

## 20. Satz von Fubini / Substitutionsregel

### Satz 20.1 (Satz von Fubini)

Ohne Beweis:  $\mathbb{R}^{n+m} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m = \{(x, y) : x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^m\}$ . Es sei  $f \in L(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m)$ .

(1)  $\exists$  Nullmenge  $N \subseteq \mathbb{R}^m$  : für jedes  $y \in \mathbb{R}^m \setminus N$  ist  $x \mapsto f(x, y)$  Lebesgueintegrierbar über  $\mathbb{R}^n$ .

(2) Mit

$$F(y) := \begin{cases} \int_{\mathbb{R}^n} f(x, y) dx & , \text{ falls } y \in \mathbb{R}^m \setminus N \\ 0 & , \text{ falls } y \in N \end{cases}$$

$$\text{gilt: } F \in L(\mathbb{R}^m) \text{ und } \int_{\mathbb{R}^{n+m}} f(x, y) d(x, y) = \int_{\mathbb{R}^m} F(y) dy$$

### Satz 20.2 (Substitutionsregel)

$U \subseteq \mathbb{R}^n$  sei offen und beschränkt.  $\phi \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$  sei auf  $U$  injektiv und Lipschitzstetig. Es sei  $B := \bar{U}$  ( $B$  beschränkt und abgeschlossen). Dann lässt sich  $\phi$  Lipschitzstetig auf  $B$  fortsetzen und für  $A := \phi(B)$  gilt:

$$\int_A f(x) dx = \int_B f(\phi(z)) |\det \phi'(z)| dz \quad \forall f \in C(A, \mathbb{R})$$

( $A$  beschränkt und abgeschlossen, im Allgemeinen ist auf der Nullmenge  $\partial U$   $\phi'$  nicht erklärt).

### Polarkoordinaten (n=2):

$r = \|(x, y)\| = \sqrt{x^2 + y^2}, x = r \cdot \cos \varphi, y = r \cdot \sin \varphi$  ( $r \geq 0, \varphi \in [0, 2\pi]$ )  
 $\phi(r, \varphi) := (r \cos \varphi, r \sin \varphi), \det \phi'(r, \varphi) = r$ .

### Beispiele:

(1)  $A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1, y \geq 0\}, f(x, y) = y\sqrt{x^2 + y^2}. B := [0, 1] \times [0, \pi] \implies$

$\phi(B) = A$ . Dann:

$$\begin{aligned}
 \int_A f(x, y) d(x, y) &= \int_B f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) \cdot r \, d(r, \varphi) \\
 &= \int_B r \sin \varphi \cdot r \cdot r \, d(r, \varphi) \\
 &= \int_0^\pi \left( \int_0^1 r^3 \sin \varphi \, dr \right) d\varphi \\
 &= \int_0^\pi \left[ \frac{1}{4} r^4 \sin \varphi \right]_{r=0}^{r=1} d\varphi \\
 &= \int_0^\pi \frac{1}{4} \sin \varphi \, d\varphi \\
 &= \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

(2) Behauptung:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

**Beweis:**  $f(x, y) := e^{-(x^2+y^2)} = e^{-x^2} \cdot e^{-y^2}$ . Sei  $\varrho > 0$ .  $Q_\varrho := [0, \varrho] \times [0, \varrho]$ .

$$\begin{aligned}
 \int_{Q_\varrho} f(x, y) d(x, y) &= \int_0^\varrho \left( \int_0^\varrho e^{-x^2} e^{-y^2} dy \right) dx \\
 &= \left( \int_0^\varrho e^{-x^2} dx \right)^2
 \end{aligned}$$

$A_\varrho := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq \varrho^2, x, y \geq 0\}$ ,  $B_\varrho = [0, \varrho] \times [0, \frac{\pi}{2}]$ ,  $\phi(B_\varrho) = A_\varrho$ .

$$\begin{aligned}
 \int_{A_\varrho} f(x, y) d(x, y) &= \int_{B_\varrho} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) d(r, \varphi) \\
 &= \int_{B_\varrho} r \cdot e^{-r^2} d(r, \varphi) \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( \int_0^\varrho r \cdot e^{-r^2} dr \right) d\varphi \\
 &= \frac{\pi}{2} \int_0^\varrho r \cdot e^{-r^2} dr \\
 &= \frac{\pi}{2} \left[ -\frac{1}{2} e^{-r^2} \right]_0^\varrho \\
 &= \frac{\pi}{2} \left( -\frac{1}{2} e^{-\varrho^2} + \frac{1}{2} \right) =: h(\varrho)
 \end{aligned}$$

$h(\varrho) \rightarrow \frac{\pi}{4} \quad (\varrho \rightarrow \infty)$ .  $A_\varrho \subseteq Q_\varrho \subseteq A_{\sqrt{2}\varrho} \xrightarrow{f \geq 0} f_{A_\varrho} \leq f_{Q_\varrho} \leq f_{A_{\sqrt{2}\varrho}}$ .

$$\begin{aligned}
 \implies \underbrace{\int_{\mathbb{R}^2} f_{A_\varrho} d(x, y)}_{=h(\varrho)} &\leq \underbrace{\int_{\mathbb{R}^2} f_{Q_\varrho} d(x, y)}_{=(\int_0^\varrho e^{-x^2} dx)^2} \leq \underbrace{\int_{\mathbb{R}^2} f_{A_{\sqrt{2}\varrho}} d(x, y)}_{=h(\sqrt{2}\varrho)} \\
 &\implies \left( \int_0^\varrho e^{-x^2} dx \right)^2 \rightarrow \frac{\pi}{4} \quad (\varrho \rightarrow \infty) \\
 &\implies \int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \implies \int_{-\infty}^\infty e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}
 \end{aligned}$$

**Zylinderkoordinaten (n=3):**

$$\phi(r, \varphi, z) := (r \cdot \cos \varphi, r \cdot \sin \varphi, z), r \geq 0, \varphi \in [0, 2\pi], z \in \mathbb{R}, \det \phi'(r, \varphi, z) = r.$$

**Beispiel**

$$A := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq z \leq 1\}.$$

$$f(x, y, z) = y\sqrt{x^2 + y^2} + z, \quad B = [0, 1] \times [0, \frac{\pi}{2}] \times [0, 1].$$

$$\begin{aligned} \int_A f(x, y, z) d(x, y, z) &= \int_B f(r \cos \varphi, r \sin \varphi, z) d(r, \varphi, z) \\ &= \int_B (r \sin \varphi r + z) r d(r, \varphi, z) \\ &= \int_0^1 \left( \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( \int_0^1 (r^2 \sin \varphi + rz) dr \right) d\varphi \right) dz \\ &= \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4} \end{aligned}$$

**Kugelkoordinaten (n=3):**

$$r = \|(x, y, z)\| = (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}},$$

$$x = r \cos \varphi \sin \nu, \quad y = r \sin \varphi \sin \nu, \quad z = r \cos \nu \quad (r \geq 0, \varphi \in [0, 2\pi], \nu \in [0, \pi]).$$

$$\phi(r, \varphi, \nu) = (r \cos \varphi \sin \nu, r \sin \varphi \sin \nu, r \cos \nu), \quad \det \phi'(r, \varphi, \nu) = -r^2 \sin \nu.$$

**Beispiel**

$$A := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 1 \leq \|(x, y, z)\| \leq 2, x, y, z \geq 0\}.$$

$$f(x, y, z) := \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2}. \quad B = [1, 2] \times [0, \frac{\pi}{2}] \times [0, \frac{\pi}{2}].$$

$$\begin{aligned} \int_A \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2} d(x, y, z) &= \int_B \frac{1}{r^2} \sin \nu d(r, \varphi, \nu) \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( \int_1^2 \sin \nu dr \right) d\varphi \right) d\nu \\ &= \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

