

## Kapitel 2

# Differentialgeometrie und Geometrie von Dreiecken

### 2.1 Ebene euklidische Geometrie

Es bezeichne  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  das Standardskalarprodukt in  $\mathbb{R}^2$ , für  $a = (a_1, a_2)$  und  $b = (b_1, b_2)$  gilt also  $\langle a, b \rangle = a_1 b_1 + a_2 b_2$ . Es sei  $\mathbb{E}^2 = (\mathbb{R}^2, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  das Modell für zweidimensionale euklidische Geometrie. Der *Tangentialraum* in  $p \in \mathbb{E}^2$  ist

$$T_p \mathbb{E}^2 = \{p\} \times \mathbb{R}^2 = \{(p, v) \mid v \in \mathbb{R}^2\} \cong \mathbb{R}^2.$$

Die *Länge* eines Tangentialvektors  $(p, u) =: u$  ist

$$\|u\| := \sqrt{\langle u, u \rangle}.$$

Der *Winkel* zwischen 2 Tangentialvektoren  $u, v \in T_p \mathbb{E}^2$  ist

$$\cos \sphericalangle(u, v) = \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\| \|v\|}.$$

Ist  $c : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $c(t) = (x(t), y(t))$  eine differenzierbare Kurve, so ist die *euklidische Länge* von  $c$  definiert als

$$L_e(c) := \int_a^b \left\| \frac{dc}{dt}(t) \right\| dt = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt$$

(motiviert durch Polygon-Approximation). Beispielsweise hat das parametrisierte Geradensegment  $g : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $g(t) = (1-t)p + tq$  für beliebige  $p, q \in \mathbb{R}^2$

$$L_e(g) = \int_0^1 \|p - q\| dt = \|p - q\|.$$

**Lemma 2.1.1** (i) Die euklidische Länge einer differenzierbaren Kurve ist unabhängig von der Parametrisierung.

(ii) Die euklidische Länge einer differenzierbaren Kurve ist invariant unter euklidischen Isometrien, also Translationen, Rotationen und Spiegelungen.

*Beweisidee.* Substitutionsregel und  $\|(I \cdot c)'\| = \|I \cdot c'\| = \|c'\|$  für Isometrien  $I$ .

**Definition 2.1.2** Für zwei Punkte  $p, q \in \mathbb{E}^2$  definieren wir

$$\Omega_{pq} := \{ \gamma : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^2 \mid \gamma(0) = p, \gamma(1) = q, \gamma \text{ ist stückweise differenzierbar} \}.$$

**Lemma 2.1.3** Die kürzesten Verbindungskurven zwischen zwei Punkten in  $\mathbb{E}^2$  sind genau die Geradensegmente.

*Beweis.* Seien  $p, q \in \mathbb{E}^2$  und bilde nun durch geeignete euklidische Isometrien das Punktepaar  $(p, q)$  auf  $((0, 0), (0, l))$  ab. Dann ist nach Lemma 2.1.1 Die Länge aller Kurven in  $\Omega_{pq}$  unverändert und es gilt

$$L_e(c) = \int_0^1 \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt \geq \int_0^1 \sqrt{(y'(t))^2} dt \geq \int_0^1 |y'(t)| dt \geq \int_0^1 y'(t) dt = l$$

für alle Kurven  $c \in \Omega_{pq}$ . Das Minimum  $L_e(c) = l$  wird mit der Geraden angenommen. Ist umgekehrt  $c$  eine längenminimierende Kurve zwischen  $p$  und  $q$ , so gilt in der obigen Ungleichungskette Gleichheit an jeder Stelle, also  $x'(t) = 0$  und  $|y'(t)| = y'(t)$ , woraus wiederum folgt, dass  $c$  eine Gerade ist.  $\square$

**Satz 2.1.4** Auf  $\mathbb{E}^2$  definiere die Längenfunktion

$$d_e : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (p, q) \mapsto d_e(p, q) = \inf_{c \in \Omega_{pq}} L_e(c).$$

Dann wird  $(\mathbb{E}^2, d_e)$  zu einem metrischen Raum.

*Beweis.* Nach Lemma 2.1.3 gilt  $d_e(p, q) = \|p - q\|$ , womit die Behauptung unmittelbar folgt. Alternativ lässt sich die Behauptung auch konzeptionell zeigen. Dazu zeigen wir die erforderlichen Eigenschaften einer Metrik.

- (i) Für die Symmetrie beachte, dass für jede Kurve  $c : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $t \mapsto c(t)$  in  $\Omega_{pq}$  die Kurve  $\tilde{c} : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $t \mapsto c(1 - t)$  in  $\Omega_{qp}$  ist und dieselbe Länge besitzt, also  $d_e(q, p) \leq d(p, q)$ . Analog folgt aber auch die umgekehrte Ungleichung, insgesamt also die Symmetrie.
- (ii) Seien  $p, q, r \in \mathbb{R}^2$ . Dann gilt

$$\Omega_{rq} \circ \Omega_{pr} := \{ c_1 \circ c_2 \mid c_1 \in \Omega_{rq}, c_2 \in \Omega_{pr} \} \subseteq \Omega_{pq},$$

also auch  $d_e(p, q) \leq d_e(p, r) + d_e(r, q)$ .

- (iii) Für die Definitheit betrachte  $p = q \in \mathbb{R}^2$ . Dann verbindet der konstante Weg  $c_0 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $t \mapsto p$  die beiden und besitzt wegen  $\|c'(t)\| = 0$  für alle  $t$  Länge 0, also  $d_e(p, p) = 0$ . Ist hingegen  $p \neq q$ , so gilt nach Lemma 2.1.3, dass das Geradensegment  $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $t \mapsto (1 - t)p + tq$  den Abstand realisiert und Länge  $\|q - p\| > 0$  hat.  $\square$

- Definition 2.1.5** (i) Eine *Isometrie* eines metrischen Raums  $(M, d)$  ist eine bijektive Abbildung  $\phi : M \rightarrow M$  mit  $d(\phi(p), \phi(q)) = d(p, q)$  für alle  $p, q \in M$ . Die Isometrien von  $M$  bilden eine Gruppe  $\text{Isom}(M)$ .
- (ii)  $(M, d)$  heißt *homogen*, falls es für je zwei Punkte  $p, q \in M$  eine Isometrie  $\phi \in \text{Isom}(M)$  gibt mit  $\phi(p) = q$ .
- (iii)  $(M, d)$  heißt *2-Punkt-homogen*, falls es für je zwei Punktpaare  $(p_1, p_2), (q_1, q_2)$  mit  $d(p_1, p_2) = d(q_1, q_2)$  eine Isometrie  $\phi \in \text{Isom}(M)$  gibt mit  $\phi(p_1) = q_1$  und  $\phi(p_2) = q_2$ .

**Korollar 2.1.6** (i) *Translationen, Rotationen und Spiegelungen sind Isometrien von  $\mathbb{E}^2 = (\mathbb{R}^2, d_e)$ .*

(ii) *Die euklidische Ebene  $\mathbb{E}^2$  ist 2-Punkt-homogen. Insbesondere gilt*

$$\mathbb{E}^2 \cong \text{Isom}(\mathbb{E}^2) / \text{Stab}_{\text{Iso}(\mathbb{E}^2)}(0).$$

*Beweis.* (i) Folgt aus Lemma 2.1.1.

- (ii) Seien  $(p_1, p_2), (q_1, q_2)$  zwei Paare von Punkten in  $\mathbb{E}^2$ , ohne Einschränkung gelte  $q_1 = (0, 0)$  und  $q_2 = (0, \alpha)$ . Führe dann zunächst die Translation  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $v \mapsto v - p_1$  durch und erhalte  $T(p_1) = q_1 = 0$  und  $T(p_2) = p_2 - p_1$ . Führe anschließend eine Drehung  $D$  um  $(0, 0)$  durch mit  $D(p_2 - p_1) = (0, \alpha)$  und  $D(0) = 0$ .  $\square$

## 2.2 Zweidimensionale sphärische Geometrie

Die Sphäre mit Radius  $R > 0$  um  $0 \in \mathbb{R}^3$  ist definiert als

$$\mathbb{S}^2(R) := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = R^2\} \subseteq \mathbb{R}^3.$$

Es sei weiter für  $p, q \in \mathbb{S}^2(R)$

$$\Omega_{pq}(\mathbb{S}^2(R)) := \{c \in \Omega_{pq} \mid c(t) \in \mathbb{S}^2(R) \text{ für alle } t \in [0, 1]\}$$

Für  $c \in \Omega_{pq}(\mathbb{S}^2(R))$ ,  $c(t) = (x(t), y(t), z(t))$  sei die *sphärische Länge* definiert durch

$$L_s(c) := \int_0^1 \|c'(t)\| dt = \int_0^1 \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} dt.$$

Die zu ihr assoziierte Längenfunktion ist analog wie im Euklidischen definiert als

$$d_s : \mathbb{S}^2(R) \times \mathbb{S}^2(R) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (p, q) \mapsto d_s(p, q) = \inf_{c \in \Omega_{pq}(\mathbb{S}^2(R))} L_s(c).$$

**Lemma 2.2.1** *Die sphärische Länge einer differenzierbaren Kurve aus  $\mathbb{S}^2(R)$  ist invariant unter Rotationen von  $\mathbb{R}^3$ .*

*Beweis.* Sei  $D : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$  eine Rotation von  $\mathbb{R}^3$  um 0. Dann gilt

$$\langle Dx, Dx \rangle = \|Dx\|_e^2 = \|x\|_e^2 = \langle x, x \rangle,$$

da  $D$  orthogonal ist. Wegen der Linearität von  $D$  folgt außerdem  $(D \circ c(t))' = D \circ c'(t)$  und damit

$$\|(D \circ c(t))'\|_e = \|D \circ c'(t)\|_e = \|c'(t)\|_e,$$

woraus die Behauptung folgt. □

**Lemma 2.2.2** *Die kürzesten Verbindungen zwischen Punkten auf  $\mathbb{S}^2(R)$  sind gerade die Großkreise, also Schnitte von  $\mathbb{S}^2(R)$  mit 2-dimensionalen Untervektorräumen von  $\mathbb{R}^3$ .*

*Beweis.* Seien  $p, q \in \mathbb{S}^2(R)$  beliebige Punkte. Dann existiert eine Rotation von  $\mathbb{R}^3$ , die  $p$  auf  $p^* = (0, 0, R)$  und  $q$  auf  $q^* = (0, y, z)$  abbildet. Nach Lemma 2.2.1 genügt es also, die kürzeste Verbindung zwischen  $p^*$  und  $q^*$  zu finden. Wähle hierzu geographische Koordinaten  $\phi, \theta$  auf  $\mathbb{S}^2(R)$ . Damit können wir jede Kurve  $c \in \Omega_{p^*q^*}$  schreiben

$$c(t) = R \cdot \begin{pmatrix} \sin \theta(t) \cos \phi(t) \\ \sin \theta(t) \sin \phi(t) \\ \cos \theta(t) \end{pmatrix}$$

und damit

$$c'(t) = R \cdot \begin{pmatrix} \theta'(t) \cos \theta(t) \cos \phi(t) - \phi'(t) \sin \theta(t) \sin \phi(t) \\ \theta'(t) \cos \theta(t) \sin \phi(t) + \phi'(t) \sin \theta(t) \cos \phi(t) \\ -\theta'(t) \sin \theta(t) \end{pmatrix}$$

Also ist

$$\|c'(t)\|_e^2 = R^2((\theta'(t))^2 + (\phi'(t))^2 \sin^2 \theta(t))$$

und wir erhalten für die Länge von  $c$

$$L_s(c) = \int_0^1 \|c'(t)\|_e^2 dt = R \int_0^1 \sqrt{(\theta'(t))^2 + (\phi'(t))^2 \sin^2 \theta(t)} dt \geq R \int_0^1 \theta'(t) dt = R (\theta(1) - \theta(0)).$$

Das Großkreissegment zwischen  $p^*$  und  $q^*$  realisiert jedoch genau diese Länge. Für jede weitere Kurve  $\tilde{c}$  dieser Länge gilt Gleichheit an jeder Stelle, also insbesondere  $\tilde{\phi}'(t) = \phi'(t)$  für alle  $t \in [0, 1]$ , womit  $\tilde{c}$  ebenfalls ein Großkreis ist.  $\square$

**Satz 2.2.3**  $(\mathbb{S}^2(R), d_s)$  ist ein metrischer Raum (also ein Modell für die 2-dimensionale sphärische Geometrie).

*Beweis.* Übung (Aufgabe 6.1).

**Korollar 2.2.4** (i) Rotationen von  $\mathbb{R}^3$  eingeschränkt auf  $\mathbb{S}^2(R)$  sind Isometrien, d.h.  $\mathcal{O}(3) \subseteq \text{Isom}(\mathbb{S}^2(R))$ .

(ii)  $(\mathbb{S}^2(R), d_s)$  ist 2-Punkt-homogen.

*Beweis.* (i) Folgt aus Lemma 2.2.1.

(ii) Übung (wurde schon im Beweis von Lemma 2.2.2 benutzt): Sind  $(p_1, p_2)$  und  $(q_1, q_2)$  zwei Paare von Punkten auf  $\mathbb{S}^2(R)$ , so wende zunächst eine Rotation  $A \in \mathcal{O}(3)$  mit  $Ap_1 = q_1$  und anschließend eine Rotation  $B \in \text{Stab}_{\mathcal{O}(3)}(p_1 = q_1)$  mit  $B(Ap_2) = q_2$  an.  $\square$

## 2.3 Zweidimensionale hyperbolische Geometrie

Ziel soll es sein, auf der obere Halbebene  $\mathbb{H}^2 = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im}(z) > 0\}$  eine Längenmessung für stückweise differenzierbare Kurven (also eine Längenmetrik  $d_h$ ) zu definieren, sodass  $\text{Möb}(\mathbb{H}^2) \subseteq \text{Isom}(\mathbb{H}^2, d_h)$ . Dies führen wir konstruktiv durch. Sei dazu  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{SL}_2(\mathbb{R})$  und  $T_A$  die zugehörige Möbiustransformation

$$T_A : \mathbb{H}^2 \longrightarrow \mathbb{H}^2, \quad z \mapsto T_A(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

in  $\text{Möb}(\mathbb{H})$ . Sei weiter

$$\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{H}^2, \quad t \mapsto \gamma(t) = x(t) + iy(t)$$

eine differenzierbare Kurve in  $\mathbb{H}^2$  sowie

$$w(t) = T_A(\gamma(t)) = \frac{a\gamma(t) + b}{c\gamma(t) + d}$$

die Bildkurve. Dann gilt für Tangentialvektoren der Bildkurve

$$w'(t) = \frac{dw}{dt}(t) = \frac{dw}{d\gamma} \frac{d\gamma}{dt}(t) = \frac{a(c\gamma(t) + d) - (a\gamma(t) + b)c}{(c\gamma(t) + d)^2} \gamma'(t) = \frac{\gamma'(t)}{(c\gamma(t) + d)^2}$$

sowie für den Imaginärteil der Bildkurve

$$\operatorname{Im}(w(t)) = \frac{1}{2i}(w(t) - \overline{w(t)}) = \frac{1}{2i} \frac{\gamma(t) - \overline{\gamma(t)}}{|c\gamma(t) + d|^2} = \frac{\operatorname{Im}(\gamma(t))}{|c\gamma(t) + d|^2}$$

Dies motiviert die folgende Definition.

**Definition 2.3.1 (hyperbolische Längenmessung nach Poincaré)** Sei  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{H}^2$ ,  $t \mapsto \gamma(t) = x(t) + iy(t)$  eine differenzierbare Kurve. Dann heißt

$$L_h(\gamma) := \int_a^b \frac{\|\gamma'(t)\|_e}{\operatorname{Im}(\gamma(t))} dt = \int_a^b \frac{\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}}{y(t)} dt$$

hyperbolische Länge von  $\gamma$ .

**Lemma 2.3.2** Die hyperbolische Länge einer differenzierbaren Kurve  $z$  in  $\mathbb{H}^2$  ist invariant unter Möbiustransformationen von  $\operatorname{Möb}(\mathbb{H}^2)$ . Insbesondere gilt für alle  $A \in \operatorname{SL}_2(\mathbb{R})$  also  $L_h(T_A \circ z) = L_h(z)$ .

*Beweis.* Nach obigen Formeln gilt für  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \operatorname{SL}_2(\mathbb{R})$

$$\frac{\|(T_A \circ \gamma)'(t)\|_e}{\operatorname{Im}((T_A \circ \gamma)(t))} = \frac{\|w'(t)\|_e}{\operatorname{Im}(w(t))} = \frac{\|\gamma'(t)\|_e}{\|(c\gamma(t) + d)^2\|_e} \frac{|c\gamma(t) + d|^2}{\operatorname{Im}(\gamma(t))} = \frac{\|\gamma'(t)\|_e}{\operatorname{Im}(\gamma(t))},$$

für alle  $t \in [a, b]$ , es folgt also die Behauptung.

**Bemerkung 2.3.3** Die Definition der Länge von Kurven bewirkt, dass Vektoren derselben euklidischen Länge hyperbolisch länger sind, falls sie näher an der reellen Achse liegen. So wird beispielsweise die kürzeste Verbindung zwischen zwei Punkten, welche beide der reellen Achse nahe sind, nicht etwa durch eine horizontal verlaufende Kurve realisiert, sondern vielmehr durch einen nach oben ragenden Bogen. Wir werden später einsehen, dass die kürzesten Verbindungen, die sogenannten Geodätischen, gerade die Halbkreise sind.

Analog zur ebenen und sphärischen Geometrie definieren für  $p, q \in \mathbb{H}^2$

$$\Omega_{pq}(\mathbb{H}^2) := \{c \in \Omega_{pq} \mid c(t) \in \mathbb{H}^2 \text{ für alle } t \in [a, b]\}$$

sowie

$$d_h(p, q) := \inf_{c \in \Omega_{pq}(\mathbb{H}^2)} L_h(c).$$

**Satz 2.3.4**  $(\mathbb{H}^2, d_h)$  ist ein metrischer Raum, also ein Modell für die zweidimensionale hyperbolische Geometrie.

*Beweis.* Wir zeigen die erforderlichen Eigenschaften einer Metrik.

- (i) Aus früheren Argumentationen folgt mit  $\Omega_{pq} \cong \Omega_{qp}$  die Symmetrie  $d(p, q) = d(q, p)$  für alle  $p, q \in \mathbb{H}^2$ .
- (ii) Analog ist wegen  $\Omega_{rq}(\mathbb{H}^2) \circ \Omega_{pr}(\mathbb{H}^2) \subseteq \Omega_{pq}(\mathbb{H}^2)$  die Dreiecksungleichung  $d_h(p, q) \leq d_h(p, r) + d_h(r, q)$  für alle  $p, q, r \in \mathbb{H}^2$  erfüllt.
- (iii) Mit dem konstanten Weg folgt  $d_h(p, p) = 0$  für alle  $p \in \mathbb{H}^2$ . Es bleibt zu zeigen, dass für  $p \neq q \in \mathbb{H}^2$  folgt, dass  $d_h(p, q) > 0$ . Seien also  $p, q \in \mathbb{H}^2$ ,  $p \neq q$  und  $c \in \Omega_{pq}(\mathbb{H}^2)$ . Wähle einen euklidischen Ball  $B_\epsilon(p)$  um  $p$  mit Radius  $\epsilon$ , sodass  $B_\epsilon(p) \subseteq \mathbb{H}^2$  und  $q \notin B_\epsilon(p)$ . Da  $c$  stetig ist existiert nach dem Zwischenwertsatz ein (minimales)  $\delta \in [0, 1]$ , sodass  $c(\delta) \in \partial B_\epsilon(p)$  (und wegen der Minimalität  $c([0, \delta]) \subseteq \overline{B_\epsilon(p)}$ ). Weiter gilt  $\text{Im}(c(t)) \leq \text{Im}(p) + \epsilon$  für alle  $t \in [0, \delta]$  und es folgt

$$L_h(c) = \int_0^1 \frac{\|c'(t)\|_e}{\text{Im}(c(t))} dt \geq \int_0^\delta \frac{\|c'(t)\|_e}{\text{Im}(p) + \epsilon} dt \geq \frac{\epsilon}{\text{Im}(p) + \epsilon},$$

also

$$d_h(p, q) = \inf_{c \in \Omega_{pq}(\mathbb{H}^2)} L_h(c) \geq \frac{\epsilon}{\text{Im}(p) + \epsilon} > 0,$$

was zu zeigen war. □

**Erinnerung 2.3.5 (Gruppenoperationen)** Seien  $G$  eine Gruppe,  $X$  eine Menge sowie eine Gruppenoperation  $\cdot : G \times X \longrightarrow X$ ,  $(g, x) \mapsto g \cdot x$  gegeben.

- (i) Für  $x_0 \in X$  heißt  $G \cdot x_0 := \{g \cdot x_0 \mid g \in G\}$  Bahn von  $x_0$ .
- (ii)  $X$  heißt homogen, falls es nur eine Bahn gibt.
- (iii) Für  $x_0 \in X$  heißt  $G_{x_0} := \{g \in G \mid g \cdot x_0 = x_0\}$  Stabilisator von  $x_0$ .
- (iv) (Bahnsatz) Für  $x_0 \in X$  gilt  $G \cdot x_0 \cong G/G_{x_0}$ .

*Beweis von (iv)* Wir geben die Bijektion explizit an. Definiere

$$\phi : G/G_{x_0} \longrightarrow G \cdot x_0, \quad g G_{x_0} \mapsto g \cdot x_0.$$

Dann ist  $\phi$  offensichtlich surjektiv und für  $g, h \in G$  mit  $g \cdot x_0 = h \cdot x_0$  gilt  $(h^{-1}g) \cdot x_0 = x_0$ , also  $h^{-1}g =: k \in G_{x_0}$ . Dann folgt aber

$$g G_{x_0} = hk G_{x_0} = h G_{x_0},$$

$\phi$  ist also injektiv, was den Satz beweist. □

**Korollar 2.3.6** *Es gilt:*

- (i)  $\text{Möb}(\mathbb{H}^2) \subseteq \text{Isom}(\mathbb{H}^2, d_h)$ .
- (ii)  $(\mathbb{H}^2, d_h)$  *is 2-Punkt-homogen*.

*Beweis.* (i) Für  $T_A$  mit  $A \in \text{SL}_2(\mathbb{R})$  folgt die Aussage aus der Definition von  $d_h$  und Lemma 2.3.2. Es bleibt noch zu zeigen, dass  $\sigma(z) := -\bar{z}$  eine hyperbolische Isometrie ist. Seien also  $p, q \in \mathbb{H}^2$  und  $c \in \Omega_{pq}(\mathbb{H}^2)$  mit  $c(t) = x(t) + iy(t)$ . Dann gilt

$$\frac{\|(\sigma \circ c)'(t)\|_e}{\text{Im}((\sigma \circ c)(t))} = \frac{\| -x'(t) + iy'(t) \|_e}{\text{Im}(-x(t) + iy(t))} = \frac{\|x'(t) + iy'(t)\|_e}{y(t)} = \frac{\|c'(t)\|_e}{\text{Im}(c(t))},$$

also

$$d_h(\sigma(p), \sigma(q)) = \inf_{c \in \Omega_{pq}(\mathbb{H}^2)} \left\{ \int_a^b \frac{\|(\sigma \circ c)'(t)\|_e}{\text{Im}((\sigma \circ c)(t))} dt \right\} = \inf_{c \in \Omega_{pq}(\mathbb{H}^2)} \left\{ \int_a^b \frac{\|c'(t)\|_e}{\text{Im}(c(t))} dt \right\} = d_h(p, q),$$

womit  $\sigma$  eine Isometrie ist.

- (ii) Wir zeigen lediglich, dass  $(\mathbb{H}^2, d_h)$  homogen bzgl.  $\text{SL}_2(\mathbb{R})$  ist - die 2-Punkt-Homogenität verbleibt als Übung (Aufgabe 6.2). Wir haben eine Gruppenoperation

$$\cdot : \text{SL}_2(\mathbb{R}) \times \mathbb{H}^2 \longrightarrow \mathbb{H}^2, \quad \left( A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, z \right) \mapsto A \cdot z := T_A(z) = \frac{az + b}{cz + d}.$$

Dann heißt Homogenität von  $\mathbb{H}^2$  bzgl.  $\text{SL}_2(\mathbb{R})$  gerade Transitivität der Gruppenoperation, dass es also nur eine Bahn gibt. Hierfür zeigen wir, dass für die Bahn von  $i$  gilt  $\text{SL}_2(\mathbb{R}) \cdot i = \mathbb{H}^2$ . Aus der Disjunktheit der Bahnen folgt dann die Behauptung. Für  $z = x + iy \in \mathbb{H}^2$  wähle

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{y} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{y}} \end{pmatrix}$$

Dann gilt

$$A \cdot i = \left( \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{y} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{y}} \end{pmatrix} \right) \cdot i = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot (iy) = x + iy,$$

woraus nun die Homogenität von  $\mathbb{H}^2$  folgt. □

**Beispiel 2.3.7** Wir wollen mithilfe des Bahnsatzes eine algebraische Beschreibung der Halbebene erhalten. Nach Korollar 2.3.6 gilt  $\text{SL}_2(\mathbb{R}) \cdot i = \mathbb{H}^2$ . Um den Stabilisator von  $i$  zu bestimmen, betrachte für  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{SL}_2(\mathbb{R})$

$$i = A \cdot i = T_A(i) = \frac{ai + b}{ci + d} \iff (ad)i = -(b + c) \iff a = d, b = -c.$$



Mit  $1 = ad - bc = a^2 + b^2$  erhalten wir

$$(\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}))_i \cong \left\{ \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \mid \theta \in [0, 2\pi] \right\} \cong \mathrm{SO}(2)$$

Damit erhalten wir die Darstellung

$$\mathbb{H}^2 = \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \cdot i \cong \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) / (\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}))_i = \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) / \mathrm{SO}(2).$$

Eine analoge Darstellung erhalten wir auch in der ebenen und sphärischen Geometrie:

$$\mathbb{E}^2 \cong \mathrm{O}(2) \ltimes \mathbb{R}^2 / \mathrm{O}(2),$$

$$\mathbb{S}^2 \cong \mathrm{SO}(3) / \mathrm{SO}(2)$$

wobei die Stabilisatoren des Ursprungs bzw. des Nordpols herangezogen wurden.

## 2.4 Kürzeste Verbindungen in $(\mathbb{H}^2, d_h)$

**Satz 2.4.1** *Kürzeste Verbindungen bzw. Geodätische zwischen Punkten in  $\mathbb{H}^2$  sind geeignet parametrisierte euklidische Halbkreise mit Zentrum auf der reellen Achse oder euklidische Halbgeraden parallel zur imaginären Achse.*

*Beweis.* Seien  $p, q \in \mathbb{H}^2$ ,  $p \neq q$ . Sei  $K$  der eindeutige euklidische Kreis mit Zentrum auf der reellen Achse bzw. die eindeutige euklidische Halbgerade orthogonal zur reellen Achse durch  $p, q$ . Nach Satz 1.3.6 und 1.7.3 existiert eine Möbiustransformation  $T_A \in \mathrm{Möb}(\mathbb{H}^2)$  mit  $A \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ , welche  $K$  auf die imaginäre Achse abbildet.  $T_A$  ist eine Isometrie von  $(\mathbb{H}^2, d_h)$ , lässt also insbesondere Längen und Abstände invariant. Wir können also ohne Einschränkung  $p = ia$  und  $q = ib$  für  $b > a \in \mathbb{R}$  annehmen. Sei nun

$$c : [\alpha, \beta] \longrightarrow \mathbb{H}^2, \quad t \mapsto c(t) = x(t) + iy(t)$$

eine differenzierbare Kurve mit  $c(\alpha) = ia$  und  $c(\beta) = ib$ . Dann gilt für die hyperbolische Länge von  $c$

$$L_h(c) = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}}{y(t)} dt \geq \int_{\alpha}^{\beta} \frac{|y'(t)|}{y(t)} dt \geq \int_{\alpha}^{\beta} \frac{y'(t)}{y(t)} dt = [\ln y(t)]_{\alpha}^{\beta} = \ln \frac{b}{a}.$$

Diese Länge wird aber gerade durch das Geradensegment

$$g : [\ln a, \ln b] \longrightarrow \mathbb{H}^2, \quad t \mapsto e^t i$$

realisiert. Für jede weitere minimale Kurve gilt Gleichheit an jeder Stelle, also insbesondere  $x'(t) = 0$  für  $t \in [\alpha, \beta]$ , womit diese auch ein geeignet parametrisierter Teil der imaginären Achse als Bild besitzt.  $\square$

**Bemerkung 2.4.2** (i) *Isometrien bilden Geodätische auf Geodätische ab.*

(ii) *Ursprünglich sind Geraden bzw. Geodätische in einem metrischen Raum  $(M, d)$  definiert als abstandserhaltende Abbildungen  $g : \mathbb{R} \longrightarrow M$ ,  $t \mapsto g(t)$ , das heißt mit*

$$d(g(t_1), g(t_2)) = d_{\mathbb{R}}(t_1, t_2) = |t_2 - t_1|$$

*für alle  $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$  (Parametrisierung nach Bogenlänge). Eine Parametrisierung der imaginären Achse (diese ist eine Geodätische) nach Bogenlänge ist gegeben durch*

$$g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{H}^2, \quad t \mapsto e^t i = \frac{e^{\frac{t}{2}} i + 0}{0i + e^{-\frac{t}{2}}} = T_{A_t}(i), \quad A_t = \begin{pmatrix} e^{\frac{t}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{t}{2}} \end{pmatrix},$$

*denn es gilt*

$$d_h(g(t_1), g(t_2)) = d_h(e^{t_1} i, e^{t_2} i) = \ln e^{t_2} - \ln e^{t_1} = t_2 - t_1$$

*für alle  $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ ,  $t_1 < t_2$ .*

(iii)  $(\mathbb{H}^2, d_h)$  *ist eine zweidimensionale, nichteuklidische Geometrie, das heißt das Parallelenaxiom gilt nicht.*

**Satz 2.4.3 (Explizite Abstandsformel)** *Seien  $z, w \in \mathbb{H}^2$ ,  $z \neq w$ . Die kürzeste Verbindung zwischen  $z$  und  $w$  habe Endpunkte  $z^*, w^*$  auf der reellen Achse. Dann gilt*

$$d_h(z, w) = \ln[z, z^*; w, w^*].$$

*Beweis.* Sei  $A \in \text{SL}_2(\mathbb{R})$  sodass die Möbiustransformation  $T_A \in \text{Möb}(\mathbb{H}^2)$  die Geodätische zwischen  $z$  und  $w$  auf die imaginäre Achse abbildet. Nach eventuellem Anwenden weiterer Möbiustransformationen der Form

$$s : \mathbb{H}^2 \longrightarrow \mathbb{H}^2, \quad \zeta \mapsto s(\zeta) = \lambda \zeta = \frac{\sqrt{\lambda} \zeta + 0}{0\zeta + \frac{1}{\sqrt{\lambda}}} = T_{S_\lambda}(\zeta), \quad S_\lambda = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \end{pmatrix} \in \text{SL}_2(\mathbb{R})$$

für  $\lambda > 0$  (Streckung) und

$$v : \mathbb{H}^2 \longrightarrow \mathbb{H}^2, \quad \zeta \mapsto v(\zeta) = -\frac{1}{\zeta} = \frac{0\zeta - 1}{\zeta + 0} = T_V(\zeta), \quad V = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$$

(Vertauschung von 0 und  $\infty$ ) kann man annehmen, dass

$$T_A(z) = i, \quad T_A(w) = ri, \quad T_A(z^*) = 0, \quad T_A(w^*) = \infty$$

für ein  $r > 1$ . Nach dem Beweis von Satz 2.4.1 erhalten wir

$$d_h(z, w) = d_h(T_A(z), T_A(w)) = d_h(i, ri) = \ln \frac{ri}{i} = \ln r.$$

Andererseits gilt für das Doppelverhältnis

$$[z, z^*; w, w^*] = [T_A(z), T_A(z^*); T_A(w), T_A(w^*)] = [i, 0; ri, \infty] = \frac{(i - \infty)(0 - ri)}{(i - 0)(ri - \infty)} = r,$$

es folgt also die Behauptung.  $\square$

**Satz 2.4.4 (Weitere explizite Abstandsformeln)** Für  $z, w \in \mathbb{H}^2$  gilt

(i)

$$d_h(z, w) = \ln \frac{|z - \bar{w}| + |z - w|}{|z - \bar{w}| - |z - w|}$$

(ii)

$$\cosh(d_h(z, w)) = 1 + \frac{|z - w|^2}{2\mathrm{Im}(z)\mathrm{Im}(w)}.$$

(iii)

$$\sinh\left(\frac{1}{2}d_h(z, w)\right) = \frac{|z - w|}{2\sqrt{\mathrm{Im}(z)\mathrm{Im}(w)}}.$$

(iv)

$$\cosh\left(\frac{1}{2}d_h(z, w)\right) = \frac{|z - \bar{w}|}{2\sqrt{\mathrm{Im}(z)\mathrm{Im}(w)}}.$$

(v)

$$\tanh\left(\frac{1}{2}d_h(z, w)\right) = \frac{|z - w|}{|z - \bar{w}|}.$$

*Beweis.* Wir beweisen exemplarisch (iii). Der Rest folgt durch Umformen (Übung, Aufgabe 7.1).

Für die linke Seite gilt für eine Möbiustransformation  $T_A$  mit  $A \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$

$$\sinh\left(\frac{1}{2}d_h(z, w)\right) = \sinh\left(\frac{1}{2}d_h(T_A(z), T_A(w))\right).$$

Aber auch die rechte Seite ist invariant unter Möbiustransformationen, denn ist  $A$  gegeben durch

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \text{ so gilt}$$

$$\begin{aligned} |T_A(z) - T_A(w)| &= \left| \frac{az + b}{cz + d} - \frac{aw + b}{cw + d} \right| = \left| \frac{(az + b)(cw + d) - (aw + b)(cz + d)}{(cz + d)(cw + d)} \right| \\ &= \left| \frac{azd + bcw - awd - bcw}{(cz + d)(cw + d)} \right| \\ &= \frac{|z - w|}{|cz + d||cw + d|} \end{aligned}$$

und mit

$$\operatorname{Im}(T_A(z)) = \operatorname{Im}\left(\frac{az + b}{cz + d}\right) = \operatorname{Im}\left(\frac{(az + b)(c\bar{z} + d)}{|cz + d|^2}\right) = \frac{\operatorname{Im}(z)}{|cz + d|^2}$$

schließlich

$$\frac{|T_A(z) - T_A(w)|}{2\sqrt{\operatorname{Im}(T_A(z))\operatorname{Im}(T_A(w))}} = \frac{|z - w|}{2|cz + d||cw + d|\sqrt{\frac{\operatorname{Im}(z)}{|cz + d|^2} \frac{\operatorname{Im}(w)}{|cw + d|^2}}} = \frac{|z - w|}{2\sqrt{\operatorname{Im}(z)\operatorname{Im}(w)}},$$

also die gewünschte Invarianz. Sei also  $L$  die eindeutige Geodätische durch  $z$  und  $w$  und  $T_0 \in \operatorname{Möb}(\mathbb{H}^2)$ , welche  $L$  auf die imaginäre Achse abbildet. Dann genügt es nach obigen, die Aussage für  $z = ia$ ,  $w = ib$  für  $b > a \in \mathbb{R}$  zu zeigen. es gilt aber  $d_h(ia, ib) = \ln \frac{b}{a}$  und

$$\sinh\left(\frac{1}{2}d_h(ia, ib)\right) = \frac{1}{2}\left(e^{\ln\sqrt{\frac{b}{a}}} - e^{-\ln\sqrt{\frac{b}{a}}}\right) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{b}{a}} - \sqrt{\frac{a}{b}}\right) = \frac{1}{2}\frac{b - a}{\sqrt{ab}} = \frac{|z - w|}{2\sqrt{\operatorname{Im}(z)\operatorname{Im}(w)}},$$

was zu zeigen war. □

## 2.5 Alle Isometrien von $(\mathbb{H}^2, d_h)$

Wir haben in Satz 1.7.3 bzw. Aufgabe 3.4 bereits gesehen:

$$\operatorname{Möb}(\mathbb{H}^2) \cong \operatorname{PSL}_2(\mathbb{R}) \cup (\operatorname{PSL}_2(\mathbb{R}) \circ \sigma).$$

Korollar 2.11 besagte  $\operatorname{Möb}(\mathbb{H}^2) \subseteq \operatorname{Isom}(\mathbb{H}^2, d_h)$ . Wir zeigen nun, dass die Möbiustransformationen bereits alle Isometrien der Halbebene sind.

**Satz 2.5.1** *Es gilt  $\operatorname{Isom}(\mathbb{H}^2, d_h) = \operatorname{Möb}(\mathbb{H}^2)$ .*

*Beweis.* Es ist noch  $\operatorname{Isom}(\mathbb{H}^2, d_h) \subseteq \operatorname{Möb}(\mathbb{H}^2)$  zu zeigen. Sei also  $\phi$  eine beliebige Isometrie von  $(\mathbb{H}^2, d_h)$ , das heißt für alle  $z, w \in \mathbb{H}^2$  gilt  $d_h(\phi(z), \phi(w)) = d_h(z, w)$ . Wir wissen bereits, dass  $\phi$

Geodätische auf solche abbildet. Die imaginäre Achse  $I$  ist eine hyperbolische Geodätische,  $\phi(I)$  also ebenfalls. Dann existiert jedoch eine Möbiustransformation  $m \in \text{Möb}(\mathbb{H}^2)$  mit  $m(\phi(I)) = I$ . Nach weiterem Anwenden von Möbiustransformationen der Gestalt  $z \mapsto \lambda z$  für ein  $\lambda > 0$  sowie  $z \mapsto \frac{1}{z}$  gilt ohne Einschränkung  $(m \circ \phi)(i) = i$  sowie  $(m \circ \phi)([i, \infty)) = [i, \infty)$  und  $(m \circ \phi)((0, i]) = (0, i]$ . Da  $m, \phi$  Isometrien sind, wird  $I$  also von  $m \circ \phi$  punktweise festgehalten. Sei nun  $z = x + iy \in \mathbb{H}^2$  ein beliebiger Punkt der Halbebene sowie  $w := (m \circ \phi)(z) = u + iv$ . Nach Satz 2.13(iii) folgt dann

$$\frac{|z - it|}{2\sqrt{\text{Im}(z)\text{Im}(it)}} = d_h(z, it) = d_h((m \circ \phi)(z), (m \circ \phi)(it)) = d_h(w, it) = \frac{|w - it|}{2\sqrt{\text{Im}(w)\text{Im}(it)}}.$$

also

$$\frac{|x + i(y - t)|}{2\sqrt{yt}} = \frac{|u + i(v - t)|}{2\sqrt{vt}}$$

und schließlich

$$\frac{(x^2 + (y - t)^2)v}{t^2} = \frac{(u^2 + (v - t)^2)y}{t^2}$$

Für  $t \rightarrow \infty$  folgt  $y = v$  und damit auch  $x^2 = u^2$ . Letzteres impliziert  $x = \pm u$ .

**Fall (a)** Gilt  $x = u$ , so ist  $(m \circ \phi)(z) = w = u + iv = x + iy = z$ , wegen der Stetigkeit von  $(m \circ \phi)$  also bereits  $m \circ \phi = \text{id}$ . Damit ist  $\phi = m^{-1}$  eine Möbiustransformation.

**Fall (b)** Gilt  $x = -u$ , so ist  $(m \circ \phi)(z) = w = u + iv = -x + iy = -\bar{z} = \sigma(z)$  und wegen der Stetigkeit wiederum  $m \circ \phi = \sigma$ . Damit ist auch in diesem Fall  $\phi = m^{-1} \circ \sigma$  eine Möbiustransformation und es folgt die Behauptung.  $\square$

## 2.6 Das Einheitskreismodell der hyperbolischen Geometrie

Betrachte die Einheitskreisscheibe  $\mathbb{D}^2 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\} \subseteq \mathbb{C}$ . Erinnerung: Die Möbiustransformation

$$m : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad z \mapsto \frac{iz + 1}{z + i}$$

bildet die obere Halbebene  $\mathbb{H}^2$  auf  $\mathbb{D}^2$  ab. Insbesondere bildet  $m$  auch  $\overline{\mathbb{R}}$  auf  $\mathbb{S}^1$  ab.

**Definition 2.6.1** Für eine Kurve  $c : [a, b] \longrightarrow \mathbb{D}^2$  mit  $c(t) = x(t) + iy(t)$  definieren wir die hyperbolische Längenmessung in  $\mathbb{D}^2$  durch

$$L_h^*(c) := \int_a^b \frac{2\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}}{1 - ((x(t))^2 + (y(t))^2)} dt.$$

Mit der bereits bekannten Notation

$$\Omega_{pq}(\mathbb{D}^2) := \{c \in \Omega_{pq} \mid c(t) \in \mathbb{D}^2 \text{ für alle } t \in [a, b]\}$$

erhalten wir durch

$$d_h^* : \mathbb{D}^2 \times \mathbb{D}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (p, q) \mapsto d_h^*(p, q) := \inf_{c \in \Omega_{pq}(\mathbb{D}^2)} L_h^*(c)$$

eine Längenmetrik auf  $\mathbb{D}^2$ .

**Bemerkung 2.6.2** Die Punkte in  $\mathbb{S}^1$ , dem "Rand" von  $\mathbb{D}^2$  sind gerade dadurch charakterisiert, dass sie unendlichen Abstand von allen anderen Punkten in  $\mathbb{D}^2$  besitzen. Wir bezeichnen daher  $\mathbb{S}^1$  auch als den Rand im Unendlichen von  $\mathbb{D}^2$ . Analog ist  $\overline{\mathbb{R}}$  der Rand im Unendlichen von  $\mathbb{H}^2$ .

## 2.7 Riemannsche Metriken und Winkel

**Definition 2.7.1** Sei  $U \subseteq \mathbb{R}^2$  offen und  $\text{Sym}(2)$  die Gruppe der positiv definiten, symmetrischen, reellen  $2 \times 2$ -Matrizen. Dann ist eine *Riemannsche Metrik*  $g$  auf  $U$  eine Abbildung

$$g : U \longrightarrow \text{Sym}(2), \quad p = (x, y) \mapsto g(p) = \begin{pmatrix} g_{11}(x, y) & g_{12}(x, y) \\ g_{21}(x, y) & g_{22}(x, y) \end{pmatrix},$$

wobei die Funktionen  $g_{ij}$  differenzierbar sind. Dann definiert  $g(p)$  ein Skalarprodukt auf  $T_p U = \{p\} \times \mathbb{R}^2 \cong \mathbb{R}^2$ . Damit haben wir eine Längen- und Winkelmessung auf  $T_p U$  gegeben: für  $u, v \in T_p U$  gilt

$$\|u\|_p := \sqrt{g(p)(u, u)} = \sqrt{u^T g(p) u}, \quad \cos \angle(u, v) := \frac{\sqrt{g(p)(u, v)}}{\|u\|_p \|v\|_p}.$$

Für eine differenzierbare Kurve  $c : [a, b] \longrightarrow U$  gilt  $c'(t) \in T_{c(t)} U$  und mit

$$L_g(c) = \int_a^b \sqrt{g(c(t))(c'(t), c'(t))} \, dt = \int_a^b \|c'(t)\|_{c(t)} \, dt$$

einen Längenbegriff für differenzierbare Kurven.

**Beispiel 2.7.2** (i) Die euklidische Metrik auf  $\mathbb{R}^2$  ist gegeben durch die konstante Riemannsche Metrik

$$g(p) = g(x, y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(ii) Die hyperbolische Metrik auf  $\mathbb{H}^2$  ist für  $(x, y) \in \mathbb{H}^2$  gegeben durch

$$g(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{1}{y^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{y^2} \end{pmatrix} = \frac{1}{y^2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(iii) Die hyperbolische Metrik auf  $\mathbb{D}^2$  ist für  $z \in \mathbb{D}^2$  gegeben durch

$$g(z) = \begin{pmatrix} \frac{4}{(1-|z|^2)^2} & 0 \\ 0 & \frac{4}{(1-|z|^2)^2} \end{pmatrix} = \frac{4}{(1-|z|^2)^2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Offenbar unterscheiden sich die beiden hyperbolischen Metriken von der euklidischen nur um einen konformen Faktor.

**Definition 2.7.3** Der Riemannsche Winkel zwischen zwei sich schneidenden Kurven ist der Winkel zwischen den Tangentialvektoren am Schnittpunkt.

**Proposition 2.7.4** Der Riemannsche Winkel zwischen zwei sich schneidenden Geodätischen in  $\mathbb{D}^2$  oder  $\mathbb{H}^2$  stimmt mit dem euklidischen Winkel überein. (Ohne Beweis.)

## 2.8 Der hyperbolische Flächeninhalt

Der hyperbolische Flächeninhalt einer Teilmenge  $A \subseteq \mathbb{H}^2$  ist definiert als

$$\mu(A) := \int_A \frac{1}{y^2} \, dx dy,$$

falls das Integral existiert.

**Satz 2.8.1** Der hyperbolische Flächeninhalt ist invariant unter Isometrien.

*Beweis.* Nach Satz 2.5.1 und Korollar 1.7.4 genügt es zu zeigen, dass für  $T \in \text{PSL}_2(\mathbb{R})$  gilt

$$\mu(T(A)) = \mu(A)$$

für alle Teilmengen  $A \subseteq \mathbb{H}^2$  (denn der Flächeninhalt ist invariant unter  $\sigma$ ). Wir erinnern uns an den Transformationssatz aus der Analysis: Für einen Homöomorphismus  $\phi$  gilt

$$\int_{\phi(U)} f(y) dy = \int_U f(\phi(x)) |\det D\phi(X)| \, dx.$$

Schreibe nun

$$T(z = x + iy) = \frac{az + b}{cz + d} = \frac{ax + b + iay}{cx + d + icy}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{(ax + b + iay)(cx + d - icy)}{(cx + d)^2 + (cy)^2} \\
&= \frac{(ax + b)(cx + d) + acy^2 + i(ay(cx + d) - cy(ax + b))}{(cx + d)^2 + (cy)^2} \\
&= \frac{(ax + b)(cx + d) + acy^2}{(cx + d)^2 + (cy)^2} + i \frac{ay(cx + d) - cy(ax + b)}{(cx + d)^2 + (cy)^2} \\
&= \frac{acx^2 + adx + bcx + acy^2 + bd}{(cx + d)^2 + c^2y^2} + i \frac{y}{(cx + d)^2 + c^2y^2}
\end{aligned}$$

Fasse  $T$  also als Abbildung

$$T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad (x, y) \mapsto (T_1(x, y), T_2(x, y)) = \left( \frac{(ax + b)(cx + d) + acxy}{(cx + d)^2 + (cy)^2}, \frac{y}{(cx + d)^2 + (cy)^2} \right)$$

auf. Für die Jacobimatrix gilt

$$DT(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial T_1}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial T_1}{\partial y}(x, y) \\ \frac{\partial T_2}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial T_2}{\partial y}(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{(cx+d)^2 - c^2y^2}{((cx+d)^2 + c^2y^2)^2} & \frac{2cy(cx+d)}{((cx+d)^2 + c^2y^2)^2} \\ \frac{-2cy(cx+d)}{((cx+d)^2 + c^2y^2)^2} & \frac{(cx+d)^2 - c^2y^2}{((cx+d)^2 + c^2y^2)^2} \end{pmatrix},$$

also

$$\det DT(x, y) = \frac{1}{((cx + d)^2 + c^2y^2)^2}.$$

Mit  $h(x, y) = \frac{1}{y^2}$  folgt wegen

$$(h \circ T)(x, y) = \frac{((cx + d)^2 + c^2y^2)^2}{y^2}$$

schließlich

$$\begin{aligned}
\mu(T(A)) &= \int_{T(A)} \frac{1}{y^2} \, dx dy \\
&= \int_A (h \circ T)(x, y) \, |\det DT(x, y)| \, dx dy \\
&= \int_A \frac{((cx + d)^2 + c^2y^2)^2}{y^2} \frac{1}{((cx + d)^2 + c^2y^2)^2} \, dx dy \\
&= \int_A \frac{1}{y^2} \, dx dy \\
&= \mu(A),
\end{aligned}$$

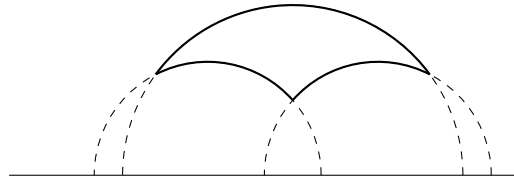
was zu zeigen war. □

**Definition 2.8.2** Ein *hyperbolisches Polygon*  $P$  mit  $n$  Seiten ist ein von  $n$  Geodätischen beschränkte Teilmenge von  $\overline{\mathbb{H}}^2 = \mathbb{H}^2 \cup \overline{\mathbb{R}}$  bzw. von  $\overline{\mathbb{D}}^2 = \mathbb{D} \cup \mathbb{S}^1$ . Schneiden sich zwei der Geodätischen in einem Punkt  $S$ , so heißt dieser Schnittpunkt *Ecke* von  $P$ . Beachte: Ecken im Rand im Unendlichen sind erlaubt (während es für Seiten nicht erlaubt ist).

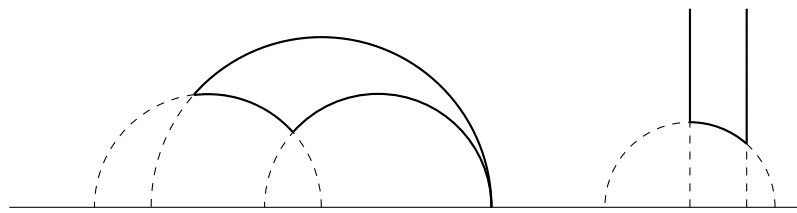
**Beispiel 2.8.3** Im folgenden wollen wir hyperbolischen Dreiecke (3-Gone) diskutieren. Dabei unterscheiden wir, wie viele der 3 Ecken auf dem Rand im Unendlichen liegen.



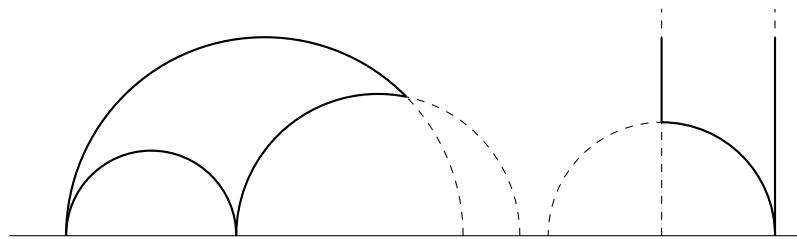
- (i) Sind keine Ecken im Unendlichen, so haben Dreiecke die Gestalt



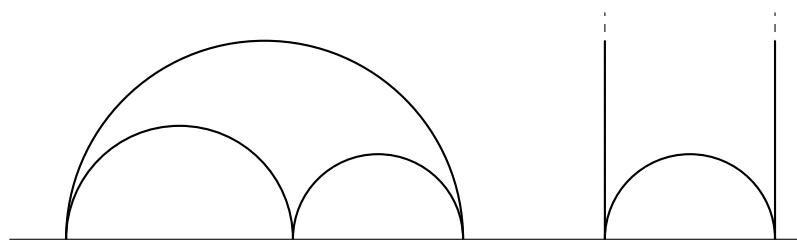
- (ii) Ist eine Ecke auf dem Rand im Unendlichen, so erhalten wir Dreiecke der Gestalt



- (iii) Sind zwei Randpunkte im Unendlichen, so erhalten wir



- (iv) Sind letztlich alle drei Ecken im Rand im Unendlichen, so ergeben sich Bilder



**Satz 2.8.4 (Satz von Gauß-Bonnet für hyperbolische Dreiecke)** *Der Flächeninhalt eines hyperbolischen Dreiecks ist allein durch die Winkel bestimmt. Genauer gilt für ein Dreieck  $\Delta$  mit Winkeln  $\alpha, \beta, \gamma$  die Gleichung*

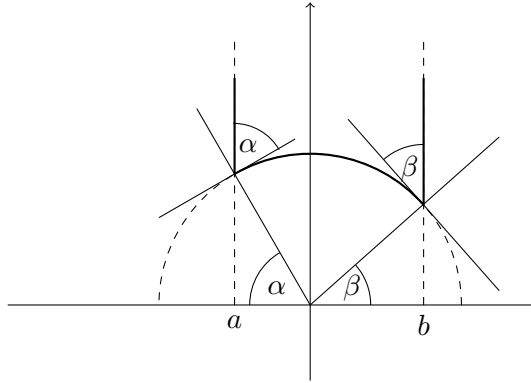
$$\mu(A) = \pi - \alpha - \beta - \gamma,$$

*also insbesondere  $\alpha + \beta + \gamma < \pi$ .*

*Beweis.* Wir unterscheiden zwei Fälle:

**Fall (a)** Es gibt eine Ecke  $E$  von  $\Delta$  im Rand  $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ . Nach Anwendung einer Möbiustransfor-

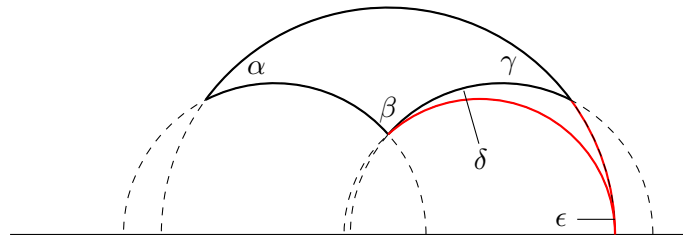
mation gilt ohne Einschränkung  $E = \infty$ . Nach Anwenden von  $z \mapsto z + k$  für ein  $k \in \mathbb{R}$  und  $z \mapsto \lambda z$  für ein  $\lambda \in \mathbb{R}$  liegt die Seite  $c$  auf  $\mathbb{S}^1$ . Dann erhalten wir folgendes Bild:



Für den Flächeninhalt gilt dann mit  $b = \cos \beta$ ,  $a = \cos(\pi - \alpha)$

$$\begin{aligned}
 \mu(A) &= \int_{\Delta} \frac{1}{y^2} dx dy \\
 &= \int_a^b \int_{\sqrt{1-x^2}}^{\infty} \frac{1}{y^2} dx dy \\
 &= \int_a^b \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx \\
 &= \int_{\pi-\alpha}^{\beta} \frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 \theta}} (-\sin \theta) d\theta \\
 &= -(\beta - (\pi - \alpha)) \\
 &= \pi - \alpha - \beta - \gamma.
 \end{aligned}$$

**Fall (b)** Es sei nun keine Ecke auf dem Rand im Unendlichen. Durch das Verlängern einer Seite bis auf den Rand erhalten wir zwei neue Dreiecke  $\Delta_1$  und  $\Delta_2$  wie abgebildet:



Dabei ist  $\Delta_1$  das von den Winkeln  $\alpha, \beta + \delta, \epsilon$  und  $\Delta_2$  das von den Winkeln  $\delta, \pi - \gamma, \epsilon$  Dreieck und beide haben eine Ecke im Rand im Unendlichen. Mit Fall (a) folgt dann

$$\mu(\Delta) = \mu(\Delta_1) - \mu(\Delta_2) = (\pi - \alpha - (\beta + \delta)) - (\pi - \delta - (\pi - \gamma)) = \pi - \alpha - \beta - \gamma,$$

was zu zeigen war. □

## 2.9 Trigonometrie der hyperbolischen Ebene

Erinnerung: Im Euklidischen haben wir folgende Identitäten für ein Dreieck  $\Delta$  mit Winkeln  $\alpha, \beta, \gamma$  und Seiten  $a, b, c$  gegenüber von  $\alpha, \beta, \gamma$ :

(i) *Sinussatz*: Es gilt

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}.$$

(ii) *Kosinussatz*: Es gilt

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$

(für die Beweise Siehe Aufgabe 1.1). Im Hyperbolischen gelten ähnliche Beziehungen.

**Satz 2.9.1** Sei  $\Delta$  ein hyperbolisches Dreieck mit Seiten  $a, b, c$  und Winkel  $\alpha, \beta, \gamma$ .

(i) *Sinussatz*: Es gilt

$$\frac{\sinh a}{\sin \alpha} = \frac{\sinh b}{\sin \beta} = \frac{\sinh c}{\sin \gamma}.$$

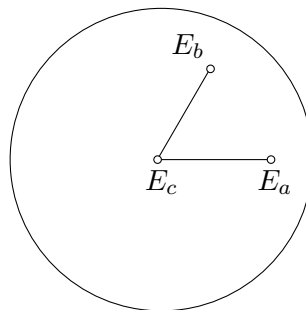
(ii) 1. *Kosinussatz*: Es gilt

$$\cos \gamma = \frac{\cosh a \cosh b - \cosh c}{\sinh a \sinh b}$$

(iii) 2. *Kosinussatz*: Es gilt

$$\cosh c = \frac{\cos \alpha \cos \beta + \cos \gamma}{\sin \alpha \sin \beta}.$$

*Beweis.* (ii) Wir benutzen das Einheitskreismodell. Seien  $E_a, E_b$  und  $E_c$  die entsprechenden Ecken gegenüber von  $a, b$  und  $c$ . Ohne Einschränkung sieht  $\Delta$  aus wie folgt:



also  $E_c = 0$ ,  $\operatorname{Im}(E_a) = 0$  und  $\operatorname{Re}(E_a) > 0$ . Wir benutzen die aus der Übung bekannte Formel

$$d_h^*(0, r) = \ln \frac{1+r}{1-r}$$

für  $0 < r < 1$ . Da

$$\tanh x = 1 - \frac{2}{e^{2x} + 1}$$

können wir schreiben

$$E_a = \tanh \frac{b}{2}, \quad E_b = e^{i\gamma} \tanh \frac{a}{2},$$

wobei wir die Kurzschreibweisen

$$b = d_h^*(0, E_a), \quad a = d_h^*(0, E_b)$$

benutzen. Weiter ist

$$\begin{aligned} \cosh c &= \cosh(d_h^*(E_a, E_b)) \\ &= 2 \sinh \left( \frac{1}{2} d_h^*(E_a, E_b) \right)^2 + 1 \\ &= 2 \frac{|E_a - E_b|^2}{(1 - |E_a|^2)(1 - |E_b|^2)} + 1. \end{aligned}$$

Die Gültigkeit der letzten Gleichung macht man sich dadurch klar, dass sie für  $E_a = 0$ ,  $E_b = r > 0$  gilt und beide Seiten invariant unter Möbiustransformationen sind. Nun folgt

$$\begin{aligned} \cosh c &= 2 \frac{|E_a - E_b|^2}{(1 - |E_a|^2)(1 - |E_b|^2)} + 1 \\ &= \cosh a \cosh b - \sinh a \sinh b \cos \gamma, \end{aligned}$$

wobei man für die letzte Gleichheit  $E_a = \tanh \frac{b}{2}$  und  $E_b = e^{i\gamma} \tanh \frac{a}{2}$  einsetzt und Additionstheoreme verwendet. □

(i) Wegen (ii) gilt

$$\begin{aligned} \left( \frac{\sinh c}{\sin \gamma} \right)^2 &= \frac{\sinh^2 c}{1 - \left( \frac{\cosh a \cosh b - \cosh c}{\sinh a \sinh b} \right)^2} = \frac{(\sinh a \sinh b \sinh c)^2}{(\sinh a \sinh b)^2 - (\cosh a \cosh b - \cosh c)^2} \\ &=: \frac{Z(a, b, c)}{N(a, b, c)}. \end{aligned}$$

Um (i) zu zeigen, genügt es also zu zeigen, dass (\*) symmetrisch in  $a, b, c$  ist. Für den Zähler ist das offensichtlich, für den Nenner folgt mit  $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$  und den Kurzschreibweisen  $C = \cosh$ ,  $S = \sinh$  und  $\Delta = N(a, b, c) - N(b, c, a)$  beispielsweise

$$\begin{aligned} \Delta &= S(a)^2 S(b)^2 - (C(a)C(b) - C(c))^2 - S(b)^2 S(c)^2 + (C(b)C(c) - C(a))^2 \\ &= S(a)^2 S(b)^2 - C(a)^2 C(b)^2 - C(c)^2 - S(b)^2 S(c)^2 + C(b)^2 C(c)^2 + C(a)^2 \\ &= S(b)^2 (S(a)^2 - S(c)^2) - C(b)^2 (C(a)^2 - C(c)^2) + C(a)^2 - C(c)^2 \\ &= S(b)^2 (S(a)^2 - S(c)^2) + (C(a)^2 - C(c)^2) (1 - C(b)^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= S(b)^2 (S(a)^2 - S(c)^2) - (C(a)^2 - C(c)^2) S(b)^2 \\
&= S(b)^2 (S(a)^2 - S(c)^2 - C(a)^2 + C(c)^2) \\
&= S(b)^2 (-1 + 1) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Die anderen beiden Symmetrien zeigt man analog.

(iii) Setze  $A := \cosh a$ ,  $B := \cosh b$ ,  $C := \cosh c$ . Dann folgt aus (i)

$$\cos \gamma = \frac{AB - C}{\sqrt{A^2 - 1}\sqrt{B^2 - 1}},$$

wobei erneut die Identität  $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$  benutzt wurde. Damit erhalten wir

$$\sin^2 \gamma = 1 - \cos^2 \gamma = \frac{(A^2 - 1)(B^2 - 1) - (AB - C)^2}{(A^2 - 1)(B^2 - 1)} = \frac{D}{(A^2 - 1)(B^2 - 1)}$$

mit

$$D := (A^2 - 1)(B^2 - 1) - (AB - C)^2 = 1 + 2ABC - (A^2 + B^2 + C^2).$$

Aus dieser Gleichung folgt  $D \geq 0$  sowie Symmetrie von  $D$  in  $A, B, C$ . Entsprechend erhalten wir Formeln für  $\cos \alpha$ ,  $\cos \beta$ ,  $\sin \alpha$  und  $\sin \beta$ :

$$\begin{aligned}
\cos \alpha &= \frac{BC - A}{\sqrt{B^2 - 1}\sqrt{C^2 - 1}}, & \cos \beta &= \frac{CA - B}{\sqrt{C^2 - 1}\sqrt{A^2 - 1}} \\
\sin \alpha &= \frac{\sqrt{D}}{\sqrt{B^2 - 1}\sqrt{C^2 - 1}}, & \sin \beta &= \frac{\sqrt{D}}{\sqrt{A^2 - 1}\sqrt{C^2 - 1}}
\end{aligned}$$

und es folgt

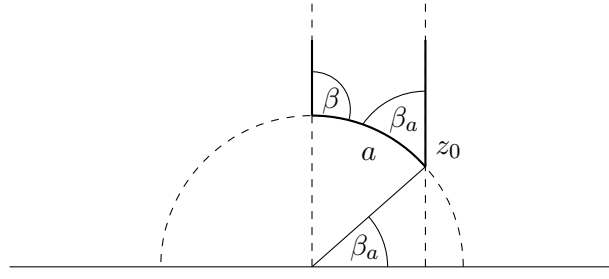
$$\begin{aligned}
\frac{\cos \alpha \cos \beta + \cos \gamma}{\sin \alpha \sin \beta} &= \frac{(BC - A)(CA - B) + (C^2 - 1)(AB - C)}{\sqrt{A^2 - 1}\sqrt{B^2 - 1}(C^2 - 1)} \cdot \frac{\sqrt{A^2 - 1}\sqrt{B^2 - 1}(C^2 - 1)}{\sqrt{D}\sqrt{D}} \\
&= \frac{(BC - A)(CA - B) + (C^2 - 1)(AB - C)}{D} \\
&= \frac{ABC^2 - B^2C - A^2C + AB + ABC^2 - AB - C^3 - C}{D} \\
&= \frac{C(2ABC - B^2 - A^2 - C^2 - 1)}{D} \\
&= C,
\end{aligned}$$

die Behauptung. □

**Satz 2.9.2 (Parallel-Winkel)** Sei  $\Delta$  ein hyperbolisches Dreieck mit Winkeln  $\alpha = 0, \beta = \frac{\pi}{2}$  und einer endlichen Seite  $a$ . Dann gilt für den 3. Winkel  $p(a) := \beta_a$

$$\sin p(a) = \frac{1}{\cosh a}.$$

*Beweis.* Durch Isometrien können wir das Dreieck auf folgende Weise annehmen:



das heißt, der Winkel 0 wird in der Ecke im Unendlichen angenommen und  $a$  ist auf dem Einheitskreis. Nach der hyperbolischen Abstandsformel aus Satz 2.4.4 (ii) gilt dann

$$\begin{aligned}
 \cosh a &= 1 + \frac{|z_0 - i|^2}{2\operatorname{Im} z_0} \\
 &= 1 + \frac{\left(2 \sin\left(\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \beta_a\right)\right)\right)^2}{2 \sin \beta_a} \\
 &= \frac{\sin \beta_a + 2 \sin^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\beta_a}{2}\right)}{\sin \beta_a} \\
 &= \frac{\sin \beta_a + 2 \left(\frac{1 - \cos\left(\frac{\pi}{2} - \beta_a\right)}{2}\right)}{\sin \beta_a} \\
 &= \frac{1}{\sin \beta_a},
 \end{aligned}$$

was zu zeigen war. □

## 2.10 Hyperbolische Dreiecke sind dünn

**Satz 2.10.1** Sei  $\Delta = \overline{pqr}$  ein Dreieck mit Eckpunkten  $p, q, r$  in  $\mathbb{H}^2$  und  $x \in \overline{pq}$ . Dann existiert ein Punkt  $y \in \overline{pr} \cup \overline{qr}$ , sodass für den hyperbolischen Abstand  $d_h(x, y)$  gilt

$$d_h(x, y) \leq \ln(1 + \sqrt{2}).$$

Dabei ist  $\delta := \ln 1 + \sqrt{2}$  eine uniforme, vom Dreieck unabhängige Konstante. Für

$$U_\delta(\overline{pr}) := \{z \in \mathbb{H}^2 \mid d_h(z, \overline{pr}) \leq \delta\}$$

besagt der Satz gerade

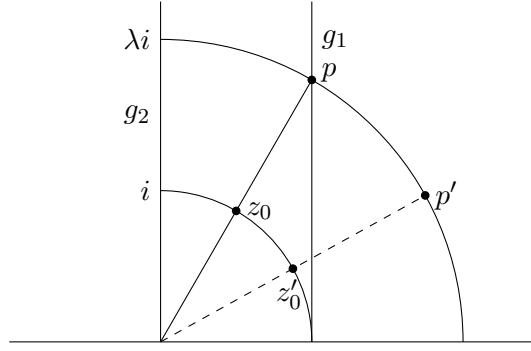
$$\overline{pq} \subseteq U_\delta(\overline{pr}) \cup U_\delta(\overline{qr}).$$

*Achtung: Diese Aussage gilt im Euklidischen nicht!*

Für den Beweis benötigen wir die folgenden drei Lemmata:

**Lemma 2.10.2** *Seien  $g_1, g_2$  vertikale Geodätische in  $\mathbb{H}^2$ . Falls  $p \in g_1$  gegen die reelle Achse geht, wächst der Abstand  $d_h(p, g_2)$  monoton.*

*Beweis.* Ohne Einschränkung sei  $g_2 = i\mathbb{R}$  die imaginäre Achse.



Ist  $p'$  nun näher an der reellen Achse als  $p$ , so gilt, da  $z \mapsto \lambda z$  eine Isometrie ist

$$d_h(g_2, p') = d_h(z'_0, i) \geq d_h(z_0, i) = d_h(p, \lambda i) = d_h(g_2, p),$$

woraus die Monotonie folgt. □

**Lemma 2.10.3** *Seien  $p, q$  Punkte auf einem geodätischen Halbkreis in  $\mathbb{H}^2$  mit*

$$p = (\lambda \cos \phi, \lambda \sin \phi), \quad q = (\lambda \cos \theta, \lambda \sin \theta)$$

*mit  $\theta > \phi$ . Dann gilt*

$$d_h(p, q) = \ln \frac{\sin \theta (1 + \cos \phi)}{\sin \phi (1 + \cos \theta)}$$

*Beweis.* Da  $z \mapsto \lambda z$  Isometrie ist, gilt  $d_h(p, q) = d_h(p', q')$  mit

$$p' = (\cos \phi, \sin \phi), \quad q' = (\cos \theta, \sin \theta).$$

$p', q'$  liegen auf dem Einheitskreis, welchen wir parametrisieren durch

$$c : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{C}, \quad t \mapsto c(t) = (\cos t, \sin t)$$

mit  $\|c'(t)\| = 1$  für alle  $t \in [0, 2\pi]$ . Das abstandsrealisierende geodätische Segment ist dann gerade  $c|_{[\phi, \theta]}$  und es folgt

$$d_h(p, q) = d_h(p', q') = \int_{\phi}^{\theta} \frac{\|c'(t)\|}{\sin t} dt = \int_{\phi}^{\theta} \frac{1}{\sin t} dt = \left[ \ln \frac{\sin t}{1 + \cos t} \right]_{\phi}^{\theta}$$

und damit die Behauptung.  $\square$

**Lemma 2.10.4** Sei  $g$  eine Gerade in  $\mathbb{H}^2$  und  $p \in \mathbb{H}^2$ ,  $p \notin g$ . Dann gilt für den Lotfußpunkt  $p' \in g$

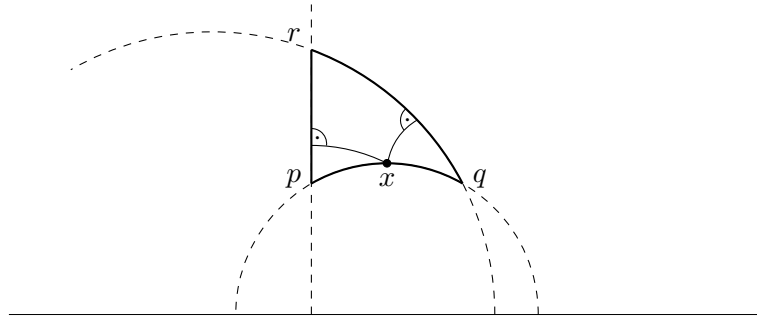
$$d_h(p, g) = \min_{q \in g} d_h(p, q) = d_h(p, p').$$

*Beweis.* Sei  $q \in g$ , sodass die Geodätische  $c$  zwischen  $q$  und  $p$  mit  $g$  den Winkel  $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$  einschließt ( $q$  also kein Lotfußpunkt). Dann gilt nach dem Sinussatz

$$\sinh c = \frac{\sinh c}{\frac{\pi}{2}} = \frac{\sinh d_h(p, p')}{\sin \alpha} > \sinh d_h(p, p'),$$

also gerade  $c > d_h(p, p')$ , was zu zeigen war.  $\square$

*Beweis von Satz 2.10.1.* Sei  $\Delta = \overline{pqr} \subseteq \mathbb{H}^2$  ein hyperbolisches Dreieck, ohne Einschränkung sei dabei  $\overline{pq} \subseteq \mathbb{S}^1$  und  $\operatorname{Re}(p) = \operatorname{Re}(r)$  (Jedes Dreieck ist kongruent zu einem solchen speziellen Dreieck).

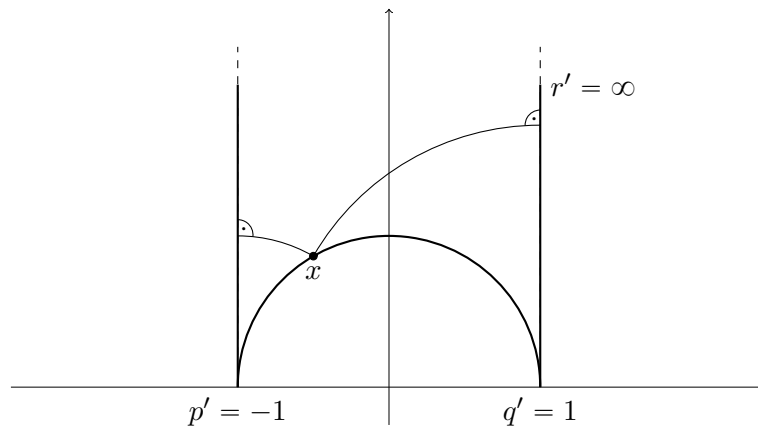


Die folgenden Operationen vergrößern das Dreieck und damit den Abstand von  $x$  zu  $\overline{pr} \cup \overline{qr}$ :

- (i) Bewege  $r$  in Richtung  $\infty$ . Dann bleibt der Abstand von  $x$  zu  $\overline{pr}$  unverändert, während der Abstand von  $x$  zu  $\overline{qr}$  größer wird.
- (ii) Verschieben von  $p$  in Richtung  $p' = -1$  bzw.  $q$  in Richtung  $q' = 1$  (entlang des Einheitskreises) vergrößert  $\Delta$  und die beiden Abstände ebenfalls.

Wir erhalten also ein ideales Dreieck (mit größtmöglichen Abständen):

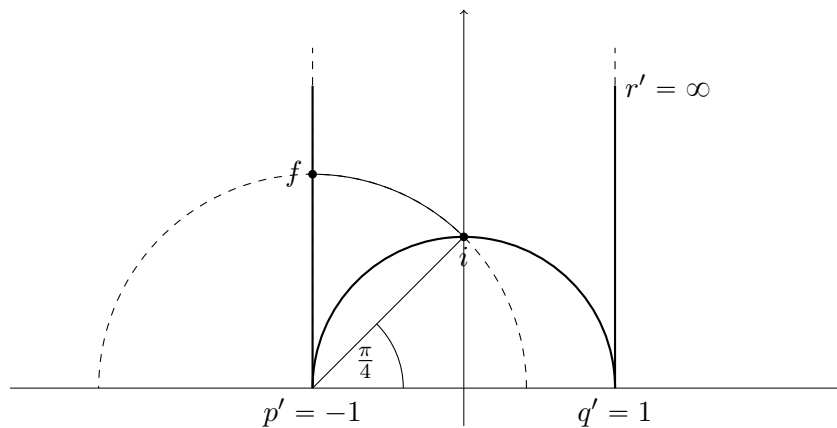




Im nächsten Schritt überlegen wir uns, für welche Wahl von  $x$  der Abstand von  $x$  zu  $\overline{p'r'} \cup \overline{q'r'}$  maximal wird.

- (iii) Nach Lemma 2.10.2 vergrößert sich der Abstand von  $x$  zu  $\overline{p'r'}$ , wenn man  $x$  in Richtung  $q'$  verschiebt monoton. Analog vergrößert sich der Abstand von  $x$  zu  $\overline{q'r'}$ , wenn man  $x$  in Richtung  $p'$  verschiebt monoton. Der maximal Abstand von  $x$  zu beiden Seiten wird also gerade durch  $x = i$  realisiert.

Damit ist nach Lemma 2.10.4 der Abstand von  $x$  zu der Vereinigung der beiden Seiten gerade die Länge des geodätischen Segments zwischen  $x = i$  und  $f$ , dem Lotfußpunkt auf (beispielsweise)  $\overline{p'r'}$ .



Nach Lemma 2.10.3 gilt also

$$\begin{aligned} d_h(x, \overline{q'r'} \cup \overline{p'r'}) &= \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{1}{\sin \psi} d\psi \\ &= \ln \frac{\sin \frac{\pi}{2}}{1 + \cos \frac{\pi}{2}} - \ln \frac{\sin \frac{\pi}{4}}{1 + \cos \frac{\pi}{4}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 0 - \ln \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{1 + \frac{1}{\sqrt{2}}} \\
&= \ln(1 + \sqrt{2}).
\end{aligned}$$

Da durch die Wahl von  $\Delta = \overline{p'q'r'}$  ein Dreieck mit größtmöglichen Abständen gegeben ist, folgt die Behauptung für alle hyperbolischen Dreiecke.  $\square$

## 2.11 Lineare isoperimetrische Ungleichungen

In diesem Abschnitt wollen wir einen weiteren Unterschied zwischen der euklidischen und hyperbolischen Geometrie betrachten. Betrachte zunächst den euklidischen Fall:

Es bezeichne  $\mathcal{G}_{rk}^\infty(\mathbb{R}^2)$  die Menge aller relative kompakten Gebiete des  $\mathbb{R}^2$  mit stückweise glattem Rand. Für  $\Omega \in \mathcal{G}_{rk}^\infty(\mathbb{R}^2)$  bezeichne  $A_r(\Omega)$  den euklidischen Flächeninhalt von  $A$  sowie  $L_e(\partial\Omega)$  die euklidische Länge der Randkurve  $\partial\Omega$ . Dann gilt die euklidische, quadratische isoperimetrische Ungleichung

$$A_e(\Omega) \leq \frac{1}{4\pi} L_e^2(\partial\Omega)$$

mit Gleichheit genau dann, wenn  $\Omega$  kongruent zu einem Ball mit Radius  $R$  um 0 ist. Zur Herleitung der Ungleichung betrachte die euklidische isoperimetrische Konstante

$$I_e(\mathbb{R}^2) := \inf_{\Omega \in \mathcal{G}_{rk}^\infty(\mathbb{R}^2)} \frac{L_e(\partial\Omega)}{A_e(\Omega)}.$$

Schätze nun wie folgt ab: Sei  $l := L_e(\partial\Omega)$  und wähle  $x_0 \in \partial\Omega$ . Unterteile dann  $\partial\Omega$  in Segmente der Länge 1 und erhalte durch Verbinden der durch die Einteilung entstehenden Punkte "Dreiecke" mit Seiten  $\sim d, d, 1$ , wobei wegen der Dreiecksungleichung  $d \leq l$  gilt. Dann können wir die Fläche von  $\Omega$  stückweise aufaddieren und erhalten

$$A_e(\Omega) = \sum \{\text{Dreiecke}\} = l \frac{d}{2} \leq \frac{l^2}{2} = \frac{1}{2} L_e^2(\partial\Omega).$$

Für die euklidische isoperimetrische Konstante gilt folglich  $I_e(\mathbb{R}^2) = 0$ .

Für den hyperbolischen Fall definieren wir analog

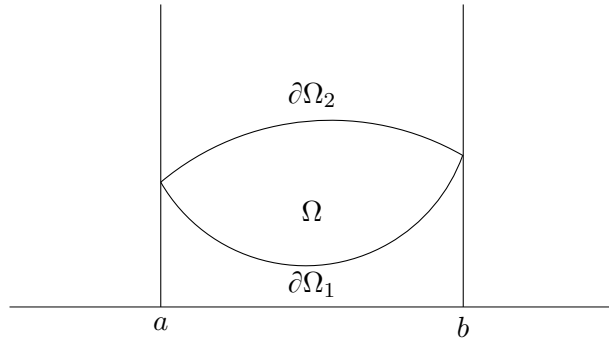
$$I_h(\mathbb{H}^2) := \inf_{\Omega \in \mathcal{G}_{rk}^\infty(\mathbb{H}^2)} \frac{L_h(\partial\Omega)}{A_h(\Omega)}$$

mit den entsprechenden hyperbolischen Größen. Sei nun  $\Omega \in \mathcal{G}_{rk}^\infty(\mathbb{H}^2)$ . Zur Vereinfachung nehmen

wir an, dass  $\partial\Omega_1$  der Graph

$$\partial\Omega_1 = \{(x, f(x)) \in \mathbb{H}^2 \mid x \in [a, b]\}$$

einer Funktion  $f$  sei.



Dann ist

$$L_h(\partial\Omega) = L_h(\partial\Omega_1) + L_h(\partial\Omega_2) \geq L_h(\partial\Omega_1) = \int_a^b \frac{\sqrt{1 + (f'(x))^2}}{f(x)} dx \geq \int_a^b \frac{1}{f(x)} dx$$

sowie

$$A_h(\Omega) \leq \int_a^b \left( \int_{f(x)}^{\infty} \frac{dy}{y^2} \right) dx = \int_a^b \left[ -\frac{1}{y} \right]_{f(x)}^{\infty} dx = \int_a^b \frac{dx}{f(x)}$$

also

$$A_h(\Omega) \leq L_h(\partial\Omega).$$

Dies hat eine lineare isoperimetrische Gleichung zur Folge und es gilt

$$I_h(\mathbb{H}^2) = \inf_{\Omega \in \mathcal{G}_{rk}^{\infty}(\mathbb{H}^2)} \frac{L_h(\partial\Omega)}{A_h(\Omega)} \geq 1.$$

Indem wir in das Einheitskreismodell der hyperbolischen Geometrie wechseln, zeigen wir im Folgenden, dass die Abschätzung für Bälle optimal ist, Gleichheit also gerade durch Bälle (wie im Euklidischen) auftritt. Für  $R > 0$  sind hyperbolische Bälle bzw. Kreise mit Radius  $R$  um 0 gegeben durch

$$B_R(0) := \{z \in \mathbb{R}^2 \mid d_h^*(0, z) \leq R\} \subseteq \mathbb{D}^2$$

$$\partial B_R(0) := \{z \in \mathbb{R}^2 \mid d_h^*(0, z) = R\} \subseteq \mathbb{D}^2$$

Beachte: Mengentheoretisch entspricht  $\partial B_R(0)$  gerade einem euklidischen Kreis mit Radius  $\rho$ ,

wobei der Zusammenhang zwischen  $R$  und  $\rho$  gegeben ist durch

$$R = \int_0^\rho \frac{2dr}{1-r^2} = \ln \frac{1+\rho}{1-\rho},$$

also

$$\rho = \frac{e^R - 1}{e^R + 1} = \frac{\cosh R - 1}{\sinh R}.$$

Dann gilt für die Fläche von  $B_R(0)$

$$A_h(B_R(0)) = \int_0^{2\pi} \int_0^\rho \frac{4r}{(1-r^2)^2} dr d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{2\rho^2}{1-\rho^2} d\theta = \frac{4\pi\rho^2}{1-\rho^2}$$

und mit

$$1 - \rho^2 = 1 - \left( \frac{\cosh R - 1}{\sinh R} \right)^2 = \frac{2(\cosh R - 1)}{\sinh^2 R}$$

also

$$A_h(B_R(0)) = \frac{4\pi\rho^2}{1-\rho^2} = 2\pi \frac{\rho^2 \sinh^2 R}{\cosh R - 1} = 2\pi \frac{(\cosh R - 1)^2}{\cosh R - 1} = 2\pi(\cosh R - 1) \sim 2\pi e^R$$

für  $R \gg 1$ , wobei  $\rho \sinh R = \cosh R - 1$  genutzt wurde. Für die Länge der Kreislinie  $\partial B_R(0)$  rechnen wir

$$L_h(\partial B_R(0)) = \int_0^{2\pi} \frac{2\rho}{1-\rho^2} d\theta = \frac{4\pi\rho}{1-\rho^2} = 2\pi \frac{(\rho \sinh R) \sinh R}{\cosh R - 1} = 2\pi \sinh R \sim 2\pi e^R.$$

Insgesamt gilt damit

$$\frac{L_h(\partial B_R(0))}{A_h(B_R(0))} = \frac{2\pi \sinh R}{2\pi(\cosh R - 1)} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 1$$

und damit gilt für die hyperbolische isoperometrische Konstante

$$I_h(\mathbb{H}^2) = I_h(\mathbb{D}^2) = 1.$$