

§ 4.

Partielle Ableitungen

Stets in diesem Paragraphen: $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{R}^n$, D sei offen und $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ eine reellwertige Funktion. $x_0 = (x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}) \in D$. Sei $j \in \{1, \dots, n\}$ (fest).

Die Gerade durch x_0 mit der Richtung e_j ist gegeben durch folgende Menge: $\{x_0 + te_j : t \in \mathbb{R}\}$. D offen $\implies \exists \delta > 0 : U_\delta(x_0) \subseteq D$. $\|x_0 + te_j - x_0\| = \|te_j\| = |t| \implies x_0 + te_j \in D$ für $t \in (-\delta, \delta)$. $g(t) := f(x_0 + te_j)$ ($t \in (-\delta, \delta)$) Es ist $g(t) = f(x_1^{(0)}, \dots, x_{j-1}^{(0)}, x_j^{(0)} + t, x_{j+1}^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$

Definition

f heißt in x_0 **partiell differenzierbar** nach x_j \iff es existiert der Grenzwert

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + te_j) - f(x_0)}{t}$$

und ist $\in \mathbb{R}$. In diesem Fall heißt obiger Grenzwert die **partielle Ableitung von f in x_0 nach x_j** und man schreibt für diesen Grenzwert:

$$f_{x_j}(x_0) \text{ oder } \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0)$$

Im Falle $n = 2$ oder $n = 3$ schreibt man f_x, f_y, f_z bzw. $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}$

Beispiele:

$$(1) \quad f(x, y, z) = xy + z^2 + e^{x+y}; \quad f_x(x, y, z) = y + e^{x+y} = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z). \quad f_x(1, 1, 2) = 1 + e^2.$$

$$f_y(x, y, z) = x + e^{x+y}. \quad f_z(x, y, z) = 2z = \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z).$$

$$(2) \quad f(x) = f(x_1, \dots, x_n) = \|x\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}.$$

$$\text{Sei } x \neq 0: f_{x_j}(x) = \frac{1}{2\sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}} 2x_j = \frac{x_j}{\|x\|}$$

Sei $x = 0$: $\frac{f(t, 0, \dots, 0) - f(0, 0, \dots, 0)}{t} = \frac{|t|}{t} = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ -1, & t < 0 \end{cases} \implies f$ ist in $(0, \dots, 0)$ nicht partiell differenzierbar nach x_1 . Analog: f ist in $(0, \dots, 0)$ nicht partiell differenzierbar nach x_2, \dots, x_n

$$(3) \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$\frac{f(t, 0) - f(0, 0)}{t} = 0 \rightarrow 0 \quad (t \rightarrow 0) \implies f$ ist in $(0, 0)$ partiell differenzierbar nach x und $f_x(0, 0) = 0$. Analog: f ist in $(0, 0)$ partiell differenzierbar nach y und $f_y(0, 0) = 0$. Aber: f ist in $(0, 0)$ nicht stetig.

Definition

- (1) f heißt in x_0 **partiell differenzierbar** $:\Leftrightarrow f$ ist in x_0 partiell differenzierbar nach allen Variablen x_1, \dots, x_n . In diesem Fall heißt $\nabla f(x_0) := \nabla f(x_0) := (f_{x_1}(x_0), \dots, f_{x_n}(x_0))$ der **Gradient** von f in x_0 .
- (2) f ist auf D **partiell differenzierbar** nach x_j oder f_{x_j} ist auf D vorhanden $:\Leftrightarrow f$ ist in jedem $x \in D$ partiell differenzierbar nach x_j . In diesem Fall wird durch $x \mapsto f_{x_j}(x)$ eine Funktion $f_{x_j} : D \rightarrow \mathbb{R}$ definiert die **partielle Ableitung** von f auf D nach x_j .
- (3) f heißt **partiell differenzierbar** auf D $:\Leftrightarrow f_{x_1}, \dots, f_{x_n}$ sind auf D vorhanden.
- (4) f heißt auf D **stetig partiell differenzierbar** $:\Leftrightarrow f$ ist auf D partiell differenzierbar und f_{x_1}, \dots, f_{x_n} sind auf D stetig. In diesem Fall schreibt man $f \in C^1(D, \mathbb{R})$.

Beispiele:

- (1) Sei f wie in obigem Beispiel (3). f ist in $(0, 0)$ partiell differenzierbar und $\nabla f(0, 0) = (0, 0)$
- (2) Sei f wie in obigem Beispiel (2). f ist auf $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ partiell differenzierbar und $\nabla f(x) = \left(\frac{x_1}{\|x\|}, \dots, \frac{x_n}{\|x\|}\right) = \frac{1}{\|x\|}x$ ($x \neq 0$)

Definition

Seien $j, k \in \{1, \dots, n\}$ und f_{x_j} sei auf D vorhanden. Ist f_{x_j} in $x_0 \in D$ partiell differenzierbar nach x_k , so heißt

$$f_{x_j x_k}(x_0) := \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j}(x_0) := (f_{x_j})_{x_k}(x_0)$$

die **partielle Ableitung zweiter Ordnung** von f in x_0 nach x_j und x_k . Ist $k = j$, so schreibt man:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2}(x_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_j}(x_0)$$

Entsprechend definiert man partielle Ableitungen höherer Ordnung (soweit vorhanden).

Schreibweisen: $f_{xyz} = \frac{\partial^3 f}{\partial z^2 \partial y \partial x^2}$, vergleiche: $\frac{\partial^{180} f}{\partial x^{179} \partial y}$

Beispiele:

- (1) $f(x, y) = xy + y^2$, $f_x(x, y) = y$, $f_{xx} = 0$, $f_y = x + 2y$, $f_{yy} = 2$, $f_{xy} = 1$, $f_{yx} = 1$.
- (2) $f(x, y, z) = xy + z^2 e^x$, $f_x = y + z^2 e^x$, $f_{xy} = 1$, $f_{xyz} = 0$. $f_z = 2z e^x$, $f_{zy} = 0$, $f_{zyx} = 0$.
- (3) $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

Übungsblatt: $f_{xy}(0, 0)$, $f_{yx}(0, 0)$ existieren, aber $f_{xy}(0, 0) \neq f_{yx}(0, 0)$

Definition

Sei $m \in \mathbb{N}$. f heißt auf D **m -mal stetig partiell differenzierbar** $:\Leftrightarrow$ alle partiellen Ableitungen von f der Ordnung $\leq m$ sind auf D vorhanden und auf D stetig. In diesem Fall schreibt man: $f \in C^m(D, \mathbb{R})$

$$C^0(D, \mathbb{R}) := C(D, \mathbb{R}), \quad C^\infty(D, \mathbb{R}) := \bigcap_{k \in \mathbb{N}_0} C^k(D, \mathbb{R})$$

Satz 4.1 (Satz von Schwarz)

Es sei $f \in C^2(D, \mathbb{R})$, $x_0 \in D$ und $j, k \in \{1, \dots, n\}$. Dann: $f_{x_j x_k}(x_0) = f_{x_k x_j}(x_0)$

Satz 4.2 (Folgerung)

Ist $f \in C^m(D, \mathbb{R})$, so sind die partiellen Ableitungen von f der Ordnung $\leq m$ unabhängig von der Reihenfolge der Differentiation.

Beweis

O.B.d.A: $n = 2$ und $x_0 = (0, 0)$. Zu zeigen: $f_{xy}(0, 0) = f_{yx}(0, 0)$. D offen $\implies \exists \delta > 0 : U_\delta(0, 0) \subseteq D$. Sei $(x, y) \in U_\delta(0, 0)$ und $x \neq 0 \neq y$.

$$\Delta := f(x, y) - f(x, 0) - (f(0, y) - f(0, 0)), \quad \varphi(t) := f(t, y) - f(t, 0)$$

für t zwischen 0 und x . φ ist differenzierbar und $\varphi'(t) = f_x(t, y) - f_x(t, 0)$. $\varphi(x) - \varphi(0) = \Delta$. MWS, Analysis 1 $\implies \exists \xi = \xi(x, y)$ zwischen 0 und x : $\Delta = x\varphi'(\xi) = x(f_x(\xi, y) - f_x(\xi, 0))$. $g(s) := f_x(\xi, s)$ für s zwischen 0 und y ; g ist differenzierbar und $g'(s) = f_{xy}(\xi, s)$. Es ist $\Delta = x(g(y) - g(0)) \stackrel{\text{MWS}}{=} xyg'(\eta)$, $\eta = \eta(x, y)$ zwischen 0 und y . $\implies \Delta = xyf_{xy}(\xi, \eta)$. (1)

$\psi(t) := f(x, t) - f(0, t)$, t zwischen 0 und y . $\psi'(t) = f_y(x, t) - f_y(0, t)$. $\Delta = \psi(y) - \psi(0)$. Analog: $\exists \bar{\eta} = \bar{\eta}(x, y)$ und $\bar{\xi} = \bar{\xi}(x, y)$, $\bar{\eta}$ zwischen 0 und y , $\bar{\xi}$ zwischen 0 und x . $\Delta = xyf_{yx}(\bar{\xi}, \bar{\eta})$. (2)

Aus (1), (2) und $xy \neq 0$ folgt $f_{xy}(\xi, \eta) = f_{yx}(\bar{\xi}, \bar{\eta})$. $(x, y) \rightarrow (0, 0) \implies \xi, \bar{\xi}, \eta, \bar{\eta} \rightarrow 0 \xrightarrow{f \in C^2} f_{xy}(0, 0) = f_{yx}(0, 0)$ ■

