

## § 9.

# Der Umkehrsatz

**Erinnerung:** Sei  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  und  $U \subseteq \mathbb{R}^n$ .  $U$  ist eine Umgebung von  $x_0 \iff \exists \delta > 0 : U_\delta(x_0) \subseteq U$

### Hilfssatz 9.1 (Offenheit des Bildes)

Sei  $\delta > 0$ ,  $f : U_\delta(0) \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  stetig,  $f(0) = 0$  und  $V$  sei eine offene Umgebung von  $f(0) (= 0)$ .  
 $U := \{x \in U_\delta(0) : f(x) \in V\}$ . Dann ist  $U$  eine offene Umgebung von 0.

### Beweis

Übung ■

**Erinnerung: Cramersche Regel:** Sei  $A$  eine reelle  $(n \times n)$ -Matrix,  $\det A \neq 0$ , und  $b \in \mathbb{R}^n$ . Das lineare Gleichungssystem  $Ax = b$  hat genau eine Lösung:  $x = (x_1, \dots, x_n) = A^{-1}b$ . Ersetze in  $A$  die  $j$ -te Spalte durch  $b^\top$ . Es entsteht eine Matrix  $A_j$ . Dann:  $x_j = \frac{\det A_j}{\det A}$ .

### Satz 9.2 (Stetigkeit der Umkehrfunktion)

Sei  $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  $D$  offen,  $f \in C^1(D, \mathbb{R}^n)$ .  $f$  sei auf  $D$  injektiv und es sei  $f(D)$  offen. Weiter sei  $\det f'(x) \neq 0 \forall x \in D$  und  $f^{-1}$  sei auf  $f(D)$  differenzierbar. Dann:  $f^{-1} \in C^1(f(D), \mathbb{R}^n)$ .

### Beweis

Sei  $f^{-1} = g = (g_1, \dots, g_n)$ ,  $g = g(y)$ . Zu zeigen:  $\frac{\partial g_j}{\partial y_k}$  sind stetig auf  $f(D)$ .  $5.6 \implies g'(y) \cdot f'(x) = I$  ( $n \times n$ -Einheitsmatrix), wobei  $y = f(x) \in f(D) \implies$

$$\begin{pmatrix} g'_1(y) \\ \vdots \\ g'_n(y) \end{pmatrix} \cdot f'(x) = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

$\implies \nabla g_j(y) \cdot f'(x) = e_j \implies f'(x)^\top \cdot \nabla g_j(y)^\top = e_j^\top$ . Ersetze in  $f'(x)^\top$  die  $k$ -te Spalte durch  $e_j^\top$ . Es entsteht die Matrix  $A_k(x) = A_k(f^{-1}(y))$ . Cramersche Regel  $\implies \frac{\partial g_j}{\partial y_k}(y) = \frac{\det A_k(f^{-1}(y))}{\det f'(x)} = \frac{\det A_k(f^{-1}(y))}{\det f'(f^{-1}(y))}$ .  $f \in C^1(D, \mathbb{R})$ ,  $f^{-1}$  stetig  $\implies$  obige Definitionen hängen stetig von  $y$  ab  $\implies \frac{\partial g_j}{\partial y_k} \in C(f(D), \mathbb{R})$ . ■

### Satz 9.3 (Der Umkehrsatz)

Sei  $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  $D$  sei offen,  $f \in C^1(D, \mathbb{R}^n)$ ,  $x_0 \in D$  und  $\det f'(x_0) \neq 0$ . Dann existiert eine offene Umgebung  $U$  von  $x_0$  und eine offene Umgebung  $V$  von  $f(x_0)$  mit:

- (a)  $f$  ist auf  $U$  injektiv,  $f(U) = V$  und  $\det f'(x) \neq 0 \forall x \in U$
- (b) Für  $f^{-1} : V \rightarrow U$  gilt:  $f^{-1}$  ist stetig differenzierbar auf  $V$  und
- $$(f^{-1})'(f(x)) = (f'(x))^{-1} \forall x \in U$$

**Folgerung 9.4 (Satz von der offenen Abbildung)**

$D$  und  $f$  seien wie in 9.3 und es gelte:  $\det f'(x) \neq 0 \forall x \in D$ . Dann ist  $f(D)$  offen.

**Beweis**

O.B.d.A:  $x_0 = 0$ ,  $f(x_0) = f(0) = 0$  und  $f'(0) = I$  ( $= (n \times n)$ -Einheitsmatrix)

Die Abbildungen  $x \mapsto \det f'(x)$  und  $x \mapsto \|f'(x) - I\|$  sind auf  $D$  stetig,  $\det f'(0) \neq 0$ ,  $\|f'(0) - I\| = 0$ . Dann existiert ein  $\delta > 0$ :  $K := U_\delta(0) \subseteq D$ ,  $\overline{K} = \overline{U_\delta(0)} \subseteq D$  und

- (1)  $\det f'(x) \neq 0 \forall x \in \overline{K}$  und
- (2)  $\|f'(x) - I\| \leq \frac{1}{2n} \forall x \in \overline{K}$
- (3) **Behauptung:**  $\frac{1}{2}\|u - v\| \leq \|f(u) - f(v)\| \forall u, v \in \overline{K}$ , insbesondere ist  $f$  injektiv auf  $\overline{K}$
- (4)  $f^{-1}$  ist stetig auf  $f(\overline{K})$ : Seien  $\xi, \eta \in f(\overline{K})$ ,  $u := f^{-1}(\xi)$ ,  $v := f^{-1}(\eta) \implies u, v \in \overline{K}$  und
- $$\|f^{-1}(\xi) - f^{-1}(\eta)\| = \|u - v\| \stackrel{(3)}{\leq} 2\|f(u) - f(v)\| = 2\|\xi - \eta\|$$

Beweis zu (3):  $h(x) := f(x) - x$  ( $x \in D$ )  $\implies h \in C^1(D, \mathbb{R}^n)$  und  $h'(x) = f'(x) - I$ . Sei  $h = (h_1, \dots, h_n)$ . Also:  $h' = \begin{pmatrix} h'_1 \\ \vdots \\ h'_n \end{pmatrix}$ . Seien  $u, v \in \overline{K}$  und  $j \in \{1, \dots, n\}$ .

$$\begin{aligned} |h_j(u) - h_j(v)| &\stackrel{6.1}{=} |h'_j(\xi) \cdot (u - v)| \stackrel{\text{CSU}}{\leq} \|h'_j(\xi)\| \|u - v\| \leq \|h'(\xi)\| \|u - v\|, \xi \in S[u, v] \in \overline{K}. \quad (2) \\ &\implies \leq \frac{1}{2n} \|u - v\| \\ \implies \|h(u) - h(v)\| &= \left( \sum_{j=1}^n (h_j(u) - h_j(v))^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left( \sum_{j=1}^n \frac{1}{4n^2} \|u - v\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2n} \|u - v\| \sqrt{n} \leq \\ &\frac{1}{2} \|u - v\| \implies \|u - v\| - \|f(u) - f(v)\| \leq \|f(u) - f(v) - (u - v)\| = \|h(u) - h(v)\| \leq \frac{1}{2} \|u - v\| \implies \\ &(3) \end{aligned}$$

$V := U_{\frac{\delta}{4}}(0)$  ist eine offene Umgebung von  $f(0)$  ( $= 0$ ).  $U := \{x \in K : f(x) \in V\}$  Klar:  $U \subseteq K \subseteq \overline{K}$ ,  $0 \in U$ , 9.1  $\implies U$  ist eine offene Umgebung von 0. (3)  $\implies f$  ist auf  $U$  injektiv. (1)  $\implies \det f'(x) \neq 0 \forall x \in U$ . (4)  $\implies f^{-1}$  ist stetig auf  $f(U)$ . Klar:  $f(U) \subseteq V$ . Für (a) ist noch zu zeigen:  $V \subseteq f(U)$ .

Sei  $y \in V$ .  $w(x) := \|f(x) - y\|^2 = (f(x) - y) \cdot (f(x) - y) \implies w \in C^1(D, \mathbb{R})$  und (nachzurechnen)  $w'(x) = 2(f(x) - y) \cdot f'(x)$ .  $\overline{K}$  ist beschränkt und abgeschlossen  $\stackrel{3.3}{\implies} \exists x_1 \in \overline{K} : (5) w(x_1) \leq w(x) \forall x \in \overline{K}$ .

**Behauptung:**  $x_1 \in K$ .

Annahme:  $x_1 \notin K \implies x_1 \in \partial K \implies \|x_1\| = \delta$ .  $2\sqrt{w(0)} = 2\|f(0) - y\| = 2\|y\| \leq 2\frac{\delta}{4} = \frac{\delta}{2} = \frac{\|x_1\|}{2} = \frac{1}{2}\|x_1 - 0\| \stackrel{(3)}{\leq} \|f(x_1) - f(0)\| = \|f(x_1) - y + y - f(0)\| \leq \|f(x_1) - y\| - \|f(0) - y\| =$

$\sqrt{w(x_1)} + \sqrt{w(0)} \implies \sqrt{w(0)} < \sqrt{w(x_1)} \implies w(0) < w(x_1) \stackrel{(5)}{\leq} w(0)$ , Widerspruch. Also:  $x_1 \in K$

(5)  $\implies w(x_1) \leq w(x) \forall x \in K$ . 8.1  $\implies w'(x_1) = 0 \implies (f(x_1) - y) \cdot f'(x_1) = 0$ ; (1)  $\implies f'(x_1)$  ist invertierbar  $\implies y = f(x_1) \implies x_1 \in U \implies y = f(x_1) \in f(U)$ . Also:  $f(U) = V$ . Damit ist (a) gezeigt.

(b): Wegen 5.5 und 9.2 ist nur zu zeigen:  $f^{-1}$  ist differenzierbar auf  $V$ . Sei  $y_1 \in V$ ,  $y \in V \setminus \{y_1\}$ ,  $x_1 := f^{-1}(y_1)$ ,  $x := f^{-1}(y)$ ;  $L(y) := \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_1) - f'(x_1)^{-1}(y - y_1)}{\|y - y_1\|}$ . zu zeigen:  $L(y) \rightarrow 0$  ( $y \rightarrow y_1$ ).  
 $\varrho(x) := f(x) - f(x_1) - f'(x_1)(x - x_1)$ .  $f$  ist differenzierbar in  $x_1 \implies \frac{\varrho(x)}{\|x - x_1\|} \rightarrow 0$  ( $x \rightarrow x_1$ ).

$$\begin{aligned} f'(x_1)^{-1} \varrho(x) &= f'(x_1)^{-1}(y - y_1) - (f^{-1}(y) - f^{-1}(y_1)) = -\|y - y_1\| L(y) \\ \implies L(y) &= -f'(x_1)^{-1} \frac{\varrho(x)}{\|y - y_1\|} = -f'(x_1)^{-1} \underbrace{\frac{\varrho(x)}{\|x - x_1\|}}_{\rightarrow 0 \text{ (} x \rightarrow x_1 \text{)}} \cdot \underbrace{\frac{\|x - x_1\|}{\|f(x) - f(x_1)\|}}_{\leq 2, \text{ nach (3)}} \end{aligned}$$

Für  $y \rightarrow y_1$ , gilt (wegen (4))  $x \rightarrow x_1 \implies L(y) \rightarrow 0$ . ■

### Beispiel

$$f(x, y) = (x \cos y, x \sin y)$$

$$f'(x, y) = \begin{pmatrix} \cos y & -x \sin y \\ \sin y & x \cos y \end{pmatrix}, \det f'(x, y) = x \cos^2 y + x \sin^2 y = x$$

$D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0\}$ . Sei  $(\xi, \eta) \in D$  9.3  $\implies \exists$  Umgebung  $U$  von  $(\xi, \eta)$  mit:  $f$  ist auf  $U$  injektiv (\*). z.B.  $(\xi, \eta) = (1, \frac{\pi}{2}) \implies f(1, \frac{\pi}{2}) = (0, 1)$ .  $f'(1, \frac{\pi}{2}) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $(f^{-1})(0, 1) = f'(1, \frac{\pi}{2})^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ .

**Beachte:**  $f$  ist auf  $D$  „lokal“ injektiv (im Sinne von (\*)), aber  $f$  ist auf  $D$  *nicht* injektiv, da  $f(x, y) = f(x, y + 2k\pi) \forall x, y \in \mathbb{R} \forall k \in \mathbb{Z}$ .

