

## 2 Morphismen von Schemata

### §6 Einbettungen

#### Definition 2.6.1

Sei  $i : (Y, \mathcal{O}) \rightarrow (X, \mathcal{O}_X)$  ein Morphismus von Schemata.

- (a)  $i$  heißt *offene Einbettung*, wenn  $i$  ein Isomorphismus auf ein offenes Unterschema von  $X$  ist.
- (b)  $i$  heißt *abgeschlossene Einbettung*, wenn  $i$  ein Homöomorphismus auf eine abgeschlossene Teilmenge  $Z := i(Y)$  von  $X$  ist und  $i^\sharp : \mathcal{O}_X \rightarrow i_* \mathcal{O}_Y$  surjektiv ist.  $(Z, i_* \mathcal{O})$  heißt dann *abgeschlossenes Unterschema* von  $X$ .

#### Beispiele 2.6.2

- (a) Sei  $X = \operatorname{Spec} R$  affin. Die abgeschlossenen Teilmengen von  $X$  sind die  $V(I)$ , ( $I \subseteq R$  Ideal).  $V(I)$  wird zum abgeschlossenen Unterschema durch die Schemastruktur als  $\operatorname{Spec}(R/I)$ . Die abgeschlossene Einbettung  $\operatorname{Spec}(R/I) \rightarrow \operatorname{Spec} R$  wird induziert von der Restklassenabbildung  $R \rightarrow R/I$ .  
**Warnung:**  $V(I) = V(I^2)$ , aber  $R/I = R/I^2$  gilt im Allgemeinen **nicht**!
- (b) Seien  $k$  ein Körper,  $R = k[X, Y]$  und  $I = (X^2, XY) \subsetneq (X)$ . Es gilt  $V(I) = V(X)$  ( $y$ -Achse). In  $V(I)$  ist außerhalb von  $0 = (0, 0) = V(X, Y)$ , also auf

$$D(Y) = \operatorname{Spec} \left( k[X, Y]/I \right)_Y = \operatorname{Spec}(k[Y]_Y)$$

das abgeschlossene Unterschema  $V(I)$ , also  $\operatorname{Spec}(R/I)$ , isomorph zu  $\operatorname{Spec}(R/(X))$ . ?

Aber:  $\mathcal{O}_{\operatorname{Spec}(R/I), 0}$  enthält ein nilpotentes Element, nämlich  $X$ .

#### Erinnerung / Definition 2.6.3

(Übungblatt 3, Aufgabe 1)

Ein Schema  $(X, \mathcal{O}_X)$  heißt *reduziert*, wenn für jedes  $x \in X$  der Halm  $\mathcal{O}_{X, x}$  ein reduzierter Ring ist.  
 Äquivalent: Für jedes offene  $U \subseteq X$  ist  $\mathcal{O}_X(U)$  ein reduzierter Ring.

#### Proposition 2.6.4

Zu jedem Schema  $(X, \mathcal{O}_X)$  gibt es ein eindeutiges abgeschlossenes Unterschema  $X_{red}$  von  $X$ , das folgende UAE erfüllt:

Ist  $f : Y \rightarrow X$  ein Morphismus von einem reduzierten Schema  $Y$ , so gibt es genau einen Morphismus  $\tilde{f} : Y \rightarrow X_{red}$  mit

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{f} & X \\ & \searrow \tilde{f} & \uparrow i \\ & & X_{red} \end{array}$$

$f = i \circ \tilde{f}$ . Dabei ist  $X = X_{red}$  (gleich als topologische Räume).

**Beweis** (1) Sei  $X = \operatorname{Spec} R$  affin. Setze  $X_{red} := \operatorname{Spec}(R/\sqrt{(0)})$ , dann ist  $X_{red}$  ein reduziertes abgeschlossenes Unterschema.

UAE: Sei  $Y$  reduziert,  $f : Y \rightarrow X$  ein Morphismus mit zugehörigem Ringhomomorphismus  $\alpha_f : R \rightarrow \mathcal{O}_Y(Y)$ .

Zu zeigen:  $\sqrt{(0)} \subseteq \operatorname{Kern}(\alpha_f)$

Sei also  $a \in \sqrt{(0)}$ , also  $a^n = 0$  für  $n \geq 1$ . Daraus folgt:  $(\alpha_f(a))^n = 0$ . Und weil  $Y$  reduziert ist:  $\alpha_f(a) = 0$ .

(2) Allgemeiner Fall:

Benutze:

$$(R/\sqrt{(0)})_f \cong R_f/\sqrt{(0)}$$

□

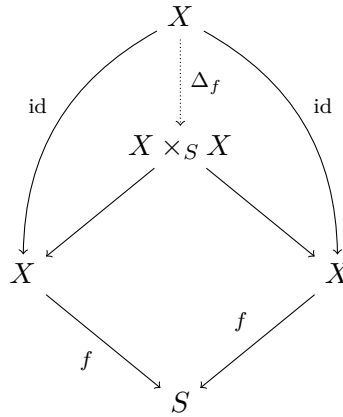
### Folgerung 2.6.5

Zu jedem abgeschlossenen Unterschema  $Z$  von  $X$  gibt es ein eindeutig bestimmtes reduziertes Unterschema  $Z_{red}$  (die “reduzierte induzierte Struktur”).

## §7 Separierte Morphismen

### Definition 2.7.1

- (a) Ein Morphismus  $f : X \rightarrow S$  von Schemata heißt *separiert*, wenn der “Diagonalmorphismus”  $\Delta_f : X \rightarrow X \times_S X$  eine abgeschlossene Einbettung ist.



- (b)  $X$  heißt *separiert*, wenn  $X \rightarrow \operatorname{Spec} \mathbb{Z}$  separiert ist.

### Beispiele

Sei  $X$  die affine Gerade mit doppeltem Nullpunkt.  $X$  ist nicht separiert (über  $k$ ):

Seien also  $S = \operatorname{Spec} k, U = \mathbb{A}_k^1 \setminus \{(0, 0)\} = \operatorname{Spec}(k[X]_X)$  und  $X$  die Verklebung von  $\mathbb{A}_k^1$  mit sich selbst längs  $U$ . Es ist

$$U \times_S U = \mathbb{A}_k^2 - \text{“Achsenkreuz”}$$

$$\Delta = \Delta_f(X) = \{(u, u) : u \in U\} \cup \{(0_1, 0_1), (0_2, 0_2)\}$$

Es gilt

$$\bar{\Delta} = \Delta \cup \{(0_1, 0_2), (0_2, 0_1)\}$$

denn: jede Umgebung von  $(0_1, 0_2)$  enthält Punkte von  $\Delta$ !

**Bemerkung 2.7.2**

Jeder Morphismus von affinen Schemata ist separiert.

**Beweis** Sei  $X = \operatorname{Spec} B, Y = \operatorname{Spec} A, f : X \rightarrow Y, \alpha : A \rightarrow B$ ,  $\alpha$  der Ringhomomorphismus zu  $f$ . Dann ist  $X \times_Y X = \operatorname{Spec}(B \otimes_A B)$ .  $\Delta$  wird induziert von

$$\mu : \begin{array}{ccc} B \otimes_A B & \longrightarrow & B \\ b_1 \otimes b_2 & \longmapsto & b_1 \cdot b_2 \end{array}$$

$\mu$  ist surjektiv, also ist  $\Delta$  abgeschlossen. (Das ist so, weil ein surjektiver Ringhomomorphismus Primideale auf Primideale abbildet und deswegen alle Primideale, die

$$\bigcap_{\mathfrak{p} \text{ Primideal}} \mu^{-1}(\mathfrak{p})$$

enthalten, schon Urbilder von Primidealen waren.) □

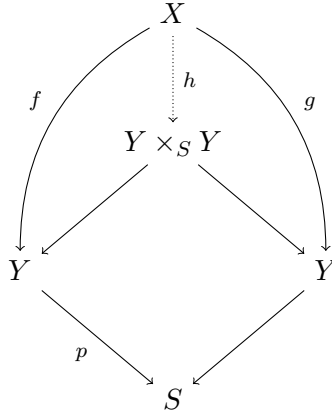
**Bemerkung 2.7.3**

Seien  $f, g : X \rightarrow Y$  Morphismen von  $S$ -Schemata. Ist  $Y$  über  $S$  separiert, so ist

$$E(f, g) := \{x \in X : f(x) = g(x)\}$$

abgeschlossen in  $X$ .

**Beweis** Sei  $h : X \rightarrow Y \times_S Y$  der von  $f$  und  $g$  induzierte Morphismus.



Dann ist  $E(f, g) = h^{-1}(\Delta)$ , ( $\Delta = \Delta_p(Y)$ ). Also ist  $E(f, g)$  abgeschlossen. □

**Proposition 2.7.4**

Seien  $(X, \mathcal{O}_X)$  ein Schema,  $R$  ein diskreter Bewertungsring,  $K = \operatorname{Quot}(R)$ ,  $T = \operatorname{Spec} R$ . Dann gibt es eine natürliche Bijektion

$$\operatorname{Hom}(T, X) \longrightarrow \{(x_0, x_1, i) : x_0, x_1 \in X \text{ mit } x_0 \in \overline{\{x_1\}}, i : \kappa(x_1) \rightarrow K \text{ Körperhomomorphismus} \\ \text{mit } i(\mathcal{O}_{Z, x_0}) \subseteq R \text{ und } i(m_{Z, x_0}) = m_R \cap i(\mathcal{O}_{Z, x_0})\},$$

wobei  $Z = \overline{\{x_1\}}_{\text{red}}$  sei. Dann ist  $\mathcal{O}_{Z, x_1} = \kappa(x_1) = \mathcal{O}_{X, x_1}/m_{x_1}$ .

**Beweis** Für  $f : T \rightarrow X$  sei  $x_0 := f(m_R), x_1 = f(0), i = f^\#_{x_1}$ . Da  $T$  reduziert ist, "ist"  $f$  ein Morphismus nach  $Z$ :

$$\begin{array}{ccc} T & \xrightarrow{f} & X \\ & \searrow f & \uparrow \\ & & Z \end{array}$$

$f^\#$  induziert also einen Morphismus

$$\mathcal{O}_{Z,x_0} \longrightarrow \mathcal{O}_{T,m} = R$$

mit  $f^\#(m_{Z,x_0}) \subseteq m$ .

Umgekehrt induziert jedes  $i : \mathcal{O}_{Z,x_0} \hookrightarrow R$  einen Morphismus

$$\mathrm{Spec} R = T \rightarrow \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{Z,x_0}) \rightarrow Z \rightarrow X$$

□

### Satz 2

Sei  $f : X \rightarrow Y$  ein Morphismus noetherscher Schemata.  $f$  ist genau dann separiert, wenn es zu jedem “Bewertungsdiagramm”

$$\begin{array}{ccc} U & \longrightarrow & X \\ \downarrow & \nearrow h & \downarrow f \\ T & \longrightarrow & Y \end{array}$$

( $T = \mathrm{Spec} R$ ,  $R$  diskreter Bewertungsring,  $U = \mathrm{Spec} K$ ,  $K = \mathrm{Quot} R$ )

höchstens einen Morphismus  $h : T \rightarrow X$  gibt, der das Diagramm kommutativ macht.

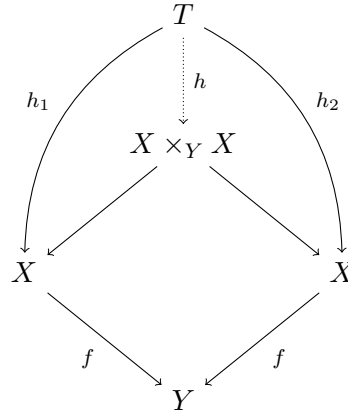
### Beispiele

Seien  $X$  die affine Gerade mit doppeltem Nullpunkt,  $Y = \mathrm{Spec} k$  für einen Körper  $k$ ,  $R = k[X]_{(X)}$ ,  $K = k(X)$ . Sei weiter  $X' = \mathrm{Spec} k[X]$ , dann existiert ein Morphismus, der das Bewertungsdiagramm kommutativ macht:

$$\begin{array}{ccc} K & \longleftarrow & k[X] \\ \uparrow & \nwarrow h^\# & \uparrow \\ k[X]_{(X)} & \longleftarrow & k \end{array}$$

Also gibt es für beide offenen Teile von  $X$ , die gleich  $\mathbb{A}_k^1$  sind, je eine Fortsetzung.

**Beweis** “ $\Rightarrow$ ” Sei ein Bewertungsdiagramm (mit den üblichen Bezeichnungen) gegeben. Zwei  $h_1, h_2 : T \rightarrow X$  Fortsetzungen von  $h_0 : U \rightarrow X$ , induzieren einen Morphismus  $h$ :



Es ist  $h_1(0) = h_0(0) = h_2(0)$

$$\begin{aligned}
 &\Rightarrow h(0) \in \Delta = \Delta_f(X) \Rightarrow h(m) \in \overline{\{h(0)\}} \subseteq \Delta \\
 &\Rightarrow h_1(m) = h_2(m)
 \end{aligned}$$

“ $\Leftarrow$ ” Nach Übungsblatt 6, Aufgabe 1 genügt es zu zeigen:  $\Delta$  ist abgeschlossen in  $X \times_Y X$ .

**Behauptung (1)**

Ist für jedes  $x_1 \in \Delta$  auch  $\overline{\{x_1\}} \subseteq \Delta$ , so ist  $\Delta$  abgeschlossen.

Seien also  $x_1 \in \Delta, x_0 \in \overline{\{x_1\}}, Z := \overline{\{x_1\}}_{red}, \mathcal{O} := \mathcal{O}_{Z, x_0}, K = \mathcal{O}_{Z, y_1} = \kappa(x_1)$

**Behauptung (2)**

Es gibt einen diskreten Bewertungsring  $R \subseteq K$ , der  $\mathcal{O}$  dominiert, das heißt  $\mathcal{O} \subseteq R$  und  $m_{\mathcal{O}} = m_R \cap \mathcal{O}$ .

Dann gibt es nach Proposition 2.7.4 einen Morphismus  $h : T = \text{Spec } R \rightarrow X \times_Y X$  mit  $h(0) = x_1$  und  $h(m) = x_0$ . Für  $h_i = pr_i \circ h, i = 1, 2$ , ist  $f \circ h_1 = f \circ h_2, h_i : T \rightarrow X$ .

Da  $x_1 \in \Delta$ , ist  $h_1(0) = h_2(0)$ . Mit  $h_0 := h|_U$  folgt:  $h_1 = h_2 \Rightarrow h(m) \in \Delta$ .  $\square$

**Beweis (2)**  $m = m_{\mathcal{O}}$  ist endlich erzeugt, etwa  $m = (x_1, \dots, x_n)$ . Sei  $\mathcal{O}' = \mathcal{O}[\frac{x_2}{x_1}, \dots, \frac{x_n}{x_1}]$  und  $I = X_1 \cdot \mathcal{O}'$ . ( $\mathcal{O} I \neq \mathcal{O}'$ )

Krullscherr Hauptidealsatz: es gibt ein Primideal  $\mathfrak{p} \subseteq \mathcal{O}'$  der Höhe 1 mit  $I \subseteq \mathfrak{p}$  (Eisenbud Theorem 10.1)

$\mathcal{O}'_{\mathfrak{p}}$  ist ein noetherscher lokaler Ring der Dimension 1. Sei  $\tilde{\mathcal{O}}$  der ganze Abschluss von  $\mathcal{O}'_{\mathfrak{p}}$  in  $K$ .

$\Rightarrow \tilde{\mathcal{O}}$  ist normal,  $\dim \tilde{\mathcal{O}} = 1, \mathcal{O} \tilde{\mathcal{O}}$  lokal,  $\tilde{\mathcal{O}}$  ist noethersch (Satz von Krull-Akizuki, Eisenbud Theorem 11.13)

$\Rightarrow \tilde{\mathcal{O}}$  ist diskreter Bewertungsring. Es gilt:

$m_{\tilde{\mathcal{O}}} \cap \mathcal{O} \subseteq m_{\mathcal{O}}$ : Klar.

$m_{\tilde{\mathcal{O}}} \cap \mathcal{O} \supseteq m_{\mathcal{O}}$ , weil  $X_1, \dots, X_n \in I$ .  $\square$

Behauptung 1 ist (für  $f = \Delta$ ) ein Spezialfall von

**Proposition 2.7.5**

Sei  $f : W \rightarrow X$  Morphismus noetherscher Schemata. Dann gilt:

$f(W)$  ist abgeschlossen

$\Leftrightarrow f(W)$  ist abgeschlossen unter Spezialisierung: Für  $x_1 \in f(W)$  und  $x_0 \in \overline{\{x_1\}}$  ist  $x_0 \in f(W)$ .

**Beweis** “ $\Rightarrow$ ” Klar.

“ $\Leftarrow$ ” Sei  $Y = \overline{f(W)}$  (als abgeschlossenes Unterschema mit reduzierter Struktur)

Sei  $y \in Y$ ; zu zeigen:  $y \in f(W)$ .

OE  $Y = \text{Spec } A$  affin, sei  $B = \mathcal{O}_W(W)$ .  $f$  wird also induziert von  $\alpha : A \rightarrow B$  und  $\alpha$  ist injektiv, weil  $f$  dominant ist (AG I, Proposition 6.8 (b)). Sei  $y' \subseteq y$  ein minimales Primideal, dann gilt  $y \in \overline{\{y'\}}$ . Also genügt es zu zeigen:  $y' \in f(W)$  (das ist die Voraussetzung)

Es gilt  $f^{-1}(y') = \text{Spec}(\underbrace{B \otimes_A \kappa(y')}_{=:R})$ . Zu zeigen:  $R \neq \{0\}$

Es ist  $\kappa(y') = A_{y'}/y' A_{y'}$  und  $A_{y'}$  ist ein Körper, weil  $A$  reduziert ist. ? Damit gilt:  $R = B \otimes_A A_{y'}$ .

Weiter gilt:  $A \subseteq B \Rightarrow A \otimes_A A_{y'} \subseteq B \otimes_A A_{y'} = R$ . Und  $A_{y'}$  ist ein flacher  $A$ -Modul, weil er eine Lokalisierung ist.  $\square$

### Beispiele

$A = k[X, Y]/(X \cdot Y)$ ,  $y' = (X) \Rightarrow A_{y'} = k(Y)$ .

### Folgerung 2.7.6

Für noethersche Schemata gilt:

- (a) Affine und abgeschlossene Einbettungen sind separiert.
- (b) Die Komposition separierter Morphismen ist separiert.
- (c) “separiert” ist stabil unter Basiswechsel.
- (d)  $g \circ f$  separiert  $\Rightarrow f$  separiert.
- (e) “separiert” ist lokal bezüglich der Basis, das heißt:  
 $f : X \rightarrow Y$  separiert  $\Leftrightarrow$  es existiert eine offene Überdeckung  $(U_i)$  von  $Y$ , sodass

$$f|f^{-1}(U_i) : f^{-1}(U_i) \rightarrow U_i \text{ separiert}$$

**Beweis** Übung!  $\square$

## §8 Eigentliche Morphismen

### Definition 2.8.1

Sei  $f : X \rightarrow Y$  ein Morphismus von Schemata.

- (a)  $f$  heißt *lokal von endlichem Typ*, wenn es eine offene Überdeckung  $(U_i)_{i \in \mathcal{I}}$ , mit  $U_i = \text{Spec } A_i$ , von  $Y$  gibt und für jedes  $i \in \mathcal{I}$  eine offene Überdeckung  $(U_{ij})_{j \in \mathcal{J}_i}$ , mit  $U_{ij} = \text{Spec } B_{ij}$ , von  $f^{-1}(U_i)$  existiert, sodass für alle  $i, j$   $B_{ij}$  vermöge  $f^\#$  zu einer endlich erzeugten  $A_i$ -Algebra wird.
- (b)  $f$  heißt *von endlichem Typ*, wenn in (a) alle  $J_i$  endlich gewählt werden können.
- (c)  $f$  heißt *endlich*, wenn in (a) jedes  $J_i$  einelementig gewählt werden kann (also  $f^{-1}(U_i) =: \text{Spec } B_i$ ) und  $B_i$  ein endlich erzeugter  $A_i$ -Modul ist.

### Bemerkung 2.8.2

In Definition 2.8.1 kann “es gibt eine offene affine Überdeckung” ersetzt werden durch “für jedes offene affine  $U \subseteq Y$  gilt”.

**Beweis** (a) Übungsblatt 5, Aufgabe 2, (b) und (c) analog.  $\square$

### Bemerkung 2.8.3

Ist  $f : X \rightarrow Y$  endlich, so ist  $f^{-1}(y)$  für jedes  $y \in Y$  eine endliche Menge.

**Beweis** Sei  $\mathcal{O}_Y = \text{Spec } A$  affin. Dann ist auch  $X = \text{Spec } B$  affin. Es ist  $f^{-1}(y) = \text{Spec}(B \otimes_A \kappa(y))$ .  $B \otimes_A \kappa(y)$  ist eine  $\kappa(y)$ -Algebra und, da  $B$  ein endlich erzeugter  $A$ -Modul ist, ist  $B \otimes_A \kappa(y)$  ein endlich dimensionaler  $\kappa(y)$ -Vektorraum. Es ist  $\dim(B \otimes_A \kappa(y)) = 0$  (?), also  $\text{Spec}(B \otimes_A \kappa(y))$  endlich.  $\square$

#### Definition 2.8.4

Ein Morphismus  $f : X \rightarrow Y$  heißt *eigentlich*, wenn er von endlichem Typ, separiert und universell abgeschlossen ist, das heißt für jeden Basiswechsel

$$\begin{array}{ccc} X \times_Y Y' & \longrightarrow & X \\ f' \downarrow & & \downarrow f \\ Y' & \longrightarrow & Y \end{array}$$

ist  $f'$  abgeschlossen.

#### Beispiele

$f : \mathbb{A}_k^1 \rightarrow \text{Spec } k$  ist abgeschlossen. Basiswechsel:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{A}_k^2 & \longrightarrow & \mathbb{A}_k^1 \\ f' \downarrow & & \downarrow f \\ \mathbb{A}_k^1 & \longrightarrow & \text{Spec } k \end{array}$$

$f'$  ist nicht abgeschlossen, denn:

$V = V(XY - 1)$  ist abgeschlossene Teilmenge von  $\mathbb{A}_k^2$ , aber  $f'(V) = \mathbb{A}_k^1 - \{0\}$  ist nicht abgeschlossen.

#### Satz 3

Seien  $X, Y$  noethersche Schemata,  $f : X \rightarrow Y$  ein Morphismus von endlichem Typ.  $f$  ist genau dann eigentlich, wenn es zu jedem Bewertungsdiagramm

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{\varphi} & X \\ \downarrow & \nearrow h & \downarrow f \\ T & \longrightarrow & Y \end{array}$$

genau eine Fortsetzung  $h$  gibt.