

# 1 Das Lebesgue-Maß

## 1.1 Etwas Maßtheorie

Sei stets  $X$  eine nichtleere Menge mit Potenzmenge  $\mathcal{P}(X) := \{A : A \subset X\}$ .

**Definition 1.1.** Ein nichtleeres Mengensystem  $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$  heißt  $\sigma$ -Algebra, wenn:

- (A1)  $X \in \mathcal{A}$
- (A2) Wenn  $A \in \mathcal{A}$ , dann auch  $A^c := X \setminus A \in \mathcal{A}$
- (A3) Wenn  $A_j \in \mathcal{A}$ , ( $j \in \mathbb{N}$ ), dann auch  $\bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j \in \mathcal{A}$

**Beispiel 1.2.** a)  $\mathcal{P}(X)$  und  $\{\emptyset, X\}$  sind  $\sigma$ -Algebren

b) Sei  $\emptyset \neq A \subset X$ . Dann ist  $\{\emptyset, A, A^c, X\}$  eine  $\sigma$ -Algebra

c)  $\mathcal{A} := \{A \subset X : A \text{ oder } A^c \text{ ist abzählbar}\}$  ist  $\sigma$ -Algebra

*Beweis.* (A1)  $X^c = \emptyset$  ist abzählbar, also  $X \in \mathcal{A}$ .

(A2) gilt per Definition.

(A3) Seien  $A_j \in \mathcal{A}$  ( $j \in \mathbb{N}$ ).

- i. Seien alle  $A_j$  abzählbar. Dann ist  $\bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j$  abzählbar, denn: Es gilt  $A_j = \{a_{j1}, a_{j2}, \dots\}$  für jedes  $j \in \mathbb{N}$  und gewisse  $a_{jk} \in X$ . Schreibe:

TODO: Grafik

Nach Streichen mehrfach auftretender  $a_{jk}$  liefert der Streckenzug eine Abzählung von  $\bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j \Rightarrow \bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j \in \mathcal{A}$ .

- ii. Wenn ein  $A_n$  nicht abzählbar ist, dann ist  $A_n^c$  abzählbar. Somit gilt:  
 $\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right)^c = \bigcap_{j=1}^{\infty} A_j^c \subset A_n^c \Rightarrow \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right)^c$  abzählbar. Damit folgt  $\bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j \in \mathcal{A}$ .

□

**Lemma 1.3.** Sei  $\mathcal{A}$  eine  $\sigma$ -Algebra auf  $X$  und  $A_j \in \mathcal{A}$  ( $j \in \mathbb{N}$ ). Dann:

- a)  $\emptyset = X^c \in \mathcal{A}$
- b)  $A_1 \cup \dots \cup A_n \in \mathcal{A}$  ( $\forall n \in \mathbb{N}$ )

- c)  $\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{A}$   
d)  $A_1 \setminus A_2 := A_1 \cap A_2^c \in \mathcal{A}$

Fazit: Abzählbare Mengenoperationen bleiben in der  $\sigma$ -Algebra.

*Beweis.* a) Klar mit (A1) und (A2).

b) Folgt aus (A3) und a), da  $A_1 \cup \dots \cup A_n = A_1 \cup \dots \cup A_n \cup \emptyset \cup \emptyset \cup \dots$

c) Nach (A2) und (A3):  $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j^c \in \mathcal{A} \xrightarrow{(A2)} \bigcap_{j=1}^{\infty} A_j = \left( \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j^c \right)^c \in \mathcal{A}$

d) Folgt aus c), (A1) und (A3), da  $A_1 \cap A_2^c = A_1 \cap A_2^c \cap X \cap X$ .

□

**Lemma 1.4.** Sei  $\mathcal{F}$  eine nichtleere Familie von  $\sigma$ -Algebren  $\mathcal{A}$  auf  $X$ .  
Dann ist

$$\mathcal{A}_0 := \bigcap \{ \mathcal{A} : \mathcal{A} \in \mathcal{F} \} := \{ A \subset X : A \in \mathcal{A} \ (\forall \mathcal{A} \in \mathcal{F}) \}$$

eine  $\sigma$ -Algebra.

*Beweis.* (A1)  $X \in \mathcal{A} \ (\forall \mathcal{A} \in \mathcal{F}) \Rightarrow X \in \mathcal{A}_0$ .

(A2) Sei  $A \in \mathcal{A}_0 \xrightarrow{(A2)} A^c \in \mathcal{A} \ (\forall \mathcal{A} \in \mathcal{F}) \Rightarrow A^c \in \mathcal{A}_0$ .

(A3) Sei  $A_j \in \mathcal{A}_0 \ (j \in \mathbb{N}) \xrightarrow{(A3)} \bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j \in \mathcal{A} \ (\forall \mathcal{A} \in \mathcal{F}) \Rightarrow \bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j \in \mathcal{A}_0$ .

□

Ana III, 24.10.2008

**Definition 1.5.** Sei  $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(X)$  nicht leer. Dann heißt

$$\sigma(\mathcal{E}) := \bigcap \{ \mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X) : \mathcal{E} \subset \mathcal{A} \text{ ist } \sigma\text{-Algebra} \}$$

die von  $\mathcal{E}$  erzeugte  $\sigma$ -Algebra.

Bemerkung: Da  $\mathcal{P}(X)$  eine  $\sigma$ -Algebra ist, ist  $\sigma(\mathcal{E})$  nicht leer und nach [Lem 1.4](#) ist  $\sigma(\mathcal{E})$  eine  $\sigma$ -Algebra.

**Lemma 1.6.** Sei  $\emptyset \neq \mathcal{E} \subset \mathcal{P}(X)$ . Dann gelten:

- a) Wenn  $\mathcal{A}$  eine  $\sigma$ -Algebra ist und  $\mathcal{E} \subset \mathcal{A}$ , dann  $\mathcal{E} \subset \sigma(\mathcal{E}) \subset \mathcal{A}$ .  
b)  $\sigma(\mathcal{E})$  ist die einzige  $\sigma$ -Algebra, die a) erfüllt, d.h.  $\sigma(\mathcal{E})$  ist die kleinste  $\mathcal{E}$  enthaltende  $\sigma$ -Algebra auf  $X$ .  
c) Wenn  $\mathcal{E}$  eine  $\sigma$ -Algebra ist, dann ist  $\sigma(\mathcal{E}) = \mathcal{E}$ .  
d) Wenn  $\mathcal{E} \subset \bar{\mathcal{E}} \subset \mathcal{P}(X)$ , dann gilt  $\sigma(\mathcal{E}) \subset \sigma(\bar{\mathcal{E}})$ .

*Beweis.* a) folgt direkt aus Def 1.5.

b) Sei  $\mathcal{A}_0$  eine  $\sigma$ -Algebra mit  $\mathcal{E} \subset \mathcal{A}_0 \subset \mathcal{A}$  für jede  $\sigma$ -Algebra  $\mathcal{A}$  mit  $\mathcal{E} \subset \mathcal{A}$ . Wähle  $\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{E}) \Rightarrow \mathcal{A}_0 \subset \sigma(\mathcal{E})$ . Nach a) gilt mit  $\mathcal{A} = \mathcal{A}_0 : \sigma(\mathcal{E}) \subset \mathcal{A}_0$ .

c) folgt aus a) mit  $\mathcal{A} = \mathcal{E}$ .

d) folgt aus a) mit  $\mathcal{A} = \sigma(\overline{\mathcal{E}})$ .

□

**Beispiel 1.7.** a) Sei  $\mathcal{E} = \{A\}$  für ein nicht leeres  $A \subset X$ . Jede  $\sigma$ -Algebra  $\mathcal{A}$  mit  $\mathcal{E} \subset \mathcal{A}$  umfasst  $\{X, \emptyset, A, A^c\}$  nach (A1) und (A2).

Nach Beispiel 1.2b) ist dies eine  $\sigma$ -Algebra.

Lem 1.6  $\Rightarrow \sigma(\mathcal{E}) = \{\emptyset, A, A^c, X\}$ .

b) Sei  $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ,  $\mathcal{E} = \{\{1\}, \{1, 2\}\}$ . Die  $\sigma$ -Algebra  $\sigma(\mathcal{E})$  enthält folgende Elemente:

$\{1\}, \{2\} = \{1, 2\} \setminus \{1\}$  und somit auch  $\{1\}^c = \{2, 3, 4, 5\}$  und  $\{1, 2\}^c = \{3, 4, 5\}$ .

Ferner  $\emptyset, X \in \sigma(\mathcal{E})$ .

Prüfe:  $\mathcal{A} = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}, \{3, 4, 5\}, \{1, 3, 4, 5\}, \{2, 3, 4, 5\}, X\}$  ist eine  $\sigma$ -Algebra.

Aus Lem 1.6 folgt  $\sigma(\mathcal{E}) = \mathcal{A}$ .

**Definition 1.8.** Sei  $X \subset \mathbb{R}^d$  nicht leer und  $\mathcal{O}(X)$  das System der in  $X$  offenen Mengen. Dann heißt

$$\mathcal{B}(X) := \sigma(\mathcal{O}(X))$$

die Borel  $\sigma$ -Algebra von  $X$ . Setze  $\mathcal{B}_d := \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ .

Bemerkung:  $\mathcal{B}_d$  enthält alle offenen und alle abgeschlossenen Teilmengen des  $\mathbb{R}^d$ , alle abzählbaren Vereinigungen und Schnitte offener und abgeschlossener Menge, usw.

Intervalle in  $\mathbb{R}^d$  sind Mengen der Form  $I = I_1 \times \cdots \times I_d$ , wobei  $I_1, \dots, I_d \subset \mathbb{R}$  Intervalle in  $\mathbb{R}$  sind. Für  $a, b \in \mathbb{R}^d$  mit  $a \leq b$  (d.h:  $a_1 \leq b_1, \dots, a_d \leq b_d$ ) schreibe:

$$\begin{aligned} (a, b) &:= (a_1, b_1) \times \cdots \times (a_d, b_d), \\ (a, b] &:= (a_1, b_1] \times \cdots \times (a_d, b_d]. \end{aligned}$$

Für  $\alpha \in \mathbb{R}$  und  $k \in \{1, \dots, d\}$  schreibe  $H_k^-(\alpha) := \{x \in \mathbb{R}^d : x_k \leq \alpha\}$ .

**Satz 1.9.** Es gilt:

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_d &= \sigma(\{(a, b) : a, b \in \mathbb{Q}^d, a \leq b\}) =: A_1 \\ &= \sigma(\{(a, b] : a, b \in \mathbb{Q}^d, a \leq b\}) =: A_2 \\ &= \sigma(\{H_k^-(\alpha) : \alpha \in \mathbb{Q}, k \in \{1, \dots, d\}\}) =: A_3 \end{aligned}$$

*Beweis.* a) Es gilt:

$$(a, b] = \bigcap_{k=1}^d H_k^-(b_k) \cap H_k^-(a_k)^c \Rightarrow (a, b] \in A_3$$

$$\stackrel{\text{Lem 1.6}}{\Rightarrow} A_2 = \sigma(\{(a, b], a, b \in \mathbb{Q}^d, a \leq b\}) \subset A_3.$$

b)  $H_k^-(\alpha)$  ist abgeschlossen, also  $H_k^-(\alpha) \in \mathcal{B}_d$ .  $\text{Lem 1.6} \Rightarrow A_3 \subset \mathcal{B}_d$ .

c) Wenn ein  $a_k = b_k$ , dann  $(a, b) = \emptyset \in A_2$ . Anderenfalls

$$(a, b) = \bigcup_{n \geq n_0} (a, b - \left(\frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n}\right)^T],$$

wobei  $n_0 \in \mathbb{N}$ , sodass  $a_k + \frac{1}{n} \leq b_k \forall n \geq n_0, k = 1, \dots, d$ . Dann folgt:  $(a, b) \in A_2$ .  
Mit  $\text{Lem 1.6}$  folgt  $\mathcal{A}_1 = \sigma(\{(a, b) : a, b \in \mathbb{Q}^d, a \leq b\}) \subset A_2$ .

Bislang wurde gezeigt:  $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \mathcal{B}_d$ .

d) Sei  $O \subset \mathbb{R}^d$  offen,  $J := \{(a, b) \subset O : a, b \in \mathbb{Q}^d, a \leq b\}$

Zeige:  $\bigcup\{I : I \in J\} = O$

Da die Vereinigung abzählbar ist, folgt  $O \in A_1$ . Damit  $\mathcal{B}_d \subset A_1$  nach  $\text{Lem 1.6}$  und  $\mathcal{B}_d = \sigma(\mathcal{O}(\mathbb{R}^d))$ . Damit folgt die Behauptung.

Zu  $\supset$ : Sei  $y \in O$ . Dann  $\exists \epsilon > 0, \epsilon \in \mathbb{Q}$ , sodass die  $\|\cdot\|_\infty$ -Kugel

$$I_0 = (y_1 - \epsilon, y_1 + \epsilon) \times \dots \times (y_d - \epsilon, y_d + \epsilon) \subset O.$$

Durch Verschiebung von  $y$  zu einem  $z \in \mathbb{Q}^d$  nahe bei  $y$  erhält man ein  $I \in J$  der Kantenlänge  $\epsilon$  mit  $y \in I \Rightarrow O \subset \bigcap\{I : I \in J\}$ . Damit gilt die Gleichheit.  $\square$

Für  $Y \subset X, Y \neq \emptyset$  und  $M \subset \mathcal{P}(X)$  definiert man die Spur:

$$M_y = M \cap Y := \{A \subset Y : A = \overline{M} \cap Y \text{ für ein } \overline{M} \in M\} \quad (1.1)$$

**Lemma 1.10.** *Sei  $\emptyset \neq Y \subset X$ . Dann gelten:*

- Wenn  $\mathcal{A}$  eine  $\sigma$ -Algebra ist, dann ist auch  $\mathcal{A}_y$  eine  $\sigma$ -Algebra auf  $Y$ . Ferner gilt  $\mathcal{A}_y \subset \mathcal{A} \Leftrightarrow Y \in \mathcal{A}$ .
- Sei  $\emptyset \neq \mathcal{E} \subset \mathcal{P}(X)$ . Dann  $\sigma(\mathcal{E} \cap Y) = \sigma(\mathcal{E}) \cap Y$ .  
(Beides sind  $\sigma$ -Algebren auf  $Y$ .)

*Beweis.* a) Zu (A1):  $Y = X \cap Y \in \mathcal{A}_y$ , da  $X \in \mathcal{A}$ .

Zu (A2), (A3): Seien  $B_j = A_j \cap Y \in \mathcal{A}_y$ , d.h.  $A_j \in \mathcal{A}$  ( $j \in \mathbb{N}$ ). Dann folgt

$$Y \setminus B_1 = Y \cap \underbrace{(X \setminus A_1)}_{\in \mathcal{A}} \in \mathcal{A}_y,$$

$$\bigcup_{j \in \mathbb{N}} B_j = \left( \underbrace{\bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j}_{\in \mathcal{A}} \right) \cap Y \in \mathcal{A}_y.$$

Also ist  $\mathcal{A}_y$  eine  $\sigma$ -Algebra.

Zweite Behauptung:  $Y \in \mathcal{A} \Rightarrow M \cap Y \in \mathcal{A}$  ( $\forall M \in \mathcal{A}$ ), also  $\mathcal{A}_y \subset \mathcal{A}$ . Wenn  $\mathcal{A}_y \subset \mathcal{A}$ , folgt also  $Y \in \mathcal{A}$ .

b)  $\mathcal{E} \cap Y \subset \sigma(\mathcal{E}) \cap Y$  ist nach a)  $\sigma$ -Algebra.

Zu  $\supset$  : Prinzip der guten Mengen

Setze  $\mathcal{C} := \{A \subset X : A \cap Y \in \sigma(\mathcal{E} \cap Y)\}$

(\*) Behauptung:  $\mathcal{C}$  ist eine  $\sigma$ -Algebra. Ferner gilt  $\mathcal{E} \subset \mathcal{C}$ , da  $E \cap Y \in \sigma(\mathcal{E} \cap Y)$  für alle  $E \in \mathcal{E} \xrightarrow{\text{Lem 1.6}} \sigma(\mathcal{E}) \subset \mathcal{C}$ .

Aus der Definition von  $\mathcal{C}$  folgt:  $\sigma(\mathcal{E}) \cap Y \subset \sigma(\mathcal{E} \cap Y)$ .

Beweis von (\*):  $Y = X \cap Y \in \sigma(\mathcal{E} \cap Y) \Rightarrow X \in \mathcal{C}$ . Damit erfüllt  $\mathcal{C}$  (A1).

Zu (A2) und (A3): Seien  $A_j \in \mathcal{C}$  ( $j \in \mathbb{N}$ )  $\Rightarrow A_j \cap Y \in \sigma(\mathcal{E} \cap Y)$ . Dann gelten:

- $(X \setminus A_1) \cap Y = Y \setminus \underbrace{(A_1 \cap Y)}_{\in \sigma(\mathcal{E} \cap Y)} \stackrel{(A2)}{\in} \sigma(\mathcal{E} \cap Y) \Rightarrow X \setminus A_1 \in \mathcal{C}$ .
- $(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j) \cap Y = \bigcup_{j=1}^{\infty} \underbrace{A_j \cap Y}_{\in \sigma(\mathcal{E} \cap Y)} \stackrel{(A3)}{\in} \sigma(\mathcal{E} \cap Y) \Rightarrow \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{C}$

$\Rightarrow \mathcal{C}$  ist  $\sigma$ -Algebra auf  $X$ .

□

Ana III, 27.10.2008

**Korollar 1.11.** Sei  $X \subset \mathbb{R}^d$ . Dann gilt  $\mathcal{B}(X) = \mathcal{B}_d \cap X = \{B \cap X : B \in \mathcal{B}_d\}$ . Wenn  $X \in \mathcal{B}_d$ , dann  $\mathcal{B}_d = \{A \in \mathcal{B}_d : A \subset X\}$

*Beweis.* Folgt aus [Lem 1.10](#) mit  $\mathcal{E} = \mathcal{O}(\mathbb{R}^d)$ , da  $\mathcal{O}(X) = \mathcal{O}(\mathbb{R}^d) \cap X$ .

(Wobei  $X$  in [Lem 1.10](#)  $\mathbb{R}^d$  in [Kor 1.11](#) entspricht und  $Y$  in [Lem 1.10](#)  $X$  in [Kor 1.11](#).) □

**Beispiel.** a)  $\mathbb{Q} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{q_n\} \in \mathcal{B}_d$ , da  $\{q_n\}$  abgeschlossen ist, wobei  $\mathbb{Q} = \{q_1, q_2, \dots\}$ .

b) Die Menge

$$\begin{aligned} A &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1 \text{ für } x \leq 0 \text{ oder } x^2 + y^2 < 1 \text{ für } x > 0\} \\ &= B(0, 1) \cup (\partial B(0, 1) \cap \{x \leq 0\}) \end{aligned}$$

ist abgeschlossen. Damit folgt  $A \in \mathcal{B}_2$ .

Sei  $[0, +\infty] = \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$  (wobei:  $+\infty = \infty$ ) versehen mit den Rechenregeln:

- $\pm a + \infty = \infty \pm a = \infty \quad \forall a \in \mathbb{R}_+$
- $\infty + \infty = \infty$
- Verboten:  $\infty - \infty$ !

Ordnung:  $a < \infty \quad \forall a \in \mathbb{R}_+$

Konvergenz:  $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty \Leftrightarrow \forall c > 0 \exists N_c \in \mathbb{N} \text{ mit } x_n \geq c \quad \forall n \geq N_c$ .

Für  $a_j \in [0, \infty]$  ( $j \in \mathbb{N}$ ) gilt  $\sum_{j=1}^{\infty} a_j = \infty$ , falls (mindestens) ein  $a_j = \infty$  ist, oder falls die Reihe in  $\mathbb{R}$  divergiert.

Da  $a_j \geq 0 \quad \forall j \in \mathbb{N}$ , kann die Reihe umgeordnet werden.

**Definition.** Ein Mengensystem  $\mathcal{M} \subset \mathcal{P}(X)$  heißt (paarweise) disjunkt, wenn  $\overline{M} \cap N \neq \emptyset$  für alle  $\overline{M}, N \in \mathcal{M}$  mit  $\overline{M} \neq N$ . Für disjunkte Mengenvereinigung schreibe  $\dot{\cup}$  und  $\dot{\biguplus}$ .

**Definition 1.12.** Sei  $\mathcal{A}$  eine  $\sigma$ -Algebra auf  $X$ . Eine Abbildung  $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$  heißt Maß (auf  $\mathcal{A}$ ), wenn gelten:

(M1)  $\mu(\emptyset) = 0$

(M2) Für jede disjunkte Folge  $A_j, j \in \mathbb{N}$  mit  $A_j \in \mathcal{A} \quad (\forall j \in \mathbb{N})$  gilt

$$\mu \left( \dot{\biguplus}_{j \in \mathbb{N}}^{\infty} A_j \right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j) \quad (\sigma\text{-Additivität}).$$

Erfüllt  $\mu$  (M1) und (M2), dann heißt  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  ein Maßraum.

Wenn  $\mu(X) < \infty$ , dann heißt  $\mu$  endlich. Gilt  $\mu(X) = 1$ , dann heißt  $\mu$  Wahrscheinlichkeitsmaß.

Bemerkung: Wenn  $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}$  disjunkt, dann gilt

$$\begin{aligned} \mu(A_1 \dot{\cup} \dots \dot{\cup} A_n) &= \mu(A_1 \dot{\cup} \dots \dot{\cup} A_n \dot{\cup} \emptyset \dot{\cup} \emptyset \dot{\cup} \dots) \\ &\stackrel{(M2)}{=} \mu(A_1) + \dots \mu(A_n) + \mu(\emptyset) + \mu(\emptyset) + \dots \\ &\stackrel{(M1)}{=} \mu(A_1) + \dots + \mu(A_n). \end{aligned}$$

**Beispiel 1.13.** a) Sei  $\mathcal{A} = \mathcal{P}(X)$  und  $x \in X$  fest. Für  $A \subset X$  definiere:

$$\delta_x(A) := \begin{cases} 1, & \text{für } x \in A \\ 0, & \text{für } x \notin A \end{cases}.$$

Dann heißt  $\delta_x$  Punktmaß (Dirac-Maß).

(M1) gilt offensichtlich.

(M2): Seien  $A_j \subset X$  disjunkt für  $j \in \mathbb{N}$ . Dann gilt  $x \in \biguplus_{j \in \mathbb{N}} A_j \Leftrightarrow \exists! k \in \mathbb{N} : x \in A_k$ .

$$\begin{aligned} \Rightarrow \delta_x\left(\biguplus_{j \in \mathbb{N}} A_j\right) &\stackrel{\text{Def}}{=} \begin{cases} 0, x \notin \biguplus_{j \in \mathbb{N}} A_j \\ 1, x \in \biguplus_{j \in \mathbb{N}} A_j \end{cases} = \begin{cases} 0, x \notin A_k \\ 1, x \in A_k \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0, x \notin A_k \\ \delta_x(A_k), x \in A_k \end{cases} = \sum_{j=1}^{\infty} \delta_x(A_j) \end{aligned}$$

$\Rightarrow \delta_x$  ist Maß.

b) Sei  $X = \mathbb{N}, \mathcal{A} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$ . Seien  $p_k \in [0, \infty]$  für  $k \in \mathbb{N}$  gegeben. Setze

$$\mu(A) := \sum_{k \in A} p_k \text{ für } A \subset X.$$

Klar  $\mu(\emptyset) = 0$ . Seien  $A_j \subset \mathbb{N}, j \in \mathbb{N}$  disjunkt. Dann gilt

$$\mu\left(\biguplus_{j \in \mathbb{N}} A_j\right) \stackrel{\text{Def}}{=} \sum_{k \in \biguplus_{j \in \mathbb{N}} A_j} p_k = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k \in A_j} p_k \stackrel{\text{Def}}{=} \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j).$$

$\Rightarrow \mu$  ist Maß.  $\mu$  heißt Zählmaß, wenn  $p_k = 1 \forall k \in \mathbb{N}$ . (Dann  $\mu(A) = |A|$ )

c) Seien  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  ein Maßraum,  $X_0 \subset X$  und  $\mathcal{A}_0$   $\sigma$ -Algebra auf  $X_0$  mit  $\mathcal{A}_0 \subset \mathcal{A}$ . Dann definiert  $\mu_0(A) := \mu(A)$  (für alle  $A \in \mathcal{A}_0$ ) ein Maß auf  $\mathcal{A}_0$ .

Für  $X_0 \in \mathcal{A}$  setze  $\mathcal{A}_0 := \mathcal{A}_{X_0} := \{A \in \mathcal{A} : A \subset X_0\}$  (vgl. [Lem 1.10](#)). Dann ist  $\mu|_{X_0}$  definiert durch  $\mu|_{X_0}(A) = \mu(A)$  für  $A \in \mathcal{A}_{X_0}$  ein Maß auf  $\mathcal{A}_{X_0}$ .  $\mu|_{X_0} : \mathcal{A}_{X_0} \rightarrow [0, \infty]$  heißt Einschränkung von  $\mu$ .

**Satz 1.14.** Seien  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  ein Maßraum und  $A, B, A_j \in \mathcal{A}$  für  $j \in \mathbb{N}$ . Dann gelten:

a) Aus  $A \subset B$  folgt  $\mu(A) \leq \mu(B)$ . (Monotonie)

Wenn zusätzlich  $\mu(A) < \infty$ , dann gilt:  $\mu(A \setminus B) = \mu(A) - \mu(B)$ .

(Speziell:  $\mu(A) < \infty \Rightarrow \mu(A^c) = \mu(X) - \mu(A)$ )

b)  $\mu(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j)$  ( $\sigma$ -Subadditivität)

c) Wenn  $A_1 \subset A_2 \subset \dots$ , dann gilt

$$\mu(A_j) \xrightarrow{j \rightarrow \infty} \mu\left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k\right).$$

d) Wenn  $A_1 \supset A_2 \supset \dots$ , und  $\mu(A_1) < \infty$ , dann gilt

$$\mu(A_j) \xrightarrow{j \rightarrow \infty} \mu\left(\bigcap_{k \in \mathbb{N}} A_k\right).$$

*Beweis.* a) Es gilt:  $B = A \dot{\cup} B \setminus A$  (beachte:  $A \subset B$ ). Dann folgt

$$\mu(B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A) \geq \mu(A).$$

b) Setze  $B_1 := A_1$ ,  $B_k := A_k \setminus \bigcup_{j=1}^{k-1} A_j$  für  $k \geq 2$ ,  $k \in \mathbb{N}$ . Dann folgt  $B_k \cap B_j = \emptyset \ \forall j < k \Rightarrow \{B_j, j \in \mathbb{N}\}$  ist disjunkt.

Ferner gilt  $\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ , da  $B_k \subset A_k$  und jedes  $x \in A_k$  in einem  $B_j$ ,  $j \in \mathbb{N}$ , enthalten ist. Somit gilt

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \mu\left(\bigsqcup_{k \in \mathbb{N}} B_k\right) \stackrel{(M2)}{=} \sum_{k=1}^{\infty} \mu(B_k) \stackrel{a)}{\leq} \sum_{B_k \subset A_k} \mu(A_k).$$

c) Nach Voraussetzung gilt nun in a), dass  $B_k = A_k \setminus A_{k-1}$ ,  $k \geq 2$ .

Ferner gilt  $A_n = \bigsqcup_{k=1}^n B_k$ . Wie in b) folgt dann

$$\begin{aligned} \mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) &= \sum_{k=1}^{\infty} \mu(B_k) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \mu(B_k) \\ &\stackrel{(M2)}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \mu\left(\bigsqcup_{k=1}^n B_k\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n). \end{aligned}$$

Somit folgt c).

□

## 1.2 Das Lebesgue-Maß

Ansatz: Für  $I = (a, b] \subset \mathbb{R}^d$  setze:

$$\lambda(I) := \lambda_d(I) := (b_1 - a_1) \cdots (b_d - a_d) \quad (1.2)$$

Setze ferner  $\mathcal{J}_d := \{(a, b] \subset \mathbb{R}^d : a \leq b\}$ . Beachte:  $\sigma(\mathcal{J}_d) = \mathcal{B}_d$  ([Satz 1.9](#)).

Ziel: Setze  $\lambda_d$  von  $\mathcal{J}_d$  auf  $\mathcal{B}_d$  fort.



## 1. Schritt

Die Menge der Figuren ist

$$\mathcal{F}_d := \left\{ A = \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j \text{ mit } n \in \mathbb{N}, I_1, \dots, I_n \in \mathcal{J}_d \right\}.$$

Beachte:  $\mathcal{J}_d \subset \mathcal{F}_d \subset \sigma(\mathcal{J}_d) = \mathcal{B}_d$ . Mit [Lem 1.6](#) folgt dann  $\sigma(\mathcal{F}_d) = \mathcal{B}_d$ .

**Lemma 1.15.** *Seien  $I, I' \in \mathcal{J}_d$ . Dann gelten*

- a)  $I \cap I' \in \mathcal{J}_d$ .
- b)  $I \setminus I'$  ist eine endliche Vereinigung disjunkter Intervalle aus  $\mathcal{J}_d \Rightarrow I \setminus I' \in \mathcal{F}_d$ .
- c) Jedes  $A \in \mathcal{F}_d$  ist eine endliche Vereinigung disjunkter Intervalle aus  $\mathcal{J}_d$ .
- d)  $\mathcal{F}_d$  ist ein Ring, d.h. es gilt für alle  $A, B \in \mathcal{F}_d$ 
  - (R1)  $\emptyset \in \mathcal{F}_d$
  - (R2)  $B \setminus A \in \mathcal{F}_d$
  - (R3)  $A \cup B \in \mathcal{F}_d$ .

*Beweis.* a) Sei  $I = (\alpha_1, \beta_1] \times \dots \times (\alpha_d, \beta_d]$ ,  $I' = (\alpha'_1, \beta'_1] \times \dots \times (\alpha'_d, \beta'_d]$ . Dann folgt  $I \cap I' = (\overline{\alpha_1}, \overline{\beta_1}] \times \dots \times (\overline{\alpha_d}, \overline{\beta_d}]$  mit:  
 $\overline{\alpha_k} = \max\{\alpha_k, \alpha'_k\}$ ,  $\overline{\beta_k} = \min\{\beta_k, \beta'_k\}$ , wobei  $I \cap I' = \emptyset$ , wenn ein  $\overline{\alpha_k} \geq \overline{\beta_k}$ . Also  $I \cap I' \in \mathcal{J}_d$ .

- b) (IA): Die Behauptung ist klar für  $d = 1$ .
- (IV): Die Behauptung gelte für ein  $d \geq 2$ .
- (IS): Seien  $I, I' \in \mathcal{J}_{d+1}$ . Dann gibt es  $I_1, I'_1 \in \mathcal{J}_1$  und  $I_2, I'_2 \in \mathcal{J}_d$  mit

$$\begin{aligned} I &= I_1 \times I_2, \quad I' = I'_1 \times I'_2 \\ \Rightarrow I \setminus I' &= ((I_1 \setminus I'_1) \times I_2) \cup ((I_1 \cap I'_1) \times (I_2 \setminus I'_2)). \end{aligned}$$

Nach (IV) ist dies eine disjunkte Vereinigung  $\hat{I}_k \in \mathcal{J}_{d+1}$ .

- c) (IA): Die Behauptung ist klar, wenn  $A = I_1$  für ein  $I_1 \in \mathcal{J}_d$ .
- (IV): Für ein  $n \in \mathbb{N}$  gelte die Behauptung für alle  $A = \bigcup_{j=1}^n I_j$  mit beliebigen  $I_j \in \mathcal{J}_d$ .
- (IS): Sei nun  $A = \bigcup_{j=1}^{n+1} I_j$  für beliebige  $I_j \in \mathcal{J}_d$
- <sup>(IV)</sup> $\Rightarrow$  Es existieren disjunkte  $I'_1, \dots, I'_n \in \mathcal{J}_d$  mit  $\bigcup_{j=1}^n I_j = \biguplus_{k=1}^n I'_k$ .

$$\Rightarrow A = I_{n+1} \cup \biguplus_{k=1}^n I'_k = I_{n+1} \cup \biguplus_{k=1}^n \underbrace{(I'_k \setminus I_{n+1})}_{\substack{\text{b) disjunkte, endliche} \\ \text{Vereinigung von } I \text{ in } \mathcal{J}_d}}.$$

d) (R1) gilt, da  $\emptyset = (a, a] \in \mathcal{F}_d$ .

(R3) gilt nach Definition von  $\mathcal{F}_d$ .

Zu (R2): Seien  $A, B \in \mathcal{F}_d$ , also  $A = \bigcup_{j=1}^n I_j, B = \bigcup_{k=1}^m I'_k$  für beliebige  $I_j, I'_k \in \mathcal{F}_d, n, m \in \mathbb{N}$ . Sei  $m$  fest aber beliebig. Induktion über  $n$ :

(IA): Sei  $n = 1$ . Dann gilt  $B \setminus A = \bigcup_{k=1}^m \underbrace{I'_k \setminus I_1}_{\in \mathcal{F}_d \text{ nach b)}}$ .

(IV): Für ein  $n \in \mathbb{N}$  gelte  $B \setminus A \in \mathcal{F}_d$  für alle obigen  $A$  und  $B$ .

(IS): Sei nun  $A' = \bigcup_{j=1}^{n+1} I_j = A \cup I_{n+1}$  (für  $I_j \in \mathcal{F}_d$ ). Dann gilt6

$$B \setminus A' = B \setminus (A \cup I_{n+1}) = \underbrace{(B \setminus A)}_{\in \mathcal{F}_d \text{ nach (IV)}} \setminus I_{n+1} \Rightarrow B \setminus A' \in \mathcal{F}_d.$$

□

## Schritt 2: Fortsetzung von $\lambda_d$ aus (1.2) auf $\mathcal{F}_d$

Idee: TODO BILD

**Lemma 1.16.** Seien  $A = \biguplus_{j=1}^n I_j = \biguplus_{k=1}^m I'_k$  für disjunkte  $I_j \in \mathcal{J}_d$  ( $j = 1, \dots, n$ ) und disjunkte  $I'_k \in \mathcal{J}_d$  ( $k = 1, \dots, m$ ). Dann gilt

$$\sum_{j=1}^n \lambda_d(I_j) = \sum_{k=1}^m \lambda_d(I'_k).$$

*Beweis.* 1) Sei  $d = 2, I = (a, b] \times (c, d], \alpha \in (a, b]$ . Dann folgt  $I = ((a, \alpha] \times (c, d]) \cup ((\alpha, b] \times (c, d]) = I' \cup I''$ .

Ferner  $\lambda(I) \stackrel{(1.2)}{=} (b-a) \cdot (d-c) = ((b-\alpha) + (\alpha-a)) \cdot (d-c) \stackrel{(1.2)}{=} \lambda(I') + \lambda(I'')$ .

Genauso: Dies gilt auch für  $d \geq 3$  und für Zerlegungen in der  $k$ -ten Koordinate. Per Induktion folgt: Wenn man ein  $I \in \mathcal{J}_d$  mit endlich vielen Zwischenstellen  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  in Intervalle  $\tilde{I}_1, \dots, \tilde{I}_l$  zerlegt, dann gilt:  $\lambda_d(I) = \lambda_d(\tilde{I}_1) + \dots + \lambda_d(\tilde{I}_l)$ .

TODO: BILD

2) Setze  $I''_{jk} = I_j \cap I'_k \in \mathcal{J}_d$  ( $j = 1, \dots, n, k = 1, \dots, m$ ). Die  $I''_{jk}$  sind per Definition disjunkt und  $I_j = \bigcup_{k=1}^m I''_{jk}, I'_k = \bigcup_{j=1}^n I''_{jk}$ . (\*)

Zerlege alle  $I''_{jk}$  weiter durch Schneiden mit allen Hyperebenen, auf denen Seiten eines der  $I''_{jk}$  liegen.

Erhalte dabei disjunkte  $\hat{I}_1, \dots, \hat{I}_l \in \mathcal{J}_d$ , wobei jedes  $\hat{I}_i$  in genau einem  $I''_{jk}$  und damit in genau einem  $I_j$  und genau einem  $I'_k$  liegt. Weiter werden alle  $I_j$  und alle  $I'_k$  durch die jeweils in ihnen liegenden  $\hat{I}_k$  wie in 1) zerlegt. Damit gilt:

$$\sum_{j=1}^n \lambda(I_j) \stackrel{1)}{=} \sum_{j=1}^n \sum_{i: \hat{I}_i \subset I_j} \lambda(\hat{I}_i) = \sum_{i=1}^l \lambda(\hat{I}_i) = \sum_{k=1}^m \sum_{j: \hat{I}_j \subset I_k} \lambda(\hat{I}_j) \stackrel{1)}{=} \sum_{k=1}^m \lambda(I'_k)$$

□

Für  $A \in \mathcal{F}_d$  setze

$$\lambda(A) := \lambda_d(A) := \sum_{j=1}^n \lambda_d(I_j), \quad (1.3)$$

wobei  $A = \bigcup_{j=1}^n I_j$  für disjunkte  $I_1, \dots, I_n \in \mathcal{J}_d$ . Nach [Lem 1.16](#) definiert dies eine Abbildung  $\lambda_d : \mathcal{F}_d \rightarrow \mathbb{R}_+$ . Seien  $A = \bigcup_{j=1}^n I_j$ ,  $B = \bigcup_{k=1}^m I'_k$  für disjunkte  $I_j, I'_k \in \mathcal{J}_d$  und es sei  $A \cap B = \emptyset$ . Setze

$$I''_i := \begin{cases} I_i, & i = 1, \dots, n \\ I'_i, & i = n+1, \dots, n+m \end{cases}.$$

Dann sind die  $I''_j$  disjunkt und es folgt

$$\lambda_d(A \cup B) \stackrel{(1.3)}{=} \sum_{i=1}^{n+m} \lambda_d(I''_i) = \sum_{j=1}^n \lambda_d(I_j) + \sum_{k=1}^m \lambda_d(I'_k) \stackrel{(1.3)}{=} \lambda_d(A) + \lambda_d(B).$$

Per Induktion folgt für disjunkte  $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{F}_d$ , dass

$$\lambda_d(A \dot{\cup} \dots \dot{\cup} A_n) = \lambda_d(A_1) + \dots + \lambda_d(A_n). \quad (1.4)$$

Weiter gilt nach [Lem 1.15](#) für  $A, B \in \mathcal{F}_d$  und ein  $I \in \mathcal{J}_d$  mit  $A, B \subset I$ , dass

$$\begin{aligned} A \cap B &= I \cap ((I^c \cup A) \cap (I^c \cup B)) = I \cap ((I \cap A^c) \cup (I \cap B^c))^c \\ &= I \setminus ((I \setminus A) \cup (I \setminus B)) \in \mathcal{F}_d \end{aligned} \quad (1.5)$$

Wenn  $A \subset B$ , dann gilt

$$\lambda_d(A) \leq \lambda_d(B). \quad (1.6)$$

(Beweis genau wie in 1.14a))

Außerdem gilt

$$\begin{aligned} \lambda_d(A \cup B) &= \lambda_d(A \cup B \setminus A) \\ &\stackrel{\text{Satz 1.14}}{=} \lambda_d(A) + \lambda_d(B \setminus A) \stackrel{(1.6)}{\leq} \lambda_d(A) + \lambda_d(B). \end{aligned} \quad (1.7)$$

**Satz 1.17.** Die Abbildung  $\lambda_d : \mathcal{F}_d \rightarrow \mathbb{R}_+$  ist ein Prämaß auf dem Ring  $\mathcal{F}_d$ , d.h es gelten:

(M1)  $\lambda_d(\emptyset) = 0$

(M2\*) Für disjunkte  $A_j \in \mathcal{F}_d$ ,  $j \in \mathbb{N}$  mit  $A := \bigsqcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{F}_d$  gilt

$$\lambda_d(A) = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_d(A_j).$$

*Beweis.* (M1) folgt aus [\(1.2\)](#), da  $\emptyset = (a, a]$ .

- 1) Beh1: Seien  $B_n \in \mathcal{F}_d$  mit  $B_{n+1} \subset B_n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) und  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_n = \emptyset$ . Dann gilt  $\lambda_d(B_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ .  
(Übung: 2.1, Beh1, [Lem 1.15](#) und (1.4)  $\Rightarrow$  [Satz 1.17](#))

- 2) Beweis von Beh1:

Sei  $\epsilon > 0$ . Dann gilt  $\forall n \in \mathbb{N} \exists C_n \in \mathcal{F}_d$  mit  $\overline{C_n} \subset B_n \subset B_1$  und

$$\lambda_d(\underbrace{B_n \setminus C_n}_{\in \mathcal{F}_d}) \leq 2^{-n} \cdot \epsilon.$$

(Ersetze in allen Teilintervallen von  $B_n$  der Form  $(a_1, b_1] \times \cdots \times (a_d, b_d]$   $a_j$  durch  $a_j + \delta_n(\epsilon)$  für ein genügend kleines  $\delta_n(\epsilon) \geq 0$  und  $\delta_n(\epsilon) = 0$  falls ein  $a_j = b_j$ )

Da weiterhin  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{C_n} = \emptyset$ , gilt  $\bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{C_n}^c = \mathbb{R}^d \Rightarrow \{\overline{C_n}^c, n \in \mathbb{N}\}$  ist eine offene Überdeckung von  $\overline{B_1}$ , wobei  $\overline{B_1}$  beschränkt und abgeschlossen ist. Dann folgt mit Heine-Borel:  $\exists n_1 < \cdots < n_m$  mit  $\overline{B_1} \subset \overline{C_{n_1}}^c \cup \cdots \cup \overline{C_{n_m}}^c \Rightarrow \overline{C_{n_1}} \cap \cdots \cap \overline{C_{n_m}} \subset \overline{B_1}^c$ . Mit  $C_{n_j} \subset B_1$  folgt dann  $\overline{C_{n_1}} \cap \cdots \cap \overline{C_{n_m}} = \emptyset \Rightarrow \bigcap_{j=1}^n \overline{C_j} = \emptyset \forall n \geq n_m =: N_\epsilon$  (\*)  
Setze  $D_n := \bigcap_{j=1}^n C_j \in \mathcal{F}_d$  (nach (1.5)),  $n \in \mathbb{N}$ .

Beh2:  $\lambda_d(B_n \setminus D_n) \leq (1 - 2^{-n}) \cdot \epsilon$  ( $\forall n \in \mathbb{N}$ )

Nach (\*) gilt:  $D_n = \emptyset$  für  $n \geq N_\epsilon$ . Beh2 zeigt:  $\lambda_d(B_n) = \lambda_d(B_n \setminus D_n) \leq (1 - 2^{-n}) \cdot \epsilon < \epsilon \forall n \geq N_\epsilon$ . Damit ist der Beweis von [Satz 1.17](#) erbracht.

- 3) Beweis von Beh2:

(IA): Beh2 gilt für  $n = 1$  nach der Ungleichung zu Beginn von 2).

(IV): Beh2 gelte für ein  $n \in \mathbb{N}$ .

(IS): Es gilt mit  $D_{n+1} = D_n \cap C_{n+1}$

$$\begin{aligned} \lambda_d(B_{n+1} \setminus D_{n+1}) &= \lambda_d(B_{n+1} \setminus (D_n \cap C_{n+1})) \\ &= \lambda_d((B_{n+1} \setminus D_n) \cup (B_{n+1} \setminus C_{n+1})) \\ &\stackrel{(1.7)}{\leq} \lambda(B_{n+1} \setminus D_n) + \lambda(B_{n+1} \setminus C_{n+1}) \\ &\stackrel{(1.6)}{\leq} \lambda(B_n \setminus D_n) + \lambda(B_{n+1} \setminus C_{n+1}) \\ &\stackrel{(IV)}{\leq} (1 - 2^{-n}) \cdot \epsilon + 2^{-(n+1)} \epsilon = (1 - 2^{-(n+1)}) \cdot \epsilon. \end{aligned}$$

□

### Schritt 3: Fortsetzung von $\lambda_d$ auf $\mathcal{B}_d$

**Theorem 1.18** (Caratheodory, Fortsetzungssatz, 1914). Sei  $\mathcal{R} \subset \mathcal{P}(X)$  ein Ring und  $\mu : \mathcal{R} \rightarrow [0, \infty]$  ein Prämaß.

Dann existieren eine  $\sigma$ -Algebra  $\mathcal{A}(\mu)$  auf  $X$  und ein Maß  $\bar{\mu}$  auf  $\mathcal{A}(\mu)$ , sodass  $\sigma(\mathcal{R}) \subset \mathcal{A}(\mu)$  und  $\mu(A) = \bar{\mu}(A)$  für alle  $A \in \mathcal{R}$  gelten. Also ist  $\bar{\mu}$  ein Maß auf  $\sigma(\mathcal{R})$  (vgl. Beispiel 1.13c)).

**Theorem 1.19** (Eindeutigkeitssatz). Seien  $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(X)$ ,  $\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{E})$  und  $\mu, \nu$  Maße auf  $\mathcal{A}$  mit  $\mu(E) = \nu(E) \ \forall E \in \mathcal{E}$ . Weiter gelte:

A)  $E, F \in \mathcal{E} \Rightarrow E \cap F \in \mathcal{E}$  ( $\cap$ -stabil)

B)  $\exists E_n \in \mathcal{E}$  mit  $\mu(E_n) < \infty$ ,  $E_n \subset E_{n+1} \ \forall n \in \mathbb{N}$ , und  $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = X$

Dann gilt  $\mu = \nu$  (auf  $\mathcal{A}$ ).

**Bemerkung.** a) B) ist nötig.

Bsp: Seien  $\mu, \nu$  Maße auf  $X$  mit  $\mu(X) = 1$ ,  $\nu(X) = 0$ ,  $\mathcal{E} = \{\emptyset\} \Rightarrow \sigma(\mathcal{E}) = \{\emptyset, X\} \Rightarrow \mu \neq \nu$ , aber  $\mu(\emptyset) = \nu(\emptyset)$ , d.h. A) gilt.

b) A) ist nötig.

Bsp: Seien  $X = \{a, b, c, d\}$ ,  $\mathcal{A} = \mathcal{P}(X) = \sigma(\mathcal{E})$ ,  
 $\mathcal{E} = \{X, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, d\}\}$  und  $\mu, \nu$  auf  $\mathcal{P}(X)$  gegeben durch:

$$\begin{aligned}\mu(\{a\}) &= \mu(\{d\}) = \nu(\{b\}) = \nu(\{c\}) = 1 \\ \mu(\{b\}) &= \mu(\{c\}) = \mu(\{a\}) = \mu(\{d\}) = 2\end{aligned}$$

$\Rightarrow \mu \neq \nu$ , aber  $\mu(X) = \nu(X) = 6$ ,  $\mu(E) = \nu(E) \ \forall E \in \mathcal{E} \setminus \{X\}$ , d.h. B) gilt ohne Monotonie.

**Theorem 1.20.** Es gibt genau eine Fortsetzung von  $\lambda_d$  aus (1.2) auf  $\mathcal{B}_d$ . Man schreibt  $\lambda_d$  (oder  $\lambda$ ) für diese Fortsetzung und nennt sie Lebesgue-Maß.

*Beweis.* Aus Lem 1.15 und Satz 1.17 folgt:  $\lambda_d$  aus (1.2) hat eine Fortsetzung zu einem Prämaß  $\lambda_d$  auf dem Ring  $\mathcal{F}_d$ . Da  $\mathcal{J}_d \subset \mathcal{F}_d \subset \mathcal{B}_d$ , liefern Satz 1.9 und Lem 1.6, dass  $\sigma(\mathcal{F}_d) = \sigma(\mathcal{J}_d) = \mathcal{B}_d$ . Aus Thm 1.18 folgt dann die Existenz der Fortsetzung von  $\lambda_d$  auf  $\mathcal{B}_d$ . Ferner folgt aus (1.5), dass  $\mathcal{F}_d$   $\cap$ -stabil ist. Da die Folge  $E_n := (-n, n]^d$  B) aus Thm 1.19 erfüllt (wegen (1.2)), liefert Thm 1.19 die Eindeutigkeit der Fortsetzung.  $\square$

**Bemerkung 1.21.** a) Sei  $\emptyset \neq X \in \mathcal{B}_d$ . Gemäß Beispiel 1.13 und Korollar 1.11 definiert die Einschränkung von  $\lambda_d$  auf  $\mathcal{B}(X) = \{\mathcal{A} \subset X : \mathcal{A} \in \mathcal{B}_d\} \subset \mathcal{B}_d$  ein Maß, das wir auch mit  $\lambda_d$  bezeichnen und Lebesgue-Maß nennen.

$$\text{b) } \lambda_1([a, b]) = \lambda_1(\bigcap_{n=1}^{\infty} (a - \frac{1}{n}, b]) \stackrel{\text{Satz 1.14}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\lambda_1((a - \frac{1}{n}, b])}_{\stackrel{1.2}{=} b - a + \frac{1}{n}}} = b - a$$

(Entsprechend für  $d \geq 2$  und andere Intervalltypen.)

Sei  $\mathbb{Q} = \{q_n : n \in \mathbb{N}\}$

$$\Rightarrow \lambda_1(\mathbb{Q}) = \lambda_1(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{q_n\}) \stackrel{\text{Def 1.12}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\lambda_1([q_n, q_n])}_{=0} = 0$$

- c) Sei  $H := \{x \in \mathbb{R}^d : x_d = 0\} \Rightarrow H$  ist abgeschlossen, also  $H \in \mathcal{B}_d$ . Da  $H = \bigcup_{n=1}^{\infty}([-n, n]^{d-1} \times \{0\})$  und  $\lambda_d([-n, n]^{d-1} \times \{0\}) = 0$  (vgl. b)), gilt  $\lambda_d(H) = \lambda_d(\bigcup_{n=1}^{\infty}([-n, n]^{d-1} \times \{0\})) \stackrel{\text{Satz 1.14}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_d([-n, n]^{d-1} \times \{0\}) = 0$

Zum Fortsetzungssatz

Sei  $\mu : \mathcal{R} \rightarrow [0, \infty]$  ein Prämaß auf dem Ring  $\mathcal{R}$  und  $A \subset X$ . Setze

$$\mu^*(A) := \inf \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \mu(B_k) : B_k \in \mathcal{R} \text{ für } n \in \mathbb{N}, A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k \right\} \quad (1.8)$$

(Dabei ist  $\inf \emptyset := \infty$ .)

Ferner:

$$\mathcal{A}(\mu) := \{A \subset X : \forall B \subset X \text{ gilt } \mu^*(B) \geq \mu^*(A \cap B) + \mu^*(A^c \cap B)\} \quad (1.9)$$

**Lemma 1.22.**  $\mu^*$  ist ein äußeres Maß, d.h.:

- a)  $\mu^*(\emptyset) = 0$
- b)  $A \subset B \subset X \Rightarrow \mu^*(A) \leq \mu^*(B)$
- c)  $A_j \subset X, j \in \mathbb{N} \Rightarrow \mu^*\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(A_j)$

*Beweis.* a) folgt mit  $B_1 = B_2 = \dots = \emptyset$ .

b) gilt, da in (1.8) die  $B_k$  für  $B$  auch für  $A$  ( $\subset B$ ) genommen werden können.

c) Die Behauptung gilt, wenn ein  $\mu^*(A_j) = \infty$ . Andernfalls wähle  $\epsilon > 0$ . Dann folgt mit (1.8):

$$\begin{aligned} \exists B_{jk} \in \mathcal{R} \ (j, k \in \mathbb{N}) \text{ mit } A_j \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} B_{jk}, \\ \mu^*(A_j) \geq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(B_{jk}) - 2^{-j} \cdot \epsilon \Rightarrow \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \subset \bigcup_{j,k=1}^{\infty} B_{jk} \end{aligned}$$

und

$$\mu^*\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) \stackrel{(1.8)}{\leq} \sum_{j,k=1}^{\infty} \mu^*(B_{jk}) \leq \sum_{j=1}^{\infty} (\mu^*(A_j) + 2^{-j} \cdot \epsilon) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(A_j) + \epsilon.$$

Grenzwertbildung für  $\epsilon \rightarrow 0$  liefert die Behauptung. □

**Lemma 1.23.**  $\mathcal{A}(\mu)$  ist eine  $\sigma$ -Algebra und die Einschränkung  $\bar{\mu}$  von  $\mu^*$  auf  $\mathcal{A}(\mu)$  ist ein Maß.

*Beweis von Thm 1.18.* Sei  $\mathcal{A} \in \mathcal{R}$ .

- 1) Da  $A \subset A \cup \emptyset \cup \emptyset \dots$ , gilt  $\mu^*(A) \leq \mu(A)$ .  
 Wenn  $\mu^*(A) = \infty$ , dann gilt  $\mu^*(A) = \mu(A)$ . Sei also  $\mu^*(A) < \infty$ .  
 Wähle  $\epsilon > 0$ . Dann existieren  $A_j \in \mathcal{R}$  ( $j \in \mathbb{N}$ ) mit

$$A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \text{ und } \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j) \leq \mu^*(A) + \epsilon.$$

Ferner gilt

$$A = A \cap \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j = \bigcup_{j=1}^{\infty} \underbrace{A \cap A_j}_{\in \mathcal{R} \text{ nach Def 1.5}}.$$

Damit folgt

$$\mu(A) \stackrel{\text{wie Satz 1.14}}{\leq} \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A \cap A_j) \stackrel{\text{wie Satz 1.14}}{\leq} \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j) \leq \mu^*(A) + \epsilon.$$

Mit  $\epsilon \rightarrow 0$  folgt dann  $\mu(A) = \mu^*(A) \forall A \in \mathcal{R}$ .

- 2) Zeige:  $A \in \mathcal{A}(\mu)$ .  
 Denn dann folgt mit [Lem 1.6](#)  $\sigma(\mathcal{R}) \subset \mathcal{A}(\mu)$ .

Sei  $B \subset X$ . Wenn  $\mu^*(B) = \infty$ , erfüllen  $A$  und  $B$  die Ungleichung in [\(1.9\)](#). Sei also  $\mu^*(B) < \infty$ . Wähle  $\epsilon > 0 \Rightarrow \exists A_j \in \mathcal{R}$  ( $j \in \mathbb{N}$ ) mit

$$B \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \text{ und } \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j) \leq \mu^*(B) + \epsilon.$$

Daraus folgt  $B \cap A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} \underbrace{A_j \cap A}_{\in \mathcal{R}}$ . Nun gilt außerdem

$$B \cap A^c \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} \underbrace{A_j \cap A^c}_{\in \mathcal{R}}. \quad (*)$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} \epsilon + \mu^*(B) &\geq \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j) = \sum_{j=1}^{\infty} (\mu(A_j \cap A) + \mu(A_j \cap A^c)) \\ &\stackrel{(*)}{\geq} \mu^*(B \cap A) + \mu^*(B \cap A^c). \\ &\stackrel{(1.8)}{\geq} \end{aligned}$$

Mit  $\epsilon \rightarrow 0$  folgt [\(1.9\)](#), also  $A \in \mathcal{A}(\mu)$  ( $\forall A \in \mathcal{R}$ ).

□

**Satz 1.24.** Sei  $x \in \mathbb{R}^d$  und  $A \in \mathcal{B}_d$ . Dann gelten:

- a)  $x + A \in \mathcal{B}_d$
- b)  $\lambda_d(A) = \lambda_d(x + A)$
- c) Wenn  $\mu$  ein Maß auf  $\mathcal{B}_d$  ist, dass b) erfüllt, dann:  
 $\mu(B) = \mu((0, 1]^d) \cdot \lambda_d(B) \quad \forall B \in \mathcal{B}_d$

*Beweis.* a) Seien  $x \in \mathbb{R}^d$ ,  $A \in \mathcal{B}_d$  fest. Setze  $\mathcal{A} := \{B \in \mathcal{B}_d \text{ mit } x + B \in \mathcal{B}_d\}$ .

Zeige:  $A \in \mathcal{A}$ . Klar:  $\mathcal{J}_d \subset \mathcal{A}$ ,  $\mathbb{R}^d \in \mathcal{B}_d$ .

Wenn  $B \in \mathcal{A}$ , dann  $x + B^c = \{y \in \mathbb{R}^d : y = x + d \text{ für ein } d \notin B\} \in \mathcal{B}_d \Rightarrow \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j \in \mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{A} \text{ ist } \sigma\text{-Algebra.}$

Wenn  $B_j \in \mathcal{A}$  ( $j \in \mathbb{N}$ ), dann  $x + B_j \in \mathcal{B}_d \Rightarrow \bigcup_{j=1}^{\infty} (x + B_j) = x + \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j \in \mathcal{B}_d \Rightarrow \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j \in \mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{A} \text{ ist eine } \sigma\text{-Algebra.}$

**Lem 1.6** sagt uns:  $\mathcal{B}_d = \sigma(\mathcal{J}_d) \subset \mathcal{A}$ . Damit folgt  $A \in \mathcal{A}$ .

- b) Sei  $x \in \mathbb{R}^d$  fest. Setze  $\mu(B) = \lambda_d(x + B) \quad \forall B \in \mathcal{B}_d \Rightarrow \mu(\emptyset) = \lambda_d(\emptyset) = 0 \Rightarrow (M1)$ .

Seien  $B_j \in \mathcal{B}_d$  disjunkt ( $j \in \mathbb{N}$ ). Dann gilt:

$$\mu\left(\bigcup_{j \in \mathbb{N}} B_j\right) = \lambda_d\left(x + \bigcup_{j \in \mathbb{N}} B_j\right) = \lambda_d\left(\bigcup_{j \in \mathbb{N}} (x + B_j)\right)$$

$$\stackrel{\lambda_d \text{ ist Maß}}{=} \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_d(x + B_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(B_j) \Rightarrow (M2) \text{ gilt für } \mu.$$

Sei  $I \in \mathcal{J}_d \Rightarrow \mu(I) = \lambda_d(x + I) \stackrel{(1.2)}{=} \lambda_d(I) \Rightarrow \mu(I) = \lambda_d(I) \quad \forall I \in \mathcal{J}_d$ . Da  $\mathcal{J}_d$  A), B) in **Thm 1.19** erfüllt und  $\mathcal{B}_d = \sigma(\mathcal{J}_d)$ , folgt mit **Thm 1.19**, dass  $\mu = \lambda_d$  auf  $\mathcal{B}_d$  gilt.

- c) (Skizze für  $d=1$ ). Sei  $\mu$  wie in Behauptung c) und  $c := \mu((0, 1]) \in [0, \infty)$ . Dann gilt

$$c = \mu\left(\left(0, \frac{1}{2}\right]\right) + \mu\left(\left(\frac{1}{2}, 1\right]\right) \stackrel{\text{nach Vor.}}{=} 2 \cdot \mu\left(\left(0, \frac{1}{2}\right]\right)$$

$$\Rightarrow \mu\left(\left(0, \frac{1}{2}\right]\right) = c \cdot \lambda_1\left(\left(0, \frac{1}{2}\right]\right)$$

Induktiv zeigt man:  $\mu((0, 2^{-n}]) = c \cdot \lambda_1((0, 2^{-n}])$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ .

Durch Verschieben und disjunkte Vereinigungen folgt  $\mu(I) = c \cdot \lambda_1(I)$  für alle Intervalle der Form  $I = (a, b]$  mit  $a, b = m \cdot 2^{-n}$  für gewisse  $m, n \in \mathbb{Z}$

Das System dieser Intervalle erzeugt  $\mathcal{B}_1$  (Beweis von **Satz 1.9**) und erfüllt A), B) in **Thm 1.19**. Damit folgt die Behauptung. □

**Theorem 1.25.**  $\lambda_d$  ist regulär, d.h.:  $\forall A \in \mathcal{B}_d$  gelten:

- a)  $\lambda_d(A) = \inf\{\lambda_d(O) : O \text{ offen, } A \subset O\}$
- b)  $\lambda_d(A) = \sup\{\lambda_d(K) : K \text{ kompakt, } K \subset A\}$

*Beweis.* a) “ $\leq$ “ folgt aus der Monotonie von  $\lambda_d$

“ $=$ “ klar, wenn  $\lambda_d(A) = \infty$ . Sei also  $\lambda_d(A) < \infty$ . Wähle  $\epsilon > 0$ . Nach **(1.8)** gilt:

$$\exists I_j \in \mathcal{J}_d \ (j \in \mathbb{N}) \text{ mit } A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j, \quad \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_d(I_j) \leq \underbrace{\lambda_d(A)}_{=\lambda_d^*(A)} + \epsilon \quad (*)$$



Wie im Beweis von [Satz 1.17](#) findet man offene  $O_j$  mit  $I_j \subset O_j$  und  $\lambda_d(O_j) \leq \lambda_d(I_j) + 2^{-j} \cdot \epsilon$  ( $\forall j \in \mathbb{N}$ ) (\*\*)

$\Rightarrow O := \bigcup_{j=1}^{\infty} O_j$  ist offen und  $A \overset{(*)}{\subset} \bigcup_{j=1}^{\infty} O_j$ .

$$\Rightarrow \lambda_d(O) \overset{\text{Satz 1.14}}{\leq} \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_d(O_j) \overset{(**)}{\leq} \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_d(I_j) + \underbrace{\sum_{j=1}^{\infty} 2^{-j} \cdot \epsilon}_{=2} \overset{(*)}{\leq} \lambda_d(A) + 2 \cdot \epsilon.$$

Mit  $\epsilon \rightarrow 0$  folgt a).

b) “ $\geq$ “ folgt aus der Monotonie von  $\lambda_d$ . Sei  $A \in \mathcal{B}_d$ .

1) Sei zuerst  $A \subset \overline{B}(0, r) =: B$  für ein  $r > 0$ . Sei  $\epsilon > 0$ . Nach a) für  $B \setminus A$ :

$\exists$  offenes  $O$  mit  $B \setminus A \subset O$  und  $\lambda_d(0) \leq \lambda_d(B \setminus A) + \epsilon \overset{\text{Satz 1.14}}{=} \lambda_d(B) - \lambda_d(A) + \epsilon$  (+)

Daraus folgen:

–  $K := B \setminus O = B \cap O^c$  ist abgeschlossen und beschränkt, also kompakt.

–  $K \subset B \cap (B \setminus A)^c = B \cap (B \cap A^c)^c = A$

$$- \lambda_d(B) \overset{B \subset K \cup B}{\leq} \lambda_d(K \cup O) \overset{\text{Satz 1.14}}{\leq} \lambda_d(K) + \lambda_d(O) \overset{(+)}{\leq} \lambda_d(K) + \lambda_d(B) - \lambda_d(A) + \epsilon$$

$\overset{\text{alles in } \mathbb{R}}{\Rightarrow} \lambda_d(A) \leq \lambda_d(K) + \epsilon$ . Damit folgt b) für beschränkte  $A$ .

2) Sei  $A \in \mathcal{B}_d$  beliebig. Setze  $A_n := A \cap \overline{B}(0, n)$  ( $n \in \mathbb{N}$ )

$\Rightarrow A_n \subset A_{n+1}$  ( $\forall n \in \mathbb{N}$ ),  $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_n = A$ . Mit 1) folgt:

$\exists K_n$  kompakt, mit  $K_n \subset A_n$  und  $\lambda_d(A_n) \leq \lambda_d(K_n) + \frac{1}{n}$ .

Durch Grenzwertbildung für  $n \rightarrow \infty$  folgt mit [Satz 1.14](#):

$\lambda_d(K_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \lambda_d(A)$ , weiter  $K_n \subset A$ .

□

**Bemerkung.** Der Beweis von [Thm 1.25a](#)) zeigt, dass man  $O$  als eine Vereinigung offener Intervalle nehmen darf.

**Auswahlaxiom.** Sei  $M$  eine nichtleeres System nichtleerer Mengen  $A \subset X$ . Dann gibt es eine Abbildung  $\phi : M \rightarrow \bigcup_{A \in M} A \subset X$  mit  $\phi(A) \in A \forall A \in M$ .

**Satz 1.26.**  $\exists \Omega \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^d) \setminus \mathcal{B}_d$ .

*Beweis.* Betrachte auf  $(0, 1]^d$  die Äquivalenzrelation gegeben durch  $X \sim Y :\Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Q}^d$ . Sei  $\Omega := \{\phi(A) : A \in M\}$ , wobei  $M$  die Menge der Äquivalenzklasse zu  $\sim$  ist und  $\phi$  aus dem Auswahlaxiom. Damit folgt:  $\Omega \subset (0, 1]^d$ .

Sei  $\{q_1, q_2, \dots\} := \mathbb{Q}^d \cap [-1, 1]^d$ . Dann folgt

$$(0, 1]^d \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} (q_n + \Omega) \subset [-1, 2]^d. \quad (*)$$

Diese Vereinigung ist disjunkt, da jedes  $x \in (0, 1]^d$  in genau einer Äquivalenzklasse liegt.

Annahme:  $\Omega \in \mathcal{B}_d$ .

Dann  $3^d = \lambda_d([-1, 2]^d) \stackrel{\sigma\text{-Subadd.}}{\geq} \lambda_d(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} q_n + \Omega) \stackrel{(\text{M2})}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_d(q_n + \Omega) \stackrel{\text{Satz 1.24}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_d(\Omega) \Rightarrow \lambda_d(\Omega) = 0$

Aber:  $1 = \lambda_d((0, 1]^d) \stackrel{(*)}{\leq} \lambda_d(\bigcup_{n=1}^{\infty} (q_n + \Omega)) \stackrel{\text{wie oben}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_d(\Omega) = 0$ , was ein Widerspruch ist.  $\square$