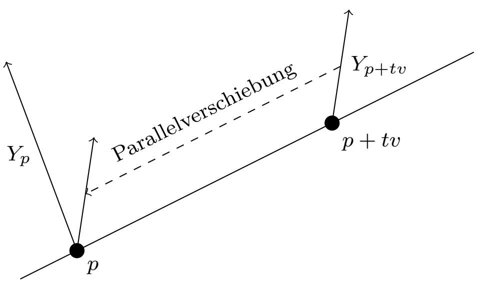
Kapitel 7.

Kovariante Ableitungen

Frage: Was ist eine „gute" Differentialrechnung für Vektorfelder?
Das gewöhnliche Differential im $\mathbb{R}^n$ für $Y\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ist gerade die lineare Abbildung $\mathrm{D}\,Y|_p \cdot v = \lim \frac{1}{t}\left(Y(p+tv) - Y(p)\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0} Y(p+tr)$. Betrachte im euklidischen Fall einen Punkt p, sowie einen Tangentialvektor Y_p.



Nun gehe zur Betrachtung von Vektorfeldern $X\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ über und setze $\mathrm{D}_X\,Y|_p = \mathrm{D}\,Y|_p \cdot X_p$. Hierfür gilt:

- D ist $\mathbb{R}$-linear in Y: $\mathrm{D}(Y+\tilde{Y}) = \mathrm{D}\,Y + \mathrm{D}\,\tilde{Y}$.
- Es gilt die Leibnizregel: $\mathrm{D}(fY) = \mathrm{D}\,f \cdot Y + f\,\mathrm{D}\,Y$.
- D ist $C^\infty(\mathbb{R}^n)$-linear in X:

$$\mathrm{D}_{fX}\,Y|_p = \mathrm{D}\,Y|_p \cdot (fX)_p = \mathrm{D}\,Y|_p \cdot f(p)X_p = f(p)\,\mathrm{D}\,Y|_p \cdot X_p = (f\,\mathrm{D}_X\,Y)(p).$$

Erinnerung: Die Lieableitung $\mathcal{L}_{(\cdot)}Y$ ist *nicht* $C^\infty(M)$-linear.

Definition 7.1 *Es seien M eine glatte Mannigfaltigkeit und E ein Vektorbündel über M. Eine* ***kovariante Ableitung*** *(oder* ***Zusammenhang*** *([engl.] „connection")) auf E ist eine Abbildung*

$$\nabla\colon \mathcal{V}(M) \times \Gamma(E) \to \Gamma(E), \quad \nabla(X,S) = \nabla_X S$$

mit den folgenden Eigenschaften:

(i) ∇S ist $C^\infty(M)$-linear, das heißt

$$\nabla_{X+Y} S = \nabla_X S + \nabla_Y S \text{ und } \nabla_{fX} S = f \nabla_X S$$

für alle $X, Y \in \mathcal{V}(M)$ und $f \in C^\infty(M)$.

(ii) ∇_X ist $\mathbb{R}$-linear, das heißt für alle $\mu, \nu \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\nabla_X(\mu S + \nu T) = \mu \nabla_X S + \nu \nabla_X T.$$

(iii) ∇_X *erfüllt die folgende Leibnizregel:*

$$\nabla_X(fS) = \mathrm{d}f(X) \cdot S + f \cdot \nabla_X S = X(f) \cdot S + f \cdot \nabla_X S.$$

Kurzform: $\nabla\colon \Gamma(E) \to \Gamma(\mathrm{T}^* M \otimes E), S \mapsto \nabla_{(.)} S$ *ist eine* $C^\infty(M)$*-Modulderivation.*

Beispiel (1) Das gewöhnliche Differential D definiert in kanonischer Weise eine kovariante Ableitung auf $\mathrm{T}\,\mathbb{R}^n$.

$$X \in \mathcal{V}(\mathbb{R}^n), X\colon\ \mathbb{R}^n \to \mathrm{T}\,\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \text{ via } \mathcal{I}\colon X_p \mapsto (p, \underbrace{\mathcal{I}_p(X_p)}_{=:\overline{X}_p}).$$

Nun ist wie folgt eine kovariante Ableitung gegeben: $(\nabla_X Y)_p = \mathcal{I}^{-1}(p, \mathrm{D}_{\overline{X}_p} \overline{Y})$.

(2) $E = M \times \mathbb{R}^n$, ein Schnitt S von E ist von der Form $S_p = (p, s(p))$, $s\colon M \to \mathbb{R}^n$ glatt.

Hier definiert man die kovariante Ableitung:

$$\nabla_X S = (p, \mathcal{I}_{s(p)}^{-1}(s_{*p}, X_p))$$

$$s_{*p}\colon\ \mathrm{T}_{*p} M \to \mathrm{T}_{*p}\,\mathbb{R}^n, s_{*p}\colon X_p \in \mathrm{T}_{*p}\,\mathbb{R}^n \xrightarrow{\mathcal{I}_{s(p)}} \mathbb{R}^n.$$

(3) Sei $E = M \times \mathbb{R}^n$, ein Schnitt $S = (\mathrm{id}, \sigma)$, $\sigma : M \to \mathbb{R}^n$. Dann ist $(\nabla_X S)_p = (p, \mathcal{I}_p(\sigma_{*p}(X_p))$, $\sigma_{*p} : \mathrm{T}_p M \to \mathrm{T}_{\sigma(p)}\,\mathbb{R}^n$. Sei $\omega = (\omega_j^k)_{j,k\leq n}$ eine $(n \times n)$-Matrix von 1-Formen auf M, das heißt $\omega(X)|_p \in \mathfrak{M}^{n\times n}(\mathbb{R})$. Für einen Schnitt $S = (\mathrm{id}, \sigma)$ und sei dann

$$(\nabla_X S)_p = (\mathrm{id}, \mathcal{I}_p(\sigma_{*p}(X_p)) + \omega(X)|_p \cdot \sigma(p).$$

Dies definiert eine kovariante Ableitung auf $E = M \times \mathbb{R}^n$.

(4) $\mathrm{d}\colon \Omega^0(M) = C^\infty(M) = \Gamma(M \times \mathbb{R}) \to \Omega^1(M) = \Gamma(\mathrm{T}^* M) = \Gamma(\underbrace{\mathrm{T}^* M \otimes (M \times \mathbb{R})}_{\text{Fasern: } \mathrm{T}_p^* M \otimes \mathbb{R} \cong \mathrm{T}_p^* M})$

mit $f \mapsto [\mathrm{d}f\colon X \mapsto \mathrm{d}f(X) = X(f)]$.

Dann ist

$$\mathrm{d}\colon \mathcal{V}(M) \times C^\infty(M) \to C^\infty(M),$$
$$\nabla_X f = \mathrm{d}(X, f) \mapsto X(f)$$

eine kovariante Ableitung auf $C^\infty(M)$.

(5) Es sei $M \subseteq \mathbb{R}^k$ eine glatte Untermannigfaltigkeit und ∇ die kanonische kovariante Ableitung auf $\mathrm{T}\,\mathbb{R}^k$.

Erster Ansatz für eine kovariante Ableitung:

$$\tilde{\nabla}_X Y = \nabla_{\tilde{X}} \tilde{Y}|_M \text{ das funktioniert noch nicht.}$$

Für $X, Y \in \mathcal{V}(M)$ seien $\tilde{X}, \tilde{Y}$ Fortsetzungen, das heißt $\tilde{X}|_M = X$ und $\tilde{Y}|_M = Y$.

$$(\nabla_{\tilde{X}} \tilde{Y})_p \in \mathrm{T}_p\,\mathbb{R}^k \supseteq \mathrm{T}_p M.$$

Nächster Ansatz, der tasächlich eine kovariante Ableitung definiert.

$$\tilde{\nabla}_X Y = (\nabla_{\tilde{X}} \tilde{Y}|_M)^{\mathrm{proj}\,\mathrm{T}_p M},$$

wobei $X^{\mathrm{proj}\,\mathrm{T}_p M}$ die orthogonale Projektion von X auf den Tangentialraum $\mathrm{T}_p M$ bzgl. des Standardskalarproduktes ist.

Schreibt man in Beispiel 3) $\sigma = (\sigma^1, \ldots, \sigma^n)$, so kann man $\mathrm{d}\sigma = (\mathrm{d}\sigma^1, \ldots, \mathrm{d}\sigma^n)$ als 1-Form auf M mit Werten in $\mathbb{R}^n$ auffassen:

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\sigma(X)_p &= (\mathrm{d}\sigma^1(X)_p, \ldots, \mathrm{d}\sigma^n(X)_p)\\ &= (X(\sigma^1)_p, \ldots, X(\sigma^n)_p)\\ &= \mathcal{I}_p(\sum X(\sigma^i)\partial_i),\end{aligned}$$

wobei ∂_i das i-te Koordinatenfeld in der Karte $(\mathrm{id}, \mathbb{R}^n)$ ist. Identifiziert man $E = M \times \mathbb{R}^n$ mit $C^\infty(M, \mathbb{R}^n)$, so gilt $\nabla_X S = \mathrm{d}\sigma(X)\omega(X)\sigma$ (Kurzschreibweise für die zweite Komponente von S). Lokal ist *jede* kovariante Ableitung von dieser Form.

Lemma 7.2 *Die kovariante Ableitung $(\nabla_X S)_p$ hängt nur von den Werten von X und S in einer Umgebung von p ab.*

Beweis Es seien $p \in M$ und $X_1, X_2 \in \mathcal{V}(M)$ sowie $S_1, S_2 \in \Gamma(E)$ und U eine Umgebung von p mit $X_1|_U = X_2|_U$ und $S_1|_U = S_2|_U$. Wähle nun ein $\sigma \in C^\infty(M)$ mit dem Träger $\operatorname{supp}\sigma \subseteq U$ und $\sigma|_V \equiv 1$ auf einer Umgebung V von p. Dann gilt: $\sigma X_1 = \sigma X_2$ und $\sigma S_1 = \sigma S_2$. Für $q \in V$ folgt dann:

$$\begin{aligned}(\nabla_{\sigma X_i}\sigma S_i)_q &= \sigma(q)(\nabla_{X_i}\sigma S_i)|_q\\ &= \sigma(q)(\underbrace{X_i(\sigma)|_q}_{=0} S_i + \underbrace{\sigma(q)}_{=1} \nabla_{X_i} S_i|_q)\\ &= \nabla_{X_i} S_i|_q\end{aligned}$$

Damit folgt $\nabla_{X_1} S_1 = \nabla_{X_2} S_2$ $\square$

1. Lokale Koordinaten

Es sei (φ, U) eine Karte von M um $p \in M$ und $E|_U \xrightarrow{\tau} U \times \mathbb{R}^n$. Dann ist $s_i(p) = \tau^{-1}(p, e_i)$ eine lokale Basis. Jeder Schnitt S ist also lokal von der Form $S|_U = \sum_i \sigma^i s_i$. Somit existieren glatte Funktionen Γ^k_{ij}, die sogenannten **Christoffelsymbole** mit

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} s^j = \sum_k \Gamma^k_{ij} s^k.$$

Für $S = \sum \sigma^j s_j$ und $X = \sum \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ folgt dann:

$$\begin{aligned}(\nabla_X S)_p &= \sum_{i,j} \xi^i_p \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \left(\sigma^j s_j\right)\\ &= \sum_{i,j} \xi^i_p \left(\frac{\partial \sigma^j}{\partial x^i} \cdot s_j(p) \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} s_j|_p\right)\\ &= \sum_{i,j} \xi^i_p \left(\left.\frac{\partial \sigma^j}{\partial x^i}\right|_p s_j(p) + \sigma^j(p) \sum_k \Gamma^k_{ij}(p) s_k(p)\right)\\ &= \sum_k \left(\underbrace{\sum_i \xi^i_p \left.\frac{\partial \sigma^k}{\partial x^i}\right|_p}_{=X(\sigma^k)|_p = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big|_{t=0}(\sigma^k \circ \gamma) \text{ mit } \dot\gamma(0) = X_p} + \sum_{i,j} \xi^i_p \sigma^j(p) \Gamma^k_{ij}(p)\right) s_k(p)\end{aligned}$$

Bemerkung (1) $X \mapsto (\nabla_X S)_p$ hängt nur von dem Wert X_p von X in p ab, Schreibweise $(\nabla_X S)_p = \nabla_{X_p} S$.

(2) $S \mapsto \nabla_{X_p} S$ hängt nur von den Werten von S entlang einer Kurve γ mit $\dot\gamma(0) = X_p$ ab. Es gilt

$$\nabla_X S = \sum_k X(\sigma^k) S_k + \sum_k \sum_j \left(\left(\sum_i \Gamma^k_{ij} \xi^i \right) \sigma^j \right) s_k.$$

Schreibt man $\sigma = (\sigma^1, \ldots, \sigma^n)$ und fasst $\mathrm{d}\sigma = (\mathrm{d}\sigma^1, \ldots, \mathrm{d}\sigma^n)$ als lokale 1-Form mit Werten in $\mathbb{R}^n$ auf, so ist für $s = (s_1, \ldots, s_n)$ $\mathrm{d}\sigma \cdot s = \sum \mathrm{d}\sigma^j s^j$ eine lokale 1-Form mit Werten in E. Es gilt: $\mathrm{d}\sigma \cdot s(X) = \mathrm{D}_X\, \sigma \cdot s$. Analog definiert $\omega(X) = (\omega^k_j(X))_{k,j}$ eine lokale 1-Form mit Werten in den reellen $(n \times n)$-Matrizen. Dann ist

$$\omega\sigma : X \mapsto \omega(X)\sigma = \left(\sum_{i,j} \Gamma^k_{ij} \xi^i \sigma^j \right)^k$$

eine lokale 1-Form mit Werten in $\mathbb{R}^n$ und $\omega\sigma \cdot s$ eine lokale 1-Form mit Werten in E. Damit gilt

$$\nabla_X S = (\mathrm{d}\sigma(X) + \omega(X)\sigma) \cdot s$$

oder kurz

$$\nabla = \mathrm{d} + \omega.$$

2. Transformationsverhalten

Es seien $E|_{U_\alpha} \overset{\tau_\alpha}{\to} U_\alpha \times \mathbb{R}^n$ und $E|_{U_\beta} \overset{\tau_\beta}{\to} U_\beta \times \mathbb{R}^n$ lokale Trivialisierungen. Die Übergangsfunktion

$$\psi = \psi_{\beta\alpha} : U_\alpha \cap U_\beta \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$$

war durch

$$\tau_\beta \circ \tau_\alpha^{-1}(p, x) = (p, \psi x)$$

definiert. Für die lokalen Darstellungen $S = \sum \sigma^j s_j = \sum \tilde\sigma^j s_j$ in τ_α beziehungsweise τ_β gilt damit $\tilde\sigma^i = \sum_k \psi^i_k \sigma^k$, kurz $\tilde\sigma = \psi\sigma$. Es folgt daraus:

$$(\mathrm{d}\sigma(X) + \omega(X)\sigma) S = \nabla_X S = (\mathrm{d}\tilde\sigma(X) + \tilde\omega(X)\tilde\sigma)\tilde S$$

also

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\sigma(X) + \omega(X)\sigma &= \psi^{-1}(\mathrm{d}\tilde\sigma(X) + \tilde\omega(X)\tilde\sigma) \\ &= \psi^{-1}(\mathrm{d}(\psi\sigma)(X) + \tilde\omega(X)\psi\sigma) \\ &= \psi^{-1}((D_X f)\sigma + \psi \mathrm{d}\sigma(X) + \tilde\omega(X)\psi\sigma) \\ &= \mathrm{d}\sigma(X) + (\underbrace{\psi^{-1}(D_X\psi) + \psi^{-1}\tilde\omega(X)\psi}_{=\omega(X)})\sigma. \end{aligned}$$

Damit gilt

$$\tilde\omega(X) = \psi\omega(X)\psi^{-1} - D_X\psi \cdot \psi^{-1}. \tag{7.1}$$

Daher definiert $\omega(X)$ *keinen* Schnitt in $\mathrm{Hom}(E, E)$, denn in Kapitel 5 wurde gezeigt, dass die Übergangsfunktion von $\mathrm{Hom}(E, E)$ gegeben ist durch

$$(p, \eta) \to (p, \psi \circ \eta \circ \psi^{-1}).$$

Bemerkung Der zweite Summand in (7.1) hängt *nur* von der Übergangsfunktion ψ und X ab, und somit *nicht* von ∇. Das heißt sind ∇ und $\tilde{\nabla}$ kovariante Ableitungen auf E, so ist ihre Differenz $\nabla - \tilde{\nabla}$ eine globale 1-Form mit Werten in $\mathrm{Hom}(E, E)$.

Durch eine kovariante Ableitung auf einem Vektorbündel E erhalten wir kovariante Ableitungen auf dem dualen Vektorbündel E^* und Tensorprodukte von Vektorbündeln wie folgt:

Proposition 7.3 *Die für $X \in \mathcal{V}(M)$, $S^* \in \Gamma(E^*)$ und $v \in E_p$ sowie eine Fortsetzung $\tilde{v} \in \Gamma(E)$ von v_p durch*

$$(\nabla^*_X S^*)_p(v) = X_p(S^*(\tilde{v})) - S^*|_p(\nabla_X \tilde{v})$$

definierte Abbildung ist eine kovariante Ableitung auf E^*. Dass $S^*(\tilde{v}) = (S^*, \tilde{v})$ ist führt zu $X_p(S^*, \tilde{v}) = (\nabla^*_X S^*, \tilde{v}) + (S^*, \nabla_X \tilde{v})$.

Der Beweis sei zur Übung überlassen.

Proposition 7.4 *Es seien E_1 und E_2 Vektorbündel mit kovarianten Ableitungen ∇^1 und ∇^2 über M. Dann definiert für $X \in \mathcal{V}(M)$, $S_i \in \Gamma(E_i)$*

$$\nabla_X(S_1 \otimes S_2) = \nabla^1_X S_1 \otimes S_2 + \nabla^2_X S_1 \otimes S_2$$

durch lineare Fortsetzungen eine kovariante Ableitung auf $E_1 \otimes E_2$.

Definition 7.5 *Die Abbildung*

$$\begin{aligned} R^\nabla = R : \mathcal{V}(M) \times \mathcal{V}(M) \times \Gamma(E) &\to \Gamma(E) \\ R(X,Y)S = \nabla_X \nabla_Y S - \nabla_Y \nabla_X S &- \nabla_{[X,Y]} S \end{aligned}$$

heißt der ***Krümmungstensor*** *der Abbildung ∇.*

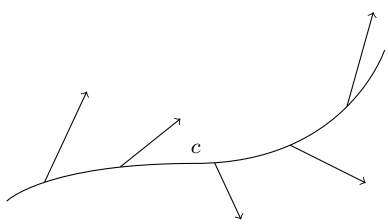
Bemerkung Für alle $X, Y \in \mathcal{V}(M)$ gilt $R(Y,X) = -R(X,Y)$.

Proposition 7.6 *R ist $C^\infty(M)$-linear in allen Argumenten.*

Der Beweis sei zur Übung überlassen.

3. Schnitte entlang von Ableitungen

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r] & \mathrm{T}\,M \\ \mathcal{I} \arrow[u, "c"] & \end{tikzcd}$$



$$\nabla_{\dot{c}} \tilde{X} = \gamma$$

Definition 7.7 *Es seien E ein Vektorbündel über M mit kovarianter Ableitung ∇ und $\Phi : N \to M$. Ein* ***Schnitt*** *entlang Φ ist eine glatte Abbildung $S : N \to E$, so dass $S(p) \in E_{\Phi(p)}$ gilt, dies entspricht genau dem Schnitt in das längs Φ zurückgezogene Bündel Φ^*.*

$$\begin{tikzcd}
\Phi^*E \arrow[r, hook] \arrow[d] & E \arrow[d, "\pi"] \\
N \arrow[r, "\Phi"] \arrow[ur, "S"] \arrow[u, bend left, dashed, "\tilde{S}"] & M
\end{tikzcd}$$

Für einen Schnitt S in E längs Φ und $X_p \in \mathrm{T}_p N$ ist die kovariante Abbildung $\nabla_{X_p} S$ von S in Richtung X_p wie folgt definiert:
Es sei $s_1, \ldots, s_n$ eine lokale Basis über einer Trivialisierungsumgebung $U \subseteq M$. Dann ist S lokal gegeben durch

$$S_p = \sum_j \sigma^j(p) s_j(\Phi(p))$$

für $p \in V = \Phi^{-1}(U) \subseteq N$, und damit

$$\nabla_{X_p} S = (\mathrm{d}\sigma(X_p) + \omega(\Phi_{*p} X_p)\sigma(p))\, S(\Phi(p)).$$

Dies hängt nicht von der Wahl der Trivialisierung ab, denn ist U' ein weiteres Trivialisierungsgebiet mit lokaler Basis $\tilde{s}_1, \ldots, \tilde{s}_n$ und Übergangsfunktion $\psi : C \cap U' \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, so gilt

$$\begin{aligned}
\tilde{\sigma} &= (\psi \circ \Phi)\sigma \qquad \text{und} \\
\tilde{\omega} &= (\psi \circ \Phi)\omega(\psi \circ \Phi)^{-1} - \mathrm{d}(\psi \circ \Phi)(\psi \circ \Phi)^{-1}
\end{aligned}$$

damit folgt

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\tilde{\sigma}(X_p) + \tilde{\omega}(\Phi_{*p} X_p)\tilde{\sigma}(p) - \mathrm{d}&((\psi \circ \Phi)\sigma)(X_p) \\
&+ (\psi \circ \Phi)\omega(\Phi_{*p} X_p)(\psi \circ \Phi)^{-1}(\psi \circ \Phi)\sigma \\
&- \mathrm{d}(\psi \circ \Phi)(X_p)(\psi \circ \Phi)^{-1}(\psi \circ \Phi)\sigma
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \mathrm{d}(\psi \circ \Phi)(X_p)\sigma + (\psi \circ \Phi)\omega(\Phi_{*p} X_p)\sigma - \mathrm{d}(\psi \circ \Phi)(X_p)\sigma \\
&= (\psi \circ \Phi)(\mathrm{d}\sigma(X_p) + \omega(\Phi_{*p} X_p)\sigma)
\end{aligned}$$

Damit ist $p \mapsto \nabla_{X_p} S$ als Schnitt entlang Φ wohldefiniert.

Bemerkung Dies definiert eine kovariante Ableitung auf $\Phi^* E \subseteq N \times E$. Sind umgekehrt $S \in \Gamma(E)$ und $X_p \in \mathrm{T}_p N$, so ist $S \circ \Phi$ ein Schnitt entlang Φ und es gilt

$$\nabla_{X_p}(S \circ \Phi) = \nabla_{\Phi_{*p} X_p} S$$

Spezialfall: Sei $\Phi = c : \mathcal{I} = [a, b] \to M$. Ein Schnitt in E entlang c ist eine glatte Abbildung $S : \mathcal{I} \to E$ mit $S(t) \in E_{c(t)}$. Die kovariante Abbildung $\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}\big|_t} S$ wird kurz als $\nabla_t S$ oder $S'(t)$ geschrieben. In lokalen Koordinaten gilt

$$\begin{aligned}
S' &= \left(\mathrm{d}\sigma\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) + \omega\left(c_*\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)\right)\sigma\right) S \circ c \\
&= (\sigma' + \omega(\dot{c})\sigma)\, S \circ c
\end{aligned}$$

Definition 7.8 *Ein Schnitt $S \in \Gamma(E)$ heißt **parallel** (oder **konstant**), wenn $\nabla S \equiv 0$. Ein Schnitt S entlang c heißt **parallel**, wenn $S' \equiv 0$ gilt.*

Proposition 7.9 *Es sei $c : \mathcal{I} \to M$ eine (stückweise) glatte Kurve und $\xi \in E_{c(s)}$. Dann existiert genau ein entlang c paralleler Schnitt S_ξ in E mit $S_\xi(s) = \xi$.*

Beweis in lokalen Koordinaten definiert

$$0 = S'_\xi(t) = (\sigma'(t) + \omega(\dot{c}(t)\sigma(t))S(\mathrm{d}t))$$

ein lineares Differentialgleichungssystem:

$$\sigma'(t) = A(t) \cdot \sigma(t)$$

wobei $A(t) = -\omega(\dot{c}(t))$. Ist $[t, T]$ ein kompaktes Teilintervall in $\mathcal{I}$ mit $s \in [t, T]$, so existiert eine Partition $t = t_0 < \ldots < t_k = T$, so dass $c([t_i, t_{i+1}])$ in einer Trivialisierungsumgebung liegt. Man findet so sukzessive eindeutige Lösungen auf den Teilintervallen (*lineares* System), welche durch Fortsetzungen eine eindeutige Lösung auf $[t, T]$ definieren. Erneut folgt aus der Eindeutigkeit, dass ein für alle Zeiten definierter paralleler Schnitt S_ξ existiert. $\square$

Definition 7.10 *Es sei c eine glatte Kurve in M. Die lineare Abbildung*

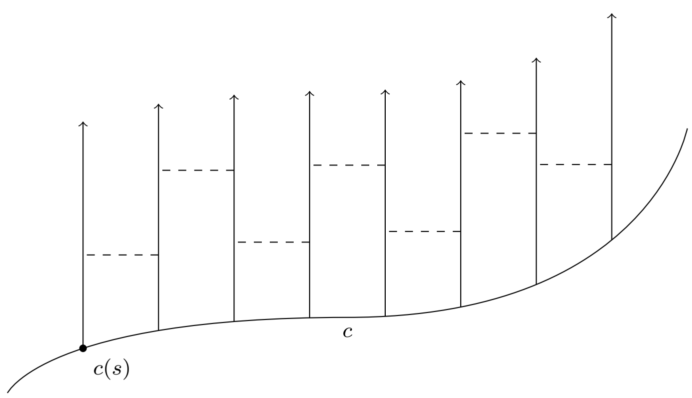
$$\begin{array}{rccc} P^c_{s,t}: & E_{c(s)} & \to & E_{c(t)} \\ & \xi & \mapsto & S_\xi(t), \end{array}$$

wobei S_ξ den nach Proposition 7.9 eindeutigen parallelen Schnitt entlang c mit $S_\xi(s) = \xi$ bezeichnet, heißt ***Paralleltransport*** *entlang c.*

Bemerkung (1) $P^c_{s,t}$ ist invertierbar mit Inversen $(P^c_{s,t})^{-1} = P^c_{t,s} = P^{\overline{c}}_{s,t}$, wobei $\overline{c} = (s + t - \tau)$.

(2) Die Abbildung $P^c_{s,t}$ ist im Allgemeinen *nicht* unabhängig von der Wahl von c.

Beispiel In $\mathbb{R}^n$ ist ein Vektorfeld X genau dann parallel, wenn X (beziehungsweise $\overline{X}_p \in \mathcal{I}_p(X_p)$) konstant im „üblichen" Sinne ist: Paralleltransport entlang einer Kurve entspricht der gewählten Parallelverschiebung.



Es seien $S \in \Gamma(E)$ und $X_p \in \mathrm{T}_p M$. Ist c eine Integralkurve von X_p, das heißt $c(0) = p$ und $\dot{c}(0) = X_p$, so ist $\tilde{S} = S \circ c$ ein Schnitt entlang c und es gilt $\tilde{S}'(0) = \nabla_{X_p} S$.

Nun sei ferner $\xi_1, \dots, \xi_n$ eine Basis von E_p und es bezeichnen $s_1, \dots, s_n$ die parallelen Schnitte entlang c mit $s_i(0) = \xi_i$. Dann gilt $\tilde{S}(t) = \sum \sigma^j(t) s_j(t)$ und es folgt

$$\begin{aligned}
\nabla_{X_p} S = \tilde{S}'(0) &= \nabla_t\big(\sum_j \sigma^j s_j\big)(0) \\
&= \sum_j \big((\sigma^j)' s_j + \sigma^j \underbrace{\nabla_t s_j}_{\equiv 0}\big)(0) \\
&= \sum_j \lim_{t\to 0} \left(\frac{\sigma^j(t) - \sigma^j(0)}{t}\right) s_j(0) \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \left(\sum_j \sigma^j(t) s_j(0) - \sigma^j(0) s_j(0)\right) \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \left(\sum_j \sigma^j (P^c_{t,0}(s_j(t)) - \sigma^j(0) s_j(0)\right) \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \Big(P^c_{t,0}\big(\sum \sigma^j s_j(t)\big) - \sum \sigma^j s_j(0)\Big) \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \Big(P^c_{t,0}(\tilde{S}(t) - \tilde{S}(0))\Big)
\end{aligned}$$

4. Der Levi-Civita Zusammenhang

Für das „gewöhnliche“ Differential auf $\mathbb{R}^k$ gilt:

$$\mathrm{D}\, Y(X) - \mathrm{D}\, X(Y) = \sum_i^k \frac{\partial y^j}{\partial x^i} X^i - \frac{\partial x^j}{\partial x^i} Y^i = [X, Y].$$

Definition 7.11 *Es sei ∇ eine kovariante Ableitung auf $\mathrm{T}\,M$. Das $(1,2)$-Tensorfeld*

$$T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y]$$

*heißt **Torsion** oder der **Torsionstensor** von ∇. Die kovariante Ableitung heißt **torsionslos**, wenn $T \equiv 0$ gilt.*

Betrachtet man die Standardmetrik $g^{\mathrm{std}} = \langle \cdot, \cdot \rangle$ des $\mathbb{R}^k$ in den Koordinaten $(\mathrm{id}, \mathbb{R}^k)$, so gilt:

$$\begin{aligned}
g^{\mathrm{std}} &= \sum_{i,j} g_{ij} \mathrm{d}x^i \otimes \mathrm{d}x^j = \sum_{i,j} \delta_{ij} \mathrm{d}x^i \otimes x^j \\
&= \sum_i \mathrm{d}x^i \otimes \mathrm{d}x^i.
\end{aligned}$$

Das heißt die Metrik g^{std} (das heißt die g_{ij}) ist konstant.

Satz 7.12 (Levi-Civita, 1961) *Auf einer Riemannschen Mannigfaltigkeit existiert genau ein torsionsloser Zusammenhang bezüglich dessen kovarianter Ableitung die Metrik parallel ist ($\nabla g \equiv 0$).*

Zur Parallelität: Die Metrik g einer Riemannschen Mannigfaltigkeit ist ein $(0,2)$-Tensorfeld, das heißt lokal ist g endliche Summe von Elementen der Form $\omega \otimes \eta$, wobei $\omega, \eta \in \Omega^1(M)$.

Für $X, Y, Z \in \mathcal{V}(M)$ gilt:

$$\begin{aligned}
\nabla_Z(\omega \otimes \eta)(X, Y) &= \big((\nabla_Z^* \omega) \otimes \eta + \omega \otimes (\nabla_Z^* \eta)\big)(X, Y) \\
&= (\nabla_Z^* \omega)(X)\eta(Y) + \omega(X)(\nabla_Z^* \eta)(Y) \\
&= \big(Z(\omega(X)) - \omega(\nabla_Z X)\big)\eta(Y) + \omega(X)\big(Z(\eta(Y) - \eta(\nabla_Z Y))\big) \\
&= Z\big(\omega(X)\big)\eta(Y) + \omega(X)Z\big(\eta(Y)\big) - \big(\omega(\nabla_Z X)\eta(Y) + \omega(X)\eta(\nabla_Z Y)\big) \\
&= Z\big((\omega \otimes \eta)(X, Y)\big) - (\omega \otimes \eta)(\nabla_Z X, Y) - (\omega \otimes \eta)(X, \nabla_Z Y)
\end{aligned}$$

Somit ist g genau dann parallel, wenn für $X, Y, Z \in \mathcal{V}(M)$ gilt:

$$0 = (\nabla_Z g)(X, Y) = Z(g(X, Y)) - g(\nabla_Z X, Y) - g(X, \nabla_Z Y)$$

beziehungsweise

$$Z \langle X, Y \rangle = \langle \nabla_Z X, Y \rangle + \langle X, \nabla_Z Y \rangle .$$

Dies ist genau dann der Fall, wenn der Paralleltransport entlang von Kurven eine lineare Isometrie ist (vgl. Aufgabe 3 auf dem Übungsblatt 8). Ist c eine glatte Kurve, $P_t \colon \mathrm{T}_{c(0)} M \to \mathrm{T}_{c(t)} M$ eine Isometrie, so gilt für alle $X, Y \in \mathrm{T}_{c(0)} M$:

$$g_{c(0)}(X, Y) = g_{c(t)}(P_t X, P_t Y) = (P_t^* g_{c(t)})(X, Y).$$

Also gilt $P_t^* g_{c(t)} = g_{c(0)}$ und es folgt:

$$\nabla_t g = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \Big((P_t^* g_{c(t)}) - g_{c(0)} \Big) = 0.$$

Beweis (von Satz 7.12) Ist ∇ eine kovariante Ableitung mit den geforderten Eigenschaften, so gilt für $X, Y, Z \in \mathcal{V}(M)$:

$$\begin{aligned}
X \langle Y, Z \rangle &= \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle \\
Y \langle Z, X \rangle &= \langle \nabla_Y Z, X \rangle + \langle Z, \nabla_Y X \rangle \\
&= \langle \nabla_Y Z, X \rangle + \overline{\langle Z, \nabla_X Y \rangle} - \langle Z, [X, Y] \rangle \\
Z \langle X, Y \rangle &= \langle \nabla_Z X, Y \rangle + \langle X, \nabla_Z Y \rangle
\end{aligned}$$

Indem man die ersten beiden Gleichungen addiert und die Dritte abzieht erhält man:

Koszul-Formel

$$\begin{aligned}
2 \langle \nabla_X Y, Z \rangle &= X \langle Y, Z \rangle + Y \langle Z, X \rangle - Z \langle X, Y \rangle \\
&\quad - \langle X, \nabla_Y Z - \nabla_Z Y \rangle \\
&\quad - \langle Y, \nabla_X Z - \nabla_Z X \rangle + \langle Z, [X, Y] \rangle \\
&= X \langle Y, Z \rangle + Y \langle Z, X \rangle - Z \langle X, Y \rangle - \langle X, [Y, Z] \rangle - \langle Y, [X, Z] \rangle + \langle Z, [X, Y] \rangle .
\end{aligned}$$

Die rechte Seite der Gleichung ist $C^\infty(M)$-linear in Z, definiert also für alle $X, Y \in \mathcal{V}(M)$ eine 1-Form $\omega_{(X,Y)}$. Da die Metrik $\langle \cdot, \cdot \rangle$ positiv definit ist, existiert ein Vektorfeld $A_{(X,Y)} \in \mathcal{V}(M)$ mit $\omega_{(X,Y)} = \left\langle A_{(X,Y)}, \cdot \right\rangle$, das, wie man leicht nachrechnet, $A_{(X,Y)}$-linear und derivativ in Y und $C^\infty(M)$-linear in X ist und durch

$$\begin{aligned}
\nabla \colon \quad \mathcal{V}(M) \times \mathcal{V}(M) &\to \mathcal{V}(M) \\
(X, Y) &\mapsto A_{(X,Y)}
\end{aligned}$$

wird eine eindeutige kovariante Ableitung definert, die die geforderten Eigenschaften erfüllt. □

Bemerkung Die zur Definition des Levi-Civita Zusammenhangs verwendete Formel bezeichnet man als **Koszul-Formel**.

Definition 7.13 *Die nach obigem Satz eindeutig bestimmte, torsionsfreie Zusammenhang bezüglich dessen die Metrik parallel ist, heißt* ***Levi-Civita Zusammenhang****.*

Beispiel (1) Der Levi-Civita Zusammenhang des $\mathbb{R}^k$ mit der Standardmetrik ist die gewöhnliche Ableitung D.

(2) Ist $M \subseteq \mathbb{R}^k$ eine Untermannigfaltigkeit mit der induzierten Metrik, so ist durch

$$(\nabla_X Y)_p = (\mathrm{D}_X\, Y|_p)^T = \mathrm{D}_X\, Y|_p - (D_X Y|_p)^\perp$$

ein Zusammenhang definiert, der gerade der Levi-Civita Zusammenhang ist, denn ∇ ist torsionslos, da D torsionslos ist und für Vektorfelder $X, Y, Z \in \mathcal{V}(M)$ gilt:

$$\begin{aligned}
Z\langle X, Y\rangle &= \langle \mathrm{D}_Z\, Y, Y\rangle + \langle X, \mathrm{D}_Z\, Y\rangle \\
&= \left\langle (D_Z X)^T + (\mathrm{D}_Z\, X)^\perp, Y\right\rangle + \left\langle X, (\mathrm{D}_Z\, Y)^T + (\mathrm{D}_Z\, Y)^\perp\right\rangle \\
&= \left\langle (\mathrm{D}_Z\, X)^T, Y\right\rangle + \left\langle X, (\mathrm{D}_Z\, Y)^T\right\rangle \\
&= \langle \nabla_Z X, Y\rangle + \langle X, \nabla_Z Y\rangle .
\end{aligned}$$

Lokale Koordinaten Es sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit mit Levi-Civita Zusammenhang ∇. In einer Karte gilt:

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} = \sum \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x^k}.$$

Es sei

$$g_{ij} = \left\langle \frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \right\rangle \text{ und } g = \langle \cdot, \cdot \rangle = \sum g_{ij} \mathrm{d}x^i \otimes \mathrm{d}x^j.$$

Es gilt $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$, denn

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} - \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \frac{\partial}{\partial x^i} = \left[\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right] = 0.$$

Dann ist

$$\begin{aligned}
\Gamma_{ij}^k &= \sum_{l,m} g^{kl} g_{lm} \Gamma_{ij}^m \\
&= \sum_{l,m} g^{kl} \left\langle \Gamma_{ij}^m \frac{\partial}{\partial x^m}, \frac{\partial}{\partial x^l} \right\rangle \\
&= \sum_{l} g^{kl} \left\langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j}, \frac{\partial}{\partial x^l} \right\rangle \\
&= \frac{1}{2} \sum_{l} g^{kl} \left(\frac{\partial g_{jl}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{li}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l} \right).
\end{aligned}$$

5. Krümmungen

Man definiert die zweite kovariante Ableitung als

$$\nabla^2_{X,Y} Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_{\nabla_X Y} Z.$$

(Formale Produktregel: $\nabla_X(\nabla_Y Z) = \nabla_X(\nabla Z(Y)) = (\nabla_X(\nabla Z))(Y) + (\nabla Z)(\nabla_X Y) = \nabla^2_{X,Y} Z + \nabla_{\nabla_X Y} Z$.)

$$\begin{aligned} R(X,Y)Z &= \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z \\ &= \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_{\nabla_X Y} Z - (\nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{\nabla_Y X} Z) \\ &= \nabla^2_{X,Y} Z - \nabla^2_{Y,Z} Z. \end{aligned}$$

Proposition 7.14 *Für $X, Y, Z, W \in \mathcal{V}(M)$ gilt:*

(i) $R(X,Y)Z + R(Y,Z)X + R(Z,X)Y = 0$,

(ii) $\langle R(X,Y)Z, W\rangle = -\langle R(Y,X)Z, W\rangle = -\langle R(X,Y)W, Z\rangle$,

(iii) $\langle R(X,Y)Z, W\rangle = \langle R(Z,W)X, Y\rangle$.

Der Beweis sei als Übung überlassen.
Es seien $X, Y \in \mathrm{T}_p M$ linear unabhängig. Dann hängt

$$\frac{\langle R(X,Y)Y, X\rangle}{\|X\|^2\|Y\|^2 - \langle X, Y\rangle^2}$$

nur von der von X und Y aufgespannten Ebene ab. Um das zu zeigen seien $Z = aX + bY$, $W = cX + dY$ und ohne Einschränkung seien X, Y orthonormal. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \|Z\|^2\|W\|^2 - \langle Z, W\rangle^2 &= \|aX + bY\|^2\|cX + dY\|^2 - \langle aX + bY, cX + dY\rangle^2 \\ &= (a^2 + b^2)(c^2 + d^2) - (ac + bd)^2 = a^2d^2 + b^2c^2 - 2abcd \\ &= (ad - bc)^2 \end{aligned}$$

Also

$$\begin{aligned} \frac{\langle R(aX + bY, cX + dY)(cX + dY), (aX + bY)\rangle}{\|aX + bY\|^2\|cX + dY\|^2 - \langle aX + bY, cX + dY\rangle^2} &= \frac{(ad - bc)^2 \langle R(X,Y)Y, X\rangle}{(ad - bc)^2} \\ &= \langle R(X,Y)Y, X\rangle . \end{aligned}$$

Definition 7.15 *Es sei σ eine von $X, Y \in \mathcal{V}(M)$ aufgespannte Ebene in $\mathrm{T}_p M$. Dann heißt*

$$\sec_p(\sigma) = \sec_p(X,Y) = \frac{\langle R(X,Y)Y, X\rangle}{\|X\|^2\|Y\|^2 - \langle X, Y\rangle^2}$$

die ***Schnittkrümmung*** *der Ebene σ.*

Es sei $e_1, \dots, e_m \in \mathrm{T}_p M$ eine Orthonormalbasis bezüglich $g(p)$. Die für $X, Y \in \mathrm{T}_p M$ durch Spurbildung definierte Abbildung

$$\mathrm{ric}_p(X,Y) = \mathrm{spur}\, R(\cdot, X)Y = \sum_i \langle R(e_i, X)Y, e_i\rangle$$

heißt **Ricci-Tensor** in p. Aus den Symmetrien von R folgt, dass ric_p symmetrisch ist. Es existiert ein $(1,1)$-Tensorfeld Ric, so dass

$$\mathrm{ric}_p(X,Y) = \langle \mathrm{Ric}(X), Y\rangle$$

für alle $p \in M,\ X, Y \in \mathrm{T}_p\, M$ gilt.

Definition 7.16 *Für $X \in \mathrm{T}_p\, M,\ X \neq 0$ heißt*

$$\frac{\mathrm{ric}_p(X,X)}{\|X\|^2} = \left\langle \mathrm{Ric}\left(\frac{X}{\|X\|}\right), \frac{X}{\|X\|}\right\rangle$$

*die **Ricci-Krümmung** in p in Richtung X. Die Spur von* Ric

$$\mathrm{scal}(p) = \mathrm{spur}\,\mathrm{Ric}_p(\cdot) = \sum_i \mathrm{ric}_p(e_i, e_i) = \sum_{i,j} \langle R(e_i, e_j)e_j, e_i\rangle$$

*heißt die **Skalarkrümmung** von M in p.*