4 Nichtlineare Gleichungen

Sei $D \subset \mathbb{R}^N$ und $F : D \to \mathbb{R}^N$ beliebig. Gesucht wird $U \in \mathbb{R}^N$ mit

$$F(U) = 0$$

Speziell: $F(U) = AU - b,\ A \in \mathbb{R}^{N,N},\ b \in \mathbb{R}^N$ lineares Problem

4.1 Fixpunkte (Ergänzung 5)

4.1.1 Fixpunkte und Nullstellen

U Fixpunkt von G: $U = G(U)$
U Nullstelle von F: $F(U) = 0$
U Fixpunkt von $G \Leftrightarrow U$ Nullstelle von $F(X) := X - G(X)$

4.1.2 Banachscher Fixpunktsatz

Sei V ein Banach-Raum, $D \subseteq V$ abgeschlossen, $f : D \longrightarrow D$ eine Kontraktion, d.h. $\exists q \in (0,1)$ mit

$$\|f(x) - f(y)\| \leq q\|x - y\| \quad (x, y \in D)$$

Dann gilt:

(i) f besitzt genau einen Fixpunkt x_* in D

(ii) Zu jedem $x_0 \in D$ konvergiert die durch $x_{i+1} := f(x_i)$ definierte Folge gegen x_* und es gelten die Abschätzungen

$$\|x_i - x_*\| \leq q^i\|x_0 - u_*\| \qquad \text{(A priori Abschätzung)}$$

$$\|x_i - x_*\| \leq \frac{q}{1-q}\|x_i - x_{i-1}\| \qquad \text{(A posteriori Abschätzung)}$$

4.1.3 Beispiele

1.) $f : [a,b] \subseteq \mathbb{R} \to [a,b]$ differenzierbar mit $|f'(x)| \leq q < 1\ \forall x \in [a,b]$ für ein $q \in (0,1)$ $\Rightarrow\ \exists! x_* \in [a,b] :\ f(x_*) = x_*$ und die Fixpunktiteration $x_{i+1} := f(x_i)$ konvergiert für die Startwerte $x_0 \in [a,b]$.

2.) Süche Lösung von $x = \cos(x)$:
$x_0 \in \mathbb{R},\ x_{i+1} = \cos(x_i)$
Bildchen
Wende (1) an

$$\max_{x\in\mathbb{R}} |\cos'(x)| = \max_{x\in\mathbb{R}} |\sin(x)| = 1$$

So geht es noch nicht.
Aber: $V = [0,1]$. Dann

$$\max_{x\in[0,1]} |\sin(x)| = \sin(1) < 1$$

$\cos(V) \subset V$. Anwendung von (1) ist OK.
$x_0 \in \mathbb{R} \Rightarrow x_1 = \cos(x_0) \in [-1, 1] \Rightarrow x_2 = \cos(x_1) \in [0, 1]$
Jetzt weiter wie eben. Konvergenz für alle $x_0 \in \mathbb{R}$

Satz 16. *V Banach-Raum, $D \subset V$ abgeschlossen, $f : D \to D$ eine Kontraktion mit Rate q der Fixpunktiteration und Fixpunkt v_x. $g : D \to D$ sei eine Störung von f mit*

$$\|f(v) - g(v)\|_V \leq \varepsilon \quad \forall v \in D$$

Definiere $\{v_i\}_i, \{w_i\}$ durch $v_{i+1} := f(v_i),\ w_{i+1} := g(w_i)$ für $v_0, w_0 \in D$ und $\|v_0 - w_0\|_V \leq \varepsilon$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \|v_i - w_i\|_V &\leq \frac{\varepsilon}{1-q} \\ \|v_* - w_i\|_V &\leq \frac{1}{1-q}(\varepsilon(1 + 3q^i) + q^i\|w_0 - g(w_0)\|_V) \end{aligned}$$

Bildchen

Beweis. $v_0 \in D \Rightarrow v_1 \in D \Rightarrow \dots$
$w_0 \in D \Rightarrow w_1 \in D \Rightarrow \dots$
Folgen sind wohldefiniert

$$\begin{aligned} \|v_{i+1} - w_{i+1}\|_V &= \|f(v_i) - g(w_i)\|_V \\ &\leq \|f(v_i) - f(w_i)\|_V + \|f(w_i) - g(w_i)\|_V \\ &\leq q \cdot \|v_i - w_i\|_V + \varepsilon \\ &\leq q^2 \cdot \|v_{i-1} - w_{i-1}\|_V + (1+q)\varepsilon \\ &\leq \dots \leq q^{i+1} \underbrace{\|v_0 - w_0\|}_{\leq \varepsilon} + \sum_{j=0}^{i} q^j \varepsilon \\ &\leq \sum_{j=0}^{i+1} q^j \varepsilon \leq \sum_{j=0}^{\infty} q^j \varepsilon = \frac{1}{1-q}\varepsilon. \end{aligned}$$

Mit dem Fixpunktsatz von Banach:

$$\begin{aligned} \|v_* - w_i\|_V &\leq \|v_* - v_i\|_V + \|v_i - w_i\|_V \\ &= \frac{q^i}{1-q}\|v_0 - f(v_0)\|_V + \frac{\varepsilon}{1-q} \\ &\leq \frac{q^i}{1-q}(\underbrace{\|v_0 - w_0\|_V}_{\leq \varepsilon} + \|w_0 - g(w_0)\|_V + \underbrace{\|g(w_0) - f(v_0)\|_V}_{\substack{=\|w_1 - v_1\|_V \\ \leq (1+q)\varepsilon \leq 2\varepsilon}} + \frac{\varepsilon}{1-q} \end{aligned}$$

$\square$

Problem: Wie schnell sind Fixpunktverfahren?

4.1.4 Konvergenzordnung

V Banach-Raum, $\{v_i\}_i$ eine iterative erzeugte Folge mit $\lim\limits_{i\to\infty} v_i = v_*$. Die Iteration hat *Konvergenzordnung* $p \geq 1$, falls für den Fehler $e_i := v_i - v_*$ gilt:

$$\lim_{i\to\infty} \frac{\|e_i\|_V}{\|e_{i-1}\|_V^p} = c \in \mathbb{R}$$

Falls $c \neq 0$, so heißt p die *genaue Konvergenzordnung* und c heißt *asymptotischer Fehlerkoeffizient.*

Beispiele
$p = 1$: Geometrische oder lineare Konvergenz
$p = 2$: Quadratische Konvergenz.

Satz 17. *$I \subseteq \mathbb{R}$, $\Phi : I \longrightarrow \mathbb{R}$ habe einen Fixpunkt $x_* \in I$ und sei p-mal stetig db. mit*

$$\Phi'(x_*) = \ldots = \Phi^{(p-1)}(x_*) = 0 \text{ falls } p > 1$$

oder

$$|\Phi'(x_*)| < 1 \text{ falls } p = 1 \text{ ist}$$

Dann konvergiert das Iterationsverfahren

$$x_{i+1} = \Phi(x_i)$$

für die Startwerte x_0 nahe x_* und hat bzgl. $|.|$ die Konvergenzordnung p.
Ist $\Phi^{(p)}(x_*) \neq 0$, so ist p die genaue Konvergenzordnung.

Beweis. *Nach Voraussetzung gibt es für alle $p \geq 1$ eine Umgebung von x_*, in der $|\Phi'| < 1$ gilt. Nach 1.3(1) konvergiert die Fixpunktiteration für alle Startwerte dieser Umgebung gegen x_*.*
Mit Taylorentwicklung:

$$x_{i+1} = \Phi(x_i) = \sum_{l=0}^{p-1} \frac{1}{l!} \Phi^{(i)}(x_*)(x_i - x_*)^l + \frac{1}{p!} \Phi^{(p)}(\xi_i)(x_i - x_*)^p$$

(ξ_i zwischen x_* und x_i).
Einsetzen der Voraussetzung:

$$x_{i+1} = x_* + \frac{1}{p!} \Phi^{(p)}(\xi_i)(x_i - x_*)^p$$

und somit

$$\lim_{i\to\infty} \frac{|x_{i+1} - x_*|}{|x_i - x_*|^p} = \lim_{i\to\infty} \frac{1}{p!} \left|\Phi^{(p)}(\xi_i)\right| = \frac{1}{p!} \left|\Phi^{(p)}(x_*)\right|$$

□

Bemerkung: Lineare vs. Quadratische Konvergenz.
$e_0 = 10^{-1}$
Lineare Konvergenz: $q = 1/2$, $e_k = \left(\frac{1}{\alpha}\right)^\kappa e_0 \approx 10^{-0.3\kappa} e_0$
1 Stelle $\rightsquigarrow$ 3 Iterationen
8 Stellen $\rightsquigarrow$ 24 Iterationen
Quadratische Konvergenz: $c = 1$
$e_0 = \frac{1}{10}, e_1 = e_0^2 = 10^{-2}, e_2 = 10^{-4}, e_3 = 10^{-8}$

4.2 Berechnung von Nullstellen

4.2.1 Extrema (Ergänzung 7)

x_* Extremum von f und f db $\Rightarrow f'(x_*) = 0$
$\rightsquigarrow$ Nullstellenproblem

4.2.2 Nullstellen reeller Funktionen

Im Folgenden sei $I = [a, b] \subset \mathbb{R}, a < b$, f mindestens stetig.

Bisektionsverfahren Es gelte $f(a)f(b) < 0$ („=0“ $\Rightarrow f(a) = 0$ oder $f(b) = 0$).
Wir konstruieren Intervalle $\{I_k\}_k$ wie folgt:
Start:
$a_0 := a, b_0 := b, I_0 := [a_0, b_0]$
Iteration: $L \geq 0$

1.) $\overline{x} := \frac{1}{2}(a_k + b_k)$

2.) Stop: $f(\overline{x}) = 0$

3.) $f(a_k) \cdot f(\overline{x}) \overset{?}{<} 0 :\ a_{k+1} = a_k, b_{k+1} = \overline{x}$
sonst: $a_{k+1} = \overline{x}, b_{k+1} = b_k$

4.) $k \mapsto k + 1,\ I_{k+1} = [a_{k+1}, b_{k+1}]$

Abbruch: Tol_X, $\mathrm{Tol}_f \geq 0$ gegeben, $\mathrm{Tol}_x + \mathrm{Tol}_f > 0$
$k_{\max} \in \mathbb{N}$. Rückgabe x und $f(x)$ mit
x Approximation der Nullstelle mit $|x - x*| \leq \mathrm{Tol}_x$ oder $|f(x)|\mathrm{Tol}_f$ $f(x)$: Funktionswert in x

Modifikation der Iteration:

$|f(\overline{x})\ | \leq \mathrm{Tol}_f$:
return$(\overline{x}, f(\overline{x}))$;
$|b_k - a_k| \leq \mathrm{Tol}_x$:
falls $|f(a_k)| < |f(b_k)|$ return $(a_k, f(a_k))$, sonst return$(b_k, f(b_k))$

Satz 18. *$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig mit $f(a) \cdot f(b) < 0$. $\mathrm{Tol}_x, \mathrm{Tol}_f, k_{\max}$ wie oben gegeben. Dann bricht das Bisektionsverfahren nach endich vielen Schritten ab, auch falls $k_{\max} = \infty$*

Beweis. *Das Verfahren ist wohldefiniert aufgrund des Zwischenwertsatzes.*
Die Existenz einer Nullstelle in I_k ist für jedes k gesichert.
$\mathrm{Tol}_x > 0 : |I_k\| = \left(\frac{1}{2}\right)^k |b-a| \overset{!}{\leq} \mathrm{Tol}_x \Rightarrow k \leq \left\lceil \frac{\log_2(b-a)}{\mathrm{Tol}_x} \right\rceil$
$\mathrm{Tol}_f > 0 : b_k - a_k \to 0$
Da f stetig ist und eine Nullstelle in $[a_k, b_k]$ hat, gilt $\lim\limits_{k\to\infty} f(a_k) = \lim\limits_{k\to\infty} f(b_k) = 0$

$$\Rightarrow \exists k_f \in \mathbb{N} : \min\{|f(a_{k_f})|, |f(b_{k_f})|\} \leq \mathrm{Tol}_f$$

(Gilt $|f'(x)| \leq C \ \forall x \in [a,b]$, so gilt z.B.: $|f(a_k)| = |f(a_k) - f(x_k)| \leq |I_k| \max\limits_{x\in[a,b]} |f'(x)| \leq C\left(\frac{1}{2}\right)^k \overset{!}{\leq} \mathrm{Tol}_f$) □

Probleme

- a, b zu finden mit $f(a) \cdot f(b) < 0$ kann sehr schwierig sein.
- Die Konvergenz ist in der Praxis zu langsam.
  (Siehe 1.5: Konvergenzordnung ist 1 mit $c = \frac{1}{2}$)
- Die Methode ist auf $\mathbb{R}$ beschränkt

Regula Falsi Wie in 2.2.1 aber mit $\overline{x}$ wie folgt:
Bildchen

$$\overline{x} = a_k - \frac{f(a_k)(b_k - a_k)}{f(b_k) - f(a_k)}$$

Keine Auslöschung im Nenner wegen $f(a_k) \cdot f(b_k) < 0$. Weiteres Vorgehen wie in 2.2.1
Konvergenz: Konvergiert wie in 2.2.1 im Fall $\mathrm{Tol}_f > 0$. Die Konvergenz kann beliebig langsam sein. Im „besten“ Fall ist die Konvergenz linear (unter noch allgemeinen Voraussetzungen)

Das Sekantenverfahren Bildchen
$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig.
x_1, x_2 gegeben, $x_1 \neq x_2$ und $f(x_1) \neq f(x_2)$
x_3 ist dann die Nullstelle der Sekante

Initialisierung: $x_1 \neq x_2, f(x_1) \neq f(x_2)$

Iteration für $k \geq 0$:

1.) Falls $f(x_{k-1}) \neq f(x_k)$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)(x_k - x_{k-1})}{f(x_k) - f(x_{k-1})}$$

2.) $k \curvearrowright k+1$

Abbruch: $\mathrm{Tol}_x, \mathrm{Tol}_f, \mathrm{Tol}_{f'}, k_{\max}$
Wie in 2.2.1 aber mit

$$\begin{aligned} |x_k - x_{k-1}| &\leq \mathrm{Tol}_x? \\ |f(x_k)| &\leq \mathrm{Tol}_f? \\ k &\leq k_{\max} \\ \text{und } |f(x_k) - f(x_{k-1})| &\leq \mathrm{Tol}_{f'}? \end{aligned}$$

Die letzten beiden Bedingungen führen zu einem erfolglosen Abbruch.

Bemerkungen

- Keine Erfolgsgarantie für allgemeine Startwerte
- Kleine f-Differenzen erzeugen große Fehler

Aber:

- Günstiger Aufwand (1 f-Auswertung pro Schritt) bei schneller Konvegenz, falls es konvergiert.
- Gewisse Verallgemeinerung auf $\mathbb{R}^N$ möglich

Satz 19. $f \in C^2(\mathbb{R}),\ f(x_*) = 0,\ f'(x_*) \neq 0,\ f''(x_*) \neq 0.$
Dann ex. eine Umgebung U von x_*, sodass das Sekantenverfahren für alle Startwerte aus U konvergiert und die Konvergenzordnung ist genau $\frac{1}{2}(1+\sqrt{5}) \approx 1.6$

Newton-Verfahren $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig db.
Idee: Verwende Tangende statt Sekante
Bildchen

Initialisierung: x_1 mit $f'(x_1) \neq 0$

Iteration: für $k \geq 0$

1.) Falls $f'(x_k) \neq 0$
$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

2.) $k \curvearrowright k+1$

Abbruch: $\mathrm{Tol}_x, \mathrm{Tol}_f, k_{\max}, \mathrm{Tol}_{f'}$

$$\begin{aligned} |x_k - x_{k-1}| &\leq \mathrm{Tol}_x \\ |f(x_k)| &\leq \mathrm{Tol}_f \\ k &\leq k_{\max} \\ |f'(x_k)| &\leq \mathrm{Tol}_{f'} \end{aligned}$$

In den letzten beiden Fällen ist der Abbruch erfolglos

Bemerkungen

- Keine Garantie eines erfolgreichen Abbruchs (im Allgemeinen)
- Kleine Werte von f' führen zu großen Fehlern

Aber:

- sehr schnell, falls konvergent
- Verallgemeinerung auf $\mathbb{R}^N$ bzw. Banachräume möglich

Konvergenzordnung des Newton-Verfahrens

$f \in C^3,\ f(x_*) = 0, f'(x_*) \neq 0$
Die Iterationsfunktion des Newton-Verfahrens ist
$$\Phi(x) := x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

Nach 1.5 bilden wir $\Phi'(x_*), \Phi''(x_*)$

$$\begin{aligned} \Phi'(x) &= 1 - \left(1 - \frac{f(x)f''(x)}{f'(x)^2}\right) = \frac{f(x)f''(x)}{f'(x)^2} \overset{x=x^*}{=} 0 \\ \Phi''(x) &= \frac{f''(x)}{f'(x)} + f(x)(\dots) \overset{x=x^*}{=} \frac{f''(x_*)}{f'(x_*)} + 0 \end{aligned}$$

Die Konvergenz ist quadratisch und sie ist genau quadratisch, falls $f''(x_*) \neq 0$

4.2.3 Lokale Konvergenz des Newtonverfahrens

Es sei $(V, \|.\|_V)$ ein Banachraum, $\emptyset \neq U \subset V$, $f : U \longrightarrow V$ eine stetig db. Funktion mit $f'(v)^{-1} \in \mathbb{L}(V, V)$ für alle $v \in U$ sowie

$$\sup_{v \in U} \|f'(v)^{-1}\|_{\mathbb{L}(V,V)} \leq K < \infty$$

und

$$\|f'(v) - f'(w)\|_{\mathbb{L}(V,V)} \to 0 \ (\|v - w\|_V \to 0) \text{ glm. für } v, w \in U.$$

Weiter sei $u_* \in U$ eine Nullstelle von f. Dann gibt es zu jedem $q \in (0, 1)$ ein $\delta > 0$, so dass für jeden Startwert $u_0 \in B_\delta(u_*)$ die Newton-Iteration $u_{i+1} = u_i - f'(u_i)^{-1} f(u_i)$ wohldefiniert ist und für $i \geq 0$ gilt

$$\|u_i - u_*\|_V \leq q\|u_0 - u_*\|_V$$

Ist f zweimal stetig db, so ist die Konvergenz quadratisch:

$$\|u_{i+1} - u_*\|_V \leq C\|u_i - u_*\|_V^2$$

für $i \geq 0$ und ein $C > 0$. C hängt von f ab.
Insbesondere bricht das Verfahren nach endlich vielen Schritten bzgl. der Kriterien

$$\begin{array}{rcl} \|u_i - u_{i-1}\|_V & \overset{!}{\leq} & \mathrm{Tol}_x \quad \text{oder} \\ \|f(u_i)\|_V & \leq & \mathrm{Tol}_f \end{array}$$

für $\mathrm{Tol}_x, \mathrm{Tol}_f \geq 0$, $\mathrm{Tol}_x + \mathrm{Tol}_f > 0$ ab

Bemerkung $T : V \longrightarrow V$ linear, stetig ($:\Leftrightarrow T \in \mathbb{L}(V, V)$),

$$\|T\|_{\mathbb{L}(V,V)} := \sup_{v \in V} \frac{\|Tv\|_V}{\|v\|_V}$$

Beweis. *Sei $r_0 > 0$ mit $\overline{B_{r_0}(u_*)} \subset U$. Dann gilt für $u \in B_r(u_*) (0 < r < r_0)$*

$$f(u) = f(u_*) + \int_0^1 f'(u_* + t(u - u_*))(u - u_*)\,\mathrm{d}t$$

Die Iterationsfunktion des Newton-Verfahrens ist

$$G(u) := u - f'(u)^{-1} \cdot f(u)$$

G ist auf $B_{r_0}(u_*)$ wohldefiniert und mit $u(t) := u_* + t(u - u_*)$ gilt

$$\begin{aligned} G(u) - u_* &= u - u_* - f'(u)^{-1} \int_0^1 f'(u(t))(u - u_*)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 f'(u)^{-1}(f'(u) - f'(u(t)))(u - u_*)\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

Daher:

$$\|G(u)-u_*\|_V \leq \sup_{v\in B_r(u_*)} \|f'(v)^{-1}\|_{\mathbb{L}(V,V)} \cdot \sup_{t\in(0,1)} \|f'(u)-f'(u(t))\|_{\mathbb{L}(V,V)} \cdot \|u-u_*\|_V$$

Zu $q \in (0,1)$ wähle also δ, so dass

$$\|G(u)-u_*\|_V \leq q\cdot\|u-u_*\|_V \text{ für alle } u\in B_\delta(u_*)$$

Für $u_0 \in B_\delta(u_*)$ folgt also induktiv

$$\|u_{i+1}-u_*\|_V = \|G(u_i)-u_*\|_V \leq q\cdot\|u_i-u_*\|_V \leq \delta$$

d.h. $\{u_i\}_i \in B_\delta(u_*)$ und $\lim\limits_{i\to\infty} u_i = u_*$. Insbesondere

$$\|u_i-u_*\|_V \leq q^i\,\|u_0-u_*\|_V$$

Ist f zweimal stetig db, so gilt:

$$\begin{aligned}\sup_{t\in(0,1)} \|f'(u)-f'(u(t))\|_{\mathbb{L}(V,V)} &\leq C'\|u-u(t)\|_V \\ &\leq C'\|u-u_*\|_V \quad \text{mit } C'=C'(f'')\end{aligned}$$

Also

$$\|G(u)-u_*\|_V \leq KC'\|u-u_*\|_V^2 = C\|u-u_*\|_V^2$$

$\Rightarrow \|u_{i+1}-u_*\|_V \leq C\|u_i-u_*\|_V^2$
Mit $\|u_{i+1}-u_i\|_V \leq \|u_{i+1}-u_*\|_V + \|u_i-u_*\|_V \leq 2\cdot\|u_i-u_*\|_V$.
Also $\|u_{i+1}-u_i\|_V \to 0$ und mit Stetigkeit $\|f(u_i)\|_V \to 0$ für $i\to\infty$. Daraus folgt der Abbruch nach endlich vielen Schritten. □

Bemerkungen:

- f' invertierbar heißt, dass u_* eine einfache Nullstelle ist
- u Nullstelle von f. Dann sei $\varepsilon(u)$ der Einzugsbereich von u, d.h. $u_0 \in \varepsilon(u) \Rightarrow$ das Newton-Verfahren ist wohldefiniert für u_0 und die Folge $\{u_i\}_{i\geq 0}$ konvergiert gegen u.
  Der vorherige Satz sagt: $B_\delta(u) \subseteq \varepsilon(u)$ für δ klein (unter genannten Voraussetzungen)

Beispiel $V=\mathbb{R}$, $f(x)=\arctan(x)$
Bildchen

$$\begin{array}{rcl} & f(0)=0 & \\ |x_0|<X_0 & \Rightarrow & x_i\to 0 \\ |x_0|>X_0 & \Rightarrow & |x_i|\to\infty \\ x_0=X_0 & \Rightarrow & x_i=(-1)^i\cdot x_0 \end{array}$$

Für $V = \mathbb{R}^n,\ n \geq 2$ ist $\varepsilon(u)$ sehr kompliziert.
Wir berechnen für große Raumdimension n $f(u_i)^{-1}$ nicht explizit. Stattdessen lösen wir

$$\begin{aligned} f'(u_i)d_i &= -f(u_i) \\ u_{i+1} &= u_i + d_i \end{aligned}$$

Newton-Kantorovich-Theorem $F : D \subset V \longrightarrow V$, V Banachraum, D offen und konvex, F stetig db, $x_0 \in D$ und $F'(x_0)$ invertierbar sowie

$$\begin{aligned} \|F'(x_0)^{-1}F(x_0)\| &\leq \alpha \\ \|F'(x_0)^{-1}(F'(y) - F'(x))\|_{\mathbb{L}(V,V)} &\leq \omega_0 \cdot \|x-y\|_V \quad \forall x,y \in D \\ h_0 := \alpha\omega_0 &< 1/2 \\ B_\delta(x_0) &\subset D,\ \delta := \frac{1}{\omega_0}(1-(1-2h_0)^{1/2}) \end{aligned}$$

Dann ist die Folge $\{x_k\}_k$ der Newton-Iteration wohldefiniert, sie bleibt in $B_\delta(x_0)$ und konvergiert gegen ein x_* mit $F(x_*) = 0$. Die Konvergenz ist quadratisch.

Bemerkung

- Die Existenz der Nullstelle wird garantiert. Daher sind solche Theoreme auch in der Analysis interessant.
- Man kann (wie bei Banach) a priori Schranken oder a posteriori Schranken betrachten
- Beachte: $F(u) = 0 \Leftrightarrow AF(u) = 0$, falls A invertierbar ist. Wie in 2.4.1, 2.4.2 hängen die Konstanten von A ab. Die Größe $F'^{-1}F$ ist invariant gegenüber der Transformation $F \mapsto AF$

4.2.4 Globale Konvergenz

Idee: Definiere eine „Energie", die in jedem Schritt verkleinert wird:
für ein $E : V = \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ gelte

$$|u_{i+1}| = |u_i - f'(u_i)^{-1}f(u_i)| = E(u_{i+1}) < E(u_i)$$

Problem: u_{i+1} sollte nicht zu weit weg sein von u_i. Ausweg (siehe Jakobi- oder SOR-Verfahren): Dämpfung.
Für $\tau_i > 0$ ist $u_{i+1} = u_i - \tau_i f'(u_i)^{-1}f(u_i)$ das gedämpfte Newton-Verfahren.
„i klein": $\tau_i \in (0,1)$ klein
„i groß": $\tau_i \to 1$ um von der quadratischen Konvergenz zu profitieren. ($\tau \neq 1$: gedämpftes Newton-Verfahren konvergiert nur linear)

Lemma 4. *$\emptyset \neq D \subset \mathbb{R}^n$ abgeschlossen und beschränkt. $f \in C^1(D, \mathbb{R}^n)$ und $f'(u)^{-1}$ existiere für alle $u \in D$. $|.|$ eine Vektornorm.*
Definiere $E : D \longrightarrow \mathbb{R},\ u \mapsto E(u) = |f(u)|$ mit $d(u) := -f'(u)^{-1} \cdot f(u)$. Dann gilt:
Für alle $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$ mit

$$E(u + \tau d(u)) \leq (1 - \tau + \varepsilon\tau)E(u) \quad \text{für alle } u \in D,\ \tau \in (0, \delta)$$

Beweis. *Für $u \in D$:*

$$\begin{aligned} f(u + \tau d(u)) &= f(u) + \int_0^\tau f'(u + sd(u))d(u)\,\mathrm{d}s \\ &= \left(Id - \int_0^\tau f'(u + sd(u))f'(u)^{-1}\,\mathrm{d}s \right) f(u) \\ &= \left((1-\tau)Id - \int_0^\tau \big(f'(u + sd(u)) - f'(u)\big) f'(u)^{-1}\,\mathrm{d}s \right) f(u) \end{aligned}$$

τ genügend klein:

$$|f(u + \tau d(u))| \leq (1 - \tau + \tau \underbrace{\sup_{s \in (0,\tau)} \|f'(u + sd(u)) - f'(u)\|_2 \cdot}_{\leq C^{-1} \cdot \varepsilon,\ \text{falls } \tau \leq \delta} \underbrace{\|f'(u)^{-1}\|_2}_{\leq C}) \cdot |f(u)|$$

$\Rightarrow E(u + \tau d(u)) \leq (1 - \tau + \varepsilon\tau)E(u)$ □

Schrittweitensteuerung f wie in 2.3, E wie oben. Wähle ein $\sigma \in (0,1)$ und $u_0 \in D$.
Newton-Verfahren mit Schrittweitensteuerung

Initialisierung: $u_0 \in D$

Iteration: für $k \geq 0$

1.) Löse $f'(u_k)d_k = -f(u_k)$ für d_k

2.) Bestimme $\tau_k = 2^{-q_k}$ und $q_k \in \mathbb{N}$ minimal mit $B_{\tau|d_k|}(u_k) \subset D$ und $E(u_k + \tau_k d_k) \leq (1 - \sigma\tau_k)E(u_k)$

3.) $u_{k+1} = u_k + \tau_k d_k$, gehe zu (1)

Wahl des Wertes q_k
$k = 0$: $q = 0, 1, \ldots$ bist die Bedingung in (2) für ein q_0 zum ersten Mal erfüllt ist.
$k > 0$: Probiere $q = q_{k-1} - 1, q_{k-1}, \ldots$ bist (2) für ein q_K zum ersten Mal erfüllt ist.

Globale Konvergenz

Satz 20. *f wie im Lemma in 2.4.1 bzgl. eines D_α.*
Zu $\alpha > 0$ sei $D_\alpha := \{v \in D : \ |f(v)| \leq \alpha\}$ nichtleer und kompakt. (f darf nur eine Nullstelle haben und muss glm konvergieren)
Dann konvergiert das Verfahren aus 2.4.1 für alle Startwerte $u_0 \in D_\alpha$ gegen eine Nullstelle von f in D_α.
Insbesondere folgt der Abbruch nach endlich vielen Schritten bzgl. des Kriteriums $E(u_k) \leq \mathrm{Tol}_f$ für ein $\mathrm{Tol}_f > 0$

Beweis. *Nach Konstruktion gilt:*

$$E(u_{[k+1}) \leq E(u_k) \leq \ldots \leq E(u_0) = \alpha$$

und $\{u_k\}_k \subseteq D_\alpha$.
Die Folge konvergiert daher, weil D_α kompakt ist, etwa $u_k \to u_*(k \to \infty)$ für eine Teilfolge. Nach dem Lemma gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$, so dass

$$|f(u_k + \tau d(u_k))| \leq (1 - (1 - \varepsilon)\tau)|f(u_k)|$$

für $0 \leq \tau \leq \delta$, gleichmäßig in D_α.
Nun sei $\varepsilon := 1 - \sigma$, d.h.

$$|f(u_k + \tau d(u_k))| \leq (1 - \sigma\tau)|f(u_k)|$$

Diese Ungleichung gilt für $\tau = \delta$, d.h. nach Konstruktion gilt $\tau_k \geq \delta/2$. Insbesondere erhalten wir nach endl. vielen Schritten

$$|f(u_{k+1})| = |f(u_k + \tau_k d_k)| \leq (1 - \frac{1}{2}\delta\sigma)|f(u_k)|,$$

also $E(u_{k+1}) \leq \kappa E(u_k)$ für ein $\kappa \in (0,1)$, so dass $\lim\limits_{k\to\infty} E(u_k) = 0$. Insbesondere wird $E(u_k) = |f(u_k)| \overset{!}{\leq} \mathrm{Tol}_f$ nach endlich vielen Schritten erreicht. □