

## 1.5 Standardkonstruktionen

### A) Produkte

Seien  $X, Y$  nVRe. Dann:

$X \times Y = \{(x, y) : x \in X, y \in Y\}$  ist ein nVR bzgl.

$$\|(x, y)\|_p = \begin{cases} (\|x\|_X^p + \|y\|_Y^p)^{\frac{1}{p}}, & 1 \leq p < \infty \\ \max\{\|x\|_X, \|y\|_Y\}, & p = \infty \end{cases}$$

Diese Normen sind alle äquivalent.

Sind  $X, Y$  vollständig, dann ist  $(X \times Y, \|\cdot\|_p)$  ein BR.

**Definition** Sei  $Z$  ein nVR und  $P \in B(Z)$  mit  $P = P^2$ . Dann heißt  $P$  **Projektion**.

Hier ist die kanonische Projektion auf  $X$  gegeben durch  $P(x, y) = (x, 0)$ .

### B) Diskrete Summe

**Definition 1.72** Seien  $X_1, X_2$  abg. UVRe eines BRes  $X$  mit  $X_1 + X_2 = X$  und  $X_1 \cap X_2 = \{0\}$ . Dann ist  $X$  die **direkte Summe** von  $X_1$  und  $X_2$ . Man schreibt  $X = X_1 \oplus X_2$ .

$X_2$  heißt dann **Komplement** von  $X_1$  in  $X$ .

**Lemma 1.73** Sei  $X$  ein BR und  $P \in B(X)$  eine Projektion. Dann ist  $Q = I - P \in B(X)$  auch eine Projektion und es gelten  $R(P) = N(Q) =: X_1$ ,  $N(P) = R(Q) =: X_2$ ,  $X = X_1 \oplus X_2$ . Man hat  $\|P\| \geq 1$ , wenn  $P \neq 0$ .

**Beweis**  $Q^2 = I - 2P + P^2 = I - P = Q$ .

Falls  $y = Px$  für ein  $x \in X \implies Qy = Px - P^2x = 0$ .

Falls  $Qx = 0$  für ein  $x \in X \implies x - Px = 0 \iff x = Px \implies x \in R(P) \implies R(P) = N(Q)$ . Also ist  $X_1 = N(Q) = R(P)$  abgeschlossen (1.16). Genauso:  $X_2$ .

Ist  $x \in X \implies x = Px + (I - P)x \in X_1 \oplus X_2$ . Wenn  $x \in X_1 \cap X_2 \implies Px = 0$  und  $x = Py$  für ein  $y \in X \implies x = P^2y = Px = 0 \implies X_1 \cap X_2 = \{0\}$ . Schließlich:  $\|P\| = \|P^2\| \leq \|P\|^2 \implies \|P\| \geq 1$ , falls  $P \neq 0$ . ■

Umkehrung:

Sei  $X = X_1 \oplus X_2$ . Dann existiert für jedes  $x \in X$  eindeutig bestimmte  $x_1 \in X_1, x_2 \in X_2$  mit  $x = x_1 + x_2$ . Setze  $Px = x_1$ . Dann ist  $P$  linear und  $P = P^2$ . Ferner ist  $P$  stetig nach dem Homomorphiesatz (Kap. 3). Somit ist die Existenz direkter Zerlegungen und Projektionen äquivalent.

**Beispiel 1.74** a)  $X = L^1(\mathbb{R})$ .  $Pf := \mathbf{1}_{\mathbb{R}^+} \cdot f$ ,  $f \in X \implies P \in B(X), \|P\| = 1, P = P^2$ . Ferner:  $(I - P)f = \mathbf{1}_{(-\infty, 0)} \cdot f$ . Die Abbildung  $J : R(P) \rightarrow L^1(\mathbb{R}^+)$ ,  $Jf = f|_{\mathbb{R}^+}$  ist stetig und linear mit stetiger Inverser

$$J^{-1}g = \begin{cases} g, & \text{auf } \mathbb{R}^+ \\ 0, & \text{auf } (-\infty, 0) \end{cases}$$

$\implies R(P) \equiv L^1(\mathbb{R}^+)$ . Entsprechend:  $N(P) \equiv L^1(\mathbb{R}_-) \implies L^1(\mathbb{R}) \equiv L^1(\mathbb{R}^+) \oplus L^1(\mathbb{R}_-)$

b)  $c_0$  hat kein Komplement in  $\ell^\infty$  (Werner, IV 6.5)

c)  $X = \mathbb{R}^2, P = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}. P^2 = P$  und  $\|P\| = 1 + |t|$  bzgl.  $\|\cdot\|_1$ .  $P$  ist Projektion auf  $x$ -Achse.

### Quotienten

Seien  $X$  nVR,  $Y$  ein UVR.

$$X_{/Y} = \{\hat{x} = x + Y, x \in X\} \quad \text{Quotientenraum}$$

Die Quotientenabbildung  $\Pi : X \rightarrow X_{/Y}, \Pi x = \hat{x}$  ist wohldefiniert, linear und surjektiv. Man schreibt  $\text{codim } Y = \dim X_{/Y}$ . Es gilt  $N(\Pi) = Y$ . Definiere  $\|\hat{x}\| = \inf_{y \in Y} \|x - y\| := d(x, Y)$  **Quotientennorm**. Gilt  $\bar{x} + Y = x + Y$  für gewisse  $x, \bar{x} \in X$ , dann gilt:  $\bar{x} - x \in Y \Rightarrow d(x, Y) = d(\bar{x}, Y) \Rightarrow$  Quotientennorm wohldefiniert.

Sei  $\alpha \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ . Dann:

$$\|\alpha \hat{x}\| = \inf_{y \in Y} \|\alpha x - \frac{\alpha}{\alpha} y\| = |\alpha| \inf_{z \in Y} \|x - z\| = |\alpha| \cdot \|\hat{x}\|$$

Seien  $x_1, x_2 \in X$  und  $\varepsilon > 0$ . Dann ex.  $y_1, y_2 \in Y$  so, dass  $\|x_k - y_k\| \leq \|\hat{x}_k\| + \varepsilon, k = 1, 2. \Rightarrow \|\hat{x}_1 + \hat{x}_2\| = \inf_{y \in Y} \|x_1 + x_2 - y\| \leq \|x_1 - y_1 + x_2 - y_2\| \leq \|\hat{x}_1\| + \|\hat{x}_2\| + 2\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \|\hat{x}_1\| + \|\hat{x}_2\| \Rightarrow \|\hat{x}\|$  ist ein Halbnorm auf  $X_{/Y}$ .

Sei nun  $Y$  abgeschlossen. Ist  $\|\hat{x}\| = 0$ , dann ex  $y_n \in Y$  mit  $\|x - y_n\| \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$ .

Da  $Y$  abg  $\Rightarrow x \in Y \Rightarrow \hat{x} = 0$  und  $X_{/Y}$  ist nVR.

Weiter:  $\|\Pi(x)\| = \|\hat{x}\| \leq \|x\|_X \Rightarrow \Pi \in B(X, X_{/Y})$  mit  $\|\Pi\| \leq 1$ .

**Satz 1.75** Sei  $X$  ein BR und  $Y$  ein abg UVR von  $X$ . Dann ist  $(X_{/Y}, \|\cdot\|)$  ein BR ( $\|\cdot\|$  Quotientennorm) und  $\Pi \in B(X, X_{/Y}), \|\Pi\| = 1$ .

**Beweis** Sei  $\bar{x}$  wie in Lemma 1.51. Dann gilt:  $\|\Pi\| \geq \|\Pi \bar{x}\| = \inf_{y \in Y} \|\bar{x} - y\| \geq 1 - \delta$  für ein bel  $\delta \in (0, 1) \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} \|\Pi\| = 1$ .

Sei  $(\hat{x}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine CF in  $X_{/Y}$ . Dann ex eine Teilfolge  $(\hat{x}_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  mit  $\|\hat{x}_m - \hat{x}_{n_k}\| \leq 2^{-k} (*)$  für alle  $x \geq n_k$ . Dann ex  $y_{n_k} \in Y$  mit  $\|x_{n_{k+1}} - x_{n_k} - y_{n_k}\| \leq 2 \cdot 2^{-k}$ . Setze  $v_N = x_{n_1} + \sum_{k=1}^N z_k$ , wobei  $z_k = x_{n_{k+1}} - x_{n_k} - y_{n_k}$ .  $X$  BR  $\Rightarrow \exists x := \lim_{N \rightarrow \infty} v_N \in X$ . Weiter gilt:

$$v_N = x_{n_{N+1}} - \underbrace{\sum_{k=1}^N y_{n_k}}_{\in Y} \stackrel{\Pi \text{ stetig}}{=} \underbrace{\hat{v}_N}_{\hat{x}_{n_{N+1}}} \rightarrow \hat{x} \text{ in } X_{/Y}$$

Beachte:  $\hat{v}_N = \hat{x}_{n_{N+1}}$ . Wie in Th 1.42 folgt aus  $(*)$ , dass  $\hat{x}_n \rightarrow \hat{x}$ . ■

**Beispiel 1.76** a) Sei  $X = Y \oplus Z, X$  BR. Setze  $J : Z \rightarrow X_{/Y}, Jz = \hat{z} = z + Y \Rightarrow J$  ist linear und stetig. Sei  $Jz = 0 \Rightarrow \hat{z} = 0 \Rightarrow z \in Y \stackrel{z \in X}{\Rightarrow} z \in X \cap Y \Rightarrow z = 0$ . Für alle  $\hat{x} \in X_{/Y}$  ex.  $y \in Y, z \in Z$  mit  $x = z + y$ , also:  $\hat{x} = Jz \Rightarrow J$  ist surjektiv. Mit dem Homomorphiesatz (Kap. 3) folgt:  $J^{-1}$  ist stetig  $\Rightarrow Z \cong X_{/Y}$ , z.B.  $L^1(\mathbb{R}_+) \cong L^1(\mathbb{R})_{/L^1(\mathbb{R}_+)}$ .

Beachte:  $\ell_{/c_0}^\infty$  kann nicht mit einem Teilraum von  $\ell^\infty$  identifiziert werden, d.h. C) ist allgemeiner als B).

- b)  $c = c_0 \cdot \mathbb{C}$  mit Projektion  $Px = x - \ell(x)\mathbf{1}$  ( $\ell(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ ), also ist  $c_{/c_0} \cong \mathbb{C}$ , d.h.  $\text{codim } c_0 = 1$ .

Beachte: Mit anderem Isomorphismus gilt:  $c \cong c_0$  (nach Bsp 1.71)

**Satz 1.77** Sei  $X$   $n$ VR und  $Y \subseteq X$  ein abg. UVR. Sei  $T \in B(X)$  mit  $TY = \{Ty : y \in Y\} \subseteq Y$ .

Dann def.  $\hat{T}\hat{x} := Tx$  einen Operator  $\hat{T} \in B(X_{/Y}, X)$  mit  $\|\hat{T}\| \leq \|T\|$ .

**Beweis** Sei  $\hat{x} = \hat{u} \Rightarrow x - u \in Y$ . Dann:  $T(x - u) \in Y$

...Vorlesungsende, Beweis in der nächste Stunde fertig...

■