

## 9. Einige Typen von Differentialgleichungen

### 1. Ordnung

(I):  $y' = f(\frac{y}{x})$ . Setze  $u := \frac{y}{x}$ . Dies führt auf eine Differentialgleichung mit getrennten Veränderlichen für  $u$ .

**Beispiel**

$$\text{AWP: } \begin{cases} y' = \frac{y}{x} - \frac{x^2}{y^2} \\ y(1) = 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} u &:= \frac{y}{x} \implies y = xu \\ y' &= u + xu' \implies u + xu' = u - \frac{1}{u^2} \\ &\implies u' = -\frac{1}{xu^2} \\ &\implies \frac{du}{dx} = -\frac{1}{xu^2} \\ &\implies u^2 du = -\frac{1}{x} dx \\ &\implies \frac{1}{3} u^3 = -\log x + c \\ &\implies u^3 = -3 \log x + 3c \quad (c \in \mathbb{R}) \\ u(1) &= \frac{y(1)}{1} = 1 \implies 1 = u^3(1) = 3c \\ &\implies c = \frac{1}{3} \\ u^3 &= 1 - 3 \log x \implies y(x) = x \sqrt[3]{1 - 3 \log x} \text{ auf } (0, \sqrt[3]{e}) \text{ (Lösung des AWP)} \end{aligned}$$

(II) **Bernoullische Differentialgleichung:**  $y' + p(x)y + q(x)y^\alpha = 0$ , wobei  $p$  und  $q$  stetig sind und  $0 \neq \alpha \neq 1$ . Dividiere durch  $y^\alpha$  und setze  $u := y^{1-\alpha}$ . Dies führt auf eine lineare Differentialgleichung für  $u$ .

**Beispiel**

(\*)  $y' - xy + 3xy^2 = 0$  ( $\alpha = 2$ ). Dann:  $\frac{y'}{y^2} - \frac{x}{y} + 3x = 0$ ;  $u := \frac{1}{y} \implies u' = -\frac{y'}{y^2} \implies -u' - xu + 3x = 0 \implies u' = -xu + 3x$ . Allgemeine Lösung hiervon:  $u(x) = ce^{-\frac{1}{2}x^2} + 3$  ( $c \in \mathbb{R}$ ). Allgemeine Lösung von (\*):  $y(x) = \frac{1}{ce^{-\frac{1}{2}x^2} + 3}$  ( $c \in \mathbb{R}$ )

(III) **Riccatische Differentialgleichung:** (\*)  $y' + g(x)y + h(x)y^2 = k(x)$ , wobei  $g, h, k$  stetig sind. Sei  $y_1$  eine bekannte Lösung von (\*); setze  $z := \frac{1}{y - y_1}$ . Nachrechnen: (\*\*)  $z' = (g(x) +$

### 9. Einige Typen von Differentialgleichungen 1. Ordnung

$2y_1(x)h(x)z + h(x)$  (lin. Dgl für  $z$ ). Die allgemeine Lösung von (\*) lautet:  $y(x) = y_1(x) + \frac{1}{z(x)}$  wobei  $z$  die allgemeinen Lösungen von (\*\*) durchläuft.