

10. Implizit definierte Funktionen

Beispiele:

$$(1) f(x, y) = x^2 + y^2 - 1. f(x, y) = 0 \iff y^2 = 1 - x^2 \iff y = \pm \sqrt{1 - x^2}.$$

Sei $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ mit $f(x_0, y_0) = 0$ und $y_0 \stackrel{(<)}{>} 0$. Dann existiert eine Umgebung U von x_0 und genau eine Funktion $g : U \rightarrow \mathbb{R}$ mit $g(x_0) = y_0$ und $f(x, g(x)) = 0 \forall x \in U$, nämlich

$$g(x) = \sqrt{1 - x^2} \quad (-\sqrt{\dots})$$

Sprechweisen: „ g ist implizit durch die Gleichung $f(x, y) = 0$ definiert“ oder „die Gleichung $f(x, y) = 0$ kann in der Form $y = g(x)$ aufgelöst werden“

$$(2) f(x, y, z) = y + z + \log(x + z). \text{ Wir werden sehen: } \exists \text{ Umgebung } U \subseteq \mathbb{R}^2 \text{ von } (0, 1) \text{ und genau eine Funktion } g : U \rightarrow \mathbb{R} \text{ mit } g(0, -1) = 1 \text{ und } f(x, y, g(x, y)) = 0 \forall (x, y) \in U.$$

Der allgemeine Fall: Es seien $p, n \in \mathbb{N}$, $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{R}^{n+p}$, D offen, $f = (f_1, \dots, f_p) \in C^1(D, \mathbb{R}^p)$. Punkte in D (bzw. \mathbb{R}^{n+p}) bezeichnen wir mit (x, y) , wobei $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ und $y = (y_1, \dots, y_p) \in \mathbb{R}^p$, also $(x, y) = (x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_p)$. Damit:

$$f' = \left(\underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_p}{\partial x_n} \end{pmatrix}}_{=: \frac{\partial f}{\partial x}} \mid \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial y_p} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial f_p}{\partial y_p} \end{pmatrix}}_{=: \frac{\partial f}{\partial y} \text{ (} p \times p \text{)-Matrix}} \right); \text{ also } f'(x, y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y), \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right)$$

Satz 10.1 (Satz über implizit definierte Funktionen)

Sei $(x_0, y_0) \in D$, $f(x_0, y_0) = 0$ und $\det \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$. Dann existiert eine offene Umgebung $U \subseteq \mathbb{R}^n$ von x_0 und genau eine Funktion $g : U \rightarrow \mathbb{R}^p$ mit:

$$(1) (x, g(x)) \in D \forall x \in U$$

$$(2) g(x_0) = y_0$$

$$(3) f(x, g(x)) = 0 \forall x \in U$$

$$(4) g \in C^1(U, \mathbb{R}^p)$$

$$(5) \det \frac{\partial f}{\partial y}(x, g(x)) \neq 0 \forall x \in U$$

$$(6) g'(x) = - \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x, g(x))^{-1} \right) \cdot \frac{\partial f}{\partial x}(x, g(x)) \forall x \in U$$

Beweis

Definition: $F : D \rightarrow \mathbb{R}^{n+p}$ durch $F(x, y) := (x, f(x, y))$. Dann: $F \in C^1(D, \mathbb{R}^{n+p})$ und

$$F'(x, y) = \left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & & 0 & & & 0 & \cdots & 0 \\ & \ddots & & & & \vdots & & \vdots \\ 0 & & 1 & & & 0 & \cdots & 0 \\ \hline & & & \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) & & & & \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \end{array} \right)$$

Dann:

(I) $\det F'(x, y) \stackrel{\text{LA}}{=} \det \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ ($(x, y) \in D$), insbesondere: $\det F'(x_0, y_0) \neq 0$. Es ist $F(x_0, y_0) = (x_0, 0)$. 9.3 $\implies \exists$ eine offene Umgebung \mathbb{U} von (x_0, y_0) mit: $\mathbb{U} \subseteq D, f(\mathbb{U}) = \vartheta$. F ist auf \mathbb{U} injektiv, $F^{-1} : \vartheta \rightarrow \mathbb{U}$ ist stetig differenzierbar und

(II) $\det F'(x, y) \stackrel{\text{(I)}}{=} \det \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \neq 0 \forall (x, y) \in \mathbb{U}$

Bezeichnungen: Sei $(s, t) \in \vartheta$ ($s \in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R}^p$), $F^{-1}(s, t) =: (u(s, t), v(s, t))$, also $u : \vartheta \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar, $v : \vartheta \rightarrow \mathbb{R}^p$ stetig differenzierbar. Dann: $(s, t) = F(F^{-1}(s, t)) = (u(s, t), f(u(s, t), v(s, t))) \implies u(s, t) = s \implies F^{-1}(s, t) = (s, v(s, t))$. Für $(x, y) \in \mathbb{U} : f(x, y) = 0 \iff F(x, y) = (x, 0) \iff (x, y) = F^{-1}(x, 0) = (x, v(x, 0)) \iff y = v(x, 0)$, insbesondere: $y_0 = v(x_0, 0)$. $U := \{x \in \mathbb{R}^n : (x, 0) \in \vartheta\}$. Es gilt: $x_0 \in U$. Übung: U ist eine offene Umgebung von x_0 .

Definition: $g : U \rightarrow \mathbb{R}^p$ durch $g(x) := v(x, 0)$, für $x \in U$ gilt: $(x, 0) \in \vartheta \implies F^{-1}(x, 0) = (x, v(x, 0)) = (x, g(x)) \in \mathbb{U}$. Dann gelten: (1), (2), (3) und (4). (5) folgt aus (II).

Zu (6): Definition für $x \in U : \psi(x) := (x, g(x)), \psi \in C^1(U, \mathbb{R}^{n+p})$,

$$\psi'(x) = \left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & & 0 & & & & & \\ & \ddots & & & & & & \\ 0 & & 1 & & & & & \\ \hline & & & g'(x) & & & & \end{array} \right)$$

(3) $\implies 0 = f(\psi(x)) \forall x \in U$. 5.4 $\implies 0 = f'(\psi(x)) \cdot \psi'(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, g(x)) \mid \frac{\partial f}{\partial y}(x, g(x)) \right) \cdot \psi'(x) \stackrel{\text{LA}}{=} \frac{\partial f}{\partial x}(x, g(x)) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, g(x)) \cdot g'(x) \forall x \in U$. (5) $\implies \frac{\partial f}{\partial y}(x, g(x))$ invertierbar, Multiplikation von links mit $\frac{\partial f}{\partial y}(x, g(x))^{-1}$ liefert (6). ■

Beispiel

$f(x, y, z) = y + z + \log(x + z)$. Zeige: \exists offene Umgebung U von $(0, 1)$ und genau eine stetig differenzierbare Funktion $g : U \rightarrow \mathbb{R}$ mit $g(0, -1) = 1$ und $f(x, y, g(x, y)) = 0 \forall (x, y) \in U$. Berechne g' an der Stelle $(0, -1)$.

$f(0, -1, 1) = 0, f_z = 1 + \frac{1}{x+z}; f_z(0, -1, 1) = 2 \neq 0$. Die Behauptung folgt aus dem Satz über implizit definierte Funktionen. Also: $0 = y + g(x, y) + \log(x + g(x, y)) \forall (x, y) \in U$.

Differentiation nach x : $0 = g_x(x, y) + \frac{1}{x+g(x, y)}(1 + g_x(x, y)) \forall (x, y) \in U \xrightarrow{(x, y) = (0, -1)} 0 = g_x(0, -1) + \frac{1}{1}(g_x(0, -1) + 1) \implies g_x(0, -1) = -\frac{1}{2}$.

Differentiation nach y : $0 = 1 + g_y(x, y) + \frac{1}{x+g(x, y)}g_y(x, y) \forall (x, y) \in U \xrightarrow{(x, y) = (0, -1)} g_y(0, -1) = -\frac{1}{2}$. Also: $g'(0, -1) = (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$.