5. Krümmung

5.1. Der Riemann'sche Krümmungstensor

Gegeben sei eine Riemann'sche Mannigfaltigkeit $(M, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ mit Levi-Civita-Zusammenhang D. Der Riemann'sche Krümmungstensor von M bezüglich D ist die Abbildung $R : \mathcal{V}M \times \mathcal{V}M \times \mathcal{V}M \to \mathcal{V}M$, $(X, Y, Z) \mapsto R(X, Y)Z$, wobei

$$R(X,Y)Z \coloneqq D_Y D_X Z - D_X D_Y Z + D_{[X,Y]} Z\,.$$

Beispiel
Im $(\mathbb{R}^n, \langle\cdot,\cdot\rangle)$, wobei $\langle\cdot,\cdot\rangle$ das Standardskalarprodukt ist, betrachten wir das Vektorfeld $Z = (z^1, \ldots, z^n) \in \mathcal{V}\mathbb{R}^n$. Da $D_X Z = (Xz^1, \ldots, Xz^n)$, folgt: $D_Y D_X Z = (YXz^1, \ldots, YXz^n)$. Wegen $[X,Y] = XY - YX$ folgt: $R(X,Y)Z = 0$.

Das oben definierte R ist somit ein „Maß" für die Abweichung der Riemann'schen Mannigfaltigkeit $(M, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ von der euklidischen Geometrie.

Bemerkung: Bezüglich lokalen Basisfeldern $\frac{\partial}{\partial x^i}$ $(i = (1, \ldots, n))$ gilt: $\left[\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right] = 0$ für C^∞-Funktionen. Dann ist $R\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right)\frac{\partial}{\partial x^k} = D_{\frac{\partial}{\partial x^j}} D_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^k} - D_{\frac{\partial}{\partial x^i}} D_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \frac{\partial}{\partial x^k}$. „$R$ ist ein Maß für die Vertauschbarkeit der 2. kovarianten Ableitungen."

Definition
Setze $\mathcal{V}_0 M \coloneqq C^\infty M$, $\mathcal{V}_r M \coloneqq \mathcal{V}M \times \cdots \times \mathcal{V}M$. ($r$ Summanden). $\mathcal{V}_r M$ ist ein $C^\infty M$-Modul. Ein (s,r)-Tensorfeld auf M ist eine r-lineare Abbildung $T : \mathcal{V}_r M \to \mathcal{V}_s M$ über dem Ring $C^\infty M$, das heißt

$$\begin{aligned} T(X_1, \ldots, X_{i-1}, fX + gY, X_{i+1}, \ldots, X_r) &= fT(X_1, \ldots, X_{i-1}, X, X_{i+1}, \ldots, X_r) \\ &\quad + gT(X_1, \ldots, X_{i-1}, Y, X_{i+1}, \ldots, X_r) \end{aligned}$$

für alle Argumente von T, $X, Y \in \mathcal{V}M$

Satz 5.1
R ist ein (1,3)-Tensorfeld

Beweis
Exemplarisch für $R(X,Y)(fZ) = fR(X,Y)Z \;\forall f \in C^\infty M$.

$D_Y D_X(fZ) = D_Y(fD_X Z + (Xf)Z) = (Yf)D_X Z + fD_Y D_X Z + (YXf)Z + (Xf)D_Y Z$.
Also: $D_Y D_X(fZ) - D_X D_Y(fZ) = f(D_Y D_X Z - D_X D_Y Z) + (YXf - XYf)Z$;
$D_{[X,Y]} fZ = fD_{[X,Y]}Z + ([X,Y]f)Z \implies R(X,Y)fZ = fR(X,Y)Z$. ∎

Satz 5.2 (Symmetrie-Eigenschaften)
$(M, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ sei eine Riemann'sche Mannigfaltigkeit. D der Levi-Civita-Zusammenhang und R ein Krümmungstensor. Dann gilt

(1) $R(X,Y)Z + R(Y,Z)X + R(Z,X)Y = 0$ (zyklisch Vertauschbar). „Bianchi-Identität“

(2) $\langle R(X,Y)Z, T\rangle = -\langle R(Y,X)Z, T\rangle$

(3) $\langle R(X,Y)Z, T\rangle = -\langle R(X,Y)T, Z\rangle$

(4) $\langle R(X,Y)Z, T\rangle = \langle R(Z,T)X, Y\rangle$

Beweis

(1) ist äquivalent zur Jacobi-Identität für Lie-Klammern (mit Torsionsfreiheit).

(2) folgt direkt aus der Definition.

(3) ist äquivalent zu $\langle R(X,Y)W, W\rangle = 0$ (setzte $W = Z + T$ und verwende Satz 5.1).

Es ist $\langle R(X,Y)W, W\rangle = \langle D_Y D_X W - D_X D_Y W + D_{[X,Y]}W, W\rangle$,
$\langle D_Y D_X W, W\rangle \overset{\text{Levi-Civita, verträglich}}{=} Y\langle D_X W, W\rangle - \langle D_X W, D_Y W\rangle$, analog $\langle D_X D_Y W, W\rangle$; $\langle D_{[X,Y]}W, W\rangle = \frac{1}{2}[X,Y]\langle W, W\rangle$. Somit: $\langle R(X,Y)W, W\rangle = Y\langle D_X W, W\rangle - \langle D_X W, D_Y W\rangle - X\langle D_Y W, W\rangle + \langle D_Y W, D_X W\rangle + \frac{1}{2}[X,Y]\langle W, W\rangle = 0$.

(4) Analog. ∎

Krümmungstensor in lokalen Koordinaten (u, φ)

Die Basisfelder seien $X_i := \frac{\partial}{\partial x^i}$, $i = 1, \ldots, n$. Dann: $R(X_i, X_j)X_k := \sum_{l=1}^n R^l_{ijk} X_l$ (per Basissatz), wobei R^l_{ijk} die Komponenten des Krümmungstensors in lokalen Koordinaten sind, also C^∞-Funktionen und symmetrisch bezüglich i, j.

Für beliebige Vektorfelder $X, Y, Z \in \mathcal{V}M$ mit

$$X = \sum_{i=1}^n u^i X_i, \quad Y = \sum_{j=1}^n v^j X_j, \quad Z = \sum_{k=1}^n w^k X_k$$

gilt wegen Satz 5.1:

$$R(X,Y)Z = \sum_{i,j,k,l=1}^n u^i v^j w^k R^l_{ijk} X_l \qquad (*)$$

(man muss alles an der Stelle p kennen).

Bemerkung: (Trägereigenschaft von R) Die Formel $(*)$ zeigt, dass $(R(X,Y)Z)(p)$ nur von den Werten der Vektorfelder X, Y, Z im Punkt p abhängig ist.

Formel für R_{ijk}^l

$$
\begin{aligned}
R(X_i, X_j)X_k &= D_{X_j}(D_{X_i}X_k) - D_{X_i}(D_{X_j}X_k) + D_{\underbrace{[X_i, X_j]}_{=0}}X_k \\
&= D_{X_j}\left(\sum_{m=1}^n \Gamma_{ik}^m X_m\right) - D_{X_i}\left(\sum_{m=1}^n \Gamma_{jk}^n X_m\right) \\
&= \sum_{m=1}^n [X_j\,(\Gamma_{ik}^m)\,X_m + \Gamma_{ik}^m \underbrace{D_{X_j}X_m}_{\sum_{l=1}^m \Gamma_{jm}^l X_l}] - \sum_{m=1}^n [X_i(\Gamma_{ik}^m)X_m + \Gamma_{jk}^m \underbrace{D_{X_i}X_m}_{\sum_{l=1}^n \Gamma_{im}^l X_l}] \\
\implies R_{ijk}^l &= \frac{\partial}{\partial x^j}\Gamma_{ik}^l + \sum_{m=1}^n \Gamma_{ik}^m\Gamma_{jm}^l - \frac{\partial}{\partial x^i}\Gamma_{jk}^l - \sum_{m=1}^n \Gamma_{jk}^m\Gamma_{im}^l
\end{aligned}
$$

(so hatte es Riemann definiert)

Setze nun

$$R_{ijks} \coloneqq \sum_{l=1}^n R_{ijk}^l \cdot g_{ls} = \langle R(X_i, X_j)X_k, X_s\rangle$$

„Herunterziehen von Indizes“, „Ricci-Kalkül“. Nach Satz 5.2 gilt:

- $R_{ijks} + R_{jkis} + R_{kijs} = 0$
- $R_{ijks} = -R_{jiks}$
- $R_{ijks} = -R_{ijsk}$
- $R_{ijks} = R_{ksij}$

Bemerkung: Für $\dim M = 2$ sind $i, j, k, s \in \{1, 2\}$ und aufgrund obiger Symmetrien ist im wesentlichen nur $R_{1212} \neq 0$. Dies ist gerade die Gauß-Krümmung.

Riemann'scher Krümmungstensor

Sei $(M, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ eine Riemann'sche Mannigfaltigkeit und D der zugehöriger Levi-Civita-Zusammenhang. Dann ist

$$R : \begin{array}{l} \mathcal{V}M \times \mathcal{V}M \times \mathcal{V}M \to \mathcal{V}M \\ \qquad (X, Y, Z) \mapsto R(X, Y)Z \coloneqq D_Y D_X Z - D_X D_Y Z - D_{[X,Y]}Z \end{array}$$

multilinear bezüglich $C^\infty M$.

5.2. Schnittkrümmung

Vorbemerkung aus der Linearen Algebra. Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Für $x, y \in V$ setze

$$|x \wedge y| \coloneqq \sqrt{\|x\|^2\|y\|^2 - \langle x, y\rangle^2} \geq 0$$

(Flächeninhalt des des von x und y aufgespannten Parallelogramms). Für orthonormierte Vektoren ist $|x \wedge y| = 1$.

Lemma 5.1
Sei $(M, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ eine Riemann'sche Mannigfaltigkeit, $p \in M$, σ ein 2-dimensionaler Untervektorraum von T_pM mit Basis x, y. Dann ist

$$K(x,y) := \frac{\langle R(x,y)x, y\rangle_p}{|x \wedge y|^2}$$

unabhängig von der Wahl der Basis.

In der Konsequenz macht folgende Definition Sinn:

Definition
Für $p \in M$, $\sigma \subset T_pM$ ein 2-dimensionaler Untervektorraum setze $K(p,\sigma) := K(x,y)$ für eine beliebige Basis $\{x, y\}$ von σ. $K(p,\sigma)$ heißt Schnittkrümmung von σ in $p \in M$.

Bemerkungen: (1) Für $n = 2$ ist $K(p,\sigma) = K(p)$ die Gauß-Krümmung von M im Punkt p. Die Menge der Krümmungstensoren R im Punkt p ist vollständig bestimmt.

Beispiel
Schnittkrümmung von $(\mathbb{R}^n, \text{kan})$ ist konstant null, da $R = 0$.

(2) (S^n, kan). Behauptung: Schnittkrümmung ist konstant 1.

Lemma 5.2
Sei $f : (M, \langle\cdot,\cdot\rangle) \to (N, \langle\!\langle\cdot,\cdot\rangle\!\rangle)$ eine Riemann'sche Isometrie. Für $\sigma \subset T_pM$ ist $df|_p(\sigma) \subset T_{f(p)}N$ ein 2-dimensionaler Untervektorraum und $K^M(p,\sigma) = K^N(f(p), df|_p(\sigma))$. Das heißt: Schnittkrümmung ist invariant unter Isometrie.

Beweis (des Lemmas)
Es gilt (Übungsblatt 7 Aufgabe 1):

- $D^N_{df(x)} df(y) = df(D^M_x y)$
- $[df(x), df(y)]^N = df([x,y]^M)$
- $\langle\!\langle df(x), df(y)\rangle\!\rangle = \langle x, y\rangle$

$\Longrightarrow \; R^N(df(x), df(y))df(z) = df(R^M(x,y)z)$. ∎

Beweis (Schnittkrümmung von S^n ist konstant)
Es genügt zu zeigen: Zu $\sigma \subset T_xS^n$ und $\tau \subset T_yS^n$, jeweils 2-dimensionale Untervektorräume, existiert eine Isometrie $f : S^n \to S^n$ mit $df_x(\sigma) = \tau$.

Sei nun $\sigma = [u, v]$, $\tau = [\tilde{u}, \tilde{v}]$, wobei u, v bzw. $\tilde{u}, \tilde{v}$ Orthonormalbasen sind. $l_1 = x$, $l_2 = u$, $l_3 = v$.

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = f_1 \qquad \tilde{u} = \begin{pmatrix} \tilde{u}_1 \\ \vdots \\ \tilde{u}_{n+1} \end{pmatrix} = f_2 \qquad \tilde{v} = \begin{pmatrix} \tilde{v}_1 \\ \vdots \\ \tilde{v}_{n+1} \end{pmatrix} = f_3$$

ergänze zu einer Orthonormalbasis $\{f_1, \dots, f_{n+1}\}$ von $\mathbb{R}^{n+1}$. Dann ist $A := [f_1, f_2, \dots, f_{n+1}] \in O(n+1)$, also eine orthogonale $(n+1)\times(n+1)$-Matrix, mit $A_{li} = (f_i)_l$, $f : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^{n+1}$; $w \mapsto Aw$ ist eine euklidische Isometrie (Rotation von $(\mathbb{R}^{n+1}, \mathrm{kan})$) die S^n invariant lässt. Dies Induziert also eine Isometrie von (S^n, kan).

Da f linear ist, $df = f$, also $df_x(\sigma) = df_x([u,v]) = [df_x(u), df_y(v)] = [\tilde{u}, \tilde{v}] = \tau \implies$ Behauptung. S^n hat konstante Schnittkrümmung. Es gilt $K = 1$ (siehe später). ∎

(3) n-dimensionale hyperbolische Räume $H^n\mathbb{R} := \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_n > 0\}$ mit der Identität als Karte und lokalen Koordinaten $x_1, \dots, x_n$. Es ist

$$(g_{ij}) := \begin{pmatrix} \frac{1}{(x_n)^2} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \frac{1}{(x_n)^2} \end{pmatrix} = \frac{1}{(x_n)^2} \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

Berechnung der R_{ijks} zeigt: Schnittkrümmung R ist konstant -1.

(4) Konforme Änderung der Metrik (M, g) einer Riemann'schen Mannigfaltigkeit um $\lambda \in C^\infty M$, $\lambda > 0$: $\tilde{g} := \lambda g$ ist wieder eine Riemann'sche Metrik.

Für konstantes $\lambda > 0$ ist die Schnittkrümmung für $\tilde{g}$: $\tilde{K} = \frac{1}{\lambda} K$. Insbesondere kann man aus jeder Mannigfaltigkeit mit beliebiger, konstanter Krümmung ($\neq 0$) durch Reskalierung der Riemann'schen Metrik S^n oder H^n erhalten.

Ergänzende Sätze (ohne Beweis, vergleiche: do Carmo, Kapitel 8)

Satz
$(M, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ hat konstante Schnittkrümmung, also

$$K(p, \sigma) = K_0 \ \forall \sigma \subset T_pM \ \forall p \in M \iff \langle R(x,y)w, z\rangle = K_0 \left(\langle x, w\rangle\langle y, z\rangle - \langle y, w\rangle\langle x, z\rangle\right)$$

insbesondere ist $\langle R(x,y)x, y\rangle = K_0 \left(\|x\|^2\|y\|^2 - \langle x, y\rangle^2\right)$.

Satz (Hopf)
Eine vollständige, einfach zusammenhängende, zusammenhängende Riemann'sche Mannigfaltigkeit mit konstanter Krümmung 0, 1 oder -1 ist isometrisch zu $\mathbb{R}^n$, S^n, $H^n\mathbb{R}$. Dabei heißt

- Vollständig: Jede Geodätische ist auf ganz $\mathbb{R}$ definiert
- Einfach zusammenhängend: Jede geschlossene Kurve ist auf einen Punkt zusammenziehbar

5.3. Ricci-Krümmung

Sei R der Krümmungstensor einer Riemann'schen Mannigfaltigkeit $(M, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ und $X, Y, Z \in \mathcal{V}M$. In jedem Punkt $p \in M$ ist $Y(p) \mapsto R(X(p), Y(p))Z(p)$ ein Endomorphismus von T_pM. Oder: Für $X, Z \in \mathcal{V}M$ fest ist $R(X, \cdot)Z$ ein (1,1)-Tensormodul.

Für ein beliebiges (1,1)-Tensorfeld A ist $A(p) : T_pM \to T_pM$ ein Endomorphismus und wir definieren die Spur von A durch

$$(\operatorname{Spur} A)(p) := \sum_{i=1}^{n} \langle A(p)e_i, e_i\rangle_p$$

wobei $[e_i]$ eine Orthonormalbasis von T_pM ist. Linere Algebra: Es gibt einen Endomorphismus Φ mit Abbildungsmatrix A und Spur Φ = Spur $A = \sum_{i=1}^n A_{ii}$ (insbesondere für Orthonormalbasen, $a_{ii} = \langle Ae_i, e_i\rangle$).

Der Ricci-Tensor von M ist der (0,2)-Tensor $\mathrm{Ric}(x,z) := \mathrm{Spur}(y \mapsto R(x,y)z)$. (In manchen Quellen noch mit $\frac{1}{n-1}$ normiert.) Die Ricci-Krümmung von M in Richtung $v \in T_pM$ ist

$$r(v) := \frac{\mathrm{Ric}(v,v)}{\|v^2\|}\,.$$

Für eine Orthonormalbasis $\{e_i\}$ von T_pM ist $\mathrm{Ric}(v,w) = \sum_{i=1}^n \langle R(v,e_i)w, e_i\rangle$. Also insbesondere ist der Ricci-Tensor symmetrisch und $r(e_1) = \sum_{i=2}^n K(p,[e_1,e_i])$.

Die Skalar-Krümmung ist eine differenzierbare Funktion auf $S : M \to \mathbb{R}$, $p \mapsto \sum_{j=1}^n r(e_j)$, wobei $\{e_j\}$ eine Orthonormalbasis von T_pM ist.

$$S(p) = \sum_{j=1}^n r(e_j) = \sum_{j=1}^n \mathrm{Ric}(e_j,e_j) = \sum_{i,j=1}^n \langle R(e_j,e_i)e_j, e_i\rangle = \sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^n K(p,[e_i,e_j])$$

Eine Riemann'sche Mannigfaltigkeit (M,g) heißt Einstein-Raum falls $\mathrm{Ric}(x,y) = \lambda g(x,y)\,\forall x,y \in \mathcal{V}M$, wobei $\lambda : M \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion ist.

Beispiel
Räume mit konstanter Krümmung sind Einstein-Räume: $K = c_0$ konstant:

$$\mathrm{Ric}(X,X) = \sum_{i=1}^n K([x,e_i])g(x,x) = (n-1)c_0 g(x,x)$$

Bemerkung: Der Einstein-Tensor ist $G := \mathrm{Ric} - \frac{S}{2}g$. Einstein-Feldgleichungen der ART:

$$\underbrace{G}_{\text{Geometrie}} = \underbrace{T}_{\text{Physik}}\,,$$

wobei G: Einstein-Tensor für 4 dimensionale Lorentz-Mannigfaltigkeit (mit Pseudo-Riemannscher Metrik), T: Energie-Impuls-Tensor der Materie-Verteilung. (Buch: Gravitation – Misner, Thorne, Wheeler).