

14. Laurententwicklung

Für $z_0 \in \mathbb{C}$: $U_\infty(z_0) := \mathbb{C}$, $\dot{U}_\infty(z_0) = \mathbb{C} \setminus \{z_0\}$, $\frac{1}{0} := \infty$. Erinnerung: Satz 9.5: Sei γ ein stückweise glatter Weg in \mathbb{C} , $\varphi \in C(\text{Tr}(\gamma))$ und $g(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{\varphi(w)}{w-z} dw$ ($z \in \mathbb{C} \setminus \text{Tr}(\gamma)$). Dann: $g \in H(\mathbb{C} \setminus \text{Tr}(\gamma))$.

Satz 14.1

Seien $0 \leq r < R \leq \infty$; $A := \{z \in \mathbb{C} : r < |z| < R\}$ und $f \in H(A)$. Für $s \in (r, R)$ sei $\gamma_s(t) := se^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$ und $J(s) := \int_{\gamma_s} f(z) dz$. Dann ist J konstant auf (r, R) .

Beweis

$g(z) := zf(z)$ ($z \in A$). Dann: $f(z) = \frac{g(z)}{z}$ und $g \in H(A)$.

$$J(s) = \int_{\gamma_s} \frac{g(z)}{z} dz = \int_0^{2\pi} \frac{g(se^{it})}{se^{it}} se^{it} dt = \int_0^{2\pi} ig(se^{it}) dt$$

$$J \text{ ist auf } (r, R) \text{ db und } J'(s) = \int_0^{2\pi} i \frac{d}{ds} g(se^{it}) dt = \int_0^{2\pi} ig'(se^{it}) e^{it} dt = \frac{1}{s} \int_0^{2\pi} g'(se^{it}) se^{it} dt = \frac{1}{s} \int_0^{2\pi} g'(\gamma_s(t)) \gamma_s'(t) dt = \frac{1}{s} \int_{\gamma_s} g'(z) dz \stackrel{8.5}{=} 0 \Rightarrow J(s) \text{ konstant.} \quad \blacksquare$$

Satz 14.2 (Laurententwicklung)

Sei A wie in 14.1 und $f \in H(A)$. Dann existieren eindeutig bestimmte Funktionen $g \in H(U_R(0))$ und $h \in H(U_{\frac{1}{r}}(0))$ mit:

(*) $f(z) = g(z) + h(\frac{1}{z}) \quad \forall z \in A$ und $h(0) = 0$

(*) heißt die Laurentzerlegung von f , g heißt Nebenteil von f und die Funktion $z \rightarrow h(\frac{1}{z})$ ist der Hauptteil von f .

Beispiel

$f(z) = e^{\frac{1}{z}}$ $A = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ($r = 0, R = \infty$). Es gilt:

$f(z) = 1 + (e^{\frac{1}{z}} - 1)$, also $g(z) = 1$, $h(z) = e^z - 1$

Beweis

1. Eindeutigkeit: es sei $g, g_1 \in H(U_R(0))$, $h, h_1 \in H(U_{\frac{1}{r}}(0))$; $h_1(0) = 0 = h(0)$ und $g(z) + h(\frac{1}{z}) = f(z) = g_1(z) + h_1(\frac{1}{z}) \quad \forall z \in A$.

$$G := g - g_1 \in H(U_R(0)), \quad H := h_1 - h \in H(U_{\frac{1}{r}}(0))$$

$\Rightarrow G(z) = H(\frac{1}{z}) \quad \forall z \in A$ Dann ist $F : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, definiert durch

$$F(z) = \begin{cases} G(z) & (|z| < R) \\ H(\frac{1}{z}) & (|z| > r) \end{cases} \quad \text{auf } \mathbb{C} \text{ wohldefiniert. } F \in H(\mathbb{C}).$$

Sei (z_n) eine Folge in \mathbb{C} und $|z_n| \rightarrow \infty$. Dann $(\frac{1}{z_n}) \rightarrow 0$ und $z_n > r \quad \forall n \geq n_0$. $F(z_n) =$

14. Laurententwicklung

$$H\left(\frac{1}{z_n}\right) = h_1\left(\frac{1}{z_n}\right) - h\left(\frac{1}{z_n}\right) \rightarrow h_1(0) - h(0) = 0$$

Also $F(z) \rightarrow 0$ ($|z| \rightarrow \infty$) Somit:

$\exists \varrho > 0 : |F(z)| \leq 1 \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus U_\varrho(0)$. F stetig auf $\overline{U_\varrho(0)}$ $\Rightarrow F$ ist auf \mathbb{C} beschränkt. 10.2 $\Rightarrow F$ ist auf \mathbb{C} konstant; wegen $F(z) \rightarrow 0$ ($z \rightarrow \infty$) folgt: $F \equiv 0$

2. Existenz: fehlt hier nicht was ? Doch! ■

Definition

Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ eine Folge in \mathbb{C} , $z_0 \in \mathbb{C}$ und $A \subseteq \mathbb{C}$. Eine Reihe der Form $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ heißt eine **Laurentreihe**.

Diese Reihe heißt in $z \in \mathbb{C}$ (absolut) konvergent : $\iff \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ und $\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}(z - z_0)^{-n}$ konvergieren (absolut).

In diesem Fall: $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z - z_0)^n := \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}(z - z_0)^{-n}$. Die Laurentreihe heißt auf A (lokal) gleichmäßig konvergent : $\iff \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ und $\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}(z - z_0)^{-n}$ konvergieren auf A (lokal) gleichmäßig.

Satz 14.3

Sei $0 \leq r < R \leq \infty$, $A := \{z \in \mathbb{C} : r < |z - z_0| < R\}$ und $f \in H(A)$.

Dann hat f auf A die **Laurententwicklung** $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$. Die Laurentreihe konvergiert auf A absolut und lokal gleichmäßig. Die Koeffizienten a_n ($n \in \mathbb{Z}$) sind eindeutig bestimmt. Ist $r < \rho < R$ und $\gamma(t) := z_0 + \rho e^{it}$ $t \in [0, 2\pi]$, so gilt:

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}} dw \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ heißt **Nebenteil** von f ,

$\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}(z - z_0)^{-n} = \frac{a_{-1}}{z - z_0} + \frac{a_{-2}}{(z - z_0)^2} + \dots$ heißt der **Hauptteil** von f .

Beweis

O.B.d.A: $z_0 = 0$. 14.2 $\Rightarrow \exists g \in H(U_R(0)), \exists h \in H(U_{\frac{1}{r}}(0)) : f(z) = g(z) + h\left(\frac{1}{z}\right) \quad \forall z \in A$ und $h(0) = 0$. 10.4 $\Rightarrow g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \quad \forall z \in U_R(0)$ und $h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n \quad \forall z \in U_{\frac{1}{r}}$. Setze $a_{-n} := b_n$ für $n \geq 1$. Dann: $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$. 5.4 \Rightarrow die Laurentreihe konvergiert auf A absolut und lokal gleichmäßig.

14.2 $\Rightarrow g$ und h sind eindeutig bestimmt

5.4 $\Rightarrow a_n$ eindeutig bestimmt für $n \in \mathbb{Z}$. Sei $n \in \mathbb{Z}$; $\gamma(t) := \rho e^{it}$ ($t \in [0, 2\pi]$) $r < \rho < R$. Sei $w \in \text{Tr}(\gamma)$:

$$\frac{f(w)}{w^{n+1}} = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} a_\nu w^{\nu-n-1}.$$

Die letzte Reihe konvergiert auf $\text{Tr}(\gamma)$ gleichmäßig.

$$8.4 \Rightarrow \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w^{n+1}} = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} a_{\nu} \underbrace{\int_{\gamma} w^{\nu-n-1}}_{= \begin{cases} 0 & , \nu \neq n \\ 2\pi i & , \nu = n \end{cases}}$$

Satz 14.4

$D \subseteq \mathbb{C}$ sei offen, $z_0 \in D$, $\dot{D} := D \setminus \{z_0\}$ und $f \in H(\dot{D})$ (z_0 ist also eine isolierte Singularität). Sei $R > 0$ so, daß $U_R(z_0) \subseteq D$. f hat also, nach 14.3, auf $\dot{U}_R(z_0)$ die Laurententwicklung

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad (z \in \dot{U}_R(z_0))$$

- (1) f hat in z_0 eine hebbare Singularität $\iff a_{-n} = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$
- (2) f hat in z_0 einen Pol der Ordnung $m \in \mathbb{N}$ $\iff a_{-m} \neq 0, a_{-n} = 0 \quad \forall n > m$
- (3) f hat in z_0 eine wesentliche Singularität $\iff a_{-n} \neq 0$ für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$

Definition

Vorraussetzung wie in 14.4. $\text{Res}(f, z_0) := a_{-1}$ heißt das **Residuum** von f in z_0 .

Ist $0 < \rho < R$ und $\gamma(t) = z_0 + \rho e^{it}$ ($t \in [0, 2\pi]$), so folgt aus 14.3:

$$\text{Res}(f, z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(z) dz$$

Beweis

(1) Klar.

(2) O.B.d.A: $z_0 = 0$.

“ \Rightarrow “: 13.2 $\Rightarrow \exists g \in H(D) : f(z) = \frac{g(z)}{z^m} \quad \forall z \in \dot{D}$ und $g(z_0) \neq 0$

$$10.4 \Rightarrow g(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \dots \quad \forall z \in U_R(0) \Rightarrow f(z) = \frac{c_0}{z^m} + \frac{c_1}{z^{m-1}} + \dots + \frac{c_{m-1}}{z} + \sum_{n=m}^{\infty} c_n z^{n-m}$$

$\forall z \in \dot{U}_R(0)$. Eindeutigkeit der Laurententwicklung $\Rightarrow c_0 = a_{-m}$, also $a_{-m} = g(0) \neq 0$; weiter: $a_{-n} = 0 \quad \forall n > m$

“ \Leftarrow “: $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n + \frac{a_{-1}}{z} + \dots + \frac{a_{-m}}{z^m} \quad \forall z \in \dot{U}_R(0)$

$$\Rightarrow z^m f(z) = \underbrace{a_{-m} + \dots + a_{-1} z^{m-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{n+m}}_{=: g(z)} \quad \forall z \in \dot{U}_R(0)$$

Es ist $g \in H(U_R(0))$, $g(0) = a_{-m} \neq 0$ und $f(z) = \frac{g(z)}{z^m} \quad \forall z \in \dot{U}_R(0)$. 13.2 $\Rightarrow f$ hat einen Pol der Ordnung m .

(3) folgt aus (1) und (2). ■

Beispiele:

(i) $f(z) = \frac{1}{z-1}$ Laurententwicklung in $\mathbb{C} \setminus \{1\} : f(z) = \frac{1}{z-1}$, $\text{Res}(f, 1) = 1$

(ii) $f(z) = \frac{1}{z-1}$ Laurententwicklung in $\{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < \infty\}$.

$$\text{Für } |z| > 1 : \frac{1}{z-1} = \frac{1}{z} \frac{1}{1-\frac{1}{z}} = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^n}$$

14. Laurententwicklung

$$\begin{aligned}
 \text{(iii) } f(z) &= \frac{\cos(z)}{z^3}. \text{ Laurententwicklung in } \mathbb{C} \setminus \{0\}. f(z) = \frac{1}{z^3} \left(1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - + \dots \right) = \\
 &\underbrace{\frac{1}{z^3} - \frac{1}{2z}}_{\text{Hauptteil}} + \underbrace{\frac{z}{4!} - \frac{z^3}{6!} + - \dots}_{\text{Nebenteil}, \text{Res}(f, 0) = -\frac{1}{2}}
 \end{aligned}$$