

# Kapitel 2

## Garben und Divisoren

### § 9 $\mathcal{O}_X$ -Modulgarben

#### Definition 9.1

Sei  $(X, \mathcal{O}_X)$  ein lokal geringter Raum. Eine Garbe  $\mathcal{F}$  von abelschen Gruppen auf  $X$  heißt  $\mathcal{O}_X$ -Modulgarbe, wenn gilt:

- (i)  $\mathcal{F}(U)$  „ist“  $\mathcal{O}_X(U)$ -Modul für jedes offene  $U \subseteq X$
- (ii)  $\rho_{U'}^U : \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}(U')$  ist  $\mathcal{O}_X(U)$ -Modul-Homomorphismus für  $U' \subseteq U \subseteq X$  offen (via  $\mathcal{O}_X(U) \rightarrow \mathcal{O}_X(U')$ )

#### Bemerkung

Die  $\mathcal{O}_X$ -Modulgarben auf  $X$  bilden eine Kategorie. Gegenbeispiel:  $\mathcal{O}_X^\times$  ist *keine*  $\mathcal{O}_X$ -Modulgarbe.

#### Beispiele (für $\mathcal{O}_X$ -Modulgarben)

1) Idealgarben

2) Sei  $X$  eine nichtsinguläre Kurve (über einem algebraisch abgeschlossenen Körper  $k$ ),  $D := \sum_{\substack{P \in X \\ (\text{abg.})}} n_P P$  ein Divisor.  $\mathcal{O}_X$  soll die Garbe der regulären Differentiale auf  $X$  sein.

Für  $U \subseteq X$  offen sein  $\mathcal{L}(D)(U) := \{f \in k(X) : \text{div } f|_U + D|_U \geq 0\}$ , das heißt für alle  $P \in U$  gilt  $\text{ord}_P f \geq -m_P$ .

$\mathcal{L}(D)(U)$  ist  $\mathcal{O}_X(U)$ -Modul: für  $g \in \mathcal{O}_X(U)$ ,  $f \in \mathcal{L}(D)(U)$  und  $P \in U$  ist  $\text{ord}_P(fg) = \text{ord}_P(f) + \underbrace{\text{ord}_P(g)}_{\geq 0}$

$\Rightarrow \mathcal{L}(D)$  ist Modulgarbe

3) Sei  $X$  weiterhin nichtsinguläre Kurve.

**Erinnerung:** Sei  $R$  ein Ring,  $A$  eine  $R$ -Algebra,  $M$  ein  $A$ -Modul,  $\text{Der}_R(A, M) = \{\delta : A \rightarrow M, R\text{-linear}, \delta(f \cdot g) = f \cdot \delta(g) + g \cdot \delta(f)\}$ .

Es gibt  $\left\{ \begin{array}{ccc} \Omega_{A/R} & & A\text{-Modul} \\ d : A \rightarrow \Omega_{A/R} & \rightarrow & \text{Derivation} \\ a \mapsto da & & \end{array} \right\}$  sodass

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\quad} & \Omega_{A/R} \\ & \searrow \delta & \swarrow \exists! \varphi \\ & & M \end{array} \quad \begin{array}{l} \\ A\text{-linear} \end{array}$$

$$A = k[X]$$

$$\Rightarrow \boxed{\Omega_{A/k} = A \cdot dX}$$

$$\Omega_{k(X)/k} = k(X) \cdot dX$$

Es gilt: Ist  $X$  irreduzible Kurve, so ist  $\Omega_{k(X)/k}$  1-dimensionaler Vektorraum über  $k(X)$  (Beispiel  $y^2 = x^3 + ax + b \Rightarrow 2ydy = 3x^2dx + adx$ )

Für  $\omega \in \Omega_{k(X)/k}$  und  $P \in X$  sei  $\text{ord}_P \omega$  wie folgt definiert: sei  $t_P$  ein Erzeuger von  $m_P$  (= maximales Ideal in  $\mathcal{O}_{X,P}$ )

$\Rightarrow \exists f_P \in k(X)$  mit  $\omega = f_P dt_P$ . Setze  $\text{ord}_P \omega := \text{ord}_P f_P$

Für  $\omega \in \Omega_{k(X)/k}$  sei  $\text{div } \omega := \sum_{P \in X} \text{ord}_P \omega$  (wobei  $d(t_P - c) = dt_P$ ).

Für  $U \subseteq X$  offen:  $\Omega_X(U) := \{\omega \in \Omega_{k(X)/k} : \text{div } \omega|_U \geq 0\}$

$\mathcal{O}_X$  ist  $\mathcal{O}_X$ -Modulgarbe, da  $\text{div}(f \cdot \omega) = \text{div } f + \text{div } \omega$ .

### Definition + Bemerkung 9.2

Sei  $(X, \mathcal{O}_X)$  lokal geringter Raum,  $\mathcal{F}, \mathcal{G}$   $\mathcal{O}_X$ -Modulgarben.

- $\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G}$  sei die zur Prägarbe  $U \mapsto \mathcal{F}(U) \otimes_{\mathcal{O}_X(U)} \mathcal{G}(U)$  assoziierte Garbe,  $\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G}$  ist eine  $\mathcal{O}_X$ -Modulgarbe.
- Für  $U \subseteq X$  offen sei

$$\mathcal{H}om(\mathcal{F}, \mathcal{G})(U) := \text{Hom}_{\mathcal{O}_X|_U}(\mathcal{F}|_U, \mathcal{G}|_U)$$

Das ist eine  $\mathcal{O}_X$ -Modulgarbe.

### Beweis

b) ...

### Definition + Bemerkung 9.3

Sei  $f : X \rightarrow Y$  ein Morphismus lokal geringter Räume

- Für jede  $\mathcal{O}_X$ -Modulgarbe  $\mathcal{F}$  auf  $X$  ist  $f_* \mathcal{F}$  eine  $\mathcal{O}_Y$ -Modulgarbe.
- Für jede  $\mathcal{O}_Y$ -Modulgarbe  $\mathcal{G}$  auf  $Y$  ist  $f^{-1} \mathcal{G}$  eine  $f^{-1} \mathcal{O}_Y$ -Modulgarbe und  $f^* \mathcal{G} := f^{-1} \mathcal{G} \otimes_{f^{-1} \mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_X$  eine  $\mathcal{O}_X$ -Modulgarbe.

### Beweis

- Für  $U \subseteq Y$  offen ist  $f_* \mathcal{F}(U) = \mathcal{F}(f^{-1}(U))$  ein  $\mathcal{O}_X(f^{-1}(U))$ -Modul,  $f^\# : \mathcal{O}_Y \rightarrow f_* \mathcal{O}_X$  induziert  $f_U^\# : \mathcal{O}_Y(U) \rightarrow f_* \mathcal{O}_X(U) = \mathcal{O}_X(f^{-1}(U))$ . Dadurch wird  $\mathcal{F}(f^{-1}(U))$  zu einem  $\mathcal{O}_Y(U)$ -Modul.
- Zu Definition von  $f^* \mathcal{G}$  wird Garbenhomomorphismus  $f^{-1} \mathcal{O}_Y \rightarrow \mathcal{O}_X$  benötigt.  $f^\# : \mathcal{O}_Y \rightarrow f_* \mathcal{O}_X$  induziert  $f^{-1} \mathcal{O}_Y \rightarrow f^{-1} f_* \mathcal{O}_X \xrightarrow{1.14} \mathcal{O}_X$   $\square$

### Erinnerung

$X = \text{Spec } R$  affines Schema,  $I \subseteq R$  Ideal,  $f \in R$ ,  $\tilde{I}(D(f)) = I \cdot R_f = I \cdot \mathcal{O}_X(D(f))$ ,  $\tilde{I}$  heißt quasikohärente Idealgarbe.

### Definition + Bemerkung 9.4

- Sei  $X = \text{Spec } R$  affines Schema,  $M$  ein  $R$ -Modul. Dann sei  $\tilde{M}$  die (!) Garbe auf  $X$  mit  $\tilde{M}(D(f)) := M_f$  (der von  $M$  erzeugte Modul über  $R_f$ ) für jedes  $f \in R$ .  $\tilde{M}$  ist  $\mathcal{O}_X$ -Modulgarbe,  $(\tilde{M})_{\mathfrak{p}} = M_{\mathfrak{p}}$  für jedes Primideal  $\mathfrak{p} \in \text{Spec } R$ .
- Sei  $X$  ein Schema. Eine  $\mathcal{O}_X$ -Modulgarbe  $\mathcal{F}$  heißt **quasikohärent**, wenn für jede affine Teilmenge  $U = \text{Spec } R \subseteq X$  ein  $R$ -Modul  $M_U$  existiert, sodass  $\mathcal{F}|_U \cong \tilde{M}_U$ .
- $\mathcal{F}$  (wie in b)) ist genau dann quasikohärent, wenn es eine offene affine Überdeckung  $U_i = \text{Spec } R_i$  von  $X$  gibt mit  $\mathcal{F}|_{U_i} \cong \tilde{M}_i$  für geeignete  $R_i$ -Moduln  $M_i$ .



**Proposition 9.8**

Sei  $f : X \rightarrow Y$  Morphismus von Schemata.

- a) Ist  $\mathcal{G}$  quasikohärent auf  $Y$ , so ist  $f^*\mathcal{G}$  quasikohärent auf  $X$ .
- b) Sind  $X$  und  $Y$  noethersch und ist  $\mathcal{G}$  kohärent, so ist  $f^*\mathcal{G}$  kohärent.
- c) Ist  $X$  noethersch und  $\mathcal{F}$  quasikohärent auf  $X$ , so ist  $f_*\mathcal{F}$  quasikohärent auf  $Y$ .

**Beweis**

- a)  $\mathcal{O}_Y = \text{Spec } R'$  affin,  $\mathcal{G} = \tilde{N}$  für einen  $R'$ -Modul  $N$ .  $\mathcal{O}_X = \text{Spec } R$  affin. Damit folgt die Behauptung aus 9.7 b).

$x_1, \dots, x_n$  seien Erzeuger von  $N$  also  $R'$ -Modul  $\Rightarrow x \in N$  hat Darstellung  $\sum_{i=1}^n a_i x_i$

*Behauptung:*  $x_1 \otimes 1, \dots, x_n \otimes 1$  erzeugen  $N \otimes_{R'} R$  als  $R$ -Modul

Sei  $x \otimes a \in N \otimes_{R'} R$ ,  $x = \sum a_i x_i$  ( $a_i \in R'$ )  $\Rightarrow x \otimes a = a \cdot \sum a_i (x_i \otimes 1)$

- b) Ist  $N$  endlich erzeugt als  $R'$ -Modul, so ist  $N \otimes_{R'} R$  endlich erzeugt als  $R$ -Modul.
- c)  $\mathcal{O}_Y$  affin. Sei  $U_1, \dots, U_r$  offene affine Überdeckung von  $X$ .  $\mathcal{O}_{U_i \cap U_j}$  affin(!)? (Übung)

$$\begin{aligned}
 0 \rightarrow f_*\mathcal{F} &\rightarrow \bigoplus_{i=1}^r f_*\mathcal{F}|_{U_i} \rightarrow \bigoplus_{i < j} f_*\mathcal{F}|_{U_i \cap U_j} \\
 m &\mapsto (m|_{U_i})_{i=1, \dots, r} \\
 (m)_{i=1, \dots, r} &\mapsto (m_i|_{U_i \cap U_j} - m_j|_{U_i \cap U_j})_{i < j}
 \end{aligned}$$

ist exakt (weil  $\mathcal{F}$  Garbe ist, weil  $f_*$  linksexakt ist)  $\Rightarrow f_*\mathcal{F}$  ist als Kern einer Morphismus von quasikohärenten Garben selbst quasikohärent.  $\square$

## § 10 Lokal Freie Garben

### Definition + Bemerkung 10.1

Sei  $(X, \mathcal{O}_X)$  lokal geringter Raum,  $\mathcal{F}$  eine  $\mathcal{O}_X$ -Modulgarbe.

- $\mathcal{F}$  heißt **frei** vom Rang  $n \geq 1$ , wenn  $\mathcal{F} \cong \mathcal{O}_X^n = \bigoplus_{i=1}^n \mathcal{O}_X$ .
- $\mathcal{F}$  heißt **lokal frei** vom Rang  $n$ , wenn es eine offene Überdeckung  $(U_i)_{i \in I}$  von  $X$  gibt, sodass  $\mathcal{F}|_{U_i} \cong (\mathcal{O}_X|_{U_i})^n$  für jedes  $i \in I$ .
- Ist  $X$  Schema, so sind lokal freie Garben quasikohärent (und sogar kohärent wenn  $X$  noethersch ist)

### Beweis

- c) Ist  $U = \text{Spec } R$ , so ist  $\mathcal{F}|_U$  frei vom Rang  $n \Leftrightarrow \mathcal{F} \cong \tilde{R}^n$ . □

### Beispiel 10.2

Sei  $X$  nichtsinguläre Kurve (über  $k \dots$ ) und  $D$  ein Divisor auf  $X$ . Dann ist  $\mathcal{L}(D)$  lokal frei vom Rang 1: Übung 9, Aufgabe 3b)

$$\mathcal{L}(D)(U) = \{f \in k(X) : \text{div}(f|_U) + D|_U \geq 0\}$$

### Beispiel

Sei  $X$  nichtsinguläre Kurve/ $k$ ,  $k$  algebraisch abgeschlossen,  $\mathcal{L}$  lokal freie Garbe vom Rang 1 auf  $X$ ,  $\mathcal{L} \subseteq k(X)$  (konstante Garbe)  $\Rightarrow \exists$  Divisor auf  $X$  mit  $\mathcal{L} \cong \mathcal{L}(D)$

Denn: Sei  $(U_i)_{i=1, \dots, r}$  offene Überdeckung von  $X$  mit  $\mathcal{L}|_{U_i} \cong \mathcal{O}_X|_{U_i}$ ,  $i = 1, \dots, r$

Nach Voraussetzung ist dann  $\mathcal{L}(U_i) = f_i \cdot \mathcal{O}_X(U_i)$  für ein  $f_i \in k(X)$ . Setze  $D|_{U_i} := \text{div}(\frac{1}{f_i})$

Behauptung: Auf  $U_i \cap U_j$  ist  $\text{div}(\frac{1}{f_i}) = \text{div}(\frac{1}{f_j})$

Äquivalent:  $\frac{f_i}{f_j} \in \mathcal{O}_X(U_i \cap U_j)^*$

denn:  $\mathcal{L}(U_i \cap U_j) = f_i \mathcal{O}_X(U_i \cap U_j) = f_j \mathcal{O}_X(U_i \cap U_j)$

### Beispiel 10.3

Sei  $X$  eine Mannigfaltigkeit (reelle, differenzierbare, komplexe) und  $\mathcal{O}_X$  die Garbe der stetigen (differenzierbaren, holomorphen) Funktionen auf  $X$ . Sei  $E$  eine weitere Mannigfaltigkeit,  $p : E \rightarrow X$  eine stetige (differenzierbare, holomorphe) Abbildung.

$(E, p)$  heißt **Vektorbündel** vom Rang  $n$  über  $X$ , wenn es eine offene Überdeckung  $(U_i)$  von  $X$  gibt und Isomorphismen  $\varphi_i : p^{-1}(U_i) \rightarrow U_i \times \mathbb{R}^n$  sodass

$$\begin{array}{ccc} p^{-1}(U_i) & \xrightarrow{\varphi_i} & U_i \times \mathbb{R}^n \\ & \searrow p \quad \swarrow \text{pr}_{U_i} & \\ & U_i & \end{array}$$

mit  $p = \text{pr}_{U_i} \circ \varphi_i$ , sodass für alle  $i, j$  gilt:  $\varphi_i \circ \varphi_j^{-1} : (U_i \cap U_j) \times \mathbb{R}^n \rightarrow (U_i \cap U_j) \times \mathbb{R}^n$  induziert für jedes  $x \in U_i \cap U_j$  eine lineare Abbildung  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , die stetig (differenzierbar, holomorph) von  $x$  abhängt, das heißt  $\varphi_i \circ \varphi_j^{-1} \in \text{GL}_n(\mathcal{O}_X(U_i \cap U_j))$ .

Sei  $\mathcal{E}$  die Garbe der Schnitte in  $E$ , das heißt  $\mathcal{E}(U) = \{s : U \rightarrow E \text{ stetig (differenzierbar, holomorph)} : p \circ s = \text{id}_U\}$ .  $\mathcal{E}$  ist lokal frei vom Rang  $n$ .

Denn: Für jedes  $i \in I$  ist  $\mathcal{E}(U_i) = \{s : U_i \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ stetig (differenzierbar, holomorph)}\} = (\mathcal{O}_X(U_i))^n \Rightarrow \mathcal{E}|_{U_i} \cong (\mathcal{O}_X|_{U_i})^n$

Umgekehrt: Sei  $\mathcal{E}$  lokal frei vom Rang  $n$  auf  $X$ . Sei  $U_i \subset X$  offen,  $\varphi_i : \mathcal{E}|_{U_i} \rightarrow (\mathcal{O}_X|_{U_i})^n$  Isomorphismus ( $i \in I$ ,  $(U_i)$  Überdeckung).

Für  $i, j \in I$  und  $x \in U_i \cap U_j$  ist die induzierte Abbildung  $(\varphi_i \circ \varphi_j^{-1})_x : \kappa_x^n \rightarrow \kappa_x^n$  ein Isomorphismus von  $\kappa(x)$ -Vektorraum ( $\kappa(x) = \mathbb{R}$  beziehungsweise  $\mathbb{C}$ ).

$$\Rightarrow (\varphi_i \circ \varphi_j^{-1})_x \in \text{GL}_n(\overset{\mathbb{C}}{\mathbb{R}}) \text{ und } \varphi_i \circ \varphi_j^{-1} \in \text{GL}_n(\mathcal{O}_X(U_i \cap U_j))$$

Sei  $E_i := U_i \times \mathbb{R}^n$ . Verklebe  $E_i$  und  $E_j$  über  $(U_i \cap U_j) \times \mathbb{R}^n$  via  $\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}$ . Erhalte  $E$ !

### Definition 10.4

Sei  $(X, \mathcal{O}_X)$  ein Schema,  $p : E \rightarrow X$  ein Morphismus von Schemata.

$(E, p)$  heißt (geometrisches) **Vektorbündel** über  $X$ , wenn es eine offene Überdeckung  $(U_i)_{i \in I}$  von  $X$  gibt und Isomorphismen  $\varphi_i : p^{-1}(U_i) \rightarrow \mathbb{A}_{\mathbb{Z}}^n \times_{\text{Spec } \mathbb{Z}} U_i$ , sodass für alle  $i, j$  und für alle offenen affinen Teilmengen  $U = \bigcup_{i \in I} U_i \subseteq U_i \cap U_j$  gilt:

$\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}|_{\mathbb{A}_U^n}$  wird von einem linearen Automorphismus  $\alpha_{ij}$  von  $R[X_1, \dots, X_n]$ , das heißt  $\alpha_{ij}(a) = a$  für alle  $a \in R$  und  $\alpha_{ij}(x) = \sum_{j=1}^n a_{ij} X_j$  für gewisse  $a_{ij} \in R$  ( $\Leftrightarrow \alpha_{ij}$  ist  $R$ -Algebra-Homomorphismus), induziert.

Anmerkung:  $\mathbb{A}_U^n = \text{Spec } R[X_1, \dots, X_n]$

### Proposition 10.5

Sei  $X$  ein Schema. Die Isomorphieklassen von lokal freien Garben vom Rang  $n$  auf  $X$  entsprechen bijektiv den Isomorphieklassen von Vektorbündeln vom Rang  $n$  über  $X$ .

### Beweis

Analog Beispiel 10.3; Übung? □

### Definition + Proposition 10.6

Sei  $(X, \mathcal{O}_X)$  lokal geringter Raum,  $\mathcal{E}$  lokal freie Garbe vom Rang  $n$  auf  $X$ .

a)  $\mathcal{E}^* = \text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{E}, \mathcal{O}_X)$  ist lokal freie Garbe vom Rang  $n$ , sie heißt zu  $\mathcal{E}$  **duale** Garbe.

b)  $(\mathcal{E}^*)^* \cong \mathcal{E}$

c) Für jede  $\mathcal{O}_X$ -Modulgarbe  $\mathcal{F}$  ist  $\text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{E}, \mathcal{F}) \cong \mathcal{E}^* \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{F}$ .

d) Ist  $\mathcal{E}'$  eine weitere lokal freie Garbe vom Rang  $m$ , so ist  $\mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{E}'$  lokal frei vom Rang  $n \cdot m$ .

e) Ist  $f : Y \rightarrow X$  Morphismus lokal geringter Räume, so ist  $f^*\mathcal{E}$  lokal frei vom Rang  $n$  auf  $Y$ .

### Beweis

a) Lokal ist  $\mathcal{E} \cong \mathcal{O}_X^n$  und  $\text{Hom}(\mathcal{O}_X^n, \mathcal{O}_X) \cong \mathcal{O}_X^n$ .

b) Wie in Lineare Algebra I

c) Für  $U \subseteq X$  offen ist

$$(\mathcal{E}^* \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{F})(U) = \text{Hom}(\mathcal{E}|_U, \mathcal{O}_X|_U) \otimes_{\mathcal{O}_X(U)} \mathcal{F}(U) \cong \text{Hom}(\mathcal{E}|_U, \mathcal{F}|_U) = \text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{E}, \mathcal{F})(U)$$

$$l \otimes v \mapsto v \mapsto (x \mapsto l(x)v)$$

d)  $\mathcal{O}_X^n \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X^m \cong \mathcal{O}_X^{n \cdot m}$

e) Ist  $U \subseteq X$  offen mit  $\mathcal{E}|_U = (\mathcal{O}_X|_U)^n$ , so ist  $f^*\mathcal{E}(f^{-1}(U)) = (f^{-1}\mathcal{O}_X|_U \otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_X|_U} \mathcal{O}_Y(f^{-1}(U)))^n = (\mathcal{O}_Y(f^{-1}(U)))^n$  □

**Bemerkung + Definition 10.7**

Sei  $(X, \mathcal{O}_X)$  lokal geringster Raum.

a) Für jede lokal freie Garbe  $\mathcal{L}$  auf  $X$  von Rang 1 gilt:

$$\mathcal{L} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{L}^* \cong \mathcal{O}_X$$

b) Die Isomorphieklassen von lokal freien Garben vom Rang 1 auf  $X$  bilden eine Gruppe  $\text{Pic}(X)$  (**Picard-Gruppe** von  $X$ ).

c) Eine  $\mathcal{O}_X$ -Modulgarbe  $\mathcal{L}$  auf  $X$  heißt **invertierbar**, wenn sie lokal frei vom Rang 1 ist.

**Beweis**

a) Nach 10.6 c) ist  $\mathcal{L} \otimes \mathcal{L}^* \cong \text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{L}, \mathcal{L})$ . Sei  $\varphi : \mathcal{O}_X \rightarrow \text{Hom}_X(\mathcal{L}, \mathcal{L})$  gegeben durch  $1 \mapsto \text{id}$ .  $\varphi$  ist injektiver Morphismus von Garben.

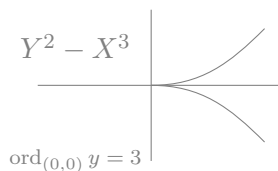
$\varphi$  ist surjektiv, da  $\varphi_X$  surjektiv ist für jedes  $x \in X$ : sei dazu  $\alpha \in \text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{L}_X, \mathcal{L}_X)$  und  $(U, \tilde{\alpha})$  Vertreter von  $\alpha$ , sodass  $\mathcal{L}|_U = \mathcal{O}_X|_U$ . Dann ist  $\tilde{\alpha}$  durch  $\tilde{\alpha}(1) \in \mathcal{L}(U) = \mathcal{O}_X(U)$  bestimmt  $\Rightarrow \tilde{\alpha} = \tilde{\alpha}(1) \cdot \text{id} \in \text{Bild } \varphi_U$ .  $\square$

## § 11 Divisoren

Sei  $X$  ein noethersches, irreduzibles, reduziertes Schema.  
 $\quad\quad\quad =: \text{integer (engl. integral)}$

### Definition + Bemerkung 11.1

- Ein **Primdivisor** auf  $X$  ist ein integrales abgeschlossenes Unterschema der Kodimension 1.
- Die freie abelsche Gruppe  $\text{Div}(X)$ , die von den Primdivisoren erzeugt wird, heißt die Gruppe der **Weil-Divisoren**.
- Ist  $X$  eine Kurve über einem algebraisch abgeschlossenen Körper, so sind die Primdivisoren die abgeschlossenen Punkte auf  $X$ .
- Sei  $W$  ein Primdivisor auf  $X$ ,  $\eta_W$  der generische Punkt von  $W$ ,  $\mathcal{O}_{X,W} = \mathcal{O}_{X,\eta_W}$  ( $\dim \mathcal{O}_{X,W} = 1$ ). Für  $f \in \mathcal{O}_{X,W} \setminus \{0\}$  sei  $\text{ord}_W(f) := \dim_{\kappa(W)} \mathcal{O}_{X,W}/(f)$ . Für  $f = \frac{g}{h} \in K = k(X) = \text{Quot}(\mathcal{O}_{X,W})$  sei  $\text{ord}_W(f) = \text{ord}_W(g) - \text{ord}_W(h)$  (wohldefiniert).  
 Es gilt:  $\text{ord}_W(f \cdot g) = \text{ord}_W(f) + \text{ord}_W(g)$ .



$$k[X, Y]/(y^2 - x^3)_{(x,y)}/(y) = k \cdot \bar{1} + k \cdot \bar{x} + k \cdot \bar{x}^2 \rightsquigarrow \text{ord}_{(0,0)} x = 2$$

- Für  $f \in k^\times$  sei  $\text{div}(f) := \sum_{W \text{ Primdiv.}} \text{ord}_W(f) \cdot W$ ;  $\text{div}(f)$  ist Divisor.
- $\text{Cl}(X) := \text{Div}(X) / \text{Div}_H(X)$  heißt **Weil-Divisorengruppe** von  $X$ .  
Hauptdivisoren

### Beispiel 11.2

$$X = \mathbb{P}^n_{\mathbb{Z}} = \text{Proj } \mathbb{Z}[X_0, \dots, X_n]$$

Jeder Primdivisor  $W$  auf  $\mathbb{P}^n$  ist von der Form  $W = V(F)$  für ein irreduzibles homogenes Polynom  $F \in \mathbb{Z}[X_0, \dots, X_n]$ . Sei  $d := \deg F$ .

**Behauptung:**  $W - d \cdot H$  ist hauptdivisor für  $H := V(X_0)$

denn:  $\frac{F}{X_0^d} \in K = k(X)$ ,  $\text{div } \frac{F}{X_0^d} = W - d \cdot H \Rightarrow \text{Cl}(\mathbb{P}^n) \cong \mathbb{Z}$  (als Gruppe)

### Proposition 11.3

Sei  $R$  faktorieller Ring,  $X = \text{Spec } R$ . Dann ist  $\text{Cl}(X) = 0$ .

### Beweis

Sei  $W$  Primdivisor, also  $W = V(\mathfrak{p})$  für ein Primideal  $\mathfrak{p}$  der Höhe 1.

**Behauptung:**  $\mathfrak{p}$  ist Hauptideal

Dann ist  $\mathfrak{p}(f)$  für ein Primideal  $f \in R \Rightarrow \text{div}(f) = W$

*Beweis der Behauptung:* Sei  $0 \neq f \in \mathfrak{p}$ ,  $f = f_1 \cdot \dots \cdot f_r$  die Primfaktorzerlegung  $\Rightarrow \exists f_1 \in \mathfrak{p} \Rightarrow (0) \subsetneq (f_1) \subseteq \mathfrak{p}$  ist Primidealkette  $\xrightarrow{\text{ht}(\mathfrak{p})=1} \mathfrak{p} = (f_1)$   $\square$



**Beispiel**

Sei  $R = k[X, Y]/(Y^2 - X^3 + X) = k[E]$ ,  $E = V(Y^2 - X^3 + X) \subseteq \mathbb{A}_k^2$ . Dann ist für  $P \in E$  abgeschlossen  $1 \cdot P$  kein Hauptdivisor!

**Definition + Bemerkung 11.4**

Sei  $X$  ein integres Schema,  $K = k(X)$ , der Funktionenkörper von  $X$ .

- Ein **Cartier-Divisor** auf  $X$  ist eine Äquivalenzklasse von Familien  $(U_i, f_i)_{i \in I}$ , wobei  $(U_i)_{i \in I}$  offene Überdeckung von  $X$ ,  $f_i \in K^\times$ , sodass  $\frac{f_i}{f_j} \in \mathcal{O}_X(U_i \cap U_j)^\times$ . Dabei sei  $(U_i, f_i)_{i \in I} \sim (V_j, g_j)_{j \in J} \Leftrightarrow \frac{f_i}{g_j} \in \mathcal{O}_X(U_i \cap V_j)$ .
- Die Cartier-Divisoren auf  $X$  bilden eine Gruppe  $\text{CaDiv}(X)$  mit folgender Verknüpfung: Seien  $D_1 = (U_i, f_i), D_2 = (V_j, g_j) \in \text{CaDiv}(X)$ ,  $(W_k)_k$  gemeinsame Verfeinerung, also  $I = J$ ,  $U_i = V_i$ ,  $D_1 + D_2 := (U_i, f_i \cdot g_i)_{i \in I}$ .
- $\text{CaDiv}(X) \cong \mathcal{K}_X^\times / \mathcal{O}_X^\times(X)$ , wobei  $\mathcal{K}_X^\times$  die konstante Garbe  $K^\times$  sei.
- $D \in \text{CaDiv}(X)$  heißt **Hauptdivisor**, wenn es einen Vertreter von  $D$  der Form  $(X, f)$  gibt.

$$\text{CaCl}(X) := \text{CaDiv} / \text{CaDiv}_H(X)$$

**Beweis**

- Sei  $D = (U_i, f_i)_{i \in I} \in \text{CaDiv}(X)$ ,  $U_i$  klein. Für  $i \in I$  sei  $\varphi_i \in K^\times / \mathcal{O}_X(U_i) = \mathcal{K}_X^\times / \mathcal{O}_X^\times(U_i)$  die Restklasse von  $f_i$ .  $\varphi_i$  ist durch  $D$  eindeutig bestimmt.

Auf  $U_i \cap U_j$  ist  $\varphi_i = \varphi_j \Rightarrow \exists \varphi \in K^\times / \mathcal{O}_X^\times(X)$  mit  $\varphi|_{U_i} = \varphi_i$

Sei umgekehrt  $\varphi \in K^\times / \mathcal{O}_X^\times(X)$ . Für  $x \in X$  sei  $(U_x, \varphi^{(x)})$  Vertreter von  $\varphi_x \in (\mathcal{K}^\times, \mathcal{O}^\times)_x$  ( $U_x$  Umgebung von  $x \in K^\times$ )

$\Rightarrow (U_x, \varphi^{(x)})_{x \in X}$  ist Cartier-Divisor. □

**Beispiel**

Sei  $X = \mathbb{P}_k^n$ ,  $k$  Körper,  $U_i = D(X_i)$ ,  $i = 0, \dots, n$ ,  $f_i := \frac{X_0}{X_i}$ ,  $f_0 := 1$ .

**Behauptung:**  $(U_i, f_i)$  ist Cartier-Divisor

Denn: Für  $i \neq 0 \neq j$  ist  $\frac{f_i}{f_j} = \frac{X_j}{X_i} \in \mathcal{O}_X(U_i \cap U_j)^\times$ .

$$\frac{f_i}{f_0} = \frac{X_0}{X_i} \in \mathcal{O}_X(U_0 \cap U_i)$$

$$\text{div}(f_i)|_{U_i} = V(X_0)$$

$(U_i, f_i)_{i=0, \dots, n}$  „induziert“ also den Weil-Divisor  $V(X_0)$ .

**Satz 3**

Sei  $X$  noethersches integres separiertes Schema. Dann gilt:

- $\text{CaCl}(X) \cong \text{Pic}(X)$
- Es gibt natürlichen Homomorphismus  $\alpha : \text{CaCl}(X) \rightarrow \text{Cl}(X)$ .
- Ist  $\mathcal{O}_{X,x}$  faktoriell für jedes  $x \in X$ , so ist  $\alpha$  Isomorphismus.

**Beweis**

- Sei  $D = (U_i, f_i) \in \text{CaDiv}(X)$ ,  $W$  Primdivisor auf  $X$ . Wähle  $i$  mit  $U_i \cap W \neq \emptyset$ . Setze  $n_W := \text{ord}_W(f_i)$ .

$n_W$  ist wohldefiniert: Sei  $j \in I$  mit  $U_j \cap W \neq \emptyset \xrightarrow{W \text{ irred.}} U_i \cap U_j \cap W \neq \emptyset, \frac{f_i}{f_j} \in \mathcal{O}_X(U_i \cap U_j)^\times \Rightarrow (f_i) = (f_j) \text{ in } \mathcal{O}_{X,W} \Rightarrow \text{ord}_W(f_i) = \text{ord}_W(f_j)$

☞  $I$  endlich, da  $X$  noethersch  $\Rightarrow D = \sum_{W \text{ Primid.}} n_W W$  ist Weil-Divisor

c) Umkehrabbildung zu  $\alpha$

**Behauptung:** Zu jedem Weil-Divisor  $D = \sum n_W W$  auf  $X$  gibt es Überdeckung  $(U_i)_i$  von  $X$  und  $f_i \in K^\times$  mit  $D|_{U_i} = \text{div}(f_i)|_{U_i}$ .

Dann gilt:  $\beta(D) := (U_i, f_i)$  ist Cartier-Divisor.

Denn:  $\text{div}(f_i)|_{U_i \cap U_j} = \text{div}(f_j)|_{U_i \cap U_j} = D|_{U_i \cap U_j} \Rightarrow \frac{f_i}{f_j} \in \mathcal{O}_X(U_i \cap U_j)^\times$

*Beweis der Behauptung:* ☞  $X = \text{Spec } R$ . Sei  $\xi \in X$  abgeschlossener Punkt.

$\Rightarrow \mathcal{O}_{X,\xi} = R_{m_\xi}$  (nach Voraussetzung faktoriell!)

Für jeden Primdivisor  $W = V(\mathfrak{p})$  von  $X$  gilt:  $\xi \in W \Leftrightarrow \mathfrak{p} \subseteq m_\xi$

Da  $\text{ht}(\mathfrak{p}) = 1$  ist nach 11.3  $\mathfrak{p} \cdot \mathcal{O}_{X,\xi} = (f_w)_{w \in K^\times}$  ein Hauptideal. Sei  $f_\xi := \prod_{\xi \in W} f_W^{n_W}$  und

$$U_\xi := X - \bigcup_{\substack{W \text{ Primid.} \\ \xi \notin W}} \frac{n_W}{\text{ord}_W f_\xi} W$$

a) Sei  $D = (U_i, f_i) \in \text{CaDiv}(X)$ ,  $\mathcal{L}(D)(U_i) := \frac{1}{f_i} \cdot \mathcal{O}_X(U_i) \subset K$  (als  $\mathcal{O}_X(U_i)$ -Untermodul von  $K$ ). Da  $\frac{f_i}{f_j} \in \mathcal{O}_X(U_i \cap U_j)^\times$  gilt  $\frac{1}{f_i} \mathcal{O}_X(U_i \cap U_j) = \frac{1}{f_j} \mathcal{O}_X(U_i \cap U_j)$ .

**Behauptung 1:**  $\mathcal{L}(D)$  ist lokal freie Garbe vom Rang 1.  $\mathcal{L}$  induziert Homomorphismus  $\text{CaCl}(X) \rightarrow \text{Pic } X$

**Behauptung 2:** Jede lokal freie  $\mathcal{O}_X$ -Modulgarbe von  $\mathcal{K}^\times$  ist von der Form  $\mathcal{L}(D)$  für ein  $D \in \text{CaDiv}(X)$ .

**Behauptung 3:** Jede lokal freie Garbe vom Rang 1 auf  $X$  ist isomorph zu einer Untergarbe von  $\mathcal{K}$ .

**Beweis 3:**  $\mathcal{L} \hookrightarrow \mathcal{L} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{K} \cong \mathcal{K}$

□