

12. Der Existenzsatz von Peano

Definition

Sei $D \subseteq \mathbb{R}^2$, $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion und $(x_0, y_0) \in D$ und $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall. Die Gleichung:

$$(i) \quad y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt \quad (x \in I)$$

heißt eine **Integralgleichung**. $y \in C(I)$ heißt eine **Lösung von (i) auf I** : $\iff (t, y(t)) \in D \forall t \in I$ und es gilt (i) $\forall x \in I$.

Wir betrachten auch noch das AWP

$$(ii) \quad \begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

Satz 12.1 (Zusammenhang Integral- und Differenzialgleichung)

$D, f, (x_0, y_0)$ und I seien wie oben und $y \in C(I)$. Es sei $f \in C(D, \mathbb{R})$.

- (1) y ist eine Lösung von (i) auf $I \iff y$ ist eine Lösung von (ii) auf I
- (2) Sei $I = [a, b]$ und $D = I \times \mathbb{R}$. Ist $T : C(I) \rightarrow C(I)$ def. durch $(T_y)(x) := y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt$, $x \in I$, so gilt: y ist eine Lösung von (ii) auf $I \iff T_y = y$

Beweis

- (1) " \implies ": $y(x_0) = y_0$; Durch Differentiation: $y'(x) = f(x, y(x)) \forall x \in I$
 \Leftarrow : $y'(x) = f(t, y(t)) \forall t \in I$ und $y(x_0) = y_0 \implies \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt = \int_{x_0}^x y'(t) dt = y(x) - y(x_0) = y(x) - y_0 \forall x \in I$
- (2) $T_y = y \iff y$ löst (i) auf $I \iff y$ löst (ii) auf I . ■

Satz 12.2 (Lösungen auf Teilintervallen)

Sei $D \subseteq \mathbb{R}^2$, $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion und $\Gamma \neq \emptyset$ (Γ ist Indexmenge). Für jedes $\gamma \in \Gamma$ sei $y_\gamma : I_\gamma \rightarrow \mathbb{R}$ (wobei $I_\gamma \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall) eine Lösung der Dgl.:

$$(+)\quad y'(x) = f(x, y)$$

auf I_γ .

Weiter sei $\bigcap_{\gamma \in \Gamma} I_\gamma \neq \emptyset$ und für je zwei Lösungen $y_{\gamma_1} : I_{\gamma_1} \rightarrow \mathbb{R}$, $y_{\gamma_2} : I_{\gamma_2} \rightarrow \mathbb{R}$ von (+) gelte $y_{\gamma_1} = y_{\gamma_2}$ auf $I_{\gamma_1} \cap I_{\gamma_2}$.

Setzt man $I := \bigcup_{\gamma \in \Gamma} I_\gamma$ und $y(x) := y_\gamma(x)$, falls $x \in I_\gamma$, so ist I ein Intervall und y eine Lösung von (+) auf I .

BeweisÜbung. ■**Folgerung 12.3**

Sei $I = [a, b]$, $S := I \times \mathbb{R}$, $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion, $x_0 \in (a, b)$, $y_0 \in \mathbb{R}$, $I_1 := [a, x_0]$, $I_2 := [x_0, b]$ und $y_1 : I_1 \rightarrow \mathbb{R}$, $y_2 : I_2 \rightarrow \mathbb{R}$ seien Lösungen des AWP

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

auf I_1 bzw I_2 . Definiert man $y : I \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$y(x) := \begin{cases} y_1(x), & \text{falls } x \in I_1 \\ y_2(x), & \text{falls } x \in I_2 \end{cases}$$

so ist y eine Lösung des AWP auf I .

Satz 12.4 (Der Existenzsatz von Peano (Version I))

I und S seien wie in 12.3, $x_0 \in I$, $y_0 \in \mathbb{R}$ und $f \in C(S, \mathbb{R})$ sei beschränkt. Dann hat das AWP:

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

eine Lösung auf I .

Wir führen zwei Beweise. In beiden sei $M := \sup\{|f(x, y)| : (x, y) \in S\}$ und $T : C(I) \rightarrow C(I)$ sei definiert durch $(T_y)(x) := y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt$ ($x \in I$)

Beweis (mit 11.3)

Sei $A \subseteq C(I)$ sei wie in 11.5 (mit obigen M). $11.5 \implies A \neq \emptyset$, A ist konvex und kompakt. $T : A \rightarrow C(I)$ ist stetig. Wegen 11.3 und 12.1(2) ist nur noch zu zeigen: $T(A) \subseteq A$. Sei $y \in A$. Dann $(T_y)(x_0) = y_0$. Weiter gilt

$$\forall x, \bar{x} \in I : |(T_y)(x) - (T_y)(\bar{x})| = \left| \int_x^{\bar{x}} \underbrace{f(t, y(t))}_{\leq M} dt \right| \leq M \cdot |x - \bar{x}|. \text{ Also: } T_y \in A. \text{ Somit: } T(A) \subseteq A \blacksquare$$

Beweis (Nr.2)

Wir unterscheiden 3. Fälle: $x_0 = a$, $x_0 = b$ und $x_0 \in (a, b)$. Wir führen den Beweis nur für den Fall $x_0 = a$ (den Fall $x_0 = b$ zeigt man analog; der Fall $x_0 \in (a, b)$ folgt aus 12.3 und den ersten beiden Fällen).

Sei also $x_0 = a$. o.B.d.A. $x_0 + \frac{1}{n} = a + \frac{1}{n} \in I \forall n \in \mathbb{N}$.

Für $n \in \mathbb{N}$ definieren wir $z_n : (-\infty, b] \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$z_n(x) := \begin{cases} y_0, & \text{falls } x \leq x_0 = a \\ y_0 + \int_{x_0}^x f(t, z_n(t - \frac{1}{n})) dt, & \text{falls } x \in I \end{cases}$$

Beh.: z_n ist auf I wohldefiniert.

Sei $x \in [x_0, x_0 + \frac{1}{n}]$ und $t \in [x_0, x] \implies t - \frac{1}{n} \leq x - \frac{1}{n} \leq x_0 \implies z_n(t - \frac{1}{n}) = y_0 \implies z_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y_0) dt$, also $z_n(x)$ ist wohldef.

Sei $x \in [x_0 + \frac{1}{n}, x_0 + \frac{2}{n}]$ und $t \in [x_0, x] \implies t - \frac{1}{n} \leq x - \frac{1}{n} \in [x_0, x_0 + \frac{1}{n}] \implies z_n(t - \frac{1}{n})$ wohldef. $\implies z_n(x)$ ist wohldefiniert, etc...

Übung: $z_n \in C(-\infty, b]$.

Insbesondere: $z_n \in C(I)$. Es ist $z_n(x_0) = y_0$. Für $x, \bar{x} \in I : |z_n(x) - z_n(\bar{x})| = |\int_x^{\bar{x}} f(t, z_n(t - \frac{1}{n})) dt| \leq M \cdot |x - \bar{x}|$. 11.4 $\implies (z_n)$ enthält eine auf I gleichmäßige konvergente Teilfolge. o.B.d.A.: (z_n) konvergiert auf I glm.

$y(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} z_n(x)$ ($x \in I$). AI $\implies y \in C(I)$. Also $z_n \rightarrow y$ bzgl. $\|\cdot\|_\infty$. ($\|z_n - y\|_\infty \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$));

$g_n(t) := z_n(t - \frac{1}{n})$ ($t \in I$). $\forall t \in I : |g_n(t) - y(t)| = |g_n(t) - z_n(t) + z_n(t) - y(t)| \leq \underbrace{|z_n(t - \frac{1}{n}) - z_n(t)|}_{\leq \frac{M}{n}} +$

$\underbrace{|z_n(t) - y(t)|}_{\leq \|z_n - y\|_\infty}$

$\implies \|g_n(t) - y(t)\|_\infty \leq \frac{M}{n} + \|z_n - y\|_\infty \forall n \in \mathbb{N} \implies g_n \rightarrow y$ bzgl. $\|\cdot\|_\infty$ (glm. konv.)

$T : C(I) \rightarrow C(I)$ ist stetig $\implies T_{g_n} \rightarrow T_y$ bzgl. $\|\cdot\|_\infty$

$(T_{g_n})(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, z_n(t - \frac{1}{n})) dt = z_n(x) \forall x \in I \implies T_{g_n} = z_n$ auf I .

Also $T_y = y$ und damit folgt, y löst das AWP auf I . ■

Satz 12.5 (Der Existenzsatz von Peano (Version II))

Es sei $I = [a, b] \subseteq \mathbb{R}, x_0 \in I, y_0 \in \mathbb{R}, s > 0$ und $R := I \times [y_0 - s, y_0 + s]$

Es sei $f \in C(R, \mathbb{R}), M := \max\{|f(x, y)| : (x, y) \in R\}$ und

$J := I \cap [x_0 - \frac{s}{M}, x_0 + \frac{s}{M}]$. Dann hat das AWP:

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

eine Lösung auf J .

Beweis

$S := I \times \mathbb{R}$. Def. $g : S \rightarrow \mathbb{R}$ durch:

$$g(x, y) = \begin{cases} f(x, y), & (x, y) \in \mathbb{R} \\ f\left(x, y_0 + s \frac{y - y_0}{|y - y_0|}\right), & x \in I, |y - y_0| \geq s \end{cases}$$

Dann: $g = f$ auf R , $|g| \leq M$ auf S und $g \in C(S, \mathbb{R})$

Betrachte das AWP

$$(+)\begin{cases} y' = g(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

12.4 \implies (+) hat eine Lösung \bar{y} auf I . 12.1 \implies

$$(*) \bar{y}(x) = y_0 + \int_{x_0}^x g(t, \bar{y}(t)) dt \quad \forall x \in I$$

Sei $x \in J$. Sei $y := \bar{y}|_J$. Dann: $|y(x) - y_0| = |\bar{y}(x) - y_0|$

$$\stackrel{(*)}{=} \left| \int_{x_0}^x g(t, \bar{y}(t)) dt \right| \leq M|x - x_0| \leq M \cdot \frac{s}{M} = s \implies (x, y(x)) \in R$$

$\implies (t, y(t)) \in R$ für t zwischen x und x_0 .

$$\implies y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, g(t)) dt \quad \forall x \in J$$

$\stackrel{12.1}{\implies} y$ löst das AWP auf J ■

Satz 12.6 (Der Existenzsatz von Peano (Version III))

Sei $D \in \mathbb{R}^2$ offen, $(x_0, y_0) \in D$ und $f \in C(D, \mathbb{R})$. Dann ex. $\delta > 0$: das AWP

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

hat eine Lösung $y : K \rightarrow \mathbb{R}$, wobei $K = [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ (also $x_0 \in K^0$)

Beweis

D offen $\implies \exists r, s > 0 : R := [x_0 - r, x_0 + r] \times [y_0 - s, y_0 + s] \subseteq D$

$M := \max\{|f(x, y)| : (x, y) \in R\}$

$\delta := \min\{r, \frac{s}{M}\}, K := [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ 12.5 \implies Beh. ■