7. Wichtige Beispiele

Satz 7.1 (Konvergenzsatz für Wurzeln)
Sei (a_n) eine konvergente Folge, $a_n \geq 0$. Es sei $a := \lim a_n$ ($\overset{6.2}{\implies}$ $a \geq 0$) und $p \geq 2$. Dann: $\sqrt[p]{a_n} \to \sqrt[p]{a}$.

Beweis
Fall 1: $a = 0$ Sei $\varepsilon > 0$. $a_n \to 0 \implies \exists n_0 \in \mathbb{N} : a_n < \varepsilon^p \ \forall n > n_0 \overset{5.1}{\implies} \sqrt[p]{a_n} < \varepsilon \ \forall n \geq n_0$ $\implies |\sqrt[p]{a_n} - 0| = \sqrt[p]{a_n} < \varepsilon \ \forall n \geq n_0 \implies \sqrt[p]{a_n} \to 0$
Fall 2: $a > 0$ $|a_n - a| = |(\underbrace{\sqrt[p]{a_n}}_{=:x})^p - (\underbrace{\sqrt[p]{a_n}}_{=:y})^p| = |x^p - y^p| \overset{4.2}{=} |x-y| \cdot |x^{p-1} + x^{p-2}y + \ldots + xy^{p-2} + y^{p-1}$

$\geq |x-y| \cdot \underbrace{y^p - 1}_{=:c} = |x-y| \cdot c = |\sqrt[p]{a_n} - \sqrt[p]{a_n}| \cdot c \implies |\sqrt[p]{a_n} - \sqrt[p]{a}| \leq \underbrace{\frac{1}{c}|a_n - a|}_{\to 0} \implies \sqrt[p]{a_n} \to \sqrt[p]{a}$ ■

Beispiel 7.2
Sei $x \in \mathbb{N}$ und $a_n := x^n$ $(n \in \mathbb{N})$.

Fall 1: $x = 0 \implies (a_n)$ ist konvergent und $a_n \to 0$

Fall 2: $x = 1 \implies (a_n)$ ist konvergent und $a_n \to 1$

Fall 3: $x = -1 \implies (a_n)$ ist divergent.

Fall 4: $|x| > 1$: $\exists \delta > 0 : |x| = 1 + \delta \implies |a_n| = |x^n| = |x|^n = (1+\delta)^n \geq 1 + n\delta \geq n\delta \implies a_n$ ist nicht beschränkt. 6.1(2) $\implies (a_n)$ ist divergent.

Fall 5: $0 < |x| < 1$: Dann $\frac{1}{|x|} > 1 \implies \exists \eta > 0 : \frac{1}{|x|} = 1 + \eta \implies \frac{1}{|a_n|} = \frac{1}{|x^n|} = (\frac{1}{|x|})^n = (1+\eta)^n \geq 1 + n\eta \geq n\eta \implies |a_n| \leq \frac{1}{n\eta} \ \forall n \in \mathbb{N} \implies a_n \to 0$

Beispiel 7.3

Sei $x \in \mathbb{R}$ und $s_n := 1 + x + x^2 + \ldots + x^n = \sum_{k=0}^{n} x^k$

$$\S 4 \implies s_n = \begin{cases} n+1 & \text{falls } x = 1 \\ \frac{1-x^{n+1}}{1-x} & \text{falls } x \neq 1 \end{cases}$$

7.2 $\implies (s_n)$ ist konvergent $\iff |x| < 1$. In diesem Fall: $s_n \to \frac{1}{1-x}$ $(n \to \infty)$

Satz 7.4 (Satz über $\sqrt[n]{n}$)
Es gilt: $\sqrt[n]{n} \to 1$ $(n \to \infty)$

Beweis
$a_n := \sqrt[n]{n} - 1 \implies a_n > 0\ \forall n \in \mathbb{N}$. Zu zeigen ist: $a_n \to 0$. Für $n \geq 2$: $\sqrt[n]{n} = 1 + a_n \implies n = (1+a_n)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_n^k \geq \binom{n}{2} a_n^2 = \frac{1}{2}(n)(n-1)a_n^2 \implies a_n^2 \leq \frac{2}{n-1}\ \forall n \geq 2 \implies \underbrace{0}_{\to 0} < a_n < \underbrace{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n-1}}}_{\to 0} \implies a_n \to 0$ ■

Beispiel 7.5 (Konvergenz von Wurzeln)
Sei $c > 0$. Dann: $\sqrt[n]{c} \to 1$ $(n \to \infty)$.

Beweis
Fall 1: $c \geq 1\ \exists m \in \mathbb{N} : m \geq c \implies 1 \leq c \leq n\ \forall n \geq m \implies \sqrt[n]{n} \leq \underbrace{\sqrt[n]{n}}_{\to 1} \overset{7.4}{\implies} \sqrt[n]{c} \to 1$

Fall 2: $c < 1 \implies \frac{1}{c} > 1 \xrightarrow{\text{Fall 1}} \underbrace{\sqrt[n]{\frac{1}{c}}}_{=\frac{1}{\sqrt[n]{c}}} \to 1 \xrightarrow{6.2(\text{vii})} \sqrt[n]{c} \to 1$ ■

Satz 7.6 (Satz und Definition von e)

$$a_n := (1 + \frac{1}{n})^n\ (n \in \mathbb{N});\ b_n := \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n!}\ (n \in \mathbb{N}_0)$$

(a_n) und (b_n) sind konvergent und es gilt $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.
Definition: $e := \lim\limits_{n\to\infty} (1 + \frac{1}{n})^n$ heißt eulersche Zahl. $(2 < e < 3,\ e \approx 2{,}718)$

Beweis
In der großen Übung wurde gezeigt: $a \leq a_n < a_{n+1} < 3\ \forall n \in \mathbb{N}$. 6.3 $\implies (a_n)$ ist konvergent, $a := \lim a_n$.
$b_{n+1} = b_n + \frac{1}{(n+1)!} > b_n \implies (b_n)$ ist monoton wachsend.

$$b_n = 1 + 1 + \underbrace{\frac{1}{2}}_{\leq \frac{1}{2^1}} + \underbrace{\frac{1}{2 \cdot 3}}_{< \frac{1}{2^2}} + \underbrace{\frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4}}_{< \frac{1}{2^3}} + \ldots + \underbrace{\frac{1}{2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n}}_{< \frac{1}{2^{n-1}}}$$

$$< 1 + (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}^2 + \ldots + \frac{1}{2}^{n-1}) = 1 + \frac{1 - \frac{1}{2}^n}{1 - \frac{1}{2}} = 1 + 2(1 - \frac{1}{2}^n) < 3$$

$\implies (b_n)$ ist nach oben beschränkt. 6.3 $\implies (b_n)$ ist konvergent, $b := \lim b_n$

Zu zeigen: $a = b$.

Für $n \geq 2$:

$$\begin{aligned} a_n = (a + \frac{1}{n})^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} \\ &= 1 + 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!} \underbrace{(1 - \frac{1}{n})(1 - \frac{2}{n}) \cdots (1 - \frac{k-1}{n})}_{<1} \qquad (*) \\ &< 1 + 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!} = b_n \end{aligned}$$

Also: $a_n < b_n \ \forall n \geq 2 \implies a \leq b$.

Sei $j \in \mathbb{N}, j \geq 2$ (fest) und $n > j$. Aus $(*)$ folgt:

$$a_n \geq 1 + 1 + \sum_{k=2}^{j} \frac{1}{k!} \underbrace{(1 - \frac{1}{n})(1 - \frac{2}{n}) \cdots (1 - \frac{k-1}{n})}_{\to 1 (n \to \infty)} = c_n^{(j)}$$

$$\implies c_n^{(j)} \to 1 + 1 + \sum_{k=2}^{j} \frac{1}{k!} = b_j \quad (n \to \infty)$$

$$\implies a_n \geq c_n^{(j)} \xRightarrow{n \to \infty} a \geq b_j.$$

Also: $b_j \leq a \ \forall j \geq 2 \xRightarrow{j \to \infty} b \leq a$. ∎