6 Zentraler Grenzwertsatz in $\mathbb{R}^n$

Definition *Es sei $X = (X_1, \dots, X_d)^T$ ein Zufallsvektor.*

*a) Ist $EX_i < \infty,\ i = 1, \dots, d$, so heißt $EX := (EX_1, \dots, EX_d)$ **Erwartungswert** von X.*

*b) Ist $EX_i^2 < \infty,\ i = 1, \dots, d$, so heißt die $d \times d$-Matrix $Cov(X) = (Cov(X_i, X_j))_{i,j=1,\dots,d}$ **Kovarianzmatrix** von X.*
Beachte: Die Kovarianzmatrix ist symmetrisch, da $Cov(X_i, X_j) = Cov(X_j, X_i)$, und in der Diagonale steht die Varianz, denn $Cov(X_i, X_i) = \mathrm{Var}(X_i)$, jeweils für $i, j = 1, \dots, d$.

Bemerkung a) Es gelten folgende Rechenregeln: Sei $A \in \mathbb{R}^{s \times d}, b \in \mathbb{R}^s$
$E(AX + b) = AEX + b$
$Cov(AX + b) = A \cdot Cov(X) A^T$

b) Die 2. Rechenregel impliziert, dass Kovarianzmatrizen stets positiv semidefinit sind.

Definition *Es sei $X = (X_1, \dots, X_d)^T$ ein Zufallsvektor. Dann ist*

$$\phi_X : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C},\ \phi_X(t) = Ee^{it^TX}$$

*die **charakteristische Funktion** zu X.*

Bemerkung

a) Es gilt für Zufallsvektoren X, Y:

$$X \stackrel{d}{=} Y \quad \Longleftrightarrow \quad \phi_X(t) = \phi_Y(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}^d \quad \Longleftrightarrow \quad t^TX \stackrel{d}{=} t^TY \quad \forall t \in \mathbb{R}^d$$

b) Die **Verteilungskonvergenz** für Zufallsvektoren sei definiert durch
$X_n \stackrel{d}{\to} X \quad :\Longleftrightarrow \quad Eh(X_n) \to Eh(X) \quad \forall h \in \mathbb{C}_b(\mathbb{R}^d)$. (vgl. Satz 5.5)
Auch hier gelten
$X_n \stackrel{d}{\to} X \quad \Longleftrightarrow \quad \phi_n(t) \to \phi(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}^d$. (vgl. Satz 5.9)
und das "Continous Mapping Theorem". (vgl. Satz 5.6)

Satz 6.1 (Cramér-Wold-Technik)
Es seien $X, X_1, X_2, \dots$ d-dimensionale Zufallsvektoren. Dann gilt:

$$X_n \stackrel{d}{\to} X \quad \Longleftrightarrow \quad c^TX_n \stackrel{d}{\to} c^TX \quad \forall c \in \mathbb{R}^d$$

Beweis
"$\Rightarrow$": folgt aus dem "Continous Mapping Theorem"mit $h(x) := c^T x$.
"$\Leftarrow$": $c^T X_n \xrightarrow{d} c^T X \quad \forall c \in \mathbb{R}^d \xRightarrow{\text{S.5.9}} Ee^{itc^T X_n} \to Ee^{itc^T X}(n \to \infty) \quad \forall t \in \mathbb{R}, \ \forall c \in \mathbb{R}^d$.
$\Longrightarrow \ \phi_n(c) \to \phi(c) \quad \forall c \in \mathbb{R}^d \qquad \Longrightarrow \ X_n \xrightarrow{d} X.$ ∎

6.1 Mehrdimensionale Normalverteilung

Definition
*Der Zufallsvektor $X = (X_1, \ldots, X_n)^T$ besitzt eine d-**dimensionale Normalverteilung**, falls $c^T X$ eine eindimensionale Normalverteilung besitzt $\forall c \in \mathbb{R}^d$*

Bemerkung
X habe eine d-dimensionale Normalverteilung.
Setze $c := e_i$ (Einheitsvektor) für ein $i \in \{1, \ldots, d\} \quad \Longrightarrow \ X_i$ ist normalverteilt.
$\Longrightarrow \ \exists EX_i = \mu_i; \ \mathrm{Var}(X_i) < \infty; \ EX_i^2 < \infty \quad \Longrightarrow \ Cov(X_i, X_j) \overset{C.S.U.}{<} \infty.$
Sei $\Sigma := Cov(X)$. Weiter gilt: $E(c^T X) = c^T \mu; \ \mathrm{Var}(c^T X) = c^T \Sigma c.$
$\Longrightarrow \ c^T X \sim N(c^T \mu, c^T \Sigma c) \xRightarrow{\text{St.1, Bsp.12.3}} \phi_{c^T X}(t) = Ee^{itc^T X} = e^{ic^T \mu t - \frac{1}{2} c^T \Sigma c t^2} \quad \forall t \in \mathbb{R}.$
$\Longrightarrow \ \phi_X(t) = Ee^{it^T X} = \phi_{t^T X}(1) = e^{it^T \mu - \frac{1}{2} t^T \Sigma t}, \ t \in \mathbb{R}.$
Wegen obiger Bemerkung, Teil a) folgt:
Die Normalverteilung ist durch μ und Σ festgelegt. Schreibweise: $X \sim N_d(\mu, \Sigma)$

Lemma 6.1 *Sei $X \sim N_d(\mu, \Sigma), \ A \in \mathbb{R}^{s \times d}, \ b \in \mathbb{R}^s$. Dann gilt:*
$Y := AX + b \sim N_s(A\mu + b, A\Sigma A^T)$

Beweis

$$\begin{aligned} \phi_Y(t) &= Ee^{it^T(AX+b)} \\ &= e^{it^T b} Ee^{it^T AX} \\ &= e^{it^T b} \phi_X(A^T t) \\ &= e^{it^T(b + A\mu) - \frac{1}{2} t^T (A \Sigma A^T) t} \end{aligned}$$

∎

Satz 6.2 (Existenzsatz)
Sei $\mu \in \mathbb{R}^d$ und $\Sigma \in \mathbb{R}^{d \times d}$ eine beliebige symmetrische, positiv semidefinite Matrix. Dann existiert ein d-dimensionaler Zufallsvektor X mit $X \sim N_d(\mu, \Sigma)$.

Beweis
Sei $Y = (Y_1, \ldots, Y_d)$, wobei $Y_1, \ldots, Y_d$ unabhängig und $Y_k \sim N(0, 1), \ k = 1, \ldots, d.$ Die Existenz dieser Konstruktion ist mit Satz 3.3 gegeben. Da $c^T Y \sim N(0, c^T c)$, ist $Y \sim N_d(0, I_d)$[1]
Σ positiv semidefinit $\Longrightarrow \ \Sigma = AA^T$ mit einem $A \in \mathbb{R}^{d \times d} \xRightarrow{\text{L.6.1}} X := AY + \mu \sim N_d(\mu, \Sigma).$ ∎

[1] das ist die d-dimensionale Standardnormalverteilung

Satz 6.3 *Sei $X \sim N_d(\mu, \Sigma)$ und Σ nicht singulär. Dann besitzt X eine Dichte der Form*

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}} |\det \Sigma|^{\frac{1}{2}}} exp(-\frac{1}{2}(x-\mu)^T \Sigma^{-1}(x-\mu)), \ x \in \mathbb{R}^d$$

Beweis Sei $\Sigma = AA^T$ und $X = A \cdot Y + \mu$ mit $Y \sim N_d(0, I_d)$.
Dichte von Y:

$$f_Y(y_1, \dots, y_d) = \prod_{j=1}^{d} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}y_j^2} = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} exp(-\frac{1}{2}y^T y)$$

Sei $\Psi(y) = Ay + \mu$. Ψ ist bijektiv, Σ regulär.

$$\xrightarrow{\text{Satz 3.6}} \Rightarrow f_X(x) = \frac{1}{|\det A|} \cdot f_X(A^{-1}(x-\mu))$$

Beachte: $\det \Sigma = (\det A)^2, \ \Sigma^{-1} = (A^{-1})^T (A^{-1})$. ∎

Bemerkung Ist $\det \Sigma = 0 \Rightarrow \exists\, a \in \mathbb{R}^d, \ a \neq 0$ mit $a^T \Sigma a = 0 \Rightarrow \mathrm{Var}(a^T X) = 0$.
$N(\mu, \Sigma)$ ist dann auf $H = \{x \in \mathbb{R}^d \mid a^T x = a^T \mu\}$ konzentriert, d.h. $P^X(H) = 1$.
Wegen $\lambda^d(H) = 0$ folgt mit dem Satz von Radon-Nikodym: $\nexists$ Dichte.

6.2 Zentraler Grenzwertsatz in $\mathbb{R}^d$

Satz 6.4 *Es sei $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von unabh. u. identisch verteilen d-dim Zufallsvektoren mit Erwartungsvektor μ und Kovarianzmatrix Σ. Dann gilt für $\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$:*

$$\sqrt{n}(\overline{X_n} - \mu) \xrightarrow{d} Z, \ Z \sim N_d(0, \Sigma).$$

Beweis Sei $Z_n := \sqrt{n}(\overline{X_n} - \mu)$.
Nach Satz 6.1 ist z.z. $c^T Z_n \xrightarrow{d} c^T Z \ \forall\, c \in \mathbb{R}^d$.
Wegen $\mathrm{Var}(c^T Z_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \mathrm{Var}(c^T X_i) = c^T \Sigma c, \ Ec^T Z_n = 0$ können wir o.B.d.A. $c^T \Sigma c > 0$ annehmen (andernfalls ist $c^T Z_n \equiv 0$).

$$\begin{aligned} 1 - \text{dim ZGWS}: \quad & \frac{c^T Z_n}{\sqrt{c^T \Sigma c}} = \frac{\sum_{j=1}^n c^T X_j - n c^T \mu}{\sqrt{n c^T \Sigma c}} \xrightarrow{d} Z_0, \ Z_0 \sim N(0,1) \\ \Rightarrow \quad & c^T Z_n \xrightarrow{d} \sqrt{c^T \Sigma c} \cdot Z_0 \sim N(0, c^T \Sigma c) \end{aligned}$$

∎

Beispiel 6.1 (χ^2-Anpassungstest) Es seien X_1, X_2 unabh. u. identisch verteilte, d-dim. Zufallsvektoren mit

$$P(X_1 = e_k) = p_k, \ k = 1, \dots, d, \ \sum_{k=1}^d p_k = 1.$$

Dann hat $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$ eine Multinomialverteilung (vgl. Sto. I) mit Zähldichte:

$$P(S_n = (k_1, \dots, k_d)) = \frac{n!}{k_1! \cdot \dots \cdot k_d!} p_1^{k_1} \cdot \dots \cdot p_d^{k_d}$$

für $k_1, \dots, k_d \in \mathbb{N}_0,\ k_1 + \cdots k_d = n$.
Weiter gilt: $EX_1 = p := (p_1, \dots, p_d)^T,\ \mathrm{Cov}(X_1) = \Sigma$ mit

$$(\Sigma)_{ij} = \begin{cases} p_i(1-p_i), & i = j \\ -p_i p_j, & i \neq j \end{cases} \Rightarrow \Sigma = \mathrm{diag}(p) - pp^T.$$

ZGWS (Satz 6.4):

$$\frac{1}{\sqrt{n}}(S_n - np) \xrightarrow{d} Z,\ Z \sim N_d(0, \Sigma)$$

Anmerkung: Wir kennen $p_1, \dots, p_d$ nicht, nur die Realisierungen von $X_1, \dots, X_n$.
Betrachte die Testgröße $T_n := \sum_{i=1}^d \frac{1}{np_i}(S_{n,i} - np_i)^2$.
Aufgabe: Zu $(p_1, \dots, p_d),\ X, n$ gegeben, bestimme c_α mit $P(T_n > c_\alpha) = \alpha$. Also: Bestimme Verteilung von T_n.
Lösung: Approximativ. Sei $h : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R},\ h(x_1, \dots, x_d) := \sum_{j=1}^d \frac{x_j^2}{p_j}$.

$$h \text{ stetig } \xRightarrow{\text{Cont. mapping}} \Rightarrow T_n = h(\frac{1}{\sqrt{n}}(S_n - np)) \xrightarrow{d} h(Z),\ Z \sim N_d(0, \Sigma)$$

Welche Verteilung hat $h(Z)$?
Sei $\tilde{Z} = \mathrm{diag}(\frac{1}{\sqrt{p_1}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{p_d}}) \cdot Z. \quad \xRightarrow{\text{Lemma 6.1}} \Rightarrow \tilde{Z} \sim N_d(0, \tilde{\Sigma})$ wobei

$$\begin{aligned} \tilde{\Sigma} &= \mathrm{diag}(\frac{1}{\sqrt{p_1}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{p_d}}) \cdot (\,\mathrm{diag}(p) - pp^T) \cdot \mathrm{diag}(\frac{1}{\sqrt{p_1}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{p_d}}) \\ &= I_d - \underbrace{(\sqrt{p_1}, \dots, \sqrt{p_d})^T}_{=:r} \cdot (\sqrt{p_1}, \dots, \sqrt{p_d}) \\ &= I_d - rr^T \end{aligned}$$

Es gilt: $\|r\| = 1 \ \Rightarrow \exists$ orthogonale Matrix $A = (r, *) \in \mathbb{R}^{d \times d}$. Sei $Y := A^T \tilde{Z} \Rightarrow Y \sim N_d(0, \Sigma_Y)$, wobei $\Sigma_Y = A^T \tilde{\Sigma} A = I_d - \mathrm{diag}(1, 0, \dots, 0) = \mathrm{diag}(0, 1, \dots, 1)$.
$\Rightarrow Y^T Y \stackrel{d}{=} \sum_{i=1}^{d-1} W_i^2,\ W_i \sim N(0,1)$ unabh. $\Rightarrow h(Z) = \tilde{Z}^T \tilde{Z} = Y^T Y \sim \chi^2_{d-1}$, Chi^2-Verteilung mit $d-1$ Freiheitsgraden.
Zahlenbeispiel:
Würfel wird 189 mal geworfen.

Ergebnis	1	2	3	4	5	6
	30	37	26	29	29	38

Ist der Würfel fair?
D.h. $p_1 = \cdots = p_6 = \frac{1}{6}$.
$T_n = 3,37,\ d - 1 = 5,\ \alpha = 0,05,\ p = (\frac{1}{6}, \dots, \frac{1}{6})$
$P(T_n > c_\alpha) \stackrel{!}{=} 0,05 \ \Leftrightarrow 1 - F_{\xi_5^2}(c_\alpha) \stackrel{!}{=} 0,05 \Rightarrow c_\alpha = 11,1$. d.h. Nullhypothese „Würfel fair“ kann nicht abgelehnt werden.