

6 Integralrechnung

6.1 Riemann-Integrale

(siehe Walter: Analysis I)

Definition 6.1. Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ beschränkt. Eine *Zerlegung* Z von $[a, b]$ ist eine Menge der Form

$$Z = \{(t_0, t_1, \dots, t_n), (\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n) : a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b, \\ \tau_k \in I_k := [t_{k-1}, t_k] \text{ für } k = 1, \dots, n\},$$

wobei $n \in \mathbb{N}$ beliebig. $\mathcal{Z}(a, b)$ ist die Menge aller Zerlegungen von $[a, b]$. Die *Riemann-Summe* von f bzgl. $Z \in \mathcal{Z}(a, b)$ ist

$$S(f, Z) = \sum_{k=1}^n f(\tau_k)(t_k - t_{k-1}).$$

Man setzt $d_k = t_k - t_{k-1}$ und $|Z| = \max_{k=1, \dots, n} d_k$ (*Feinheit*). t_k heißt *Teilungspunkt*, τ_k heißt *Stützstelle*. Kurzschreibweise: $Z = \{t_k, \tau_k, k \leq n\}$. f heißt *Riemann-integrierbar*, falls es ein $J \in \mathbb{R}$ gibt, sodass für jede Folge $(Z_n) \subseteq \mathcal{Z}(a, b)$ mit $|Z_n| \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) gilt: $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} S(f, Z_n) = J$. Dann heißt J das *Riemann-Integral* von f . Man schreibt

$$J = \int_a^b f(x) \, dx.$$

Ferner $R([a, b]) := \{f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ ist beschränkt und Riemann-integrierbar}\}$.

Lemma 6.2 (CAUCHY-Kriterium). Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ beschränkt und $J \in \mathbb{R}$. Dann sind äquivalent:

a) f ist Riemann-integrierbar mit $J = \int_a^b f(x) \, dx$

b) $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_\varepsilon > 0 \forall Z, Z' \in \mathcal{Z}(a, b) \text{ mit } |Z|, |Z'| \leq \delta_\varepsilon \text{ gilt:}$

$$|S(f, Z) - S(f, Z')| \leq \varepsilon \tag{6.1}$$

Beweis. b) \Rightarrow a) Es gelte (6.1). Sei $Z_n \in \mathcal{Z}(a, b)$ mit $|Z_n| \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$). Wähle $\varepsilon > 0$. Sei $\delta_\varepsilon > 0$ aus (6.1). Dann $\exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ mit $|Z_j| \leq \delta_\varepsilon$ für alle $j \geq N_\varepsilon$. (6.1) liefert $|S(f, Z_n) - S(f, Z_m)| \leq \varepsilon$ für alle $n, m \geq N_\varepsilon$. Thm. 2.26 zeigt $\exists \lim_{m \rightarrow \infty} S(f, Z_m) = J$. Damit $|S(f, Z_n) - J| \leq \varepsilon$ ($\forall n \geq N_\varepsilon$) (*)
 Sei $Z'_n \in \mathcal{Z}(a, b)$ mit $|Z'_n| \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$). Dann $\exists N'_\varepsilon \geq N_\varepsilon$ mit $|Z'_n| \leq \delta_\varepsilon$ für alle $n \geq N'_\varepsilon$. $\xrightarrow{6.1} |S(f, Z_n) - S(f, Z'_n)| \leq \varepsilon \forall n \geq N'_\varepsilon$ (**)
 $\Rightarrow |S(f, Z'_n) - J| \leq |S(f, Z'_n) - S(f, Z_n)| + |S(f, Z_n) - J| \leq 2\varepsilon$ für alle $n \geq N'_\varepsilon$, nach (*), (**). $\Rightarrow \exists \int_a^b f(x) dx = J$

a) \Rightarrow b) f sei Riemann-integrierbar. Annahme: (6.1) sei falsch, also $\exists \varepsilon_0 > 0 \forall n \in \mathbb{N} \exists Z_n, Z'_n \in \mathcal{Z}(a, b)$ mit $|Z_n|, |Z'_n| < \frac{1}{n}$, aber $\underbrace{|S(f, Z_n) - S(f, Z'_n)|}_{\substack{\text{n.V.} \rightarrow J \\ \rightarrow J \text{ (} n \rightarrow \infty \text{)}}} > \varepsilon \nmid$

□

Beispiel 6.3. a) Sei $a \leq c \leq d \leq b$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Setze $f = \alpha \mathbf{1}_{[c, d]}$. Dann ist f Riemann-integrierbar und $\int_a^b f(x) dx = \alpha(d-c)$. Speziell $\int_a^b \alpha dx = \alpha(b-a)$, $\int_a^b \alpha \mathbf{1}_{[c, d]}(x) dx = 0$.

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Sei $Z = \{t_j, \tau_j, j \leq n\} \in \mathcal{Z}(a, b)$ mit $|Z| \leq \varepsilon$. Seien $l \leq m \leq n$, sodass $c \in I_l$, $d \in I_m$. Dann $f(\tau_j) = \alpha$ für $l < j < m$ und $f(\tau_j) = 0$ für $j < l - 1$ und $j > m + 1$.

$$|S(f, Z) - \alpha(d - c)| = \left| \sum_{j=l-1}^{m+1} f(\tau_j) d_j - \left(\sum_{j=l+1}^{m-1} \alpha d_j + \alpha(t_l - c + d - t_{m-1}) \right) \right| \leq 6|\alpha| |Z| \leq 6|\alpha| \varepsilon$$

Mit $|Z_n| \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) folgt Beh.

□

b) Sei $f = \mathbf{1}_{\mathbb{Q} \cap [0, 1]}$. *Behauptung.* f ist nicht Riemann-Integrierbar.

Beweis. Sei $n \in \mathbb{N}$ gegeben. Setze $Z = \{t_k = \frac{k}{n}, k = 0, \dots, n; \tau_k = t_{k-1} \in \mathbb{Q}\}$, $Z' = \{t' = \frac{k}{n}, \tau'_k = \frac{k}{n} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{n}, k = 1, \dots, n\}$. $\Rightarrow |Z| = |Z'| = \frac{1}{n}$,

$$S(f, Z) = \sum_{k=1}^n \underbrace{f(\tau_k)}_{=1} \cdot \frac{1}{n} = 1, S(f, Z') = \sum_{k=1}^n \underbrace{f(\tau'_k)}_{=0} \cdot \frac{1}{n} = 0$$

\Rightarrow (6.1) kann für $\varepsilon = \frac{1}{2}$ nicht gelten.

□

Bemerkung 6.4 (Verfeinerung). Seien $Z = \{t_k, \tau_k, k \leq n\} \in \mathcal{Z}(a, b)$ und $t'_1, \dots, t'_l \in [a, b]$. Ordne die t_k, t'_j zu $a = \hat{t}_0 < \hat{t}_1 < \dots < \hat{t}_m = b$. Setze $\hat{I}_j = [\hat{t}_{j-1}, \hat{t}_j]$, $\hat{d}_j = \hat{t}_j - \hat{t}_{j-1}$. Wenn $\hat{I}_j \subseteq [t_{k-1}, t_k]$, dann definiere Stützstellen $\hat{\tau}_j = \tau_k$. Dann ist $S(f, Z) = \sum_{j=1}^m f(\hat{\tau}_j) \hat{d}_j$ im Allgemeinen keine Riemann-Summe, weil u. U. $\hat{\tau}_j \notin \hat{I}_j$.

Satz 6.5. $C([a, b]) \subset R([a, b])$

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$ und $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Thm 4.16 $\implies f$ ist gleichmäßig stetig, d.h.

$$\exists \delta_\varepsilon > 0 \forall x, y \in [a, b] \text{ mit } |x - y| \leq \delta_\varepsilon \text{ gilt: } |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon \quad (*)$$

Seien $Z = \{t_k, \tau_k\}, Z' = \{t'_k, \tau'_k\} \in \mathcal{Z}(a, b)$ mit $|Z|, |Z'| \leq \frac{\delta_\varepsilon}{2}$. Verfeinere Z und Z' wie in Bem. 6.4 zu den gemeinsamen Teilungspunkten $\{t_k, t_i\} = \{\hat{t}_j\}$. Erhalte dabei Stützstellen $\hat{\tau}_j$ zu Z und $\hat{\tau}'_j$ zu Z' , wobei $|\hat{\tau}_j - \hat{\tau}'_j| \leq 2\frac{\delta_\varepsilon}{2} = \delta_\varepsilon$, weil $\hat{I}_j \subseteq I_k \cap I'_{l_j}$ und $\hat{\tau}_j \in I_{k_j}, \hat{\tau}'_j \in \hat{I}_{l_j}$. Somit

$$|S(f, Z) - S(f, Z')| \stackrel{6.4}{=} \left| \sum_{j=1}^m f(\hat{\tau}_j) \hat{d}_j - \sum_{j=1}^m f(\hat{\tau}'_j) \hat{d}_j \right| \leq \sum_{j=1}^m \underbrace{|f(\hat{\tau}_j) - f(\hat{\tau}'_j)|}_{\leq \varepsilon} \hat{d}_j \leq \varepsilon(b-a)$$

Lemma 6.2 \implies Beh. □

Satz 6.6. Seien $f, g \in R([a, b]), \alpha, \beta \in \mathbb{R}, c \in [a, b], h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ beschränkt. Dann gelten:

$$a) \alpha f + \beta g \in R([a, b]) \text{ und } \int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x)) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx$$

$$b) \text{ Wenn } f(x) \leq g(x) \ (\forall x \in [a, b]), \text{ dann } \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx.$$

$$\text{Speziell } \left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq (b-a) \sup_{a \leq x \leq b} |f(x)|.$$

$$c) |f| \in R([a, b]) \text{ und } \left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx.$$

$$d) h \in R([a, b]) \iff h|_{[a, c]} \in R([a, c]) \wedge h|_{[c, b]} \in R([c, b]).$$

$$\text{Dann } \int_a^b h(x) dx = \int_a^c h(x) dx + \int_c^b h(x) dx.$$

Beweis. Sei $Z_n = \{t_{j,n}; \tau_{j,n}; j \leq m_n\} \in \mathcal{Z}(a, b)$ mit $|Z_n| \rightarrow 0 \ (n \rightarrow \infty)$. Setze $d_{j,n} = t_{j,n} - t_{j-1,n}$.

a)

$$S(\alpha f + \beta g, Z_n) = \sum_{j=1}^{m_n} \alpha f(\tau_{j,n}) d_{j,n} + \beta \sum_{j=1}^{m_n} g(\tau_{j,n}) d_{j,n} = \alpha \underbrace{\sum_{j=1}^{m_n} f(\tau_{j,n}) d_{j,n}}_{\rightarrow \int_a^b f(x) dx} + \beta \underbrace{\sum_{j=1}^{m_n} g(\tau_{j,n}) d_{j,n}}_{\rightarrow \int_a^b g(x) dx \ (n \rightarrow \infty)}$$

b)

$$\underbrace{S(f, Z_n)}_{\rightarrow \int_a^b f(x) dx} = \sum_{j=1}^{m_n} f(\tau_{j,n}) d_{j,n} \stackrel{\text{n.V.}}{\leq} \sum_{j=1}^{m_n} g(\tau_{j,n}) d_{j,n} = \underbrace{S(g, Z_n)}_{\rightarrow \int_a^b g(x) dx}$$

c) Abschätzung folgt aus $\pm f \leq \mathbf{1}_{[a,b]} \sup |f|$. Siehe Ilias.

d) Siehe Ilias.

□

Man setzt für $f \in R([a, b])$, $a \leq b$ $\int_b^a f(x) dx := -\int_a^b f(x) dx$. Auch in diesem Fall gilt Satz 6.6 entsprechend.

6.2 Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Definition 6.7. Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Eine Funktion $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *Stammfunktion* von f , wenn F differenzierbar ist und $F' = f$ ist. Man schreibt $F = \int f dt = \int f = f^{[1]}$. Beachte: mit F ist auch die Funktion $F(x) + c$ für ein beliebiges $c \in \mathbb{R}$ ($x \in [a, b]$) eine Stammfunktion von f .

Lemma 6.8. Sei $f \in R([a, b])$ und f sei stetig bei $x_0 \in [a, b]$. Dann ist das unbestimmte Integral $F_0(x) = \int_a^x f(t) dt$, $x \in [a, b]$, differenzierbar bei x_0 und $F'(x_0) = f(x_0)$.

Beweis. Sei $x \in [a, b] \setminus \{x_0\}$. Dann

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{x - x_0} (F_0(x) - F_0(x_0)) - f(x_0) \right| &\stackrel{\text{Bsp. 6.3}}{=} \\ \left| \frac{1}{x - x_0} \left(\int_a^x f(t) dt - \int_a^{x_0} f(t) dt \right) - \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^x f(x_0) dt \right| &\stackrel{\text{Satz 6.6}}{=} \\ \frac{1}{|x - x_0|} \left| \int_{x_0}^x (f(t) - f(x_0)) dt \right| &\stackrel{\text{Satz 6.6}}{\leq} \frac{1}{|x - x_0|} |x - x_0| \underbrace{\sup_{|x_0 - t| \leq |x - x_0|} |f(t) - f(x_0)|}_{\rightarrow 0 \quad (x \rightarrow x_0)} \end{aligned}$$

□

Theorem 6.9 (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung). a) Sei $f \in C([a, b])$. Dann ist jede Stammfunktion F gegeben durch

$$F(x) = F(a) + \int_a^x f(t) dt \quad (\forall x \in [a, b]).$$

Speziell $x = b$:

$$\int_a^b f(t) \, dt = F(b) - F(a) =: F|_b^a.$$

b) Sei $g \in C^1([a, b])$. Dann $\int_a^b g'(t) \, dt = g(b) - g(a)$.

Beweis. a) Lem. 6.8 $\implies F_0(x) = \int_0^x f(t) \, dt$ ist eine Stammfunktion von f . Sei F eine weitere Stammfunktion von f . Dann $(F - F_0)' = f - f = 0 \xrightarrow{\text{TODO 5.20}} F(x) - F_0(x) = F(a) - F_0(a) = F(a)$.

b) folgt aus 1 mit $f = g'$.

□

Bemerkung. Für unstetige f , g' ist der Hauptsatz viel schwieriger und zum Teil falsch. Ein Beispiel ist

$$g(x) = \begin{cases} x^{\frac{3}{2}} \cos \frac{1}{x} & , 0 < x \leq 1 \\ 0 & , x = 0. \end{cases}$$

Wie in Bsp. TODO 5.11: g ist auf $[0, 1]$ differenzierbar und $g'(x) = \frac{3}{2}\sqrt{x} \sin \frac{1}{x}$, $x > 0 \implies g$ ist unbeschränkt und somit nicht Riemann-integrierbar. Also ist 6.9 2 nicht sinnvoll.

Beispiel 6.10. a) Wir kennen schon zahlreiche Stammfunktionen aus Kapitel 5.

b) Sei $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, $|x| < \varrho = \text{Konvergenzradius}$. Betrachte $F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} a_n x^{n+1}$. Wie im Beweis von Thm. TODO 5.9 zeigt man, dass F den gleichen Konvergenzradius $\varrho > 0$ hat. Thm. TODO 5.9 $\implies F'(x) = f(x)$, $|x| < \varrho$. F ist also eine Stammfunktion von f .

Beispiel:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} \quad (|x| < 1) \\ \implies F(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} \quad (|x| < 1) \end{aligned}$$

ist Stammfunktion von f . Weitere Stammfunktion ist \arctan . Da $\arctan 0 = 0 = F(x)$, folgt

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} \quad (|x| < 1).$$

- c) Fläche A zwischen $f(x) = e^x$ und $g(x) = x^2 - \pi x$ ($0 \leq x \leq \pi$). Beachte $f(\pi) \geq 0 \geq g(x)$ für alle $x \in [0, \pi]$. Also

$$\begin{aligned} A &= \int_0^\pi (f(x) - g(x)) \, dx \stackrel{\text{HS}}{=} \left(e^x - \left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{\pi}{2}x^2 \right) \right) \Big|_0^\pi \\ &= e^\pi - \left(\frac{1}{3}\pi^3 - \frac{\pi}{2}\pi^2 \right) - (1 - 0) = e^\pi - \frac{\pi^3}{6} - 1. \end{aligned}$$

Satz 6.11.

Beispiel 6.12.

Satz 6.13.

Beispiel 6.14.

Bemerkung 6.15 (Integration rationaler Funktionen). Sei $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$, wobei p, q reelle gekürzte Polynome, q sei nicht konstant 0, höchster Koeffizient von p und q sei gleich 1.

- a) Polynomdivision: es existieren Polynome p_0, r mit $\text{grad } p_0 \leq \text{grad } q$, sodass $f = r + \frac{p_0}{q}$.
 $\implies r$ kann integriert werden
- b) Fundamentalsatz der Algebra: $\exists! z_1, \dots, z_m \in \mathbb{C}$ (mit $z_i \neq z_j$ für $i \neq j$) und $\exists! n_1, \dots, n_m \in \mathbb{N}$, sodass: $q(x) = (x - z_1)^{n_1} \cdot \dots \cdot (x - z_m)^{n_m}$.
- c) Komplexe Partialbruchzerlegung (TODO Königsberger §4.3): $\exists! c_{jk} \in \mathbb{C}$:

$$\frac{p_0(x)}{q(x)} = \frac{c_{11}}{(x - z_1)} + \dots + \frac{c_{1n_1}}{(x - z_1)^{n_1}} + \dots + \frac{c_{m1}}{(x - z_m)} + \dots + \frac{c_{mn_m}}{(x - z_m)^{n_m}} \quad (6.2)$$

- d) Integration:

- a) Terme mit $c_{jk}, z_j \in \mathbb{R}$ in (6.2) können integriert werden (man hat Formel für Stammfunktion)
- b) Komplexer Fall für Nennerpotenz $k = 1$: Da p_0, q reell sind, gilt (für $x \in \mathbb{C}$):

$$\frac{p_0(x)}{q(x)} = \frac{\overline{p_0(\bar{x})}}{\overline{q(\bar{x})}} \stackrel{(6.2)}{=} \sum_{j,k} \frac{c_{jk}}{(\bar{x} - z_j)^k} = \sum_{j,k} \frac{\overline{c_{jk}}}{(x - z_j)^k}$$

Da (6.2) eindeutig ist, gilt: wenn $c_{jk}, z_j \notin \mathbb{R}$, dann $\exists l \neq j$, sodass $\bar{z}_j = z_l$ und $\overline{c_{jk}} = c_{lk}$ (gleiches k). Für $k = 1$ treten im komplexen Fall also Terme der Form auf:

$$\frac{c}{x - z} + \frac{\bar{c}}{x - \bar{z}} = \frac{(c + \bar{c})x - (c\bar{z} + \bar{c}z)}{(x - z)(x - \bar{z})} = \frac{2 \operatorname{Re}(c)x - 2 \operatorname{Re}(c\bar{z})}{x^2 - 2 \operatorname{Re}(z)x + |z|^2} =: \frac{ax + b}{x^2 + \alpha x + \beta}, \quad (6.3)$$

mit $a, b, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\beta > \frac{\alpha^2}{4}$.

Übung: Stammfunktion für (6.3)

e) Komplexer Fall für $k > 1$: Mit komplexer Integration erhält man:

$$\int \left(\frac{c}{(t-z)^k} + \frac{\bar{c}}{(t-\bar{z})^k} \right) dt = \frac{-2 \operatorname{Re} (c(x-\bar{z})^k)}{(k+1) (x^2 - 2 \operatorname{Re}(z)x + |z|^2)^{k-1}} \quad (6.4)$$

(siehe TODO Amann/Escher: Analysis II, Bem. II.5.10)

reelle Methode: Walter, Analysis I, §11.5

Fazit. 2 zugestanden, findet man Formel für eine Stammfunktion von f .

Beispiel. a) Seien $a, b \in \mathbb{R}$ gegeben, $a \neq b$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{a, b\}$.

$$f(x) = \frac{1}{(x-a)(x-b)} \stackrel{(6.2), \text{Ansatz}}{=} \frac{c_1}{x-a} + \frac{c_2}{x-b} \implies 1 = c_1(x-b) + c_2(x-a) \quad (*)$$

(für zu bestimmende $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$)

Berechne c_1, c_2 : (*) gilt nach stetiger Fortsetzung für alle $x \in \mathbb{R}$. Einsetzen:

$$x = a: \quad 1 = c_1(a-b) \neq 0 \implies c_1 = \frac{1}{a-b}$$

$$x = b: \quad 1 = 0 + c_2(b-a) \implies c_2 = \frac{1}{b-a}$$

$$\implies f(x) = \frac{1}{b-a} \left(-\frac{1}{x-a} + \frac{1}{x-b} \right)$$

$$\begin{aligned} \implies \int f(t) dt &= -\frac{1}{b-a} \left(\int \frac{dt}{t-a} - \int \frac{dt}{t-b} \right) \\ &= -\frac{1}{b-a} (\ln |x-a| - \ln |x-b|) \\ &= \frac{1}{a-b} \ln \left| \frac{x-a}{x-b} \right| \quad (x \neq a, b) \text{ (Probe!)} \end{aligned}$$

b)

$$f(x) = \frac{x}{(1+x^2)(x-1)^2} \quad (x \neq 1)$$

Ansatz mit (6.2) und (6.3):

$$f(x) = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{(x-1)^2} + \frac{cx+d}{1+x^2}, \text{ wobei } a, b, c, d \in \mathbb{R} \text{ zu bestimmen sind}$$

$$\implies x = a(x-1)(1+x^2) + b(1+x^2) + (cx+d)(x-1)^2 \quad (*)$$

Einsetzen:

$$\begin{aligned} x = 1: \quad 1 &= 0 + 2b + 0 & \implies b &= \frac{1}{2} \\ x = 0: \quad 0 &= -a + b + d & \implies a - d &= \frac{1}{2} \end{aligned} \quad (+)$$

Koeffizientenvergleich (vgl. Thm. TODO 5.28):

$$\begin{aligned} \text{für } x^2: \quad 0 &= a + 0 + c & \implies c &= -a \\ \text{für } x^3: \quad 0 &= -a + b - 2c + d = -a + \frac{1}{2} + 2c + d & \implies a + b &= -\frac{1}{2} \end{aligned} \quad (++)$$

$$(+) \text{ und } (++) : 2a = 0 \implies a = 0 = c, d = -\frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} \implies f(x) &= \frac{\frac{1}{2}}{(x-1)^2} - \frac{\frac{1}{2}}{1+x^2} \\ \implies \int f(t) dt &= \frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{(t-1)^2} - \frac{1}{1+t^2} \right) dt = -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{x-1} + \arctan x \right) \end{aligned}$$

6.3 Skalare Differentialgleichungen erster Ordnung

Beispiel (Zinseszins). Gegeben seien Anfangskapital u_0 , Anlage dauert Zinsrate nach Zeit $\frac{t}{n}$ mit Wiederanlage der Zinsen. u_k sei Kapital zur Zeit $\frac{kt}{n}$, $k = 0, \dots, n$ ($n \in \mathbb{N}$).

$$\begin{aligned} \implies u_1 &= u_0 + \frac{at}{n} u_0 = \left(1 + \frac{at}{n} \right) u_0 \\ u_2 &= u_1 + \frac{at}{n} u_1 = \left(1 + \frac{at}{n} \right)^2 u_0 \\ \text{iterativ: } u_n &= \left(1 + \frac{at}{n} \right)^n u_0 \end{aligned}$$

„instantane Wiederanlage“ = TODO „ $n \rightarrow \infty$ “. Damit $u_n \rightarrow e^{at} u_0$ (vgl. Aufg. 5.6, Aufg. 12.3 e). $\rightsquigarrow u(t) = e^{at} u_0$ = Kapital zur Zeit t bei instantaner Wiederanlage.

Nach Bem. TODO 5.21 ist $u \in C^1(\mathbb{R})$ die einzige Lösung von

$$\begin{cases} u'(t) = au(t) \\ u(0) = u_0 \end{cases} \quad (a, u_0 \in \mathbb{R} \text{ gegeben})$$

Andere Interpretation: $a = \frac{u'(t)}{u(t)}$ = momentane, relative Änderung des Kapitals („pro Kopf“). Weitere Beispiele für diese Differentialgleichung: Radioaktiver Zerfall ($a < 0$), Populationswachstum bei unbeschränktem Nahrungsangebot ($u(t)$ = Stoffmenge)

„ $\frac{u'}{u} = a$ “ ist unplausibel für Population (etwa da $u(t) \rightarrow \infty$ ($t \rightarrow \infty$) für $a > 0$).
 VERHULST (1837): Gesetz für begrenztes Wachstum: $\frac{u'(t)}{u(t)} = \lambda - \frac{\lambda u(t)}{u_\infty}$ ist $u(t)$ -abhängig.
 „mehr Konkurrenten“ = TODO $u(t)$ groß = TODO weniger Wachstum

$$\implies \begin{cases} u'(t) = \lambda \left(1 - \frac{u(t)}{u_\infty}\right) u(t) \\ u(0) = u_0 \end{cases}, \quad t \geq 0. \quad (6.5)$$

Gegeben sind $\lambda, u_0, u_\infty > 0$ (λ : Wachstumsparameter, u_∞ : Sättigungsparameter, u_0 : Anfangswert). Gesucht: $u \in C^1(\mathbb{R}_+)$, das (6.5) für $t \geq 0$ löst.

Bemerkung. Spezielle, „stationäre“ Lösungen: $u(t) = 0$ mit $u_0 = 0$ oder $u(t) = u_\infty$ mit $u_0 = u_\infty$ (für alle $t \in \mathbb{R}$). Im folgenden sei $u_0 \neq u_\infty$, $u_0 > 0$.

Lösung von (6.5): Wir nehmen an, es gebe eine Lösung $u \in C^1([0, b])$ von (6.5). Wenn $u_0 > u_\infty$ ($u_0 < u_\infty$), dann existiert ein $t_0 > 0$, sodass $u(t) > 0$, $u(t) > u_\infty$ ($u(t) < u_\infty$) für alle $0 \leq t \leq t_0$ (da u stetig und $u(0) = u_0$).

$$(6.5) \implies \frac{u'(s)}{(u_\infty - u(s))u(s)} = \frac{\lambda}{u_\infty} \quad (\forall 0 \leq s \leq t_0)$$

$$\xrightarrow{\int_0^t \dots ds} \int_0^t \frac{u'(s)}{(u_\infty - u(s))u(s)} ds = \int_0^t \frac{\lambda}{u_\infty} ds = \frac{\lambda}{u_\infty} t \quad (\forall 0 \leq t \leq t_0)$$

Substitution: $x = u(s)$, $\frac{dx}{ds} = u'(s)$, $u(0) = u_0$

$$\begin{aligned} &\implies \int_{u_0}^{u(t)} \frac{dx}{(u_\infty - x)x} = \frac{1}{u_\infty} \ln \frac{x}{|x - u_\infty|} \Big|_{u_0}^{u(t)} \\ &\xrightarrow{x>0} \frac{1}{u_\infty} \ln \frac{u(t)}{|u(t) - u_\infty|} = \frac{\lambda}{u_\infty} t + \frac{1}{u_\infty} \ln \frac{u_0}{|u_0 - u_\infty|} \\ &\xrightarrow{\cdot u_\infty, \exp} \frac{u(t)}{|u(t) - u_\infty|} = e^{\lambda t} \frac{u_0}{|u_0 - u_\infty|} \\ &\implies u(t) = \frac{u_0 u_\infty}{u_0 + (u_\infty - u_0)e^{\lambda t}}. \end{aligned}$$

Probe zeigt, dass dieses u (6.5) für alle $t \geq 0$ löst.

Es gilt:

- $u(t) > 0$ für alle $t \geq 0$ ($u_0 > 0$) (biologisch sinnvoll)
- $u(t) \rightarrow u_\infty$ für $t \rightarrow \infty$
- $u(t)$ wächst und $u(t) < u_\infty$ ($\forall t > 0$), falls $u_0 < u_\infty$
- $u(t)$ fällt und $u(t) > u_\infty$ ($\forall t > 0$), falls $u_0 > u_\infty$

Gegeben sei $f \in C([a, b])$, $g \in C(\mathbb{R}_+)$, $u_0 \in (a, b)$. Suchen $u \in C^1([0, \tau))$ und $\tau \in (0, \infty)$, sodass $u(t) \in (a, b)$ für alle $t \in [0, \tau)$ und

$$\begin{cases} u'(t) = g(t)f(u(t)), \\ u(0) = u_0 \end{cases}, \quad 0 \leq t < \tau. \quad (6.6)$$

(in (6.5): $f(x) = \left(1 - \frac{x}{u_\infty}\right)x$, $g(x) = \lambda$)

Satz 6.16 (Trennung der Variablen). *Sei $f \in C((a, b))$, $g \in C(\mathbb{R}_+)$, $u_0 \in (a, b)$, $f(u_0) \neq 0$. Dann existiert ein $t_0 > 0$ und eine eindeutige Lösung $u \in C^1([0, t_0])$ von (6.6).*

Beweis. Sei etwa $f(u_0) > 0$ und $\tau > 0$. Wähle $\varepsilon \in (0, f(u_0))$. Da f stetig ist, existiert $\delta > 0$ mit $f(x) > \varepsilon$ für alle $x \in [u_0 - \delta, u_0 + \delta] \subseteq (a, b)$. Sei $M := \max_{|x-u_0| \leq \delta} f(x) < \infty$ (Satz vom Maximum). Setze $t_0 = \min\{\frac{\delta}{Mc}, T\}$, $c = \max_{0 \leq t \leq T} |g(t)|$.

a) Eindeutigkeit: Sei $u \in C^1([0, \tau))$ eine Lösung von (6.6). Annahme: $\tau > t_0$ und es existiere $t_1 \in (0, t_0)$ mit $|u(s) - u_0| \leq \delta$ für alle $0 \leq s < t_1$ und $|u(t_1) - u_0| = \delta$.

$$\begin{aligned} \Rightarrow |u(t_1) - u_0| &\stackrel{\text{HS}}{=} \left| \int_0^{t_1} \underbrace{u'(s)}_{\stackrel{(6.6)}{=} f(u(s))g(s)} ds \right| \\ &\stackrel{\text{Satz 6.6}}{\leq} \int_0^{t_1} |f(u(s))| |g(s)| ds \leq \int_0^{t_1} Mc ds \leq Mct_1 < Mct_0 = \delta \quad \nexists \end{aligned}$$

$\Rightarrow |u(s) - u_0| \leq \delta$ für alle $0 \leq s < \min\{t_0, T\} =: \bar{t}$. Damit (6.6) $\Rightarrow \frac{u'(s)}{f(u(s))} = g(s)$.

$$\Rightarrow G(t) := \int_0^t g(s) ds = \int_0^t u'(s) df(u(s))s \stackrel{x=u(s)}{=} \int_{u_0}^{u(t)} \frac{dx}{f(x)} \quad \text{für alle } 0 \leq t < \bar{t} \quad (6.7)$$

Setze $H(y) = \int_{u_0}^y dx f(x)$ für $y \in [u_0 - \delta, u_0 + \delta] \Rightarrow H(u(t)) = G(t)$. H ist strikt wachsend

$$u(t) = H^{-1}(G(t)) \quad (\forall 0 \leq t < \bar{t}) \quad (6.8)$$

b) Existenz: Sei u durch (6.8) für $0 \leq t \leq t_0$ gegeben. Dann $u(0) = H^{-1}(G(0)) = H^{-1}(0) = u_0$. Kettenregel und Umkehrsatz liefern:

$$\exists u'(t) = \frac{1}{H'(H^{-1}(G(t)))} G'(t) \stackrel{\text{HS}}{=} \frac{1}{H'(u(t))} \stackrel{\text{HS}}{=} \frac{1}{\frac{1}{f(u(t))}} g(t) = f(u(t))g(t)$$

$\Rightarrow u$ löst (6.6).

Fazit: u aus (6.8) ist eine Lösung von (6.6) und jede weitere Lösung ist auf $[0, t_0]$ gleich diesem u und kann, falls $\tau < t_0$, zu u auf $[0, t_0]$ fortgesetzt werden. \square

Beispiel 6.17. a)

$$\text{Betrachte } \begin{cases} u'(t) = u(t)^2 \\ u(0) = u_0 \end{cases}, t \geq 0. \text{ Es sei } u_0 > 0.$$

$$\implies f(x) = x^2, g(t) = 1.$$

$$\xrightarrow{\text{TV, (6.7)}} \underbrace{\int_{u_0}^{u(t)} \frac{dx}{x^2}}_{= -\frac{1}{x} \Big|_{u_0}^{u(t)}} = \int_0^t 1 \, ds = t$$

$$\implies t = \frac{1}{u_0} - \frac{1}{u(t)}$$

$$\implies u(t) = \frac{1}{\frac{1}{u_0} - t} \text{ für } 0 \leq t < \frac{1}{u_0} =: \tau$$

Zum Beispiel für $u_0 = 1$: $u(t) = \frac{1}{1-t}$ (Probe!). „blow up“.

b)

$$\text{Sei } a \in C(\mathbb{R}), u_0 \in \mathbb{R}. \text{ Betrachte } \begin{cases} u'(t) = a(t)u(t) \\ u(0) = u_0 \end{cases}, t \geq 0.$$

$\implies f(x) = x$. Sei $u_0 > 0$. Trennung der Variablen liefert

$$\underbrace{\int_{u_0}^{u(t)} \frac{dx}{x}}_{= \ln u(t) - \ln u_0} = \int_0^t a(s) \, ds$$

$$\implies u(t) = \exp \left(\ln u_0 + \int_0^t a(s) \, ds \right) = \exp \left(\int_0^t a(s) \, ds \right) u_0$$

Probe zeigt: Dies löst die Gleichung für alle $t \in \mathbb{R}$ und $u_0 \in \mathbb{R}$.

c) $u'(t) = \sqrt{u(t)}$, $u(0) = 0$, $t \geq 0$. $\implies f(x) = \sqrt{x}$, $g(t) = 1$. $\implies f(0) = f(u_0) = 0$, haben Lösung $v(x) = 0 \, \forall x \in \mathbb{R}$. Führe Trennung der Variablen trotzdem durch. Sei u eine weitere Lösung, die auf $(0, t_0]$ ungleich 0 ist. Dann $\frac{u'(s)}{\sqrt{u(s)}} = 1$ für $0 < s \leq t_0$.

Sei $\varepsilon > 0$, $\varepsilon < t_0$

$$\xrightarrow{\text{TV}} \int_{\varepsilon}^t 1 \, ds = \int_{\varepsilon}^t \frac{u'(s)}{\sqrt{u(s)}} \, ds = \int_{u(\varepsilon)}^{u(t)} \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2 \left(\sqrt{u(t)} - \sqrt{u(\varepsilon)} \right).$$

$\varepsilon \rightarrow 0$: $t = 2\sqrt{u(t)}$ ($0 < t \leq t_0$) $\implies u(t) = \frac{t^2}{4}$. Probe: u löst Gleichung.

6.4 Uneigentliche Integrale

Definition 6.18. a)

b)

Bemerkung 6.19. a)

b)

Beispiel 6.20. a)

b)

c)

d)

Satz 6.21. a)

b)

Beispiel 6.22. a)

b)

c)

d)

Beispiel 6.23.

Beispiel 6.24.

Trapezregel. ...