

8. Extremwerte

Vereinbarung: In diesem Paragraphen sei $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{R}^n$, $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ und $x_0 \in D$

Definition

- (1) f hat in x_0 ein **lokales Maximum** : $\iff \exists \delta > 0 : f(x) \leq f(x_0) \forall x \in D \cap U_\delta(x_0)$.
 f hat in x_0 ein **lokales Minimum** : $\iff \exists \delta > 0 : f(x) \geq f(x_0) \forall x \in D \cap U_\delta(x_0)$.
lokales Extremum = lokales Maximum oder lokales Minimum
- (2) Ist D offen, f in x_0 partiell differenzierbar und $\text{grad } f(x_0) = 0$, so heißt x_0 ein stationärer Punkt.

Satz 8.1 (Nullstelle des Gradienten)

Ist D offen und hat f in x_0 ein lokales Extremum und ist f in x_0 partiell differenzierbar, dann ist $\text{grad } f(x_0) = 0$.

Beweis

f habe in x_0 ein lokales Maximum. Also $\exists \delta > 0 : U_\delta(x_0) \subseteq D$ und $f(x) \leq f(x_0) \forall x \in U_\delta(x_0)$. Sei $j \in \{1, \dots, n\}$. Dann: $x_0 + te_j \in U_\delta(x_0)$ für $t \in (-\delta, \delta)$. $g(t) := f(x_0 + te_j)$ ($t \in (-\delta, \delta)$). g ist differenzierbar in $t = 0$ und $g'(0) = f_{x_j}(x_0)$. $g(t) = f(x_0 + te_j) \leq f(x_0) = g(0) \forall t \in (-\delta, \delta)$. Analysis 1, 21.5 $\implies g'(0) = 0 \implies f_{x_j}(x_0) = 0$ ■

Satz 8.2 (Definitheit und Extremwerte)

Sei D offen, $f \in C^2(D, \mathbb{R})$ und $\text{grad } f(x_0) = 0$.

- (i) Ist $H_f(x_0)$ positiv definit $\implies f$ hat in x_0 ein lokales Minimum.
- (ii) Ist $H_f(x_0)$ negativ definit $\implies f$ hat in x_0 ein lokales Maximum.
- (iii) Ist $H_f(x_0)$ indefinit $\implies f$ hat in x_0 kein lokales Extremum.

Beweis

- (i), (ii) $A := H_f(x_0)$ sei positiv definit oder negativ definit oder indefinit. Sei $\varepsilon > 0$ wie in 7.2. $f \in C^2(D, \mathbb{R}) \implies \exists \delta > 0 : U_\delta(x_0) \subseteq D$ und $(*) |f_{x_j x_k}(x) - f_{x_j x_k}(x_0)| \leq \varepsilon \forall x \in U_\delta(x_0)$ ($j, k = 1, \dots, n$). Sei $x \in U_\delta(x_0) \setminus \{x_0\}$, $h := x - x_0 \implies x = x_0 + h, h \neq 0$ und $S[x_0, x_0 + h] \subseteq U_\delta(x_0)$ 6.7 $\implies \exists \eta \in [0, 1] : f(x) = f(x_0 + h) = f(x_0) + \underbrace{h \cdot \text{grad } f(x_0)}_{=0} + \frac{1}{2} Q_B(h)$, wobei $B = H_f(x_0 + \eta h)$. Also: $(**) f(x) = f(x_0) + \frac{1}{2} Q_B(h)$.

A sei positiv definit (*negativ definit*) $\xrightarrow{7.2}$ B ist positiv definit (*negativ definit*). $\xrightarrow{h \neq 0}$
 $Q_B(h) \stackrel{(<)}{>} 0 \xrightarrow{(**)} f(x) \stackrel{(<)}{>} f(x_0) \implies f$ hat in x_0 ein lokales Minimum (*Maximum*).

8. Extremwerte

- (iii) A sei indefinit und es seien $u, v \in \mathbb{R}^n$ wie in 7.2. Wegen 7.1 OBdA: $\|u\| = \|v\| = 1$. Dann:
 $x_0 + tu, x_0 + tv \in U_\delta(x_0)$ für $t \in (-\delta, \delta)$. Sei $t \in (-\delta, \delta), t \neq 0$. Mit $h := t \overset{(v)}{u}$ folgt aus 7.2
 und (**): $f(x_0 + t \overset{(v)}{u}) = f(x_0) + \frac{1}{2} Q_B(t \overset{(v)}{u}) = f(x_0) + \frac{t^2}{2} \underbrace{Q_B(\overset{(v)}{u})}_{>0/<0 \text{ (7.2)}} \overset{(>)}{<} f(x_0) \implies f$ hat
 in x_0 kein lokales Extremum. ■

Beispiele:

- (1) $D = \mathbb{R}^2, f(x, y) = x^2 + y^2 - 2xy - 5$. $f_x = 2x - 2y, f_y = 2y - 2x$; $\text{grad } f(x, y) = (0, 0) \iff x = y$. Stationäre: (x, x) ($x \in \mathbb{R}$).

$$f_{xx} = 2, f_{xy} = -2 = f_{yx}, f_{yy} = 2 \implies H_f(x, x) = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$\det H_f(x, x) = 0 \implies H_f(x, x)$ ist weder pd, noch nd, noch id.

Es ist $f(x, y) = (x - y)^2 - 5 \geq -5 \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$ und $f(x, x) = -5 \forall x \in \mathbb{R}$.

- (2) $D = \mathbb{R}^2, f(x, y) = x^3 - 12xy + 8y^3$.
 $f_x = 3x^2 - 12y = 3(x^2 - 4y), f_y = -12x + 24y^2 = 12(-x + 2y^2)$. $\text{grad } f(x, y) = (0, 0) \iff x^2 = 4y, x = 2y^2 \implies 4y^4 = 4y \implies y = 0 \text{ oder } y = 1 \implies (x, y) = (0, 0) \text{ oder } (x, y) = (2, 1)$

$$f_{xx} = 6x, f_{xy} = -12 = f_{yx}, f_{yy} = 48y. H_f(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & -12 \\ -12 & 0 \end{pmatrix}$$

$\det H_f(0, 0) = -144 < 0 \implies H_f(0, 0)$ ist indefinit $\implies f$ hat in $(0, 0)$ kein lokales Extremum.

$$H_f(2, 1) = \begin{pmatrix} 12 & -12 \\ -12 & 48 \end{pmatrix}$$

$12 > 0, \det H_f(2, 1) > 0 \implies H_f(2, 1)$ ist positiv definit $\implies f$ hat in $(2, 1)$ ein lokales Minimum.

- (3) $K := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x, y \geq 0, y \leq -x + 3\}, f(x, y) = 3xy - x^2y - xy^2$. Bestimme $\max f(K), \min f(K)$. $f(x, y) = xy(3 - x - y)$. $K = \partial K \cup K^\circ$. K ist beschränkt und abgeschlossen $\xrightarrow{3.3} \exists (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in K : \max f(K) = f(x_1, y_1), \min f(K) = f(x_2, y_2)$. $f \geq 0$ auf K , $f = 0$ auf ∂K , also $\min f(K) = 0$. f ist nicht konstant $\implies f(x_2, y_2) > 0 \implies (x_2, y_2) \in K^\circ \xrightarrow{8.1} \text{grad } f(x_1, x_2) = 0$. Nachrechnen: $(x_2, y_2) = (1, 1); f(1, 1) = 1 = \max f(K)$.