# Kapitel 1

# Banachräume und lineare Operatoren

## 1.1 Banachräume und metrische Räume

Es sei $X$ ein VR über $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, wobei $X = 0$ solange nichts anderes gesagt wird.

**Definition 1.1** *Eine Halbnorm $p$ auf $X$ ist eine Abb. $p : X \to \mathbb{R}^0_+$ mit*

*(a)* $p(\alpha x) = |\alpha| p(x) \qquad \forall x \in \mathbb{K}, x \in X$ *(Homogenität)*

*(b)* $p(x + y) \leq p(x) + p(y) \qquad \forall x, y \in X$ *($\triangle$-Ungleichung)*

*(c)* $p(x) = 0 \implies x = 0 \qquad \forall x \in X$ *(Definitheit)*

*so heißt $p$ Norm und $(X, p)$ normierter VR (nVR). Man schreibt meist $||x|| = p(x)$ und $p$*

**Bemerkung 1.2**

(a) Es gilt: $|\ ||x|| - ||y||\ | \leq ||x - y||$

(b) $||x|| =$ "Länge" von $x$
$\triangle$-Ungl. = Hier gehÃ¶rt eine kleine Zeichung rein!

(c) 1.1 a) $\implies p(0) = p(0 \cdot 0) = 0 \cdot p(0) = 0$

**Definition 1.3** *Eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq X$ konvergiert gegen $x \in X$, wenn*

*(1.1)* $\forall \epsilon > 0 \quad \exists N_\epsilon \in \mathbb{N} \quad ||x_n - x|| \leq \epsilon \quad \forall n \geq N_\epsilon$ *$(x_n)$ ist eine Cauchy-folge (CF) in $X$, wenn*

*(1.2)* $\forall \epsilon > 0 \quad \exists N_\epsilon \in \mathbb{N} \quad ||x_n - x_m|| \leq \epsilon \quad \forall n, m \geq N_\epsilon$

*Ein nVR $(X, ||\cdot||)$ heisst Banachraum, wenn er vollständig ist, d.h. jede Cauchy-Folge hat einen Grenzwert. Wenn die Norm klar ist, so schreibt man $X$ statt $(X, ||\cdot||)$.*

**Bemerkung 1.4**

(a) Eine konvergente Folge ist CF, da

$$||x_n - x_m|| \leq ||x_n - x|| + ||x - x_m|| \leq 2\epsilon \quad \forall n, m \geq N_\epsilon, N_\epsilon \text{ aus } (1.1)$$

(b) Wenn $x_n \to x$ und $x_n \to y$ in $X$ $(n \to \infty)$, so gilt $x = y$, wegen Def. 1.1 c) und

$$||x - y|| \leq ||x - x_n|| + ||x_n - y|| \leq 2\epsilon \quad \text{für} \quad n \geq \max\{N_\epsilon(x), N_\epsilon(y)\}.$$

(wobei $N_\epsilon(x), N_\epsilon(y)$ aus (1.1)), hier ist $\epsilon > 0$ beliebig
$\Longrightarrow ||x - y|| = 0 \overset{1.1c)}{\Longrightarrow} x = y$

(c) CF und konvergente Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sind beschränkt, d.h. $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} ||x_n|| < \infty$

**Beweis** Nach (1.2) $\quad \exists N \in \mathbb{N}$ mit $||x_n - x_N|| \leq 1 \quad \forall n \geq N.$

$$\Longrightarrow ||x_n|| \leq ||x_n - x_N|| + ||x_N|| \leq 1 + ||x_N|| \quad \forall n \geq N.$$

Ferner: $\quad ||x_n|| \leq \max\{||x_1||, ..., ||x_N||\}$ für $n = 1, ..., N$ ∎

**Beispiel 1.6**

(a) $X = \mathbb{K}^d$ mit $||x||_p = (\sum\limits_{k=1}^{d} |x_k|^p)^{\frac{1}{p}}$, $1 \leq p \leq \infty$
$||x||_\infty = \max\limits_{k=1...d} |x|_k$, wobei $x = (x_1, ...x_d) \in \mathbb{K}^d$.
$(X, ||\cdot||_p||)$ ist BR für $1 \leq p \leq \infty$ (BR = Banachraum).

(b) $X = C([0,1]) = \{f : [0,1] \to \mathbb{K} : \text{f stetig}\}$
Dabei sind $f + g, \alpha f$ für $f, g \in X, \alpha \in \mathbb{K}$

$$\text{gegeben durch: } \begin{aligned} (f+g)(t) &= f(t) + g(t) \\ (\alpha f)(t) &= \alpha f(t), \quad t \in [0,1] \end{aligned}$$

Bekannt ist: $X$ ist VR.
Supremumsnorm für $f \in X : ||f||_\infty = \sup\limits_{t\in[0,1]} |f(t)| \quad (= \max\limits_{t\in[0,1]} |f(t)|).$
Klar: $||f||_\infty \in [0, \infty)$, $||f||_\infty = 0 \implies f = 0$

$$\begin{aligned} ||\alpha f||_\infty &= \sup_{t\in[0,1]} |\alpha f(t)| = |\alpha||f(t)| = |\alpha|||f||_\infty \\ ||f + g||_\infty &= \sup_{t\in[0,1]} |f(t) + g(t)| \leq \sup_{t\in[0,1]} |f(t)| + |g(t)| \leq ||f||_\infty + ||g||_\infty \end{aligned}$$

$\Longrightarrow (X, ||\cdot||_\infty)$ ist nVR.
Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine CF in $(X, ||\cdot||_\infty)$
$\Longrightarrow |f_n(t) - f_m(t)| \leq ||f_n(t) - f_m(t)||_\infty \leq \varepsilon \quad \forall n, m \geq N_\varepsilon$, wobei $\varepsilon > 0$ bel.,
gilt für alle $t \in [0,1]$. $\quad (*)$

$\Longrightarrow (f_n(t))_{n\in\mathbb{N}}$ ist CF in $\mathbb{K} \xRightarrow{\mathbb{K}\text{ vollst.}} \exists f(t) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(t), \quad t \in [0,1]$.
Sei $t \in [0,1]$, $\varepsilon > 0, N_\varepsilon$ aus $(*)$, $n \geq N_\varepsilon$
$|f(t) - f_n(t)| = \lim\limits_{m\to\infty} |f_m(t) - f_n(t)| \leq \lim\limits_{m\to\infty} ||f_m(t) - f_n(t)||_\infty \leq \varepsilon$
Da $N_\varepsilon$ unabhängig von $t$, gilt $||f - f_n||_\infty \leq \varepsilon \quad \forall n \geq N_\varepsilon$.
D.h.: $f_n \to f$ glm. in $t \in [0,1]$. z.Z. bleibt Stetigkeit von f.

(c) Haben $f_n \in X =$C$([0,1])$
$f :\ [0,1] \to \mathbb{K}$ mit $\forall\varepsilon > 0 \,\exists\, N_\epsilon \in \mathbb{N} : \quad ||f_n - f||_\infty \leq \varepsilon \,\forall n \geq N_\varepsilon$
Sei $\varepsilon > 0$ und $t, s \in [0,1]$ gegeben, wähle $n = N_\varepsilon$. Dann $\exists\delta = \delta(n) = \delta(\varepsilon)$, so dass:
$|f_n(t) - f_n(s)| \leq \varepsilon$ wenn $|t - s| \leq \delta$ ($f_n$ glm. stätig)