

29.11.06

Das `latexki`-Team

Stand: 28. September 2017

**Beispiel 1.66 Integraloperatoren**

Sei  $X = C([0, 1])$  und  $k \in C([0, 1]^2)$ . Sei  $f \in X$ . Setze  $(Tf)(t) = \int_0^1 k(t, s)f(s)ds$  für  $t \in [0, 1]$ . Sei  $t_n \rightarrow t$  in  $[0, 1]$ .  $|Tf(t_n) - Tf(t)| \leq \int_0^1 |k(t_n, s) - k(t, s)||f(s)|ds \leq \int_0^1 \|f\|_\infty \sup_{s \in [0, 1]} |k(t_n, s) - k(t, s)| \rightarrow 0$  ( $n \rightarrow \infty$ ). Da  $k$  glm stetig  $\Rightarrow Tf \in X$ . Klar:  $T : X \rightarrow X$  ist linear

$$\|Tf\|_\infty \leq \underbrace{\sup_{t \in [0, 1]^2} \int_0^1 |k(t, s)|ds}_{=: \kappa \leq \|k\|_\infty < \infty} \|f\|_\infty$$

$\Rightarrow T \in B(X), \|T\| \leq \kappa$ .

Beh:  $\|T\| = \kappa$ .

Bew:  $\exists t_0 \in [0, 1]$  mit  $\kappa = \int_0^1 |k(t_0, s)|ds$ . Setze  $f_n(s) = \frac{\overline{k(t_0, s)}}{|k(t_0, s)| + \frac{1}{n}}$ ,  $s \in [0, 1]$  für  $n \in \mathbb{N} \Rightarrow f_n \in X, \|f_n\|_\infty \leq 1 \Rightarrow \|T\| \geq \|Tf_n\|_\infty \geq |Tf(t_0)| = \int_0^1 \underbrace{\frac{|k(t_0, s)|^2}{|k(t_0, s)| + \frac{1}{n}}}_{\leq |k(t_0, s)|} ds \rightarrow$

$\kappa$  ( $n \rightarrow \infty$ )  $\xrightarrow{\lim_{n \rightarrow \infty}} \|T\| \geq \kappa$ .

■

Fast genau so zeigt man, dass  $(Tf)(t) = \int_0^t k(t, s)f(s)ds$ ,  $t \in [0, 1]$ ,  $f \in X$  einen Operator  $T \in B(X)$  mit

$$\|T\| = \sup_{t \in [0, 1]} \int_0^t |k(t, s)|ds \quad \text{definiert.}$$

**Beispiel 1.67 Differentialoperatoren**

a)  $X = C^1([0, 1])$  mit  $\|f\|_{C^1} = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$ ,  $Y = C([0, 1])$ . Setze  $Df = f'$  für  $f \in X \Rightarrow$  Klar:  $D : X \rightarrow Y$  ist linear. Ferner:  $\|Df\|_\infty = \|f'\|_\infty \leq \|f\|_{C^1} \Rightarrow D \in B(X, Y)$  mit  $\|D\| \leq 1$ .

Beh:  $\|D\| = 1$ .

Bew: Wähle  $f_n(t) = \frac{1}{n} \sin(n-1)t$ ,  $n \geq 3, t \in [0, 1] \Rightarrow f_n \in X, \|f_n\|_\infty = \frac{1}{n}$ ,  $\|f'_n\|_\infty = 1 - \frac{1}{n} \Rightarrow \|f_n\|_{C^1} = 1$  und  $\|D\| \geq \|Df_n\|_{C^1} = 1 - \frac{1}{n} \xrightarrow{\sup_n} \|D\| \geq 1$ .

■

Beachte:  $f_n \rightarrow 0$  bzgl  $\|\cdot\|_\infty$  oder  $\|Df_n\|_\infty \rightarrow 1$  ( $n \rightarrow \infty$ ), also:  $D : (X, \|\cdot\|_\infty) \rightarrow (Y, \|\cdot\|_\infty)$  ist unstetig.

b) Sei  $X = C_b^2(\mathbb{R}^d) = \{f \in C^2(\mathbb{R}^d) : \|f\|_{C_b^2} = \|f\|_\infty + \sum_{k=1}^d \|\partial_k f\|_\infty + \sum_{k,l=1}^d \|\partial_k \partial_l f\|_\infty < \infty\}$  (mit  $\partial_k = \frac{\partial}{\partial x_k}$ ),  $Y = C_b(\mathbb{R}^d)$ .

**Laplace Operator**

$\Delta f = \partial_1^2 f + \dots + \partial_d^2 f \Rightarrow \Delta \in B(X, Y)$ ,  $\|\Delta\| \leq 1$ .

**Beispiel 1.68 Stetige Linearformen**

a)  $X = C([0, 1])$ ,  $Y = \mathbb{K}$ ,  $f \in X$

(i)  $\varphi(f) = f(t_0)$  für ein festes  $t_0 \in [0, 1]$  (Punktauswertung).  $\Rightarrow \varphi : X \rightarrow \mathbb{C}$  ist linear.  $|\varphi(f)| \leq \|f\|_\infty \Rightarrow \varphi \in X^*$ ,  $\|\varphi\|_{X^*} \leq 1$ .

Ferner:  $\|\varphi\| \geq |\varphi(\mathbf{1})| = 1 \Rightarrow \|\varphi\| = 1$  ( $\|\mathbf{1}\|_\infty = 1$ )

(ii) Sei  $g \in L^1([0, 1])$  fest gewählt. Setze  $\varphi(f) = \int_0^1 f(t)g(t)dt$ . Klar:  $\varphi : X \rightarrow \mathbb{C}$  ist linear und  $|\varphi(f)| \leq \|f\|_\infty \int_0^1 |g(t)|dt \Rightarrow \varphi \in X^*$  mit  $\|\varphi\|_{X^*} \leq \|g\|_1$  wie in Bsp 1.65 sieht man, dass  $\|\varphi\| = \|g\|_1$

b) Sei  $X = L^p(A)$ ,  $1 \leq p \leq \infty$  für ein  $A \in \mathcal{L}_d$ . Sei  $g \in L^{p'}(A)$  fest. Setze  $\varphi(f) = \int_A f(x)g(x)dx$  Hölder:  $\varphi(f) \leq \|f\|_p \|g\|_{p'} \Rightarrow \varphi(f) \in \mathbb{C}$  für alle  $f \in X$  und  $\varphi \in X^*$  mit  $\|\varphi\| \leq \|g\|_{p'}$ . Später:  $\|\varphi\| = \|g\|_{p'}$

### Beispiel 1.69 Folgenräume

Sei  $T \in B(X, Y)$  mit  $X \in \{c_0, l^p, 1 \leq p < \infty\}$  und  $Y \in \{c_0, l^p, 1 \leq p \leq \infty\}$ . Setze  $a_{k,l} = (Te_l)_k$  für  $k, l \in \mathbb{N} \Rightarrow a_{k,l} \in \mathbb{C}$ , bilde  $A = [a_{k,l}]_{k,l \in \mathbb{N}}$ . Sei  $x \in X$ . Setze  $v_n = (x_1, x_2, \dots, x_n, 0, 0, \dots) \in c_\infty$  für  $n \in \mathbb{N} \Rightarrow v_n \rightarrow x$  in  $X$  ( $n \rightarrow \infty$ ), da  $p < \infty$  (Satz 1.27)

$(Tv_n)_k = (\sum_{j=1}^n T(x_j e_j))_k = \sum_{j=1}^n a_{k,j} x_j = (Av_n)_k$  (Matrizenmultiplikation)

$T$  stetig  $\Rightarrow Tv_n \rightarrow Tx$  in  $Y \Rightarrow (Tx)_k = \lim_{n \rightarrow \infty} (Tv_n)_k = \sum_{l=1}^\infty a_{k,l} x_l$  (\*) insbesondere existiert die Reihe. Umgekehrt: Sei  $T$  durch (\*) gegeben. Unter welchen Bed ist  $T \in B(X, Y)$  wobei nun  $X, Y \in \{c_0, c, l^p, 1 \leq p < \infty\}$ ?

a) Sei  $X = Y = l^1$ ,  $a_{kl} \in \mathbb{C}$  ( $k, l \in \mathbb{N}$ ) mit  $\alpha := \sup_{l \in \mathbb{N}} \sum_{k=1}^\infty |a_{kl}| < \infty$  (Spaltensummennorm)

Sei  $x \in l^1$ . Dann existiert (\*) da  $|a_{kl}| \leq \alpha < \infty \forall k, l \in \mathbb{N}$ . Sei  $N \in \mathbb{N}$ . Dann:  $\sum_{k=1}^N |(Tx)_k| \leq \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^\infty |a_{kl}| |x_l| = \sum_{l=1}^\infty (\sum_{k=1}^N |a_{kl}|) |x_l| \leq \alpha \sum_{l=1}^\infty |x_l| = \alpha \|x\|_1$  wobei  $T$  durch (\*) gegeben ist. Mit  $\sup_N$  folgt  $Tx \in l^1$ . Klar:  $T : l^1 \rightarrow l^1$  ist linear, und  $\|T\| \leq \alpha$ , also  $T \in B(l^1)$ .

Beh:  $\|T\| = \alpha$

Bew: Klar:  $\alpha = 0$ . Wenn  $\alpha > 0$ , dann wähle  $\varepsilon \in (0, \alpha)$ . Dann ex  $j \in \mathbb{N}$  mit:  $\sum_{k=1}^\infty |a_{kj}| \geq \alpha - \varepsilon$ . Ferner:  $\|T\| \geq \|Te_j\|_1 = \sum_{k=1}^\infty |a_{kj}| \geq \alpha - \varepsilon$  mit  $\varepsilon \rightarrow 0$  folgt Beh.

■

b) Für  $x \in X \in \{c_0, c, l^p, 1 \leq p < \infty\}$  setze  $Rx = (0, x_1, x_2, \dots)$ ,  $Lx = (x_2, x_3, \dots)$ .

Klar:  $Rx, Lx \in X$ ,  $R : X \rightarrow X, L : X \rightarrow X$  sind linear. Ferner:  $\|Rx\|_p = \|x\|_p$  ( $1 \leq p \leq \infty$ )  $\|Lx\|_p \leq \|x\|_p$ ,  $Le_2 = e_1 \Rightarrow R, L \in B(X)$  mit Norm = 1. Beachte:  $LRx = x$ ,  $RLx = (0, x_2, x_3, \dots) \Rightarrow R$  ist injektiv, nicht surjektiv,  $L$  ist surjektiv, nicht injektiv.

Matrizendarstellung:

$$R \equiv \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

$$L \equiv \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

**Definition 1.70** Seien  $X, Y$  nVr. Eine injektive stetige lineare Abb  $T : X \rightarrow Y$  heißt **Einbettung**. Man schreibt dann  $X \hookrightarrow Y$ . Wenn  $T \in B(X, Y)$  bijektiv und  $T^{-1} : Y \rightarrow X$  stetig, dann heißt  $T$  **Isomorphismus** und man schreibt  $X \cong Y$ . Eine lineare Abbildung  $T : X \rightarrow Y$  mit  $\|Tx\| = \|x\|$ , heißt **Isometrie**.

**Bemerkung 1.71** Wenn  $T$  eine Isometrie ist, so ist  $T$  stetig und injektiv. Ferner ist  $T^{-1}$  auf  $R(T) = TX = \{y = Tx, x \in X\}$  eine Isometrie.

Beh: Wenn  $X$  ein BR ist, dann ist  $R(T)$  abgeschlossen.

Bew:

Sei  $y_n = Tx_n \rightarrow y$  in  $Y$  ( $n \rightarrow \infty$ )  $\Rightarrow \|y_n - y_m\| = \|Tx_n - Tx_m\| \rightarrow 0$  ( $n, m \rightarrow \infty$ )  $\exists x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \in X$ . Da  $T$  stetig:  $Tx = y$

■

**Beispiel 1.72** a) Sei  $Y \subseteq X$  ein UVR. Seien  $\|\cdot\|_Y$  Norm auf  $Y$  und  $\|\cdot\|_X$  Norm auf  $X$ . Dann:  $I : (Y, \|\cdot\|_Y) \rightarrow (X, \|\cdot\|_X)$  ist stetig (d.h. eine Einbettung)  $\iff \|y\|_X \leq c\|y\|_Y \ \forall y \in Y$ . Dann heißt  $\|\cdot\|_Y$  feiner als  $\|\cdot\|_X$  und  $\|\cdot\|_X$  gröber als  $\|\cdot\|_Y$ .

Beispiel:  $l^p \hookrightarrow l^q, 1 \leq p \leq q \leq \infty. C^\alpha([0, 1]) \hookrightarrow C([0, 1]), \alpha \in (0, 1)$

b) Sei  $U \subseteq \mathbb{R}^d$  offen und beschränkt. Setze  $K = \bar{U}$ . Sei  $1 \leq p < \infty$ . Definiere  $J : C(K) \rightarrow l^p(K)$  durch  $Jf = f + N_K$ . Beachte:  $f$  ist messbar, da stetig und  $\|f + N_k\|_p = \|f\|_p \leq (\lambda(k))^{\frac{1}{p}} \|f\|_\infty \Rightarrow Jf \in L^p(K)$ .

Beh:  $J$  ist injektiv.

Bew: Sei  $Jf = 0$ , also  $\exists$  NM  $N$  mit  $f(x) = 0$  für  $x \in K \setminus N$ . Da  $\lambda(B(x, \varepsilon)) > 0$  für  $\varepsilon > 0$  folgt, dass  $N^0$  leer ist, also ist  $K \setminus N$  dicht in  $K$  und somit  $f = 0$ , da  $f$  stetig.

■

Folgerung: Sei  $\hat{f} = f + N_K \in L^p(A)$ . Nach Satz 1.44 gibt es  $f_n \in C(K)$  mit  $f_n \rightarrow f$  bzgl  $\|\cdot\|_p$ . Wie in Bsp 1.55 erhält man Polynom  $g_n$  mit  $\|g_n - f_n\|_\infty \leq \frac{1}{n} \Rightarrow \|g_n - f_n\|_p \leq \frac{c}{n} \Rightarrow g_n \rightarrow f$  in  $\mathcal{L}^p(K) \Rightarrow Jg_n \rightarrow \hat{f}$  in  $L^p(K)$  ( $n \rightarrow \infty$ )  $\Rightarrow L^p(K), 1 \leq p < \infty$  ist separabel. ( $L(K) \hookrightarrow L^p(K)$  gilt für  $p \in [1, \infty]$ )

c) Sei  $X = C^1[0, 1], T = C[0, 1]$ , dann hat  $D \in B(X, Y), Df = f'$  die Inverse  $D^{-1}g(t) = g(0) + \int_0^t g'(s)ds$  wobei  $D^{-1} \in B(Y, X)$ , also  $X \cong Y \Rightarrow$  BR Struktur ist gleich. Aber  $D$  kann andere Strukturen verändern. z.B.  $f \leq g \not\Rightarrow f' \leq g'$ .

d) Beh:  $c \cong c_0$

Bew: Sei  $l(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} x_n, x \in c$ . Üb:  $l \in c^*$ . 1.68 b)  $\Rightarrow R \in B(c), L \in B(c_0)$ . Setze  $Tx := Rx - l(x) \cdot \mathbf{1} = (-l(x), x_1 - l(x), \dots)$  für  $x \in c \Rightarrow T \in B(c, c_0)$ .  $Sx := Lx - x_1 \cdot \mathbf{1} = (x_2 - x_1, x_3 - x_1, \dots)$  für  $x \in c_0$ .  $S \in B(c_0, c)$ . Einsetzen:  $ST = I_c, TS = I_{c_0}$

■

*Bem:*  $T$  ist keine Isometrie. Betrachte  $x = (2, 1, 1, \dots) \Rightarrow x \in c$   $\|x\|_\infty = 2$ ;  $Tx = (-1, 1, 0, 0, \dots) \Rightarrow \|Tx\|_\infty = 1$ .

- e) *Beh:* Alle endlichdimensionalen nVR ( $d < \infty$ ) sind isomorph zu  $(\mathbb{K}^d, \|\cdot\|_2)$ .

*Bew:* Wähle eine feste Basis  $B$  von  $X$ . Sei  $\bar{x} \in \mathbb{K}^d$  der eindeutig bestimmte Koeffizientenvektor von  $x$  bzgl.  $B$ . Setze  $T : X \rightarrow \mathbb{K}^d$ ,  $x \rightarrow \bar{x} \Rightarrow T$  ist linear und bijektiv.  $T$  ist Isometrie bzgl.  $\|\cdot\|_X$ ,  $v \in \mathbb{K}^d \Rightarrow T^{-1}v$  ist Isometrie (Bem 1.70). Nach Satz 1.22 ist  $\|\cdot\|_X$  äquivalent zu  $\|\cdot\|_2$ , also sind  $T$  und  $T^{-1}$  bzgl.  $\|\cdot\|_X, \|\cdot\|_2$  stetig.

■