

0 Vorbemerkungen

0.1 Bezeichnungen

Allgemeine Bezeichnungen

- griechische Buchstaben: s. Übungsblatt.
- Thm = Theorem = Hauptsatz.
- Def. = Definition, „:=“ heißt „steht für“.
- Lem. = Lemma = Hilfssatz.
- Bew. = Beweis.
- Beh. = Behauptung.
- Ann. = Annahme.
- n.V. = nach Voraussetzung.
- Vor. = Voraussetzung.
- Bsp. = Beispiel.
- Bem. = Bemerkung.
- \square = Beweisende.

Logische Symbole

- \neg = nicht.
- \wedge = und.
- \vee = oder.
- \rightarrow = impliziert.
- \iff = äquivalent.
- \forall = für alle.
- \exists = es existiert.
- $\exists!$ = es existiert genau eines.

Etwas zu Mengen

Mengen werden durch die Angabe ihrer Elemente definiert, z.B. $M = \{1, 2, 3\} = \{2, 1, 3\}$ = die Menge, die aus 1, 2 und 3 besteht.

- $M = \mathbb{N}$ = die Menge der natürlichen Zahlen.
- $M = \{x \in \mathbb{N} : x \text{ ist gerade}\}$ = gerade Zahlen.
- \emptyset = leere Menge = $\{\}$.

Operationen mit Mengen M, N :

- $x \in M$ – „ x ist ein Element von M .“ (Beispiel: $1 \in \{1, 2, 3\}$)
- $x \notin M$ – „ x ist kein Element von M .“
- $M \subseteq N$ – „ M ist Teilmenge (TM) von N ,“ d.h. wenn $x \in M$, dann auch $x \in N$,
oder: $x \in M \implies x \in N$.
- $M = N$ – „ $M \subseteq N$ und $N \subseteq M$ “ oder: M und N haben die gleichen Elemente.
- $M \cap N = \{x : x \in M \text{ und } x \in N\}$ = Schnittmenge = Menge der x , die in beiden Mengen liegen.
- $M \cup N = \{x : x \in M \text{ oder } x \in N\}$ = Vereinigungsmenge = Menge der x , die in einer der beiden Mengen liegen (oder auch in beiden).
- $M \times N = \{(x, y) : x \in M, y \in N\}$ = Menge der geordneten Paare aus M und N .
Ferner: $M^2 = M \times M$, $M^n = M \times \dots \times M$ (n -fach) ($n \in \mathbb{N}$).
- $M \setminus N = \{x \in M : x \notin N\}$ = Differenzmenge = Menge der x aus M , die nicht in N liegen.
- $\mathcal{P}(M) = \{N : N \subseteq M\}$ = Potenzmenge = die Menge aller Teilmengen von M .
- $\mathcal{P}(\{1, 2, 3\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}, \{2, 3\}, \{1, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$. Zugehörige Rechenregeln, siehe LA.

Abbildungen (Abb.) oder Funktionen (Fkt.):

Seien M und N Mengen. Eine Funktion $f : M \rightarrow N$, $x \mapsto f(x)$ besteht aus dem Definitionsbereich M , dem Bildbereich N und der Abbildungsvorschrift f , die jedem „Urbild“ $x \in M$ genau ein „Bild“ $f(x) \in N$ zuordnet. Streng genommen ist die Funktion das Tripel (f, M, N) , man schreibt meistens nur f . Beispiel: $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, $x \mapsto 2x$. Hier schreibt man auch $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, $f(x) = 2x$.

0.2 Vollständige Induktion

Wir setzen die natürlichen Zahlen $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$, ($\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$), die ganzen Zahlen \mathbb{Z} und die Brüche \mathbb{Q} samt ihren Rechenregeln voraus.

Dann gilt das *Prinzip der vollständigen Induktion* (vollst. Ind.).

$M \subseteq \mathbb{N}$ erfülle die beiden folgenden Bedingungen:

(IA) $1 \in M$

(IS) Wenn ein $n \in \mathbb{N}$ zu M gehört, dann gehört auch der Nachfolger $n + 1$ zu M .

Beh. Dann gilt $M = \mathbb{N}$.

Beweis (indirekt). Annahme Die Behauptung sei falsch. Dann existiert ein $m \in \mathbb{N} \setminus M$. Nach (IA) ist $1 \in M$. Dann liefert (IS), dass $2 = 1 + 1 \in M$. Diesen Schritt wiederholt man $(m - 1)$ mal. Somit erhält man mit $m \in \mathbb{N}$ einen Widerspruch (\nmid) zu $m \in \mathbb{N} \setminus M$. Also muss die Annahme falsch sein, d. h. die Behauptung ist wahr. \square

Eine *Aussage* ist ein „Satz“, der entweder wahr oder falsch ist, z. B. $7 + 5 = 12$, $3 + n = n$ sind Aussagen. $n + 1$ ist keine Aussage.

Beweisprinzip der vollständigen Induktion

Es seien für jedes $n \in \mathbb{N}$ Aussagen $A(n)$ gegeben. Wir wollen zeigen, dass alle Aussagen wahr sind, d. h. $M := \{n \in \mathbb{N} : A(n) \text{ ist wahr}\}$ muss gleich \mathbb{N} sein. Nach dem Prinzip der vollständigen Induktion muss man also die folgenden Behauptung zeigen:

(IA) Induktionsanfang: Man zeigt, dass $A(1)$ wahr ist.

(IS) Induktionsschluss: Es gelte die Induktionsvoraussetzung (IV): Für ein (festes, aber beliebiges) $n \in \mathbb{N}$ ist $A(n)$ wahr.

Dann zeigt man, dass auch $A(n + 1)$ wahr ist. Dann folgt, dass alle $A(n)$ wahr sind.

Beispiel 0.1. Zeige: $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{1}{2}n(n + 1)$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Beweis (per vollst. Ind.). Es sei $A(n) : 1 + \dots + n = \frac{1}{2}n(n + 1)$, $n \in \mathbb{N}$.

IA: $n = 1 : 1 = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 \implies A(1)$ ist wahr.

IS: Es gelten $A(n)$ für ein $n \in \mathbb{N}$ (IV).

Dann: $(1 + \dots + n) + n + 1 \stackrel{(IV)}{=} \frac{1}{2}n(n + 1) + (n + 1) \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 = \frac{1}{2}(n + 1)(n + 2)$

$\implies A(n + 1)$ ist wahr. \implies IS ist gezeigt. \implies Beh. nach vollst. Ind. \square

Unbefriedigend ist die Schreibweise „ $+\dots+$ “, dafür: „rekursive Def.“ des Summenzeichens: Gegeben seien $a_j \in \mathbb{Q}$ für jedes $j \in \mathbb{Z}$ mit $j \geq m$ für ein festes $m \in \mathbb{Z}$. Dann setzen wir:

$$\sum_{j=m}^m a_j := a_m.$$

Wir nehmen an, dass $\sum_{j=m}^{m+n} a_j$ für ein festes, aber beliebiges $n \in \mathbb{N}$ definiert sei. Dann definieren wir:

$$\sum_{j=m}^{m+n+1} a_j := \left(\sum_{j=m}^{m+n} a_j \right) + a_{m+n+1}.$$

Nach dem Induktionsprinzip ist die Menge: $M = \{n \in \mathbb{N} : \sum_{j=m}^{m+n} a_j \text{ ist def.}\}$ gleich \mathbb{N} .
(Korrektur: Hier braucht man das Induktionsprinzip für $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$, siehe Übung.)

Wir haben also den Ausdruck $\sum_{j=m}^k a_j$ für alle $k \in \mathbb{Z}$, $k \geq m$ definiert. Man schreibt oft

$$\sum_{j=m}^k a_j = a_m + \dots + a_k. \text{ Genauso definiert man: } \prod_{j=m}^k a_j = a_m \cdot a_{m+1} \cdot \dots \cdot a_k.$$

Es gelten die üblichen Rechenregeln, wie man per Induktion zeigt. Dazu ein Beispiel, wobei $m = 1$. Gegeben seien $a_j, b_j \in \mathbb{Q}$, $j \in \mathbb{N}$. Dann gilt:

$$A(n) : \sum_{j=1}^n a_j + \sum_{j=1}^n b_j = \sum_{j=1}^n (a_j + b_j), \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

$$\text{Beweis (per Ind.).} \quad \text{IA: } n = 1 : \sum_{j=1}^1 a_j + \sum_{j=1}^1 b_j \stackrel{\text{Def.}}{=} a_1 + b_1 \stackrel{\text{Def.}}{=} \sum_{j=1}^1 (a_j + b_j) \implies A(1)$$

ist wahr.

IS: Es gelte $A(n)$ für ein $n \in \mathbb{N}$ (IV). Dann:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n+1} a_j + \sum_{j=1}^{n+1} b_j &\stackrel{\text{Def.}}{=} \left(\sum_{j=1}^n a_j + a_{n+1} \right) + \left(\sum_{j=1}^n b_j + b_{n+1} \right) \\ &\stackrel{\text{Def.}}{=} \sum_{j=1}^n (a_j + b_j) + (a_{n+1} + b_{n+1}) \stackrel{\text{Def.}}{=} \sum_{j=1}^{n+1} (a_j + b_j). \end{aligned}$$

$$\implies A(n+1) \text{ ist wahr.} \implies \text{IS gilt.} \implies A(m) \text{ gilt } \forall m \in \mathbb{N}. \quad \square$$

Beispiel 0.2 (Geometrische Summenformel). Gegeben sei $q \in \mathbb{Q} \setminus \{1\}$.

Beh. Dann gilt:

$$A(n) : \sum_{j=0}^n q^j = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

$$\text{Beweis (per Ind.).} \quad \text{IA: } (n = 1) : \sum_{j=0}^1 q^j = q^0 + q^1 = 1 + q,$$

$$\frac{q^2 - 1}{q - 1} = \frac{(q+1)(q-1)}{q-1} = 1 + q. \text{ „="} \implies A(1) \text{ ist wahr.}$$

IS: Es gelte $A(n)$ für ein $n \in \mathbb{N}$ (IV). Dann:

$$\sum_{j=0}^{n+1} q^j = \sum_{j=0}^n q^j + q^{n+1} \stackrel{(IV)}{=} \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1} + q^{n+1} = \frac{q^{n+1} - 1 + q^{n+2} - q^{n+1}}{q - 1} = \frac{q^{n+2} - 1}{q - 1}.$$

$\implies A(n+1)$ gilt \implies (IS) ist gezeigt. \implies Ind. zeigt, dass $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. \square

Eine weitere rekursive Definition:

Fakultät: $0! = 1$, $1! = 1$. Wenn $n!$ für ein $n \in \mathbb{N}$ definiert ist, dann setzt man $(n+1)! = (n+1) \cdot n!$. Man schreibt: $n! = 1 \cdot 2 \cdots n$.

Definition (Binomialkoeffizienten). Seien $n, j \in \mathbb{N}_0$ und $n \geq j$. Dann setzt man

$$\binom{n}{j} := \frac{n!}{j!(n-j)!} = \frac{1 \cdot 2 \cdots n}{(1 \cdot 2 \cdots j)(1 \cdot 2 \cdots (n-j))}.$$

Eigenschaften: ($n, j \in \mathbb{N}_0, n \geq j$)

$$\begin{aligned} \text{a) } \binom{n}{n-j} &= \frac{n!}{(n-j)!(n-n+j)!} = \binom{n}{j}. \\ \binom{n}{0} &= \frac{n!}{0!n!} = 1 = \binom{n}{n}. \end{aligned} \tag{0.1}$$

$$\begin{aligned} \text{b) Sei } j \geq 1. \text{ Dann: } \binom{n}{j-1} + \binom{n}{j} &= \frac{n! \cdot j}{(j-1)!(n-j+1)! \cdot j} + \frac{n!(n-j+1)}{j! \cdot (n-j)!(n-j+1)} \\ &\stackrel{\text{Def. Fak.}}{=} \frac{j \cdot n! + (n-j+1)n!}{j!(n-j+1)!} \stackrel{\text{Def. Fak.}}{=} \frac{(n+1)!}{j!(n+1-j)!} \stackrel{\text{Def.}}{=} \binom{n+1}{j} \end{aligned} \tag{0.2}$$

Beispiel 0.3 (Binomischer Satz). Seien $a, b \in \mathbb{Q}$, $n \in \mathbb{N}$. Dann

$$A(n) : (a+b)^n = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} a^{n-j} b^j, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Beweis (per Ind.). IA: ($n = 1$)

$$\sum_{j=0}^1 \binom{1}{j} a^{1-j} b^j \stackrel{(0.1)}{=} 1 \cdot a^1 \cdot b^0 + 1 \cdot a^0 \cdot b^1 = (a+b)^1.$$

$\implies A(1)$ ist wahr.

IS: $A(n)$ gelte für ein $n \in \mathbb{N}$ (IV).

$$\begin{aligned}(a+b)^{n+1} &= (a+b)(a+b)^n \stackrel{\text{(IV)}}{=} (a+b) \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} a^{n-j} b^j \\ &= \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} a^{n-j+1} \cdot b^j + \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} a^{n-j} \cdot b^{j+1}\end{aligned}$$

setze $l = j + 1$ ($\iff j = l - 1$)

$$\begin{aligned}&= \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} a^{n+1-j} \cdot b^j + \sum_{l=1}^{n+1} \binom{n}{l-1} a^{n+1-l} \cdot b^l \\ &\stackrel{\text{(0.1)}}{=} \underbrace{a^{n+1} \sum_{j=1}^n \left(\binom{n}{j} + \binom{n}{j-1} \right)}_{\stackrel{\text{(0.2)}}{=} \binom{n+1}{j}} \underbrace{a^{n+1-j} \cdot b^j}_{(j=l \text{ gesetzt})} + \underbrace{1 \cdot a^0 \cdot b^{n+1}}_{(j=n+1)} \\ &= \sum_{j=0}^{n+1} \binom{n+1}{j} a^{n+1-j} \cdot b^j\end{aligned}$$

$\implies A(n+1)$ ist gezeigt \implies (IS) gilt. \implies Beh. folgt mit vollst. Ind. □