

14. Stammfunktionen

In diesem Paragraphen sei stets: $\emptyset \neq G \subseteq \mathbb{R}^n$, G ein Gebiet und $f = (f_1, \dots, f_n) : G \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig.

Definition

Eine Funktion $\varphi : G \rightarrow \mathbb{R}$ heißt eine **Stammfunktion (SF) von f auf G** : $\iff \varphi$ ist auf G partiell differenzierbar und $\text{grad } \varphi = f$ auf G . Also: $f_{x_j} = f_j$ auf G ($j = 1, \dots, n$).

Bemerkung:

- (1) Ist φ eine Stammfunktion von f auf $G \implies \text{grad } \varphi = f \implies \varphi \in C^1(G, \mathbb{R}) \xrightarrow{5.3} \varphi$ ist auf G differenzierbar und $\varphi' = f$ auf G .
- (2) Sind φ_1, φ_2 Stammfunktionen von f auf $G \xrightarrow{(1)} \varphi'_1 = \varphi'_2$ auf $G \xrightarrow{6.2} \exists c \in \mathbb{R} : \varphi_1 = \varphi_2 + c$ auf G
- (3) Ist $n = 1 \implies G$ ist ein offenes Intervall. AI, 23.14 \implies jedes stetige $f : G \rightarrow \mathbb{R}$ besitzt auf G eine Stammfunktion! Im Falle $n \geq 2$ ist dies *nicht* so.

Beispiele:

- (1) $G = \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = (y, -x)$.

Annahme: f besitzt auf \mathbb{R}^2 die Stammfunktion φ . Dann: $\varphi_x = y$, $\varphi_y = -x$ auf $G \implies \varphi \in C^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ und $\varphi_{xy} = 1 \neq -1 = \varphi_{yx}$. Widerspruch zu 4.1. Also: f besitzt auf \mathbb{R}^2 *keine* Stammfunktion.

- (2) $G = \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = (y, x - y)$.

Ansatz für eine Stammfunktion φ von f : $\varphi_x = y \implies \varphi = xy + c(y)$, c differenzierbar, $\implies \varphi_y \stackrel{!}{=} x + c'(y) = x - y \implies c'(y) = -y$, etwa $c(y) = -\frac{1}{2}y^2$. Also: $\varphi(x, y) = xy - \frac{1}{2}y^2$. Probe: $\varphi_x = y$, $\varphi_y = x - y$, also: $\text{grad } \varphi = f$. φ ist also eine Stammfunktion von f auf \mathbb{R}^2 .

Satz 14.1 (Hauptsatz der mehrdimensionalen Integralrechnung)

f besitzt auf G die Stammfunktion φ ; $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein ein stückweise stetig differenzierbarer Weg mit $\Gamma_\gamma \subseteq G$. Dann:

$$\int_\gamma f(x) \cdot dx = \varphi(\gamma(b)) - \varphi(\gamma(a))$$

Das heißt: $\int_\gamma f(x) \cdot dx$ hängt nur vom Anfangs- und Endpunkt von γ ab.

Ist γ geschlossen, das heißt $\gamma(a) = \gamma(b)$, dann gilt $\int_\gamma f(x) \cdot dx = 0$.

Beweis

O.B.d.A.: γ ist stetig differenzierbar. $\Phi(t) := \varphi(\gamma(t))$, $t \in [a, b]$. Φ ist stetig differenzierbar und $\Phi'(t) = \varphi'(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)$. Dann: $\int_{\gamma} f(x) \cdot dx \stackrel{13.1}{=} \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt = \int_a^b \Phi'(t) dt \stackrel{\text{AI}}{=} \Phi(b) - \Phi(a) = \varphi(\gamma(b)) - \varphi(\gamma(a))$. ■

Hilfssatz 14.2

Es seien $x_0, y_0 \in G$. Dann existiert ein stückweise stetig differenzierbarer Weg γ mit: $\Gamma_{\gamma} \subseteq G$ und Anfangspunkt von $\gamma = x_0$ und Endpunkt von $\gamma = y_0$.

Beweis

G Gebiet $\implies \exists z_0, z_1, \dots, z_m \in G : S[z_0, \dots, z_m] \subseteq G, z_0 = x_0, z_m = y_0$.

$\gamma_j(t) := z_{j-1} + t(z_j - z_{j-1})$, ($t \in [0, 1]$), ($j = 1, \dots, m$). Dann: $\Gamma_{\gamma_j} = S[z_{j-1}, z_j] \implies \Gamma_{\gamma_1} \cup \dots \cup \Gamma_{\gamma_m} = S[z_0, \dots, z_m] \subseteq G$. 13.4 $\implies \exists \gamma \in \text{AH}(\gamma_1, \dots, \gamma_m)$ stückweise stetig differenzierbar $\implies \Gamma_{\gamma} = S[z_0, \dots, z_m] \subseteq G$. ■

Definition

$\int f(x) \cdot dx$ heißt in G **wegunabhängig** (wu) : \iff für je zwei Punkte $x_0, y_0 \in G$ gilt: für jeden stückweise stetig differenzierbaren Weg $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit $\Gamma_{\gamma} \subseteq G$, $\gamma(a) = x_0$ und $\gamma(b) = y_0$ hat das Integral $\int_{\gamma} f(x) \cdot dx$ stets denselben Wert. In diesem Fall: $\int_{x_0}^{y_0} f(x) \cdot dx := \int_{\gamma} f(x) \cdot dx$.

14.4 lautet dann: besitzt f auf G die Stammfunktion $\varphi \implies \int f(x) \cdot dx$ ist in G wegunabhängig und $\int_{x_0}^{y_0} f(x) \cdot dx = \varphi(y_0) - \varphi(x_0)$ (Verallgemeinerung von Analysis 1, 23.5).

Satz 14.3 (Wegunabhängigkeit, Existenz von Stammfunktionen)

f besitzt auf G eine Stammfunktion $\iff \int f(x) \cdot dx$ ist in G wegunabhängig.

In diesem Fall: ist $x_0 \in G$ und $\varphi : G \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch:

$$\varphi(z) = \int_{x_0}^z f(x) \cdot dx \quad (z \in G) \quad (*)$$

Dann ist φ eine Stammfunktion von f auf G .

Beweis

„ \implies “: 14.1 „ \Leftarrow “: Sei $x_0 \in G$ und φ wie in (*). Zu zeigen: φ ist auf G differenzierbar und $\varphi' = f$ auf G . Sei $z_0 \in G, h \in \mathbb{R}^n, h \neq 0$ und $\|h\|$ so klein, dass $z_0 + th \in G \forall t \in [0, 1]$. $\gamma(t) := z_0 + th$ ($t \in [0, 1]$), $\Gamma_{\gamma} = S[z_0, z_0 + h] \subseteq G$. $\rho(h) := \frac{1}{\|h\|}(\varphi(z_0 + h) - \varphi(z_0) - f(z_0) \cdot h)$. Zu zeigen: $\rho(h) \rightarrow 0$ ($h \rightarrow 0$). 14.2 \implies es existieren stückweise stetig differenzierbare Wege γ_1, γ_2 mit: $\Gamma_{\gamma_1}, \Gamma_{\gamma_2} \subseteq G$. Anfangspunkt von $\gamma_1 = x_0$ = Anfangspunkt von γ_2 . Endpunkt von $\gamma_1 = z_0$, Endpunkt von $\gamma_2 = z_0 + h$. Sei $\gamma_3 \in \text{AH}(\gamma_1, \gamma_2)$ stückweise stetig differenzierbar (13.4!). Dann:

$$\underbrace{\int_{\gamma_3} f(x) \cdot dx}_{=\varphi(z_0+h)} = \underbrace{\int_{\gamma_1} f(x) \cdot dx}_{=\varphi(z_0)} + \int_{\gamma_2} f(x) \cdot dx$$

$\int f(x) \cdot dx$ ist wegunabhängig in $G \implies$

$$\int_{\gamma_3} f(x) \cdot dx = \int_{\gamma_2} f(x) \cdot dx = \varphi(z_0 + h) \implies \varphi(z_0 + h) - \varphi(z_0) = \int_{\gamma_2} f(x) \cdot dx$$

Es ist:

$$\begin{aligned}
 \int_{\gamma} f(z_0) \cdot dx &= \int_0^1 f(z_0) \cdot \underbrace{\gamma'(t)}_{=h} dt = f(z_0) \cdot h \\
 \implies \rho(h) &= \frac{1}{\|h\|} \int_{\gamma} (f(x) - f(z_0)) dx \\
 \implies |\rho(h)| &= \frac{1}{\|h\|} \left| \int_{\gamma} f(x) - f(z_0) dx \right| \\
 &\leq \frac{1}{\|h\|} \underbrace{L(\gamma)}_{=\|h\|} \underbrace{\max\{\|f(x) - f(z_0)\| : x \in \Gamma_{\gamma}\}}_{=\|f(x_n) - f(z_0)\|}
 \end{aligned}$$

wobei $x_n \in \Gamma_{\gamma} = S[z_0, z_0 + h] \implies |\rho(h)| \leq \|f(x_n) - f(z_0)\|$. Für $h \rightarrow 0 : x_n \rightarrow z_0 \xrightarrow{\text{f stetig}} \|f(x_n) - f(z_0)\| \rightarrow 0 \implies \rho(h) \rightarrow 0$. ■

Satz 14.4 (Integrabilitätsbedingungen)

Sei $f = (f_1, \dots, f_n) \in C^1(G, \mathbb{R}^n)$. Besitzt f auf G die Stammfunktion $\varphi \implies$

$$\frac{\partial f_j}{\partial x_k} = \frac{\partial f_k}{\partial x_j} \text{ auf } G \quad (j, k = 1, \dots, n)$$

(**Integrabilitätsbedingungen** (IB)). Warnung: Die Umkehrung von 14.4 gilt im Allgemeinen **nicht** (\rightarrow Übungen!).

Beweis

Sei φ eine Stammfunktion von f auf $G \implies \varphi$ ist differenzierbar auf G und $\varphi_{x_j} = f_j$ auf G ($j = 1, \dots, n$). $f \in C^1(G, \mathbb{R}^n) \implies \varphi \in C^2(G, \mathbb{R})$

$$\implies \frac{\partial f_j}{\partial x_k} = \varphi_{x_j x_k} \stackrel{4.7}{=} \varphi_{x_k x_j} = \frac{\partial f_k}{\partial x_j} \text{ auf } G.$$

■

Definition

Sei $\emptyset \neq M \subseteq \mathbb{R}^n$. M heißt **sternförmig** : $\iff \exists x_0 \in M : S[x_0, x] \subseteq M \quad \forall x \in M$.

Beachte:

- (1) Ist M konvex $\implies M$ ist sternförmig
- (2) Ist M offen und sternförmig $\implies M$ ist ein Gebiet

Satz 14.5 (Kriterium zur Existenz von Stammfunktionen)

Sei G sternförmig und $f \in C^1(G, \mathbb{R}^n)$. Dann: f besitzt auf G eine Stammfunktion : $\iff f$ erfüllt auf G die Integrabilitätsbedingungen

Beweis

„ \implies “: 14.1 „ \Leftarrow “: G sternförmig $\implies \exists x_0 \in G : S[x_0, x] \subseteq G \forall x \in G$. OBdA: $x_0 = 0$.

Für $x = (x_1, \dots, x_n) \in G$ sei $\gamma_x(t) = tx, t \in [0, 1]$.

$$\begin{aligned}\varphi(x) &:= \int_{\gamma_x} f(z) \cdot dz \quad (x \in G) \\ &= \int_0^1 f(tx) \cdot x dt \\ &= \int_0^1 (f_1(tx) \cdot x_1 + f_2(tx) \cdot x_2 + \dots + f_n(tx) \cdot x_n) dt\end{aligned}$$

Zu zeigen: φ ist auf G partiell differenzierbar nach x_j und $\varphi_{x_j} = f_j$ ($j = 1, \dots, n$). OBdA: $j = 1$.
Später (in 21.3) zeigen wir: φ ist partiell differenzierbar nach x_1 und:

$$\varphi_{x_1}(x) = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x_1} (f_1(tx)x_1 + \dots + f_n(tx) \cdot x_n) dt$$

Für $k = 1, \dots, n$: $g_k(x) = f_k(tx) \cdot x_k$.

$$k = 1 : g_1(x) = f_1(tx)x_1 \implies \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(x) = f_1(tx) + t \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(tx)x_1$$

$$k \geq 2 : g_k(x) = f_k(tx)x_k \implies \frac{\partial g_k}{\partial x_1}(x) = t \frac{\partial f_k}{\partial x_1}(tx)x_k \implies$$

$$\begin{aligned}\varphi_{x_1}(x) &= \int_0^1 (f_1(tx) + t(\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(tx)x_1 + \dots + \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(tx)x_n)) dt \\ &\stackrel{\text{IB}}{=} \int_0^1 (f_1(tx) + t(\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(tx)x_1 + \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(tx)x_2 + \dots + \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(tx)x_n)) dt \\ &= \int_0^1 (f_1(tx) + t f_1'(tx) \cdot x) dt\end{aligned}$$

Sei $x \in G$ (fest), $h(t) := t \cdot f_1(tx)$ ($t \in [0, 1]$). h ist stetig differenzierbar und $h'(t) = f_1(tx) + t f_1'(tx) \cdot x \implies \varphi_{x_1}(x) = \int_0^1 h'(t) dt \stackrel{\text{A1}}{=} h(1) - h(0) = f_1(x)$. ■