15. Integration von Treppenfunktionen

Definition

(1) $\mathfrak{M} := \{I : I \text{ ist ein } \textit{beschränktes} \text{ Intervall in } \mathbb{R}\}$. Also: $I \in \mathfrak{M} :\iff \exists a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b : I = [a, b]$ oder $I = (a, b)$ oder $I = [a, b)$ oder $I = (a, b]$ oder $I = \{a\}$.

In den ersten 4 Fällen setzt man $|I| := b - a$ und $|\{a\}| := 0$ (Intervalllänge).

(2) Sei $n \in \mathbb{R}$ und es seien $I_1, I_2, \ldots, I_n \in \mathfrak{M}$. Dann heißt $Q := I_1 \times I_2 \times \ldots \times I_n$ ein **Quader im** $\mathbb{R}^n$ und $v_n(Q) := |I_1| \cdot |I_2| \cdot \ldots \cdot |I_n|$ das (n-dim.) **Volumen von** Q.

Beispiel
($n = 2$)

(i) $Q = [a_1, b_1) \times [a_2, b_2],\ v_2(Q) = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2)$.

(ii) $Q = [a_1, b_1) \times \{a\},\ v_2(Q) = 0$.

(3) Eine Funktion $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ heißt eine **Treppenfunktion** im $\mathbb{R}^n :\iff \exists$ Quader $Q_1, \ldots, Q_m$ im $\mathbb{R}^n$ mit:

(i) $Q_j \cap Q_k = \emptyset$ $(j \neq k)$

(ii) φ ist auf jedem Q_j konstant

(iii) $\varphi = 0$ auf $\mathbb{R}^n \backslash (Q_1 \cup \ldots \cup Q_m)$

$\mathscr{T}_n$ = **Menge aller Treppenfunktionen in** $\mathbb{R}^n$.

Der nächste Satz wird hier nicht bewiesen:

Satz 15.1 (Disjunkte Quaderzerlegung und Treppenfunktionsraum)

(1) *Es seien* $Q_1', Q_2', \ldots, Q_k'$ *Quader im* $\mathbb{R}^n$*. Dann ex. Quader* $Q_1, Q_2, \ldots, Q_m$ *im* $\mathbb{R}^n$: $Q_1' \cup Q_2' \cup \ldots \cup Q_k' = Q_1 \cup Q_2 \cup \ldots \cup Q_m$ *und* $Q_j \cap Q_k = \emptyset$ $(j \neq k)$.

Beachte: $Q_1, \ldots, Q_m$ sind *nicht* eindeutig bestimmt.

(2) $\mathscr{T}_n$ ist ein reeller Vektorraum.

(3) Aus $\varphi, \psi \in \mathscr{T}_n$ folgt: $|\varphi|, \varphi \cdot \psi \in \mathscr{T}_n$.

Definition
Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$.

$$1_A(x) := \begin{cases} 1 & \text{, falls } x \in A \\ 0 & \text{, sonst} \end{cases}$$

1_A heißt die **charakteristische Funktion von** A.

Aus 15.1 folgt:

Ist $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine Funktion, dann gilt: $\varphi \in \mathscr{T}_n \iff \exists$ Quader $Q_1, \ldots, Q_m$ in $\mathbb{R}^n$ und $c_1, \ldots, c_m \in \mathbb{R}$:

$$\varphi = \sum_{j=1}^{m} c_j 1_{Q_j} \ (*)$$

Beachte:

(1) Die Darstellung von φ in (*) ist i.A. *nicht* eindeutig.

(2) In (*) wird *nicht* gefordert, dass $Q_j \cap Q_k = \emptyset$ $(j \neq k)$.

Beispiel
FIXME: Bild

$\varphi = 2 \cdot 1_{Q_1} + 3 \cdot 1_{Q_2}$.

Satz 15.2 (Integral über Treppenfunktion (mit Definition))
Sei $\varphi \in \mathscr{T}_n$ wie in (*).

$$\int \varphi dx := \int \varphi(x) dx := \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) dx := \int_{\mathbb{R}^n} \varphi dx := \sum_{j=1}^{m} c_j v_n(Q_j)$$

Behauptung: $\int \varphi dx$ ist wohldefiniert, d.h. obige Def. ist unabhängig von der Darstellung von φ in (*).

Vorbemerkung: Sei $Q = I_1 \times \ldots \times I_n$ Quader im $\mathbb{R}^n$ $(I_j \in \mathfrak{M})$. Sei $p \in \{1, \ldots, n-1\}$. $P := I_j \times \ldots \times I_p,\ R := I_{p+1} \times \ldots \times I_n$. P ist ein Quader im $\mathbb{R}^p$. R ist ein Quader im $\mathbb{R}^{n-p}$. $Q = P \times R$. $v_n(Q) = v_p(P) \cdot v_{n-p}(R)$. Ist $z = (x, y) \in \mathbb{R}^n,\ x \in \mathbb{R}^p,\ y \in \mathbb{R}^{n-p} \implies 1_Q(z) = 1_P(x) \cdot 1_R(y)$.

Beweis (von 15.2)
Induktion nach n.

IA: $n = 1$: Übung

IV: Die Beh. sei gezeigt für *jedes* $q \in \{1, \ldots, n-1\}$.

IS: Sei $p \in \{1, \ldots, n-1\}$. Vorbemerkung $\implies$ $\exists$ Quader $P_1, \ldots, P_m$ im $\mathbb{R}^p$ und Quader $R_1, \ldots, R_m$ im $\mathbb{R}^{n-p}$: $Q_j = P_j \times R_j$ $(j = 1, \ldots, m)$. Für $z \in \mathbb{R}^n$ schreiben wir $z = (x, y),\ x \in \mathbb{R}^p, y \in \mathbb{R}^{n-p}$.

Sei $y \in \mathbb{R}^{n-p}$ fest. $\varphi_y(x) := \varphi(x, y)$ $(x \in \mathbb{R}^p)$.

$\varphi_y(x) = \varphi(x,y) \overset{(*)}{=} \sum_{j=1}^m c_j 1_{Q_j}(x,y) \overset{\text{Vorbem.}}{=} \sum_{j=1}^m c_j 1_{P_j}(x) \cdot 1_{R_j}(y) = \sum_{j=1}^m \underbrace{c_j 1_{R_j}(y)}_{=:d_j = d_j(y)} \cdot 1_{P_j}(x) = \sum_{j=1}^m d_j 1_{P_j}(x)$

$\implies \varphi_y = \sum_{j=1}^m d_j 1_{P_j} \implies \varphi_y \in \mathscr{T}_p$

IV $\implies \sum_{j=1}^m d_j v_p(P_j) = \int_{\mathbb{R}^p} \varphi_y(x)dx$ ist unabhängig von der Darstellung von φ_y (und damit auch von φ).

Def. $\phi : \mathbb{R}^{n-p} \to \mathbb{R}$ durch $\phi(y) := \int_{\mathbb{R}^p} \varphi_y(x)dx = \sum_{j=1}^m d_j(y) v_p(P_j) = \sum_{j=1}^m c_j 1_{R_j}(y) v_p(P_j) = \sum_{j=1}^m \underbrace{c_j v_p(P_j)}_{=:e_j} 1_{R_j}(y)$

$\implies \phi = \sum_{j=1}^m e_j \cdot 1_{R_j} \implies \phi \in \mathscr{T}_{n-p}$.

IV $\implies \int_{\mathbb{R}^{n-p}} \phi(y)dy = \sum_{j=1}^m e_j v_{n-p}(R_j) = \sum_{j=1}^m c_j v_p(P_j) v_{n-p}(R_j) = \sum_{j=1}^m c_j v_n(Q_j)$ ist unabhängig von der Darstellung von φ. ∎

Aus dem Beweis von 15.2 folgt:

Satz 15.3 (Satz von Fubini für Treppenfunktionen)
Ist $\varphi \in \mathscr{T}_n$ und $p \in \{1, \dots, n-1\}$ so gilt:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(z)dz = \int_{\mathbb{R}^{n-p}} \left(\int_{\mathbb{R}^p} \varphi(x,y)dx \right) dy = \int_{\mathbb{R}^p} \left(\int_{\mathbb{R}^{n-p}} \varphi(x,y)dy \right) dx$$

Satz 15.4 (Eigenschaften des Integrals über Treppenfunktionen)
Es seien $\varphi, \psi \in \mathscr{T}_n$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

(1) $\displaystyle\int (\alpha\varphi + \beta\psi)dx = \alpha \int \varphi dx + \beta \int \psi dx$

(2) $\displaystyle\left| \int \varphi dx \right| \leq \int |\varphi| dx$

(3) Aus $\varphi \leq \psi$ auf $\mathbb{R}^n$ folgt $\displaystyle\int \varphi dx \leq \int \psi dx$

Beweis

(1) Übung

(2) Sei $\varphi = \sum_{j=1}^m c_j 1_{Q_j}$ wie in (*). Wegen 15.1: O.B.d.A: $Q_j \cap Q_k = \emptyset$ $(j \neq k)$. Dann: $|\varphi| = \sum_{j=1}^m |c_j| 1_{Q_j}$.

$\implies |\int \varphi dx| = |\sum_{j=1}^m c_j v_n(Q_j)| \leq \sum_{j=1}^m |c_j| v_n(Q_j) = \int |\varphi| dx$.

(3) Übung ∎