\, dx^I \wedge dx^J\right).$$

Mit (5.4) und der gewöhnlichen Produktregel folgert man

$$\begin{aligned} d\left(a_I b_J\, dx^I \wedge dx^J\right) &= d(a_I b_J) \wedge dx^I \wedge dx^J \\ &= (b_J da_I + a_I db_J) \wedge dx^I \wedge dx^J \\ &= da_I \wedge dx^I \wedge (b_J dx^J) + db_J \wedge (a_I dx^I) \wedge dx^J \\ &= da_I \wedge dx^I \wedge b_J dx^J + (-1)^{1 \cdot p} a_I dx^I \wedge db_J \wedge dx^J . \end{aligned}$$

Summation liefert daher

$$\begin{aligned} d(\omega \wedge \eta) &= \left(\sum_I da_I \wedge dx^I\right) \wedge \left(\sum_J b_J dx^J\right) + (-1)^p \left(\sum_I a_I dx^I\right) \wedge \left(\sum_J db_J \wedge dx^J\right) \\ &= d\omega \wedge \eta + (-1)^p \omega \wedge d\eta. \end{aligned}$$

(c) Für eine Funktion f der Klasse C^2 gilt zunächst

$$df = \sum_{i=1}^n (\partial_i f) dx^i,$$

und weiter

$$\begin{aligned} d(df) &= \sum_{i=1}^n d(\partial_i f) \wedge dx^i \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n \partial_j(\partial_i f) \wedge dx^j\right) \wedge dx^i \\ &= \sum_{i<j} (\partial_i \partial_j - \partial_j \partial_i)\, dx^i \wedge dx^j \\ &= 0. \end{aligned}$$

Wir erhalten also für $\omega = \sum_I a_I dx^I$

$$\begin{aligned} d\omega &= \sum_I da_I \wedge dx^I, \\ dd\omega &= \sum_I \left(dda_I \wedge dx^I + (-1) da_I \wedge d1 \cdot dx^I\right) = 0. \end{aligned}$$

(d) Seien F und ω wie beschrieben mit $F = (f_1, \ldots, f_k)$. Ist $\omega = g$ eine Funktion, d.h. $p = 0$, so gilt

$$\begin{aligned} F^* d\omega &= F^* dg = F^* \left(\sum_{j=1}^k (\partial_j g) dx^j\right) \\ &= \sum_{j=1}^k (\partial_j g) \circ F\, df_j \\ &= \sum_{j=1}^k (\partial_j g) \circ F \sum_{i=1}^n (\partial_i f_j)\, dx^i \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^k (\partial_j g) \circ F \partial_i f_j\right) dx^i \\ &= \sum_{i=1}^n \partial_i (g \circ F)\, dx^i \\ &= d(g \circ F) = d(F^* g) = d(F^* \omega). \end{aligned}$$

Sei schließlich $r \in \mathbb{N}_0$ und die Behauptung schon bewiesen für alle r-Formen. Um die Gleichung für alle $(r+1)$-Formen zu beweisen, die auf einer offenen Umgebung von $F(M)$ erklärt sind, genügt es, spezieller $(r+1)$-Formen der Form $\omega \wedge dy^i$ zu betrachten, wobei ω eine r-Form auf einer offenen Umgebung von $F(M)$ und dy^i ein Koordinatendifferential im $\mathbb{R}^k$ ist. Es gilt

$$\begin{aligned} F^*(d(\omega \wedge dy^i)) &= F^*(d\omega \wedge dy^i + (-1)^r \omega \wedge ddy^i) \\ &= F^*(d\omega \wedge dy^i) = F^* d\omega \wedge F^* dy^i \\ &= dF^*\omega \wedge dF^* y^i, \end{aligned}$$

wobei die Induktionsannahme verwendet wurde. Mit Hilfe von Teil (c) folgt

$$\begin{aligned} dF^*(\omega \wedge dy^i) &= d(F^*\omega \wedge F^* dy^i) \\ &= dF^*\omega \wedge F^* dy^i + (-1)^r F^*\omega \wedge dF^* dy^i \\ &= dF^*\omega \wedge F^* dy^i + (-1)^r F^*\omega \wedge ddf_i \\ &= dF^*\omega \wedge F^* dy^i. \end{aligned}$$

Ein Vergleich ergibt die Behauptung im betrachteten Fall.

Mit Hilfe des Differentialformen-Kalküls lassen sich die Operationen der klassischen Vektoranalysis übersichtlich zusammenfassen.

Beispiel. Sei $M \subset \mathbb{R}^3$ offen und $V : M \to \mathbb{R}^3$ ein Vektorfeld der Klasse C^2. Wir definieren hierzu

$$\begin{aligned} (V) &:= v_1 dx^1 + v_2 dx^2 + v_3 dx^3 \\ ((V)) &:= v_1 dx^2 \wedge dx^3 + v_2 dx^3 \wedge dx^1 + v_3 dx^1 \wedge dx^2. \end{aligned}$$

Dann bestätigt man leicht

$$d(V) = ((\mathrm{rot} V)), \quad d((V)) = \mathrm{div}(V) dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3.$$

Für $f : M \to \mathbb{R}$ von der Klasse C^2 gilt

$$df = (\nabla f).$$

Hiermit erhält man

$$0 = dd(V) = d((\mathrm{rot} V)) = (\mathrm{div}\,\mathrm{rot}(V)) dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3,$$

also $\mathrm{div}\,\mathrm{rot}(V) = 0$. Außerdem gilt

$$0 = ddf = d(\nabla f) = ((\mathrm{rot} \nabla f)),$$

folglich $\mathrm{rot} \nabla f = 0$.

Allgemein ist klar, daß wenn ω eine p-Form ist mit $\omega = d\eta$ für eine $(p-1)$-Form η der Klasse C^2, dann gilt $d\omega = 0$. Dies wurde oben ausgenutzt.

Definition. Man nennt eine Differentialform ω der Klasse C^1 *geschlossen*, falls $d\omega = 0$ gilt. Ferner heißt eine p-Form ω der Klasse C^0 *exakt*, falls es eine $(p-1)$-Form η der Klasse C^1 gibt mit $\omega = d\eta$ (hier ist $p \geq 1$).

Bei der Definition einer geschlossenen Differentialform wird man in der Regel an die Situation $p \geq 1$ denken, auch wenn $p = 0$ zugelassen ist. Der Fall $p = 0$ ist nämlich trivial, da $d\omega = 0$ für eine 0-Form ω (d.h. eine Funktion) impliziert, daß ω auf jeder Zusammenhangskomponente konstant ist. In der somit eingeführten Terminologie können wir nun sagen, daß jede exakte Differentialform geschlossen ist.

Gilt hiervon die Umkehrung, d.h. ist eine geschlossene Differentialform stets exakt?

Wir wissen schon (etwa für $p = 1$, $\omega = (V)$), daß dies im allgemeinen nicht richtig ist. Unter geeigneten Voraussetzungen an den zugrundeliegenden Definitionsbereich (etwa für sternförmige Mengen) gilt dagegen der folgende Satz.

Satz 5.11 (Poincaré)
Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ ein sternförmiges Gebiet und $p \geq 1$. Dann ist jede geschlossene p-Form der Klasse C^1 auf M exakt.

Beweis. O.B.d.A. sei M sternförmig bezüglich 0. Wir schreiben die p-Form ω auf M in der Form

$$\omega = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_p \leq n} a_{i_1 \ldots i_p} \, dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p}$$

und definieren eine $(p-1)$-Form $I\omega$ auf M durch

$$(I\omega)_X := \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_p \leq n} \left(\int_0^1 a_{i_1 \ldots i_p}(tX) t^{p-1} \, dt \right) \sum_{k=1}^{p} (-1)^{k-1} x_{i_k} dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge \widehat{dx^{i_k}} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p}.$$

Dabei ist $X = (x_1, \ldots, x_n)$ gesetzt, $\widehat{dx^{i_k}}$ bedeutet, daß dx^{i_k} weggelassen werden soll. Nun ist ω eine p-Form der Klasse C^1 auf M, für die wir $d(I\omega)$ und $I(d\omega)$ berechnen. Als Ergebnis dieser Rechnung werden wir

$$d(I\omega) + I(d\omega) = \omega \tag{5.5}$$

erhalten. Wegen $d\omega = 0$, folgt die gewünschte Behauptung $d(I\omega) = \omega$, d.h. die Exaktheit von ω.

Einerseits gilt

$$\begin{aligned} d(I\omega)_X &= p \sum_{i_1<\cdots<i_p} \left(\int_0^1 a_{i_1\ldots i_p}(tX)t^{p-1}\,dt \right) dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p} \\ &\quad + \sum_{i_1<\cdots<i_p} \sum_{k=1}^{p} (-1)^{k-1} \sum_{j=1}^{n} \left(\int_0^1 \partial_j a_{i_1\ldots i_p}(tX)t^p\,dt \right) x_{i_k} \\ &\quad dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge \widehat{dx^{i_k}} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p}. \end{aligned}$$

Andererseits erhält man aus

$$d\omega = \sum_{i_1<\cdots<i_p} \sum_{j=1}^{n} \partial_j a_{i_1\ldots i_p} dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p}$$

mit Hilfe einer elementaren, aber umständlich aufzuschreibenden Zusatzüberlegung (j muß in $i_1 < \cdots < i_k$ eingereiht werden, bevor I gebildet wird)

$$\begin{aligned} I(d\omega)_X &= \sum_{i_1<\cdots<i_p} \sum_{j=1}^{n} \left(\int_0^1 \partial_j a_{i_1\ldots i_p}(tX)t^p\,dt \right) x_j dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p} \\ &\quad - \sum_{i_1<\cdots<i_p} \sum_{j=1}^{n} \left(\int_0^1 \partial_j a_{i_1\ldots i_p}(tX)t^p\,dt \right) \sum_{k=1}^{p} (-1)^{k-1} x_{i_k} \\ &\quad dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge \widehat{dx^{i_k}} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p}. \end{aligned}$$

Addition ergibt nun

$$\begin{aligned} d(I\omega)_X + I(d\omega)_X &= \sum_{i_1<\cdots<i_p} \left[p \left(\int_0^1 a_{i_1\ldots i_p}(tX)t^{p-1}\,dt \right) + \sum_{j=1}^{n} \left(\int_0^1 \partial_j a_{i_1\ldots i_p}(tX)t^p x_j\,dt \right) \right] \\ &\quad dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p} \\ &= \sum_{i_1<\cdots<i_p} \left(\int_0^1 \frac{d}{dt} \left[a_{i_1\ldots i_p}(tX)t^p \right] dt \right) dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p} \\ &= \sum_{i_1<\cdots<i_p} a_{i_1\ldots i_p} dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p} \\ &= \omega_X. \end{aligned}$$

Dies zeigt gerade (5.5).

Wer die besagten umständlichen Zusatzüberlegungen zur Bildung von $I(d\omega)_X$ sehen möchte, lese einfach weiter:

Wir halten $i_1, \ldots, i_p$ und j fest, wobei es genügt, den Fall $j \notin \{i_1, \ldots, i_p\}$ zu betrachten. Wir erklären $j_1 < \cdots < j_{p+1}$ durch $\{j_1, \ldots, j_{p+1}\} = \{j, i_1, \ldots, i_p\}$. Steht jetzt j an m-ter Stelle in $(j_1, \ldots, j_{p+1})$, so gilt

$$\begin{aligned} &\partial_j a_{i_1\ldots i_p}\, dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p} \\ &\qquad = \partial_j a_{i_1\ldots i_p} (-1)^{m-1}\, dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j_{p+1}}. \end{aligned}$$

Wir erhalten also

$$\begin{aligned}
&I(\partial_j a_{i_1\dots i_p}\,dx^j\wedge dx^{i_1}\wedge\dots\wedge dx^{i_p})\\
=\;&(-1)^m\left(\int_0^1\partial_j a_{i_1\dots i_p}(tX)t^p\,dt\right)\sum_{k=1}^{p+1}(-1)^{k-1}x_{j_k}\,dx^{j_1}\wedge\dots\wedge\widehat{dx^{j_k}}\wedge\dots\wedge dx^{j_{p+1}}.
\end{aligned}$$

Nun werden drei Fälle unterschieden:

(a) $j_k = j$. Dann ist $m = k$ und

$$(-1)^{m-1}(-1)^{k-1}x_{j_k}\,dx^{j_1}\wedge\dots\wedge\widehat{dx^{j_k}}\wedge\dots\wedge dx^{j_{p+1}} = x_j\,dx^{i_1}\wedge\dots\wedge dx^{i_p}.$$

(b) $j < j_k$. Dann gilt mit $j = j_m < j_k$:

$$\begin{aligned}
&(-1)^{m-1}(-1)^{k-1}x_{j_k}\,dx^{j_1}\wedge\dots\wedge\widehat{dx^{j_k}}\wedge\dots\wedge dx^{j_{p+1}}\\
=\;&(-1)^{m+k}x_{j_k}(-1)^{m-1}\,dx^j\wedge dx^{j_1}\wedge\dots\wedge\widehat{dx^{j_m}}\wedge\dots\wedge\widehat{dx^{j_k}}\wedge\dots\wedge dx^{j_{p+1}}\\
=\;&(-1)^{k-1}x_{i_{k-1}}\,dx^j\wedge dx^{i_1}\wedge\dots\wedge\widehat{dx^{i_{k-1}}}\wedge\dots\wedge dx^{i_p}\\
=\;&-(-1)^{k-2}x_{i_{k-2}}\,dx^j\wedge dx^{i_1}\wedge\dots\wedge dx^{i_{k-1}}\wedge\dots\wedge dx^{i_p}.
\end{aligned}$$

(c) $j > j_k$. Dann gilt mit $j = j_m > j_k$:

$$\begin{aligned}
&(-1)^{m-1}(-1)^{k-1}x_{j_k}\,dx^{j_1}\wedge\dots\wedge\widehat{dx^{j_k}}\wedge\dots\wedge dx^{j_{p+1}}\\
=\;&(-1)^{m+k}x_{i_k}\,dx^{i_1}\wedge\dots\wedge\widehat{dx^{i_k}}\wedge\dots\wedge dx^j\wedge\dots\wedge dx^{i_p}\\
=\;&(-1)^{m+k}(-1)^{m-2}x_{i_k}\,dx^j\wedge dx^{i_1}\wedge\dots\wedge\widehat{dx^{i_k}}\wedge\dots\wedge dx^{i_p}\\
=\;&-(-1)^{k-1}x_{i_k}\,dx^j\wedge dx^{i_1}\wedge\dots\wedge\widehat{dx^{i_k}}\wedge\dots\wedge dx^{i_p}.
\end{aligned}$$

Insgesamt folgt daher

$$\begin{aligned}
&I(\partial_j a_{i_1\dots i_p}\,dx^j\wedge dx^{i_1}\wedge\dots\wedge dx^{i_p})\\
=\;&x_j\,dx^{i_1}\wedge\dots\wedge dx^{i_p}-\sum_{k=1}^{p}(-1)^{k-1}x_{i_k}\,dx^j\wedge dx^{i_1}\wedge\dots\wedge\widehat{dx^{i_k}}\wedge\dots\wedge dx^{i_p},
\end{aligned}$$

so daß die gewünschte Behauptung durch Summation folgt.

5.3 Integration von Differentialformen

In den Abschnitten 3.1 und 3.2 wurden Integrale über geometrische Objekte wie (parametrisierte) Kurven und Flächen erklärt. Man kann diese Integrale als Integrale geeigneter 1- bzw. 2-Formen auffassen. Unser Ziel ist es, Integrale von p-Formen auf p-dimensionalen Untermannigfaltigkeiten im $\mathbb{R}^n$ zu erklären. Zunächst betrachten wir allerdings Integrale von speziellen parametrisierten Mengen.

Sei $p \in \mathbb{N}$ und $[0,1]^p$ der p-dimensionale abgeschlossene Einheitswürfel. Speziell setzen wir $[0,1]^0 := \{0\}$.

Definition. Sei ω eine stetige p-Form auf $[0,1]^p$, also

$$\omega = f\, dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^p$$

mit einer stetigen Funktion f auf $[0,1]^p$. Dann sei

$$\int_{[0,1]^p} \omega := \int_{[0,1]^p} f = \int_0^1 \ldots \int_0^1 f(x_1, \ldots, x_p)\, dx_1 \ldots dx_p.$$

In einem zweiten Schritt soll das Integral über allgemeine Mengen im $\mathbb{R}^n$ erklärt werden.

Definition. Sei $M \subset \mathbb{R}^n$. Ein *singulärer Würfel* in M ist eine Abbildung $c : [0,1]^p \to M$ der Klasse C^2.

Die Differenzierbarkeitsvoraussetzung soll bedeuten, daß c Einschränkung einer C^2-Funktion mit offenem Definitionsbereich ist. Die Voraussetzung der zweimaligen Differenzierbarkeit ist zunächst eigentlich zu stark, einmalige stetige Differenzierbarkeit wäre ausreichend. Die stärkere Voraussetzung wurde im Hinblick auf den Satz von Stokes getroffen.

Beispiele.

- Ein singulärer 0-Würfel $c : \{0\} \to M$.
- Ein singulärer 1-Würfel $c : [0,1] \to M$ ist eine parametrisierte Kurve der Klasse C^2, die nicht regulär zu sein braucht.
- Ein singulärer 2-Würfel $c : [0,1]^2 \to M$ ist i.a. nicht regulär, d.h. keine Fläche. Insbesondere ist c i.a. nicht lokal injektiv. Man kann c auch konstant wählen. Dies begründet die Bezeichnungsweise „singulär".

Definition. Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ offen, ω eine stetige p-Form auf M und c ein singulärer p-Würfel in M. Das *Integral von ω über den singulären p-Würfel* c ist definiert durch

$$\int_c \omega := \int_{[0,1]^p} c^*\omega, \quad p \geq 1$$

und

$$\int_c \omega := \omega(c(0)), \quad p = 0.$$

Sind nun M, c, ω wie oben und ist $\tau : [0,1]^p \to [0,1]^p$ eine bijektive Abbildung der Klasse C^2

mit $\det J\tau \geq 0$, so gilt

$$\begin{aligned}
\int_c \omega &= \int_{[0,1]^p} c^*\omega = \int_{[0,1]^p} (c^*\omega)_Y \, dY \\
&= \int_{[0,1]^p} (c^*\omega)_{\tau(X)} \det J\tau(X) \, dX \\
&= \int_{[0,1]^p} \tau^*(c^*\omega)_X \, dX \\
&= \int_{[0,1]^p} (c \circ \tau)^*\omega \\
&= \int_{c\circ\tau} \omega,
\end{aligned}$$

d.h. es liegt eine spezielle Form der Parametrisierungs-Invarianz vor.

Beispiele. • Sei $n \geq 2$ und $p = 1$. Wir schreiben $F : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ für einen singulären 1-Würfel der Klasse C^2 und $\omega = v_1 dx^1 + \cdots + v_n dx^n$ für eine stetige 1-Form auf $\mathbb{R}^n$. Dann gilt

$$\int_F \omega = \int_{[0,1]} F^*\omega.$$

Sei $F = (f_1, \ldots, f_n)$ und dt^1 das Koordinatendifferential im $\mathbb{R}^1$. Mit $V := (v_1, \ldots, v_n)$ erhält man für die 1-Form $F^*\omega$ auf $[0,1]$:

$$\begin{aligned}
F^*\omega &= F^*(v_1 dx^1 + \cdots + v_n dx^n) \\
&= v_1 \circ F \, df_1 + \cdots + v_n \circ F \, df_n \\
&= v_1 \circ F f_1' \, dt^1 + \cdots + v_n \circ F f_n' \, dt^1 \\
&= \langle V \circ F, F' \rangle \, dt^1.
\end{aligned}$$

Es folgt

$$\int_F \omega = \int_{[0,1]} \langle V \circ F, F' \rangle \, dt^1 = \int_0^1 \langle V \circ F(t), F'(t) \rangle \, dt.$$

Dies stellt den Zusammenhang mit Abschnitt 3.1 und Analysis II her.

• Sei $n = 3$, $p = 2$. Sei $F : [0,1]^2 \to \mathbb{R}^3$ ein singulärer 2-Würfel im $\mathbb{R}^3$ und

$$\omega = v_1 dx^2 \wedge dx^3 + v_2 dx^3 \wedge dx^1 + v_3 dx^1 \wedge dx^2$$

eine stetige 2-Form im $\mathbb{R}^3$. Nach Definition ist

$$\int_F \omega = \int_{[0,1]^2} F^*\omega.$$

Mit $F = (f_1, f_2, f_3)$ und du^1, du^2 als Koordinatendifferentialen im $\mathbb{R}^2$ erhält man für die 2-Form

$F^*\omega$ auf $[0,1]^2$:

$$\begin{aligned} F^*\omega &= (v_1 \circ F) df_2 \wedge df_3 + (v_2 \circ F) df_3 \wedge df_1 + (v_3 \circ F)\, df_1 \wedge df_2 \\ &= (v_1 \circ F)[\partial_1 f_2 du^1 + \partial_2 f_2 du^2] \wedge [\partial_1 f_3 du^1 + \partial_2 f_3 du^2] + \dots \\ &= (v_1 \circ F)(\partial_1 f_2 \cdot \partial_2 f_3 - \partial_1 f_3 \cdot \partial_2 f_2) du^1 \wedge du^2 + \dots \\ &= \left[v_1 \circ F \frac{\partial(f_2, f_3)}{\partial(u_1, u_2)} + v_2 \circ F \frac{\partial(f_3, f_1)}{\partial(u_1, u_2)} + v_3 \circ F \frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(u_1, u_2)} \right] du^1 \wedge du^2. \end{aligned}$$

Es folgt

$$\begin{aligned} \int_F \omega &= \int_0^1 \int_0^1 \left(v_1 \circ F \frac{\partial(f_2, f_3)}{\partial(u_1, u_2)} + v_2 \circ F \frac{\partial(f_3, f_1)}{\partial(u_1, u_2)} + v_3 \circ F \frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(u_1, u_2)} \right) du_1\, du_2 \\ &= \int \langle V, N \rangle \, d\mathcal{O}, \end{aligned}$$

wobei die letzte Gleichung nur dann gilt, falls F regulär ist.

In Abschnitt 3.2 hatten wir schon angedeutet, daß sich der Satz von Stokes in der Form

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega$$

schreiben läßt. Nun haben wir aber zunächst noch nicht das Integral einer Differentialform über eine Untermannigfaltigkeit M zur Verfügung, stattdessen steht das Integral über singuläre Würfel zur Verfügung. Wir versuchen daher, für solche singulären Würfel einen Randbegriff zu erklären, so daß schließlich

$$\int_c d\omega = \int_{\partial c} \omega$$

gültig wird. Es ist naheliegend, daß man dafür den Rand des Parameterbereichs verwenden wird. Andererseits ist aber auch eine geeignete Orientierung festzulegen. Der auf diesem Weg schließlich zustandekommende Satz von Stokes wird später beim Beweis der geometrischen Fassung des Satzes wieder verwendet werden.

Beispiel. Sei $\omega = f dx^1 + g dx^2$ eine stetig differenzierbare 1-Form auf $[0,1]^2$. Man erhält

$$d\omega = df \wedge dx^1 + dg \wedge dx^2 = (\partial_1 g - \partial_2 f)\, dx^1 \wedge dx^2.$$

Wir betrachten den singulären 2-Würfel $c = I^2 : [0,1]^2 \to \mathbb{R}^2$, $X \mapsto X$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \int_{I^2} d\omega &= \int_{[0,1]^2} (I^2)^*\, d\omega = \int_{[0,1]^2} d\omega \\ &= \int_{[0,1]^2} (\partial_1 g - \partial_2 f)\, dx^1 \wedge dx^2 \\ &= \int_0^1 \int_0^1 (\partial_1 g(x,y) - \partial_2 f(x,y))\, dx\, dy \\ &= \int_0^1 \left(\int_0^1 \partial_1 g(x,y)\, dx \right) dy - \int_0^1 \left(\int_0^1 \partial_2 f(x,y)\, dy \right) dx \\ &= \int_0^1 (g(1,y) - g(0,y))\, dy - \int_0^1 (f(x,1) - f(x,0))\, dx. \end{aligned}$$

Die so erhaltenen Integrale lassen sich als Integrale der 1-Form ω über singuläre 1-Würfel darstellen. Wir definieren zu diesem Zweck

$$\begin{aligned}
I^2_{1,0} &: [0,1] \to \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto (0,t),\\
I^2_{1,1} &: [0,1] \to \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto (1,t),\\
I^2_{2,0} &: [0,1] \to \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto (t,0),\\
I^2_{2,1} &: [0,1] \to \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto (t,1).
\end{aligned}$$

Dann gilt etwa

$$\int_{I^2_{2,1}} \omega = \int_{[0,1]} (I^2_{2,1})^*\omega = \int_0^1 f(t,1)\,dt$$

oder

$$\int_{I^2_{1,0}} \omega = \int_{[0,1]} (I^2_{1,0})^*\omega = \int_0^1 g(0,t)\,dt$$

u.s.w., d.h.

$$\int_{I^2} d\omega = -\left(\int_{I^2_{1,0}} \omega - \int_{I^2_{1,1}} \omega\right) + \left(\int_{I^2_{2,0}} \omega - \int_{I^2_{2,1}} \omega\right).$$

Dieses und weitere Beispiele legen es nahe, den Rand ∂I^2 als formale Linearkombination von singulären 1-Würfeln zu schreiben, d.h.

$$\partial I^2 \coloneqq -(I^2_{1,0} - I^2_{1,1}) + (I^2_{2,0} - I^2_{2,1}),$$

und das Integral über eine solche Linearkombination als die entsprechende Linearkombination der Integrale der 1-Würfel zu erklären.

Anstatt von „formalen Linearkombinationen“ zu sprechen, sollte man besser den Begriff einer *frei erzeugten abelschen Gruppe* verwenden. Sei A eine nichtleere Menge und

$$\mathcal{F}(A) \coloneqq \{f : A \to \mathbb{Z} : f(x) \neq 0 \text{ für höchstens endlich viele } x \in A.\}$$

Für $f, g \in \mathcal{F}(A)$ sei

$$(f \pm g)(x) \coloneqq f(x) \pm g(x), \quad x \in A.$$

Man nennt $\mathcal{F}(A)$ die von A erzeugte freie abelsche Gruppe. Für $x \in A$ sei $\overline{x} \in \mathcal{F}(A)$ erklärt als

$$\overline{x}(y) \coloneqq \begin{cases} 1, & \text{für } y = x,\\ 0, & \text{sonst.}\end{cases}$$

Somit gilt für $f \in \mathcal{F}(A)$ gerade

$$f = \sum_{x \in A} f(x)\overline{x}.$$

Statt $\overline{x}$ schreibt man auch einfach x, d.h. die Elemente von $\mathcal{F}(A)$ sind von der Form

$$\sum_{x \in A} n_x x$$

mit $n_x \in \mathbb{Z}$, wobei nur endlich viele dieser Zahlen $\neq 0$ sind. Die Elemente von $\mathcal{F}(A)$ kann man daher auch als formale Linearkombinationen mit ganzzahligen Koeffizienten der Elemente von A auffassen.

Definition. Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ und $p \in \mathbb{N}_0$. Sei $\mathcal{K}_p(M)$ die von der Menge der singulären p-Würfel in M erzeugte freie abelsche Gruppe. Die Elemente von $\mathcal{K}_p(M)$ (endliche formale Linearkombinationen von singulären p-Würfeln in M mit ganzzahligen Koeffizienten) heißen *p-Ketten* in M.

Definition. Das *Integral der stetigen p-Form ω auf M über die p-Kette* $c = \sum a_i c_i$ mit $a_i \in \mathbb{Z}$ und singulären p-Würfeln c_i in M wird erklärt durch

$$\int_c \omega = \sum a_i \int_{c_i} \omega.$$

Randbildung.

Definition.

- Der singuläre p-Würfel $I^p : [0,1]^p \to \mathbb{R}^p$ sei erklärt durch $I^p(X) \coloneqq X$ für $X \in [0,1]^p$.
- Die singulären $(p-1)$-Würfel $I^p_{i,0} : [0,1]^{p-1} \to \mathbb{R}^p$ und $I^p_{i,1} : [0,1]^{p-1} \to \mathbb{R}^p$ für $p \geq 2$ und $i \in \{1, \dots, p\}$ sind erklärt durch

$$I^p_{i,0}(X) \coloneqq (x_1, \dots, x_{i-1}, 0, x_i, \dots, x_{p-1}),$$
$$I^p_{i,1}(X) \coloneqq (x_1, \dots, x_{i-1}, 1, x_i, \dots, x_{p-1})$$

  für $X = (x_1, \dots, x_{p-1}) \in [0,1]^{p-1}$.
- Setze $I^1_{1,0}(0) \coloneqq 0$ und $I^1_{1,1}(0) = 1$.
- Der *Rand des singulären p-Würfels* c ist erklärt durch

$$\partial c \coloneqq \sum_{i=1}^{p} (-1)^i \left[c \circ I^p_{i,0} - c \circ I^p_{i,1} \right].$$

- Der Rand der p-Kette $\sum a_i c_i$ ist erklärt durch

$$\partial \left(\sum a_i c_i \right) \coloneqq \sum a_i \partial c_i.$$

Man kann zeigen, daß stets $\partial\partial c = 0$ für Ketten c gilt. Wir werden dies nicht benötigen. Eine analoge Aussage gilt für Untermannigfaltigkeiten M des $\mathbb{R}^n$, d.h. hier gilt $\partial\partial M = \emptyset$.

Satz 5.12 (Stokes für Ketten)
Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ offen, $p \in \mathbb{N}$, ω eine $(p-1)$-Form der Klasse C^1 auf M und c eine p-Kette in M. Dann gilt

$$\int_c d\omega = \int_{\partial c} \omega.$$

Beweis. Sei $p = 1$, also $\omega = f$ eine Funktion der Klasse C^1 auf M. Sei c ein singulärer 1-Würfel in M. Dann ist

$$df = f_1 dx^1 + \cdots + f_n dx^n$$

und

$$\int_c df = \int_0^1 \langle \nabla f \circ c(t), c'(t) \rangle \, dt = \int_0^1 (f \circ c)'(t) \, dt = f \circ c(1) - f \circ c(0).$$

Andererseits gilt

$$\begin{aligned} \int_{\partial c} f &= (-1) \int_{c \circ I^1_{1,0}} f + \int_{c \circ I^1_{1,1}} f = -f(c \circ I^1_{1,0}(0)) + f(c \circ I^1_{1,1}(0)) \\ &= -f(c(0)) + f(c(1)). \end{aligned}$$

Dies zeigt die behauptete Gleichheit für singuläre 1-Würfel, die Ausdehnung auf 1-Ketten folgt wegen Linearität.

Sei jetzt $p \geq 2$. Wir betrachten zunächst den Fall $n = p$ und $c = I^p$ sowie

$$\omega = f dx^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \cdots \wedge dx^p \tag{5.6}$$

für $i \in \{1, \ldots, p\}$. Dann gilt

$$d\omega = (-1)^{i-1} \partial_i f \, dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^p$$

und

$$\begin{aligned} \int_{I^p} d\omega &= \int_{[0,1]^p} d\omega \\ &= (-1)^{i-1} \int_{[0,1]^p} \partial_i f \\ &= (-1)^{i-1} \int_0^1 \ldots \int_0^1 \left(\int_0^1 \partial_i f(x_1, \ldots, x_p) \, dx_i \right) dx_1 \ldots \widehat{dx_i} \ldots dx_p \\ &= (-1)^{i-1} \int_0^1 \ldots \int_0^1 [f(x_1, \ldots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \ldots, x_p) \\ &\qquad - f(x_1, \ldots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \ldots, x_p)] dx_1 \ldots \widehat{dx_i} \ldots dx_p. \end{aligned}$$

Andererseits gilt

$$\int_{\partial I^p} \omega = \sum_{j=1}^p (-1)^j \left[\int_{I^p_{j,0}} \omega - \int_{I^p_{j,1}} \omega \right].$$

Wir formen die Integrale in den Klammern um. Zunächst ist

$$\int_{I^p_{j,0}} \omega = \int_{[0,1]^{p-1}} \left(I^p_{j,0} \right)^* \omega.$$

Mit $I^p_{j,0} = (g_1, \ldots, g_p)$ folgt

$$\left(I^p_{j,0} \right)^* \omega = f \circ I^p_{j,0} \, dg_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dg_i} \wedge \cdots \wedge dg_p.$$

Seien $du^1, \dots, du^{p-1}$ die Koordinatendifferentiale von $\mathbb{R}^{p-1}$. Dann gilt nach Definition von $I^p_{j,0}$ offenbar

$$dg_k = \begin{cases} du^k, & k = 1, \dots, j-1, \\ 0, & k = j, \\ du^{k-1}, & k = j+1, \dots, p. \end{cases}$$

An der Stelle $U = (u_1, \dots, u_{p-1})$ erhält man also

$$\left[\left(I^p_{j,0} \right)^* \omega \right]_U = \begin{cases} 0, & j \neq i, \\ f(u_1, \dots, u_{i-1}, 0, u_i, \dots, u_{p-1})\, du^1 \wedge \dots \wedge du^p, & j = i. \end{cases}$$

Es folgt

$$\int_{I^p_{j,0}} \omega = \begin{cases} 0, & j \neq i, \\ \int_0^1 \dots \int_0^1 f(u_1, \dots, u_{i-1}, 0, u_i, \dots, u_{p-1})\, du_1 \dots du_{p-1}, & j = i. \end{cases}$$

Mit einem ähnlichen Ausdruck für $\int_{I^p_{j,1}}$ erhält man schließlich

$$\begin{aligned} \int_{\partial I^p} \omega \quad = \quad & (-1)^i \int_0^1 \dots \int_0^1 [f(u_1, \dots, u_{i-1}, 0, u_i, \dots, u_{p-1}) - \\ & f(u_1, \dots, u_{i-1}, 1, u_i, \dots, u_{p-1})]\, du_1 \dots du_{p-1}. \end{aligned}$$

Es folgt also

$$\int_{I^p} d\omega = \int_{\partial I^p} \omega. \tag{5.7}$$

Da jede $(p-1)$-Form auf $[0,1]^p$ Summe von $(p-1)$-Formen der Gestalt (5.6) ist, gilt (5.7) für jede $(p-1)$-Form ω der Klasse C^1 auf $[0,1]^p$.

Sei schließlich c ein beliebiger singulärer p-Würfel in $M \subset \mathbb{R}^n$ und ω eine stetig differenzierbare $(p-1)$-Form auf M. Dann gilt zunächst wegen (5.7)

$$\int_c d\omega = \int_{[0,1]^p} c^* \, d\omega = \int_{I^p} c^* \, d\omega = \int_{I^p} dc^*\omega = \int_{\partial I^p} c^*\omega.$$

Ferner ist

$$\int_{c \circ I^p_{i,0}} \omega = \int_{[0,1]^{p-1}} (c \circ I^p_{i,0})^* \omega = \int_{[0,1]^{p-1}} (I^p_{i,0})^* (c^*\omega) = \int_{I^p_{i,0}} c^*\omega,$$

und analog für $I^p_{i,1}$. Es folgt also

$$\begin{aligned} \int_{\partial c} \omega \quad & = \quad \sum_{i=1}^p (-1)^i \left[\int_{c \circ I^p_{i,0}} \omega - \int_{c \circ I^p_{i,1}} \omega \right] \\ & = \quad \sum_{i=1}^p (-1)^i \left[\int_{I^p_{i,0}} c^*\omega - \int_{I^p_{i,1}} c^*\omega \right] \\ & = \quad \int_{\partial I^p} c^*\omega \\ & = \quad \int_c d\omega. \end{aligned}$$

Ist schließlich $c = \sum a_i c_i$ eine p-Kette in M, so folgt

$$\int_c d\omega = \sum a_i \int_{c_i} d\omega = \sum a_i \int_{\partial c_i} \omega = \int_{\partial c} \omega.$$

Wir betrachten zur Illustration ein abschließendes Beispiel, das in den Übungen besprochen werden kann.

Beispiel. Sei c der singuläre 2-Würfel im $\mathbb{R}^3$ mit

$$c : [0,1]^2 \to \mathbb{R}^3, \quad (u,v) \mapsto (u^2 - v^3, u, -v^2)$$

und ω die 2-Form auf $\mathbb{R}^3$ mit

$$\omega_X = 4(dx^1)_X \wedge (dx^3)_X - x_1(dx^2)_X \wedge (dx^3)_X$$

sowie η die 1-Form auf $\mathbb{R}^3$ mit

$$\eta_X = 2(dx^1)_X - x_1^2(dx^3)_X.$$

Zunächst gilt mit $c = (c_1, c_2, c_3)$

$$\begin{aligned}
\int_c \omega &= \int_{[0,1]^2} c^*\omega = \int_{[0,1]^2} (4dc_1 \wedge dc_3 - c_1^2 dc_2 \wedge dc_3) \\
&= \int_{[0,1]^2} \left[4\frac{\partial(c_1,c_3)}{\partial(u,v)} - (u^2 - v^3)\frac{\partial(c_2,c_3)}{\partial(u,v)} \right] du\,dv \\
&= \int_0^1 \int_0^1 [-16uv + 2v(u^2 - v^3)]\,du\,dv \\
&= -\frac{61}{15}.
\end{aligned}$$

Mit $d\eta = -2x_1 dx^1 \wedge dx^3$ gilt analog

$$\begin{aligned}
\int_c d\eta &= \int_{[0,1]^2} -2(u^2 - v^3)\frac{\partial(c_1,c_3)}{\partial(u,v)}\,du\,dv \\
&= -2\int_0^1 \int_0^1 (-4uv)(u^2 - v^3)\,du\,dv \\
&= \frac{1}{5}.
\end{aligned}$$

Andererseits erhält man wegen

$$\partial c = c \circ I_{1,1}^2 - c \circ I_{1,0}^2 + c \circ I_{2,0}^2 - c \circ I_{2,1}^2$$

und

$$\begin{aligned}
c \circ I^2_{1,1} &: [0,1] \to \mathbb{R}^3, \quad t \mapsto (1-t^3, 1, -t^2),\\
c \circ I^2_{1,0} &: [0,1] \to \mathbb{R}^3, \quad t \mapsto (-t^3, 0, -t^2),\\
c \circ I^2_{2,0} &: [0,1] \to \mathbb{R}^3, \quad t \mapsto (t^2, t, 0),\\
c \circ I^2_{2,1} &: [0,1] \to \mathbb{R}^3, \quad t \mapsto (t^2-1, t, -1)
\end{aligned}$$

auch

$$\begin{aligned}
\int_{\partial c} \eta &= \int_{c\circ I^2_{1,1}} \eta - \int_{c\circ I^2_{1,0}} \eta + \int_{c\circ I^2_{2,0}} \eta - \int_{c\circ I^2_{2,1}} \eta\\
&= \int_0^1 [2(-3t^2) - (1-t^3)^2(-2t)]\,dt - \int_0^1 [2(-3t^2) - t^6(-2t)]\,dt\\
&\quad + \int_0^1 2\cdot 2t\,dt - \int_0^1 2\cdot 2t\,dt\\
&= \frac{1}{5},
\end{aligned}$$

was den Satz von Stokes exemplarisch bestätigt.

5.4 Differenzierbare Untermannigfaltigkeiten

In diesem Abschnitt werden niederdimensionale glatte geometrische Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ untersucht, über die schließlich integriert werden soll. Die dabei betrachteten k-dimensionalen Untermannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^n$ können zugleich als Einstieg in die Theorie der abstrakten Mannigfaltigkeiten verstanden werden. Dies ist dann etwa Gegenstand einer Vorlesung über Differentialgeometrie.

Um die Darstellung möglichst einfach zu halten, nehmen wir an, daß alle Abbildungen von der Klasse C^∞ sind, falls nichts anderes vorausgesetzt wird. Ferner sei für $k \in \{0, \dots, n\}$

$$\begin{aligned}
\mathbb{R}^n_k &:= \{X \in \mathbb{R}^n : x_{k+1} = \cdots = x_n = 0\},\\
H^n_k &:= \{X \in \mathbb{R}^n : x_1 \geq 0, x_{k+1} = \cdots = x_n = 0\},\\
\partial H^n_k &:= \{X \in \mathbb{R}^n : x_1 = 0, x_{k+1} = \cdots = x_n = 0\}.
\end{aligned}$$

Grob gesprochen werden durch die nachfolgende Definition Mengen erklärt, die lokal nach Anwendung einer geeigneten differenzierbaren Transformation wie $\mathbb{R}^n_k$ oder H^n_k aussehen.

Definition. Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ und $k \in \mathbb{N}_0$. Die Menge M heißt *k-dimensionale Mannigfaltigkeit im $\mathbb{R}^n$*, wenn für jedes $X \in M$ gilt: Es gibt eine offene Umgebung $U \subset \mathbb{R}^n$ von X, eine offene Menge $V \subset \mathbb{R}^n$ und einen Diffeomorphismus $h : U \to V$ mit

$$h(U \cap M) = V \cap \mathbb{R}^n_k \tag{a}$$

oder

$$h(U \cap M) = V \cap H_k^n \quad \text{und} \quad h(X) \in \partial H_k^n. \tag{b}$$

Gilt (a), so heißt X *innerer Punkt* von M; gilt (b), so heißt X *Randpunkt* von M.

Bemerkungen.

- Die Begriffe innerer Punkt und Randpunkt beziehen sich nicht auf die Topologie des $\mathbb{R}^n$.
- Ein Punkt $X \in M$ kann nicht zugleich innerer Punkt und Randpunkt sein. Sonst gäbe es offene Umgebungen $U_1, U_2 \subset \mathbb{R}^n$ von X, offene Mengen $V_1, V_2 \subset \mathbb{R}^n$ und Diffeomorphismen

$$h_1 : U_1 \to V_1 \quad \text{und} \quad h_2 : U_2 \to V_2$$

mit

$$h_1(U_1 \cap M) = V_1 \cap \mathbb{R}_k^n, \quad h_2(U_2 \cap M) = V_2 \cap H_k^n \quad \text{und} \quad h_2(X) \in \partial H_k^n.$$

Die Abbildung

$$h_2 \circ h_1^{-1} : h_1(U_1 \cap U_2) \to h_2(U_1 \cap U_2)$$

ist ein Diffeomorphismus, der also offene Mengen auf offene Mengen abbildet. Insbesondere ist auch $h_2 \circ h_1^{-1} \mid h_1(U_1 \cap U_2) \cap \mathbb{R}_k^n$ eine differenzierbare Abbildung in $\mathbb{R}_k^n$ mit nicht verschwindender Funktionaldeterminante und

$$\begin{aligned} h_2 \circ h_1^{-1}(h_1(U_1 \cap U_2) \cap \mathbb{R}_k^n) &= h_2 \circ h_1^{-1}(V_1 \cap \mathbb{R}_k^n \cap h_1(U_1 \cap U_2)) \\ &= h_2(U_1 \cap M \cap U_2) \\ &\subset V_2 \cap H_k^n \subset \mathbb{R}_k^n. \end{aligned}$$

Also wäre $h_2 \circ h_1^{-1} \mid h_1(U_1 \cap U_2) \cap \mathbb{R}_k^n$ ein Diffeomorphismus zwischen offenen Teilmengen des $\mathbb{R}_k^n$. Andererseits wäre $h_2 \circ h_1^{-1}(h_1(X))$ kein innerer Punkt der Bildmenge dieser Abbildung bezüglich $\mathbb{R}_k^n$ als dem umgebenden Raum, ein Widerspruch.

Definition. Ist M eine k-dimensionale Mannigfaltigkeit im $\mathbb{R}^n$, so wird die Menge der *Randpunkte* von M mit ∂M bezeichnet. Ist $\partial M = \emptyset$, so heißt M *unberandet*. Ist $\partial M = \emptyset$ und M kompakt, so heißt M *geschlossen*.

Beispiele.

- 0-dimensionale Mannigfaltigkeiten, d.h. diskrete Punktmengen.
- Ein Ball B^n ist eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit mit $\partial B^n = S^{n-1}$.
- Eine Sphäre S^{n-1} ist eine kompakte $(n-1)$-dimensionale Mannigfaltigkeit mit $\partial S^{n-1} = \emptyset$, d.h. S^{n-1} ist geschlossen.
- Der Volltorus im $\mathbb{R}^3$ (Rettungsring) ist eine kompakte 3-dimensionale Mannigfaltigkeit, deren Rand gerade der 2-Torus T^2 ist. Dieser erfüllt wieder $\partial T^2 = \emptyset$.
- Eine Hemisphäre $S_+^{n-1} := S^{n-1} \cap E_n^{\perp}$ ist eine $(n-1)$-dimensionale Mannigfaltigkeit, und es gilt $\partial S_+^{n-1} = S^{n-2}$.

- Eine 2-Mannigfaltigkeit ist beispielsweise $\{(u, v, 4 - u^2 - v^2) : (u, v) \in \mathbb{R}^2 \cap B^2(0, 2)\}$. Allgemeiner ist jeder Graph einer glatten Funktion $f : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$ eine $(n-1)$-dimensionale Mannigfaltigkeit in $\mathbb{R}^n$.

- *Möbiusband.* „Ein Zeigervektor $a(\varphi)$ beschreibe eine Kreislinie, um welche sich wiederum mit halber Geschwindigkeit ein zweiter Zeiger windet, dessen Mitte auf der Kreislinie und dessen Anfangs- und Endpunkt auf dem Rand des Möbiusbands liegt“.

  Sei
  $$a(\varphi) := (\cos\varphi, \sin\varphi, 0), \qquad \varphi \in [-\pi, \pi]$$
  und
  $$b_\varphi(\psi) := \cos(\psi)a(\varphi) + \sin(\psi)e_3, \qquad \psi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$
  Sei $R > 1$ und $\phi : [-\pi, \pi] \times (-1, 1) \to \mathbb{R}^3$ mit
  $$\begin{aligned} \phi(\varphi, t) &:= Ra(\varphi) + tb_\varphi\left(\frac{\varphi}{2}\right) \\ &= R\begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} \cos\frac{\varphi}{2}\cos\varphi \\ \cos\frac{\varphi}{2}\sin\varphi \\ \sin\frac{\varphi}{2} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$
  Die Menge $\mathrm{Bild}(\phi)$ ist eine 2-dimensionale Mannigfaltigkeit im $\mathbb{R}^3$ (Möbiusband), die nicht orientierbar ist (vgl. später).

Die erforderlichen Nachweise zu den vorangehenden Beispielen werden durch die nachfolgenden drei Sätze erheblich vereinfacht.

Satz 5.13
Ist M eine k-dimensionale Mannigfaltigkeit im $\mathbb{R}^n$ und $k \geq 1$, so ist ∂M eine $(k-1)$-dimensionale unberandete Mannigfaltigkeit.

Beweis. Sei M eine k-dimensionale Mannigfaltigkeit in $\mathbb{R}^n$ $(k \geq 1)$. Sei $X \in \partial M$. Dann gibt es eine offene Umgebung U von X, eine offene Menge $V \subset \mathbb{R}^n$ und einen Diffeomorphismus $h : U \to V$ mit $h(U \cap M) = V \cap H_k^n$ und $h(X) \in \partial H_k^n$.

Behauptung. $h(U \cap \partial M) = V \cap \partial H_k^n$.

Nachweis. Sei $Y \in U \cap \partial M$. Wäre $h(Y) \notin \partial H_k^n$, so gäbe es eine offene Umgebung $V' \subset V$ von $h(Y)$ mit $V' \cap \mathbb{R}_k^n \subset H_k^n \setminus \partial H_k^n$. Die Menge $U' := h^{-1}(V')$ ist eine offene Umgebung von Y mit $h(U' \cap M) = V' \cap \mathbb{R}_k^n$. Also ist $Y \in M \setminus \partial M$, ein Widerspruch. Dies zeigt $h(U \cap \partial M) \subset V \cap \partial H_k^n$.

Sei $Z \in V \cap \partial H_k^n$. Dann gibt es ein $Y \in U \cap M$ mit $h(Y) = Z$. Nun muß aber $Y \in \partial M$ gelten, da sonst $h(Y) = Z \notin \partial H_k^n$ wäre. Dies zeigt $V \cap \partial H_k^n \subset h(U \cap \partial M)$.

Sei $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ein (linearer) Automorphismus mit $L(\partial H_k^n) = \mathbb{R}_{k-1}^n$. Die Abbildung $L \circ h : U \to L(V)$ ist ein Diffeomorphismus der offenen Umgebung U von X auf die offene Menge $L(V) \subset \mathbb{R}^n$ mit $L \circ h(U \cap \partial M) = L(V) \cap \mathbb{R}_{k-1}^n$. Da $X \in \partial M$ beliebig war, ist ∂M eine $(k-1)$-dimensionale unberandete Mannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$.

Wir zeigen jetzt, daß sich Mannigfaltigkeiten lokal als parametrisierte Flächen beschreiben lassen. Hierzu setzen wir speziell

$$H^k := \{X \in \mathbb{R}^k : x_1 \geq 0\} = H_k^k.$$

Satz 5.14
Sei M eine k-dimensionale Mannigfaltigkeit in $\mathbb{R}^n$. Dann gibt es zu jedem $X \in M$ eine offene Umgebung U von X, eine offene Menge $W \subset \mathbb{R}^k$, falls $X \notin \partial M$, bzw. eine relativ offene Menge $W \subset H^k$, falls $X \in \partial M$, und eine injektive, differenzierbare Abbildung $F : W \to \mathbb{R}^n$ mit folgenden Eigenschaften:

(a) $F(W) = M \cap U$ *und* $X = F(Z)$ *mit* $Z \in \partial H^k$, *falls* $X \in \partial M$,

(b) $F^{-1} : F(W) \to W$ *ist stetig* bezüglich der Spurtopologie,

(c) DF_Z *ist vom Rang* k *für alle* $Z \in W$.

Jede solche Abbildung F wird als ein *Koordinatensystem* der Mannigfaltigkeit um den Punkt X bezeichnet.

Beweis. Sei $X \in M$ und $X \notin \partial M$. Dann gibt es eine offene Menge $U \subset \mathbb{R}^n$ um X, eine offene Menge $V \subset \mathbb{R}^n$ und einen Diffeomorphismus $h : U \to V$ mit $h(U \cap M) = V \cap \mathbb{R}_k^n$. Setze

$$W := \{Z \in \mathbb{R}^k : (z_1, \dots, z_k, 0, \dots, 0) \in V\}$$

und definiere eine injektive Abbildung $F : W \to \mathbb{R}^n$ durch

$$F(Z) := h^{-1}(z_1, \dots, z_k, 0, \dots, 0), \qquad Z = (z_1, \dots, z_k).$$

Nach Konstruktion gilt $F(W) = U \cap M$. Mit h ist auch $F^{-1} = h|U \cap M$ stetig. Definiere $H : U \to \mathbb{R}^k$ durch

$$H(Y) := (h_1(Y), \dots, h_k(Y))$$

mit $h = (h_1, \dots, h_n)$. Für $Z \in W$ gilt $H(F(Z)) = Z$ und damit $DH_{F(Z)} \circ DF_Z = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^k}$, d.h. $\operatorname{rang} DF_Z = k$.

Im Fall $X \in \partial M$ ist die Argumentation dieselbe.

Man kann Satz 5.14 auch umkehren.

Satz 5.15
Sei $M \subset \mathbb{R}^n$. Zu jedem $X \in M$ gebe es eine offene Umgebung $U \subset \mathbb{R}^n$ von X, eine offene Menge $W \subset \mathbb{R}^k$ oder eine relativ offene Menge $W \subset H^k$ und eine injektive differenzierbare Abbildung $F : W \to \mathbb{R}^n$ mit (a), (b), (c) wie in Satz 3.6.3. Dann ist M eine k-dimensionale Mannigfaltigkeit im $\mathbb{R}^n$.

Beweis. Wir betrachten wieder nur den Fall eines Punktes $X \in M$, zu dem eine offene Menge $W \subset \mathbb{R}^k$ und eine Abbildung $F : W \to \mathbb{R}^n$ mit den behaupteten Eigenschaften existiert. Sei $X = F(Z)$. Aus dem Satz von der Umkehrabbildung folgert man mit (c) die Existenz einer offenen Umgebung W_1 von Z in W, einer offenen Umgebung W_2 von 0 in $\mathbb{R}^{n-k}$, einer offenen Umgebung U_1 von $F(Z)$ in $\mathbb{R}^n$ und eines Diffeomorphismus $g : W_1 \times W_2 \to U_1$ mit $g(Y, 0) = F(Y)$ für $Y \in W_1$. Sei $h : U_1 \to W_1 \times W_2$ die Umkehrabbildung von g. Da $F^{-1} : F(W) \to W$ stetig ist, gibt es eine offene Menge $U_2 \subset \mathbb{R}^n$ mit $F(W_1) = U_2 \cap F(W)$. Setze $U_0 := U \cap U_1 \cap U_2$ und $V := g^{-1}(U_0)$. Dann gilt wegen (a)

$$\begin{aligned} h(U_0 \cap M) &= h(U \cap U_1 \cap U_2 \cap M) \\ &= h(F(W) \cap U_0 \cap U_2) \\ &= h(F(W_1) \cap U_0) \\ &= g^{-1}(F(W_1) \cap U_0) \\ &= g^{-1}(g(W_1 \times \{0\}) \cap U_0) \\ &= V \cap (W_1 \times \{0\}) \\ &= V \cap \mathbb{R}^n_k. \end{aligned}$$

Zuletzt wurde benutzt, daß

$$V = g^{-1}(U_0) = h(U_0) \subset h(U_1) = W_1 \times W_2$$

gilt.

Satz 5.16
Sei M eine k-dimensionale Mannigfaltigkeit. Seien $F_1 : W_1 \to \mathbb{R}^n$ und $F_2 : W_2 \to \mathbb{R}^n$ Koordinatensysteme um einen Punkt von M. Dann ist die Abbildung

$$F_2^{-1} \circ F_1 : F_1^{-1}(F_2(W_2)) \to \mathbb{R}^k$$

differenzierbar und vom Rang k.

Beweis. Sei $Y \in F_1^{-1}(F_2(W_2))$ und $X = F_1(Y)$. Dann gibt es in einer Umgebung von X einen Diffeomorphismus H mit

$$F_2^{-1}(F_1(Z)) = H(F_1(Z)) \quad \text{für } Z \in F_1^{-1}(F_2(W_2')),$$

wobei W_2' eine passende Umgebung von $F_2^{-1}(X)$ ist. Mit H, F_1 ist also auch $F_2^{-1} \circ F_1$ differenzierbar (im Definitionsbereich). Ferner ist $\operatorname{rang}(D(F_2^{-1} \circ F_1)_Y) = k$, da $\operatorname{rang}(DH_{F_1(Y)}) = n$ und $\operatorname{rang}((DF_1)_Y) = k$ gilt.

Wir erklären nun zunächst den Tangentialraum an M in einem Punkt $X \in M$ und schließlich Differentialformen auf M.

Definition. Sei M eine k-dimensionale Mannigfaltigkeit in $\mathbb{R}^n$, $X \in M$ und $F : W \to \mathbb{R}^n$ ein Koordinatensystem um X. Dann wird der k-dimensionale Unterraum

$$TM_X := DF_{F^{-1}(X)}(\mathbb{R}^k) \subset \mathbb{R}^n$$

als der *Tangentialraum* von M in X bezeichnet.

Damit diese Terminologie gerechtfertigt ist, sollte TM_X von der Wahl des Koordinatensystems unabhängig sein. Zum Nachweis sei also $\overline{F} : \overline{W} \to \mathbb{R}^n$ ein weiteres Koordinatensystem um X. Nach Satz 5.16 ist

$$D(F^{-1} \circ \overline{F})_{\overline{F}^{-1}(X)} : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$$

bijektiv. Wegen $F \circ (F^{-1} \circ \overline{F}) = \overline{F}$ (auf geeignetem Definitionsbereich) folgt so

$$D\overline{F}_{\overline{F}^{-1}(X)}(\mathbb{R}^k) = DF_{F^{-1}(X)} \circ D(F^{-1} \circ \overline{F})_{\overline{F}^{-1}(X)}(\mathbb{R}^k) = DF_{F^{-1}(X)}(\mathbb{R}^k),$$

was zu zeigen war.

Definition. Sei M eine Mannigfaltigkeit in $\mathbb{R}^n$, sei $p \in \mathbb{N}_0$. Eine *Differentialform vom Grad* p (kurz: p-Form) *auf* M ist eine Abbildung, die jedem $X \in M$ ein Element von $\Omega^p(TM_X)$ zuordnet.

Beispiel. Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ offen, $M \subset A$ eine k-dimensionale Mannigfaltigkeit im $\mathbb{R}^n$ und ω eine p-Form auf A. Für $X \in A$ und insbesondere für $X \in M$ ist $\omega_X \in \Omega^p(\mathbb{R}^n)$, d.h.

$$\omega_X : \underbrace{\mathbb{R}^n \times \cdots \times \mathbb{R}^n}_{p-\text{mal}} \to \mathbb{R}$$

ist eine alternierende multilineare Abbildung. Einschränkung von ω_X, $X \in M$, auf das p-fache Produkt $TM_X \times \cdots \times TM_X$ ergibt eine Differentialform vom Grad p auf M.

Sei nun ω eine p-Form auf der k-dimensionalen Mannigfaltigkeit M, sei $X \in M$ und $F : W \to \mathbb{R}^n$ ein Koordinatensystem um X sowie $Z \in W$ mit $F(Z) = X$. Sei ferner $\overline{F} : \overline{W} \to \mathbb{R}^n$ ein weiteres Koordinatensystem um X und $\overline{Z} \in \overline{W}$ mit $\overline{F}(\overline{Z}) = X$. Wegen $DF_Z : \mathbb{R}^k \to TM_X$ ist

$$(DF_Z)^* : \Omega^p(TM_X) \to \Omega^p(\mathbb{R}^k)$$

erklärt, und wir setzen

$$(F^*\omega)_Z := (DF_Z)^*\omega_X.$$

Auf diese Weise wird eine p-Form $F^*\omega$ auf W erklärt. Nach Satz 5.16 ist die Abbildung $G := F^{-1} \circ \overline{F}$ in einer Umgebung von $\overline{Z}$ ein Diffeomorphismus. Aus $\overline{F} = F \circ G$ folgt daher

$$\begin{aligned}
(\overline{F}^*\omega)_{\overline{Z}} &= (D\overline{F}_{\overline{Z}})^*\omega_X = (DF_Z \circ DG_{\overline{Z}})^*\omega_X \\
&= (DG_{\overline{Z}})^*\left((DF_Z)^*\omega_X\right) = (DG_{\overline{Z}})^*(F^*\omega)_Z \\
&= G^*(F^*\omega)_{\overline{Z}},
\end{aligned}$$

also $\overline{F}^*\omega = G^*(F^*\omega)$ im gemeinsamen Definitionsbereich. Mit $F^*\omega$ ist also auch $\overline{F}^*\omega$ differenzierbar.

Definition. Die p-Form ω auf der Mannigfaltigkeit M heißt *differenzierbar*, wenn für jedes Koordinatensystem F von M die Form $F^*\omega$ differenzierbar ist.

Wir überlegen uns jetzt, daß man auch für p-Formen auf M eine äußere Ableitung erklären kann.

Satz 5.17
Sei M eine k-dimensionale Mannigfaltigkeit in $\mathbb{R}^n$ und ω eine differenzierbare p-Form auf M. Dann gibt es eine eindeutig bestimmte $(p+1)$-Form $d\omega$ auf M, das äußere Differential von ω, so daß

$$F^*(d\omega) = d(F^*\omega)$$

für jedes Koordinatensystem F der Mannigfaltigkeit M gilt.

Beweis. Sei $F : W \to \mathbb{R}^n$ ein Koordinatensystem um $X \in M$ und $Z \in W$ mit $F(Z) = X$. Zu beliebigen Vektoren $Y_1, \dots, Y_{p+1} \in TM_X$ gibt es eindeutig bestimmte Vektoren $V_1, \dots, V_{p+1} \in \mathbb{R}^k$ mit $DF_Z(V_i) = Y_i$ für $i = 1, \dots, p+1$. Falls $d\omega$ tatsächlich existiert mit der geforderten Eigenschaft, so folgt

$$\begin{aligned}
(d\omega)_X(Y_1, \dots, Y_{p+1}) &= (d\omega)_X(DF_Z(V_1), \dots, DF_Z(V_{p+1})) \\
&= \left[(DF_Z)^*\, d\omega_X\right](V_1, \dots, V_{p+1}) \\
&= (F^*\, d\omega)_Z(V_1, \dots, V_{p+1}) \\
&= d(F^*\omega)_Z(V_1, \dots, V_{p+1}).
\end{aligned}$$

Dies zeigt, daß $d\omega$ eindeutig bestimmt ist durch die geforderte Eigenschaft. Wir definieren nun

$$(d\omega)_X(Y_1, \dots, Y_{p+1}) := d(F^*\omega)_Z(V_1, \dots, V_{p+1}).$$

Wir rechnen nun nach, daß diese Definition nicht von der Wahl des Koordinatensystems abhängt und die gewünschte Eigenschaft besitzt.

Wahlunabhängigkeit: Seien $F : W \to M$, $\overline{F} : \overline{W} \to M$ Koordinatensysteme von M um X mit $F(Z) = \overline{F}(\overline{Z}) = X$. Sei $G := F^{-1} \circ \overline{F}$ in einer geeigneten Umgebung von $\overline{Z}$, d.h. $G(\overline{Z}) = Z$. Schließlich seien $V_i, \overline{V}_i \in \mathbb{R}^k$ mit

$$DF_Z(V_i) = Y_i = D\overline{F}_{\overline{Z}}(\overline{V}_i), \quad i = 1, \dots, p+1.$$

Wegen $\overline{F} = F \circ G$ gilt $D\overline{F}_{\overline{Z}}(\overline{V}_i) = DF_Z(DG_{\overline{Z}}(\overline{V}_i))$ und damit $DG_{\overline{Z}}(\overline{V}_i) = V_i$. Nun folgt

$$\begin{aligned} d(\overline{F}^*\omega)_{\overline{Z}}(\overline{V}_1, \dots, \overline{V}_{p+1}) &= d((F \circ G)^*\omega)_{\overline{Z}}(\overline{V}_1, \dots, \overline{V}_{p+1}) \\ &= d(G^*(F^*\omega))_{\overline{Z}}(\overline{V}_1, \dots, \overline{V}_{p+1}) \\ &= (G^*d(F^*\omega))_{\overline{Z}}(\overline{V}_1, \dots, \overline{V}_{p+1}) \\ &= d(F^*\omega)_Z(DG_{\overline{Z}}(\overline{V}_1), \dots, DG_{\overline{Z}}(\overline{V}_{p+1})) \\ &= d(F^*\omega)_Z(V_1, \dots, V_{p+1}). \end{aligned}$$

Geforderte Eigenschaft: Wir verwenden obige Notation, die Definition von $F^*(d\omega)$ und schließlich die Definition von $d\omega$, um so zu erhalten

$$\begin{aligned} F^*(d\omega)_Z(V_1, \dots, V_{p+1}) &= (d\omega)_X(DF_Z(V_1), \dots, DF_Z(V_{p+1})) \\ &= d(F^*\omega)_Z(V_1, \dots, V_{p+1}), \end{aligned}$$

also in der Tat $d(F^*\omega) = F^*(d\omega)$.

Orientierung.

In Abschnitt 3.2 hatten wir gesehen, daß die klassischen Sätze der Vektoranalysis eine geeignete Orientierung der betrachteten Kurven und Flächen voraussetzen. Der Begriff einer Orientierung ist jetzt auf Mannigfaltigkeiten und deren Ränder zu übertragen.

Sei V ein n-dimensionaler reeller Vektorraum mit Basen $(e_1, \dots, e_n)$ und $(\overline{e}_1, \dots, \overline{e}_n)$. Ist $\overline{e}_i = \sum_{j=1}^n \alpha_{ji} e_j$ für $i = 1, \dots, n$, so setzen wir

$$\Delta := \det(\alpha_{ij})_{i,j=1}^n.$$

Man nennt $(e_1, \dots, e_n)$ und $(\overline{e}_1, \dots, \overline{e}_n)$ äquivalent, falls $\Delta > 0$ gilt. Hierdurch ist eine Äquivalenzrelation auf den geordneten Basen von V gegeben mit genau zwei Äquivalenzklassen. Die Äquivalenzklasse zu $(e_1, \dots, e_n)$ wird mit

$$[e_1, \dots, e_n]$$

bezeichnet, die davon verschiedene Äquivalenzklasse wird mit $-[e_1, \dots, e_n]$ bezeichnet. Eine Orientierung auf V ist eine Äquivalenzklasse geordneter Basen.

Definition. Sei M eine k-dimensionale Mannigfaltigkeit in $\mathbb{R}^n$. Eine *Orientierung* auf M ist eine Abbildung o, die jedem $X \in M$ eine Orientierung o_X des Tangentialraumes TM_X zuordnet, so daß gilt: Für jedes Koordinatensystem $F : W \to \mathbb{R}^n$ von M mit zusammenhängendem W gilt

$$\begin{aligned} \text{entweder} \qquad & [DF_Z(E_1), \ldots, DF_Z(E_k)] = o_{F(Z)} \qquad \text{für } Z \in W \\ \text{oder} \qquad & [DF_Z(E_1), \ldots, DF_Z(E_k)] = -o_{F(Z)} \qquad \text{für } Z \in W. \end{aligned}$$

Im ersten Fall heißt F *orientierungstreu*, im zweiten Fall *orientierungsumkehrend*. Ist o eine Orientierung auf M, so heißt (M, o) orientierte Mannigfaltigkeit.

Beispiele.

- Der $\mathbb{R}^n$ als orientierte n-dimensionale Mannigfaltigkeit, offene Teilmengen davon. Diskussion des Zusammenhangs der Menge W in der vorangehenden Definition.
- Reguläre Kurven; zumindest lokal: parametrisierte Flächen.
- Wir hatten schon erwähnt, daß das Möbiusband im $\mathbb{R}^3$ ein Beispiel für eine Mannigfaltigkeit ist, auf der keine Orientierung existiert. Für eine $(n-1)$-dimensionale Mannigfaltigkeit im $\mathbb{R}^n$ gibt es genau dann eine Orientierung (wie man zeigen kann), wenn M ein stetiges Einheitsnormalenvektorfeld besitzt. Dies kann man verwenden, um die Nichtorientierbarkeit des Möbiusbandes einzusehen.

Bemerkung. Die Orientierbarkeit einer k-dimensionalen Mannigfaltigkeit M ist äquivalent zur Existenz einer nirgends verschwindenden stetigen k-Form auf M oder auch zur Existenz eines *orientierten Atlas*. Ein *Atlas* ist hierbei eine Familie von Koordinatensystemen von M, deren Bilder M überdecken. Ein Atlas heißt orientiert, wenn je zwei seiner Elemente gleichorientiert sind.

Bei der folgenden Aussage ist die Argumentation im Beweis ebenso wichtig wie die Aussage selbst.

Lemma 5.18
Sei (M, o) eine k-dimensionale orientierte Mannigfaltigkeit im $\mathbb{R}^n$, seien $F, \overline{F}$ zwei orientierungstreue Koordinatensysteme um X, sei $F(Z) = X = \overline{F}(\overline{Z})$. Dann ist $\det D(\overline{F}^{-1} \circ F)_Z > 0$.

Beweis. Nach Voraussetzung gilt

$$[DF_Z(E_1), \ldots, DF_Z(E_k)] = o_X = [D\overline{F}_{\overline{Z}}(E_1), \ldots, D\overline{F}_{\overline{Z}}(E_k)].$$

Zwei äquivalente Basen bleiben nach Anwendung eines beliebigen Isomorphismus äquivalent. Also folgt durch Anwendung des Isomorphismus $(D\overline{F}_{\overline{Z}})^{-1} : TM_X \to \mathbb{R}^k$

$$\left[D(\overline{F}^{-1} \circ F)_Z(E_1), \ldots, D(\overline{F}^{-1} \circ F)_Z(E_k)\right] = [E_1, \ldots, E_k],$$

was die Behauptung zeigt.

Aufgrund von Satz 5.13 ist bekannt, daß der Rand ∂M einer k-dimensionalen Mannigfaltigkeit M von $\mathbb{R}^n$ eine $(k-1)$-dimensionale Mannigfaltigkeit ist. Ist (M, o) orientiert, so kann man auch auf ∂M eine (induzierte) Orientierung einführen.

Satz 5.19
Sei (M, o) eine k-dimensionale orientierte Mannigfaltigkeit in $\mathbb{R}^n$. Dann gibt es eine Orientierung o' auf ∂M, so daß gilt: Für $X \in \partial M$, jedes Koordinatensystem $F : W \to \mathbb{R}^n$ von M um X und für alle Vektoren $Y_1, \dots, Y_{k-1} \in T\partial M_X$ mit

$$[DF_Z(-E_1), Y_1, \dots, Y_{k-1}] = o_X, \qquad Z = F^{-1}(X)$$

gilt

$$[Y_1, \dots, Y_{k-1}] = o'_X.$$

Man nennt o' die von o induzierte Orientierung.

Beweis. Sei $X \in \partial M$. Es gibt ein Koordinatensystem F von M um X, so daß für die Basis $(DF_Z(-E_1), DF_Z(E_2), \dots, DF_Z(E_k))$ von TM_X gilt

$$o_X = [DF_Z(-E_1), DF_Z(E_2), \dots, DF_Z(E_k)].$$

Dann ist zunächst $F(0, \cdot)$ ein Koordinatensystem von ∂M um X und $(DF_Z(E_2), \dots, DF_Z(E_k))$ ist eine Basis von $T\partial M_X$. Wir definieren

$$o'_X := [DF_Z(E_2), \dots, DF_Z(E_k)].$$

Wohldefiniertheit: Sei $\overline{F}$ ein weiteres Koordinatensystem von M um X mit $\overline{F}(\overline{Z}) = X$ und

$$o_X = [D\overline{F}_{\overline{Z}}(-E_1), D\overline{F}_{\overline{Z}}(E_2), \dots, D\overline{F}_{\overline{Z}}(E_k)].$$

Wie im Beweis zu Lemma 5.18 folgt $\det(D(\overline{F}^{-1} \circ F)_Z) > 0$. Ferner gilt

$$\langle E_1, D(\overline{F}^{-1} \circ F)_Z(E_1)\rangle = \lim_{t \downarrow 0} \frac{1}{t} \langle \overline{F}^{-1} \circ F(Z + tE_1), E_1\rangle \geq 0.$$

Wegen

$$D(\overline{F}^{-1} \circ F)_Z(E_i) \in \operatorname{lin}\{E_2, \dots, E_k\}$$

für $i = 2, \dots, k$, folgt schließlich mit $E_1^\perp = \operatorname{lin}\{E_2, \dots, E_k\}$

$$\det(D(\overline{F}^{-1} \circ F)_Z \mid E_1^\perp) > 0$$

und damit

$$[DF_Z(E_2), \dots, DF_Z(E_k)] = [D\overline{F}_{\overline{Z}}(E_2), \dots, D\overline{F}_{\overline{Z}}(E_k)].$$

Ist nun $Y_1, \ldots, Y_{k-1} \in T\partial M_X$ und

$$o_X = [DF_Z(-E_1), Y_1, \ldots, Y_{k-1}],$$

wobei F wie in der Definition von o_X gewählt sei, so gilt

$$Y_i = \sum_{j=2}^{k} \alpha_{ji} DF_Z(E_j), \quad i = 1, \ldots, k-1,$$

mit $\det(\alpha_{ji}) > 0$. Daher folgt

$$o'_X = [DF_Z(E_2), \ldots, DF_Z(E_k)] = [Y_1, \ldots, Y_{k-1}].$$

Wir zeigen nun noch, daß o' eine Orientierung von ∂M ist. Sei hierzu $G : W \to \mathbb{R}^n$ eine Karte von ∂M mit zusammenhängender Menge W. Sei $Z_0 \in W$ und $X_0 := G(Z_0)$. Sei F eine Karte von M um X_0, die wie in der Definition von o' orientiert sei. Sei $i : \mathbb{R}^{k-1} \to \mathbb{R}^k$, $i(x) := (0, x)$. Ferner setze $\tilde{F} := F \circ i$ auf einen passenden Definitionsbereich. Dann gilt zunächst lokal um Z_0:

$$\begin{aligned}
& [DG_Z(E_1), \ldots, DG_Z(E_{k-1})] \\
= \; & \left[D(\tilde{F} \circ (\tilde{F}^{-1} \circ G))_Z(E_1), \ldots, D(\tilde{F} \circ (\tilde{F}^{-1} \circ G))_Z(E_{k-1})\right] \\
= \; & \left[D\tilde{F}_{\tilde{F}^{-1}(X)}(D(\tilde{F}^{-1} \circ G)_Z(E_1)), \ldots, D\tilde{F}_{\tilde{F}^{-1}(X)}(D(\tilde{F}^{-1} \circ G)_Z(E_{k-1}))\right] \\
= \; & \operatorname{sgn}(\det(D(\tilde{F}^{-1} \circ G)_Z))[D\tilde{F}_{\tilde{F}^{-1}(X)}(E_1), \ldots, D\tilde{F}_{\tilde{F}^{-1}(X)}(E_{k-1})] \\
= \; & f(z) \cdot [DF_Z(E_2), \ldots, DF_Z(E_{k-1})] \\
= \; & f(z) o'_{G(z)},
\end{aligned}$$

wobei

$$f(z) := \operatorname{sgn}(\det(D(\tilde{F} \circ G)_Z)).$$

Die bewiesene Gleichung zeigt, daß f unabhängig von der lokalen Darstellung ist und $f(z) \in \{-1, 1\}$. Ferner ist f aufgrund der lokalen Darstellung stetig. Dies zeigt die Konstanz von f auf der zusammenhängenden Menge W.

Bemerkung. Ist (M, o) eine orientierte Mannigfaltigkeit, so läßt man gelegentlich die Angabe des Symbols o weg, wenn dieses aus dem Zusammenhang klar ist.

Zerlegung der Eins.

Häufig liegt in geometrischen, topologischen oder analytischen Fragestellungen die folgende Situation vor. Ein Objekt läßt sich lokal gut beschreiben bzw. definieren, und man will diese lokalen Beschreibungen global „glatt“ zusammensetzen. Ein nützliches Hilfsmittel hierfür ist die nachfolgend beschriebene Konstruktion, die zu einer Menge von nichtnegativen Funktionen führt, die sich an jeder Stelle zu Eins aufsummieren. Die Vorgehensweise hier ist spezieller als üblicherweise bei der Untersuchung *parakompakter Räume* in der Topologie. Allerdings können die zerlegenden Funktionen zusätzlich differenzierbar gewählt werden.

Lemma 5.20
Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $C \subset U$ kompakt. Dann gibt es eine kompakte Menge $D \subset U$ mit $C \subset D^0$.

Beweis. Zu jedem $X \in C$ gibt es ein $a_X > 0$ mit

$$W(X, a_X) := \{Y \in \mathbb{R}^n : \|Y - X\|_{\max} \leq a_X\} \subset U.$$

Das System $\{W(X, a_X)^0 : X \in C\}$ ist eine offene Überdeckung von C, enthält also eine endliche Teilüberdeckung $\{W(X_i, a_{X_i}) : i = 1, \ldots, m\}$. Die Menge

$$D := \bigcup_{i=1}^{m} W(X_i, a_{X_i})$$

leistet das Gewünschte.

Lemma 5.21
Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $C \subset U$ kompakt. Dann gibt es eine kompakte Menge $D \subset U$ mit $C \subset D^0$ und eine differenzierbare Funktion $\varphi : \mathbb{R}^n \to [0, 1]$ mit

$$\varphi(X) = \begin{cases} 1, & \text{für } X \in C, \\ 0, & \text{für } X \in \mathbb{R}^n \setminus D. \end{cases}$$

Beweis. (1) Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist erklärt durch

$$f(x) := \begin{cases} \exp\{-(x-1)^{-2}\}\exp\{-(x+1)^{-2}\}, & x \in (-1, 1), \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann ist $f > 0$ auf $(-1, 1)$ und $f = 0$ auf $\mathbb{R} \setminus (-1, 1)$. Ferner ist f von der Klasse C^∞.

(2) Für $Z \in \mathbb{R}^n$ und $a > 0$ sei $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ erklärt durch

$$g(X) := \prod_{j=1}^{n} f\left(\frac{x_j - z_j}{a}\right).$$

Dann ist g von der Klasse C^∞, $g > 0$ auf $W(Z, a)^0$ und $g = 0$ auf $\mathbb{R}^n \setminus W(Z, a)^0$.

(3) Seien $\{W(X_i, a_{X_i}) : i = 1, \dots, m\}$ und D wie im Beweis von Lemma 5.20 konstruiert. Zu $i \in \{1, \dots, m\}$ sei g_i die Funktion, die zu X_i, a_{X_i} so erklärt ist wie oben g zu Z, a. Definiere $\psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ durch

$$\psi(X) := \sum_{i=1}^{m} g_i(X).$$

Dann ist ψ von der Klasse C^∞. Zu $X \in C$ gibt es ein $j \in \{1, \dots, m\}$ mit $X \in W(X_j, a_{X_j})^0$ und somit $\psi(X) \geq g_j(X) > 0$. Für $X \in \mathbb{R}^n \setminus D$ gilt $X \notin W(X_i, a_{X_i})$, also $g_i(X) = 0$, für $i = 1, \dots, m$, d.h. $\psi(X) = 0$. Da ψ stetig und C kompakt ist, gibt es ein $\epsilon > 0$ mit $\psi(X) \geq \epsilon > 0$ für alle $X \in C$.

(4) Sei $\tilde{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion der Klasse C^∞ mit $\tilde{f}(x) > 0$ für $x \in (0, \epsilon)$ und $f(X) = 0$ sonst (siehe (1)). Setze

$$h(x) := \int_0^x f \Big/ \int_0^\epsilon f, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Dann ist $h : \mathbb{R} \to [0,1]$ differenzierbar, und es gilt $h(x) = 0$ für $x \leq 0$ und $h(x) = 1$ für $x \geq \epsilon$.

(5) Die Funktion $\varphi := h \circ \psi : \mathbb{R}^n \to [0,1]$ ist von der Klasse C^∞, $\varphi(X) = 1$ für $X \in C$ und $\varphi(X) = 0$ für $X \in \mathbb{R}^n \setminus D$. Dies zeigt sämtliche Behauptungen.

Das im folgenden Satz konstruierte Funktionensystem $\{\varphi_1, \dots, \varphi_m\}$ nennt man eine der Überdeckung $\{U_1, \dots, U_m\}$ untergeordnete *Zerlegung der Eins.*

Satz 5.22
Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ kompakt und $\{U_1, \dots, U_m\}$ eine offene Überdeckung von M. Dann gibt es differenzierbare reelle Funktionen $\varphi_1, \dots, \varphi_m$ auf $\mathbb{R}^n$ mit den folgenden Eigenschaften:

(a) $0 \leq \varphi_i \leq 1$ *für* $i = 1, \dots, m$,

(b) $\varphi_1(X) + \dots + \varphi_m(X) = 1$ *für alle* $X \in M$,

(c) es gibt eine kompakte Menge $A_i \subset U_i$ mit $\varphi_i(X) = 0$ für $X \in \mathbb{R}^n \setminus A_i$ für $i = 1, \dots, m$.

Beweis. Zunächst werden kompakte Mengen $D_i \subset U_i$ konstruiert, so daß $M \subset D_1^0 \cup \dots \cup D_m^0$ gilt. Hierzu zeigen wir allgemeiner, um vollständige Induktion verwenden zu können: Für $k \in \{0, \dots, m\}$ gibt es kompakte Mengen $D_i \subset U_i$ $(i = 1, \dots, k)$ mit

$$M \subset D_1^0 \cup \dots \cup D_k^0 \cup U_{k+1} \cup \dots \cup U_m.$$

Beweis durch vollständige Induktion über k. Für $k = 0$ ist nichts zu zeigen. Seien $D_1, \dots, D_k$ schon konstruiert. Dann ist

$$C_{k+1} := M \setminus \left(D_1^0 \cup \dots \cup D_k^0 \cup U_{k+2} \cup \dots \cup U_m\right)$$

eine kompakte Teilmenge von U_{k+1}. Nach Lemma 5.20 gibt es eine kompakte Teilmenge $D_{k+1} \subset U_{k+1}$ mit $C_{k+1} \subset D^0_{k+1}$, also

$$M \subset D^0_1 \cup \cdots \cup D^0_k \cup D^0_{k+1} \cup U_{k+2} \cup \cdots \cup U_m.$$

Dies beendet den Induktionsschluß.

Insbesondere gilt mit obigen Mengen D_i, $i = 1, \ldots, m$:

$$M \subset D^0_1 \cup \cdots \cup D^0_m =: U$$

Nach Lemma 5.21 gibt es eine kompakte Menge $A_i \subset U_i$ mit $D_i \subset A^0_i$ und eine Funktion $\psi_i : \mathbb{R}^n \to [0,1]$ der Klasse C^∞ mit $\psi_i(X) = 1$ für $X \in D_i$ und $\psi_i(X) = 0$ für $X \in \mathbb{R}^n \setminus A_i$, $i = 1, \ldots, m$.

Zu $X \in U$ gibt es ein $j \in \{1, \ldots, m\}$ mit $X \in D^0_j$, d.h. $\psi_j(X) > 0$. Somit gilt $\psi_1(X) + \cdots + \psi_m(X) > 0$. Nach Lemma 5.21 gibt es eine kompakte Menge $A \subset U$ mit $M \subset A^0$ und eine differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R}^n \to [0,1]$ mit $f(X) = 1$ für $X \in M$ und $f(X) = 0$ für $X \in \mathbb{R}^n \setminus A$. Setze

$$\varphi_i(X) := \begin{cases} f(X) \cdot \frac{\psi_i(X)}{\psi_1(X)+\cdots+\psi_m(X)}, & X \in U, \\ 0, & X \in \mathbb{R}^n \setminus U. \end{cases}$$

Die Funktionen $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$ leisten das Gewünschte.

5.5 Der Satz von Stokes

Bevor wir den Satz von Stokes formulieren können, muß die Integration von Differentialformen über Mannigfaltigkeiten erklärt werden. Alle Differentialformen seien als stetig vorausgesetzt. Ferner sei M stets eine k-dimensionale orientierte Mannigfaltigkeit. Für eine auf einer offenen Menge $\tilde{M} \subset \mathbb{R}^n$ erklärte Differentialform ω vom Grad p und einen singulären p-Würfel in $\tilde{M}$ hatten wir

$$\int_c \omega := \int_{[0,1]^p} c^* \omega$$

definiert. Wir verallgemeinern dies jetzt auf den Fall einer Mannigfaltigkeit $M \subset \mathbb{R}^n$.

Definition. Für eine p-Form ω auf M und einen singulären p-Würfel c in M sei

$$\int_c \omega := \int_{[0,1]^p} c^* \omega.$$

Im folgenden werden wir tatsächlich ausschließlich p-Formen über p-Mannigfaltigkeiten integrieren.

Definition. Ein singulärer k-Würfel $c : [0,1]^k \to M$ heißt *orientierungstreu*, wenn es ein orientierungstreues Koordinatensystem $F : W \to \mathbb{R}^n$ in M gibt mit $c = F \mid [0,1]^k$. In diesem Fall nennen wir c einen *orientierungstreuen k-Würfel.*

Der folgende Hilfssatz zeigt an, daß das Integral einer k-Form auf M über einen singulären Würfel „im wesentlichen“ von der Wahl des singulären Würfels unabhängig ist.

Lemma 5.23
Seien $c_1, c_2 : [0,1]^k \to M$ orientierungstreue k-Würfel in M. Sei ω eine k-Form auf M mit $\omega_X = 0$ für $X \notin c_1([0,1]^k) \cap c_2([0,1]^k) =: B$. Dann ist

$$\int_{c_1} \omega = \int_{c_2} \omega.$$

Beweis. Sei $c_2^*\omega =: f\,dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^k$ und $G := c_2^{-1} \circ c_1$ auf $c_1^{-1}(B)$. Dann gilt auf $c_1^{-1}(B)$:

$$\begin{aligned} c_1^*\omega &= [c_2 \circ (c_2^{-1} \circ c_1)]^*\omega = G^* c_2^*\omega \\ &= G^*(f\,dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^k) \\ &= f \circ G \det JG\, dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^k \\ &= f \circ G\, |\det JG|\, dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^k, \end{aligned}$$

wobei zuletzt benutzt wurde, daß $\det JG > 0$ gilt wegen Lemma 5.18. Mit dem Transformationssatz für Gebietsintegrale, angewandt mit dem Diffeomorphismus $G : c_1^{-1}(B) \to c_2^{-1}(B)$ erhält man nun

$$\int_{c_2^{-1}(B)} c_2^*\omega = \int_{c_2^{-1}(B)} f = \int_{c_1^{-1}(B)} f \circ G\, |\det JG| = \int_{c_1^{-1}(B)} c_1^*\omega.$$

Da ω außerhalb von B ohnehin verschwindet, folgt

$$\int_{c_1} \omega = \int_{[0,1]^k} c_1^*\omega = \int_{c_1^{-1}(B)} c_1^*\omega = \int_{c_2^{-1}(B)} c_2^*\omega = \int_{[0,1]^k} c_2^*\omega = \int_{c_2} \omega,$$

was zu zeigen war.

Lemma 5.23 stellt gerade die für die folgende Definition erforderliche Wohldefiniertheitsaussage bereit.

Definition. Sei c ein orientierungstreuer k-Würfel in M und ω eine k-Form auf M mit $\omega_X = 0$ für $X \notin c([0,1]^k)$. Dann sei

$$\int_M \omega := \int_c \omega.$$

Der singuläre k-Würfel c in M heißt *orientierungsumkehrend*, wenn es ein orientierungsumkehrendes Koordinatensystem $F : W \to \mathbb{R}^n$ gibt mit $c = F \mid [0,1]^k$. Ist dies der Fall und ist ω eine k-Form auf M, die außerhalb $c([0,1]^k)$ verschwindet, so ist

$$\int_c \omega = -\int_M \omega.$$

Zum Nachweis sei

$$\tilde{F} : [0,1]^k \to \mathbb{R}^n, \quad \tilde{F}(x_1, \ldots, x_n) := F(x_1, \ldots, x_{k-1}, 1 - x_k)$$

und $\tilde{c} := \tilde{F} \mid [0,1]^k$. Dann ist $\tilde{F}$ und somit $\tilde{c}$ orientierungstreu, d.h.

$$\int_M \omega = \int_{\tilde{c}} \omega.$$

Andererseits folgt wie im Beweis Lemma 5.23, daß

$$\int_{\tilde{c}} \omega = -\int_c \omega,$$

da nun $|\det JG| = -\det JG$ gilt.

Definition. Sei c ein singulärer k-Würfel in M. Dann heißt c *normal*, wenn c orientierungstreu ist und wenn

$$c([0,1]^k) \cap \partial M = \emptyset \qquad \text{oder} \qquad c([0,1]^k) \cap \partial M = c \circ I^k_{1,0}([0,1]^{k-1})$$

gilt.

Lemma 5.24
Sei M kompakt. Dann gibt es eine offene Überdeckung $\{U_1, \ldots, U_m\}$ von M derart, daß zu jedem $i \in \{1, \ldots, m\}$ ein normaler k-Würfel c_i existiert mit

$$U_i \cap M \subset c_i([0,1]^k).$$

Beweis. Zu $X \in M$ existiert ein Koordinatensystem $F : W \to \mathbb{R}^n$, das o.B.d.A. so gewählt werden kann, daß F orientierungstreu ist, $[0,1]^k \subset W$ und

$$X = \begin{cases} F\left(\frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{2}\right), & \text{falls } X \notin \partial M, \\ F\left(0, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{2}\right), & \text{falls } X \in \partial M \end{cases}$$

erfüllt. Die Einschränkung $c := F \mid [0,1]^k$ ist dann ein normaler Würfel. Da F^{-1} stetig ist, gibt es eine offene Umgebung U_X von X mit $F^{-1}(U_X \cap M) \subset [0,1]^k$, also mit $U_X \cap M \subset c([0,1]^k)$. Das System $\{U_X : X \in M\}$ ist eine offene Überdeckung von M, enthält also wegen der Kompaktheit von M eine endliche Teilüberdeckung von M.

Nun sind alle Vorbereitungen abgeschlossen, um die Definition des Integrals einer k-Form über eine kompakte k-dimensionale orientierte Mannigfaltigkeit geben zu können.

Definition. Sei M kompakt und ω eine k-Form auf M. Sei $\{U_1, \dots, U_m\}$ eine Überdeckung von M wie in Lemma 5.24 und hierzu $\{\varphi_1, \dots, \varphi_m\}$ eine der Überdeckung untergeordnete Zerlegung der Eins. Dann definiert man

$$\int_M \omega := \sum_{i=1}^m \int_M \varphi_i \omega.$$

Nachweis. Zunächst ist festzustellen, daß das Integral

$$\int_M \varphi_i \omega$$

schon definiert ist. Zu U_i existiert ja ein normaler k-Würfel c_i mit $U_i \cap M \subset c_i([0,1]^k)$. Die Funktion φ_i und damit die Form $\varphi_i\omega$ verschwindet außerhalb von U_i, also erst recht außerhalb $c_i([0,1]^k)$. Ist schließlich $V_1, \dots, V_r$ eine weitere offene Überdeckung von M wie in Lemma 5.24 und $\{\psi_1, \dots, \psi_r\}$ eine zugehörige Zerlegung der Eins, so ist wegen der Linearität des Integrals

$$\sum_i \int_M \varphi_i \omega = \sum_i \sum_j \int_M \varphi_i \psi_j \omega = \sum_j \sum_i \int_M \varphi_i \psi_j \omega = \sum_j \int_M \psi_j \omega,$$

was die Wohldefiniertheit zeigt.

Wir kommen schließlich zum Satz von Stokes.

Satz 5.25
Sei (M, o) eine kompakte orientierte k-dimensionale Mannigfaltigkeit und ω eine $(k-1)$-Form der Klasse C^1 auf M. Der Rand ∂M sei mit der induzierten Orientierung versehen. Dann gilt

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega.$$

Beweis. Sei zunächst c ein normaler k-Würfel in M, und ω verschwinde außerhalb von $c([0,1]^k)$. Dann gilt

$$\int_M d\omega = \int_c d\omega = \int_{[0,1]^k} c^* d\omega = \int_{[0,1]^k} dc^* \omega = \int_{I^k} dc^* \omega = \int_{\partial I^k} c^* \omega = \int_{\partial c} \omega,$$

wobei für die vorletzte Gleichheit der Satz von Stokes für Ketten verwendet wurde.

Fall 1: $c([0,1]^k) \cap \partial M = \emptyset$.

Dann gilt $\omega_X = 0$ für $X \in c \circ I^k_{i,\alpha}([0,1]^{k-1})$ für $i = 1, \ldots, k$ und $\alpha = 0, 1$, da c Einschränkung eines Koordinatensystems ist und somit X Häufungspunkt von Punkten $Y \in M$ mit $\omega_Y = 0$. Es folgt daher

$$\int_{\partial c} \omega = 0 = \int_{\partial M} \omega,$$

wobei auch für das Integral auf der rechten Seite verwendet wird, daß ω außerhalb $c([0,1]^k)$ verschwindet.

Fall 2: $c([0,1]^k) \cap \partial M = c \circ I^k_{1,0}([0,1]^{k-1})$.

Dann gilt

$$\int_{\partial c} \omega = \sum_{i=1}^{k} (-1)^i \left(\int_{c \circ I^k_{i,0}} \omega - \int_{c \circ I^k_{i,1}} \omega \right) = - \int_{c \circ I^k_{1,0}} \omega.$$

Daß die übrigen Integrale verschwinden, sieht man wie in Fall 1. Da c ein normaler k-Würfel ist, gibt es ein orientierungstreues Koordinatensystem $F : W \to \mathbb{R}^n$ mit $c = F \mid [0,1]^k$. Da Fall 2 vorliegt, ist W eine relativ offene Teilmenge von H^k. Definiere

$$W' := \{(x_1, \ldots, x_{k-1}) \in \mathbb{R}^{k-1} : (0, x_1, \ldots, x_{k-1}) \in W\}$$

und $F'(x_1, \ldots, x_{k-1}) := F(0, x_1, \ldots, x_{k-1})$ mit $(x_1, \ldots, x_{k-1}) \in W'$. Dann ist F' ein Koordinatensystem von ∂M mit $F' \mid [0,1]^{k-1} = c \circ I^k_{1,0}$. Für $Z \in W$ mit $z_1 = 0$ gilt

$$[DF_Z(E_1), \ldots, DF_Z(E_k)] = o_{F(Z)},$$

da F orientierungstreu ist. Nach Definition der induzierten Orientierung o' von ∂M gilt

$$o'_{F(Z)} = -[DF_Z(E_2), \ldots, DF_Z(E_k)].$$

Hieraus folgt, daß F' orientierungsumkehrend ist. Also erhält man

$$- \int_{c \circ I^k_{1,0}} \omega = \int_{\partial M} \omega.$$

In beiden Fällen ist also

$$\int_{\partial c} \omega = \int_{\partial M} \omega.$$

Sei schließlich ω eine beliebige $(k-1)$-Form der Klasse C^1 auf M. Wähle eine offene Überdeckung $\{U_1, \ldots, U_m\}$ von M wie in Lemma 5.24 mit zugehörigen normalen k-Würfeln $c_1, \ldots, c_m$. Sei schließlich $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_m\}$ eine untergeordnete Zerlegung der Eins.

Für jedes $i \in \{1, \ldots, m\}$ verschwindet die Form $\varphi_i \omega$ außerhalb $c_i([0,1]^k)$. Nach dem schon Bewiesenen gilt damit

$$\int_M d(\varphi_i \omega) = \int_{\partial M} \varphi_i \omega.$$

Wegen $\sum_{i=1}^m \varphi_i = 1$ auf M ist mit naheliegenden Rechenregeln für Differentialformen auf Mannigfaltigkeiten

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^m d(\varphi_i\omega) &= \sum_{i=1}^m (d\varphi_i \wedge \omega + \varphi_i\, d\omega) = d\left(\sum_{i=1}^m \varphi_i\right) \wedge \omega + \left(\sum_{i=1}^m \varphi_i\right) d\omega = \left(\sum_{i=1}^m \varphi_i\right) d\omega \\ &= d\omega.\end{aligned}$$

Hiermit folgert man aufgrund der Linearität des Integrals

$$\int_M d\omega = \int_M \sum_{i=1}^m d(\varphi_i\omega) = \sum_{i=1}^m \int_M d(\varphi_i\omega) = \sum_{i=1}^m \int_{\partial M} \varphi_i\omega = \int_{\partial M} \omega,$$

was zu zeigen war.

Als eine abschließende Anwendung zeigen wir einen Satz über die „Unmöglichkeit einer Retraktion“. Hieraus kann man mit Zusatzüberlegungen den Brouwerschen Fixpunktsatz herleiten.

Satz 5.26
Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine kompakte zusammenhängende n-dimensionale Mannigfaltigkeit. Dann gibt es keine Abbildung $F : M \to \partial M$ der Klasse C^2, die den Rand punktweise festläßt.

Beweis. Wir nehmen indirekt an, F wäre doch so eine Abbildung. Dann erklären wir die Abbildung $G(x,t) := x + t(F(x) - x)$ für $x \in M$ und $t \in [0,1]$ sowie $G =: (g_1, \dots, g_n)$. Die Funktionen $g_i : M \to \mathbb{R}$ sind 0-Formen auf M, dg_i ist deren äußeres Differential. Da M als offene Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ in kanonischer Weise orientierbar ist, kann die n-Form $\omega = dg_1 \wedge \cdots \wedge dg_n$ auf M integriert werden. Wir definieren also

$$\varphi(t) := \int_M dg_1 \wedge \cdots \wedge dg_n = \int_M [dx^1 + t(df_1 - dx^1)] \wedge \cdots \wedge [dx^n + t(df_1 - dx^n)]$$

Differentiation nach t und Anwendung des Satzes von Stokes ergibt

$$\begin{aligned}\varphi'(t) &= \int_M \sum_{i=1}^n dg_1 \wedge \cdots \wedge (df_i - dx^i) \wedge \cdots \wedge dg_n \\ &= \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} \int_M (df_i - dx^i) \wedge dg_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dg_i} \wedge \cdots \wedge dg_n \\ &= \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} \int_M d[(f_i - x^i) dg_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dg_i} \wedge \cdots \wedge dg_n] \\ &= \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} \int_{\partial M} \underbrace{(f_i - x^i)}_{=0} dg_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dg_i} \wedge \cdots \wedge dg_n \\ &= 0,\end{aligned}$$

wobei $F(x) = x$ für $x \in \partial M$ verwendet wurde. Nun gilt aber

$$\varphi(0) = \int_M dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n = \lambda_n(M) > 0$$

und

$$\begin{aligned} \varphi(1) &= \int_M df_1 \wedge \cdots \wedge df_n = \int_M \det JF\, dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n \\ &= \int_M \det JF(x)\lambda_n(dx) = 0, \end{aligned}$$

da $\det JF(x) = 0$ für alle $x \in M$ gelten muß. Hier wird verwendet, daß $F(M) \subset \partial M$ gilt, ∂M eine $(n-1)$-dimensionale Mannigfaltigkeit ohne innere Punkte im $\mathbb{R}^n$ ist (und der Satz von der Umkehrabbildung). Da $\varphi' = 0$ auf $[0,1]$ gilt, muß andererseits φ konstant sein, ein Widerspruch.

Als Folgerung erhalten wir für $B \coloneqq \{X \in \mathbb{R}^n : \|X\| \le 1\}$:

Satz 5.27
Jede Abbildung $F : B \to B$ der Klasse C^2 hat einen Fixpunkt.

Beweis. Hätte F keinen Fixpunkt, d.h. würde $F(X) \neq X$ für alle $X \in B$ gelten, so könnte man eine Abbildung definieren durch

$$f : B \to \partial B, \quad f(x) = x + \lambda(x)(x - F(x))$$

mit $\lambda(x) \ge 0$ so, daß $f(x) \in \partial B$ gilt. Wegen

$$\langle x + \lambda(x)(x - F(x)), x + \lambda(x)(x - F(x))\rangle = 1$$

erhält man

$$\lambda(x) = \frac{-\langle x, x - F(x)\rangle + \sqrt{\langle x, x - F(x)\rangle^2 + (1 - \|x\|^2)\|x - F(x)\|^2}}{\|x - F(x)\|^2}.$$

Die Abbildung f ist dann eine Retraktion von B auf ∂B der Klasse C^2, im Widerspruch zu Satz 5.26.

Mit Hilfe eines Approximationsarguments (Weierstraßscher Approximationssatz) sieht man ein, daß es auch keine *stetige* fixpunktfreie Abbildung von B auf sich geben kann. Damit erhält man schließlich den folgenden Satz als einfache Konsequenz.

Satz 5.28 (Brouwerscher Fixpunktsatz)
Ist $A \subset \mathbb{R}^n$ homöomorph zu einer n-dimensionalen abgeschlossenen Kugel, so hat jede stetige Abbildung von A in sich einen Fixpunkt.