6. Differentialgleichungen: Grundbegriffe

In diesem Paragraphen sei I stets ein Intervall in $\mathbb{R}$.

Erinnerung: Sei $p \in \mathbb{N}$ und $y : I \to \mathbb{R}^p,\ y = (y_1, \ldots, y_p)$. y heißt auf I k-mal (stetig) db auf $I \iff y_j$ ist auf I k-mal (stetig) db $(j = 1, \ldots, p)$.

In diesem Fall gilt:

$$y^{(j)} = (y_1^{(j)}, \ldots, y_p^{(j)}) \quad (j = 0, \ldots, k)$$

Definition
Seien $n, p \in \mathbb{N}$ und $D \subseteq \mathbb{R} \times \underbrace{\mathbb{R}^p \times \ldots \times \mathbb{R}^p}_{n+1 \text{ Faktoren}}$ und $F : D \to \mathbb{R}^p$ eine Funktion.

Eine Gleichung der Form

$$(i) \quad F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$$

heißt eine **(gewöhnliche) Differentialgleichung (Dgl) n-ter Ordnung**.

Eine Funktion $y : I \to \mathbb{R}^p$ heißt eine **Lösung** von (i), gdw. gilt:

- y ist auf I n-mal db,
- $\forall x \in I : (x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n)}(x)) \in D$ und
- $\forall x \in I : F(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n)}(x)) = 0$.

Beispiele:

(1) $n = p = 1,\ F(x, y, z) = y^2 + z^2 - 1,\ D = \mathbb{R}^3$.

Dgl: $y^2 + y'^2 - 1 = 0$.

$y : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ y(x) = 1$ ist eine Lösung,
$\bar{y} : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \bar{y}(x) = \sin x$ ist eine weitere Lösung.

(2) $n = p = 1,\ F(x, y, z) = z + \frac{y}{x},\ D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \neq 0\}$.

Dgl: $y' + \frac{y}{x} = 0$.

$y : (0, \infty) \to \mathbb{R},\ y(x) = \frac{1}{x}$ ist eine Lösung,
$\bar{y} : (-\infty, 0) \to \mathbb{R},\ \bar{y}(x) = \frac{17}{x}$ ist eine weitere Lösung.

(3) $n = 1, p = 2$. Mit $y = (y_1, y_2)$:

$$y' = \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y_2 \\ y_1 \end{pmatrix}$$

$y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2,\ y(x) = (\cos x,\ \sin x)$ ist eine Lösung.

Definition
Seien $n, p \in \mathbb{N},\ D \subseteq \mathbb{R} \times \underbrace{\mathbb{R}^p \times \ldots \times \mathbb{R}^p}_{n \text{ Faktoren}}$ und $f : D \to \mathbb{R}^p$.

Eine Gleichung der Form

$$(ii) \quad y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$$

heißt **explizite Differentialgleichung n-ter Ordnung**.

Ist $(x_0, y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}) \in D$ (fest), so heißt das Gleichungssystem

$$(iii) \quad \begin{cases} y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) \\ y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_1, \ldots,\ y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1} \end{cases}$$

ein **Anfangswertproblem (AWP)**

$y : I \to \mathbb{R}^p$ heißt eine **Lösung** von (ii), gdw. gilt:

- y ist auf I n-mal db,
- $\forall x \in I : (x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n-1)}(x)) \in D$ und
- $\forall x \in I : y^{(n)}(x) = f(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n-1)}(x))$.

$y : I \to \mathbb{R}^p$ heißt eine **Lösung** von (iii), gdw. gilt:

- y ist eine Lösung von (ii),
- $x_0 \in I$ und
- $y^{(j)}(x_0) = y_j$ $(j = 0, \ldots, n-1)$

Das AWP (iii) heißt eine **eindeutig lösbar**, gdw. gilt:

- (iii) hat eine Lösung und
- für je zwei Lösungen $y_1 : I_1 \to \mathbb{R}^p,\ y_2 : I_2 \to \mathbb{R}^p$ von (iii) $(I_1, I_2$ Intervalle in $\mathbb{R})$ gilt: $y_1 \equiv y_2$ auf $I_1 \cap I_2$

Beispiele:

(1)

$$\text{AWP: } \begin{cases} y' = 2\sqrt{|y|} \\ y(0) = 0 \end{cases} \qquad (n = 1,\ p = 1)$$

$y : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ y(x) = 0$ ist eine Lösung des AWPs,
$\bar{y} : [0, \infty) \to \mathbb{R},\ \bar{y}(x) = x^2$ ist eine weitere Lösung.

(2)

$$\text{AWP: } \begin{cases} y' = 2y \\ y(0) = 1 \end{cases} \qquad (n = 1,\ p = 1)$$

$y : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ y(x) = e^{2x}$ ist eine Lösung des AWPs.

Sei $\bar{y} : I \to \mathbb{R}$ eine Lösung des AWPs. Wir definieren

$$g(x) := \frac{\bar{y}(x)}{e^{2x}} \ (x \in I)$$

.

Nachrechnen: $g'(x) = 0 \ \forall x \in I \implies \exists c \in \mathbb{R} : g(x) = c \ \forall x \in I \implies \bar{y}(x) = ce^{2x} \ (x \in I)$.

$1 = \bar{y}(0) = c \implies \bar{y}(x) = e^{2x} \ \forall x \in I$.

Das AWP ist also eindeutig lösbar.