

# Kapitel 3

## 2 Hauptsätze der Operatorentheorie

### 3.1 Das Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit (PUB)

**Theorem 3.1 (Baire)** Sei  $(M, d)$  ein vollständiger Raum,  $O_n \subseteq M$  offen und dicht,  $n \in \mathbb{N}$ . Dann ist  $D = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} O_n$  dicht in  $M$ .

**Beweis** Sei  $x_0 \in M$ ,  $\delta > 0$ ,  $B_0 = B(x_0, \delta)$ . z.z:  $B_0 \cap D \neq \emptyset$ .

Da  $O_1$  offen und dicht  $\exists x_1 \in O_1 \cap B_0$ ,  $\delta_1 \in (0, \frac{1}{2}\delta)$  mit  $\overline{B(x_1, \delta_1)} \subseteq O_1 \cap B_0$ . Induktiv findet man  $x_n \in O_n \cap B_{n-1}$ ,  $\delta_n \in (0, \frac{1}{2}\delta_{n-1})$ .  $B_n = B(x_n, \delta_n)$  mit  $\overline{B_n} \subseteq O_n \cap B_{n-1} \subseteq O_n \cap O_{n-1} \cap B_{n-2} \subseteq \dots \subseteq O_1 \cap \dots \cap O_n \cap B_0$  (\*). Da  $\delta_m < 2^{-m}\delta$  gilt ferner, dass  $x_n \in \overline{B_m} \subseteq B(x_m, 2^{-m}\delta)$  für  $n \geq m$ .

$\Rightarrow (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ist CF.  $\xrightarrow{\text{vollst.}} \exists x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \in \overline{B_m} \forall m \in \mathbb{N}$ .

(\*)  
 $\Rightarrow x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} O_n \cap B_0$ . ■

**Korollar 3.2** Sei  $(M, d)$  ein vollständiger metrischer Raum,  $A_n \subseteq M$  abg ( $n \in \mathbb{N}$ ) mit  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = M$ . Dann  $\exists N \in \mathbb{N}$ , sodass  $\mathring{A}_N \neq \emptyset$ .

**Beweis** Annahme:  $\mathring{A}_n = \emptyset \forall n \in \mathbb{N}$ .

Setze  $O_n = M \setminus A_n \Rightarrow O_n$  ist offen und dicht (nach Satz 1.12),  $n \in \mathbb{N} \xrightarrow{\text{Theo 3.1}} \bigcap_{n \in \mathbb{N}} O_n$  ist dicht in  $M$ .

Aber:  $M \setminus \bigcap_{n \in \mathbb{N}} O_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} M \setminus O_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = M$ . Wid! ■

**Theorem 3.3 (PUB)** Seien  $X$  ein BR,  $Y$  ein normierter VR und  $\mathcal{T} \subseteq B(X, Y)$ . Wenn  $\mathcal{T}$  punktweise beschränkt ist ( $\forall x \in X \exists c_x > 0 : \|Tx\| \leq c_x \forall T \in \mathcal{T}$ ), dann ist  $\mathcal{T}$  gleichmäßig beschränkt (d.h.  $\exists c > 0 : \|T\| \leq c \forall T \in \mathcal{T}$ )

**Beweis** Sei  $A_n = \{x \in X : \|Tx\| \leq n \forall T \in \mathcal{T}\}$   $n \in \mathbb{N}$ . Nach Vor:  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = X$ . Sei  $x_k \in A_n$ ,  $x_k \mapsto x$  in  $X$  ( $k \rightarrow \infty$ ). Dann:  $\|Tx\| = \lim_{k \rightarrow \infty} \|Tx_k\| \leq n \forall T \in \mathcal{T}$ . Korollar 3.2  $\Rightarrow \exists N \in \mathbb{N}$ ,  $y \in A_N$ ,  $\varepsilon > 0 : B(y, \varepsilon) \subseteq A_N$ .

Da  $\mathcal{T} \subseteq B(X, Y) : A_N$  ist konvex und aus  $x \in A_N$  folgt  $-x \in A_N$ , also  $-B(y, \varepsilon) \subseteq -A_N = A_N$ .

Damit  $\|z\| < \varepsilon \Rightarrow z = \frac{1}{2}(\underbrace{y+z}_{\in B(y,\varepsilon)} + \underbrace{z-y}_{\in -B(y,\varepsilon)}) \Rightarrow z \in \frac{1}{2}(A_N + A_N) \stackrel{A_N \text{ konvex}}{\subseteq} A_N (*)$ .

Sei  $x \in X$  mit  $\|x\| = 1$ . Dann:  $z = \varepsilon x \in A_N$  nach  $(*) \Rightarrow N \geq \|Tz\| = \varepsilon \|Tx\| \forall T \in \mathcal{T} \Rightarrow \|T\| \leq \frac{N}{\varepsilon} \forall T \in \mathcal{T}$ . ■

**Beispiel 3.4** Sei  $X = c_\infty$  mit sup Norm (kein BR!),  $Y = \mathbb{K}$ ,  $T_n x = nx_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Dann:  $T_n \in B(X, Y) = X^*$ ,  $\|T_m\| = n \rightarrow \infty$ . Sei  $x = (x_1, \dots, x_m, 0, \dots) \in c_\infty \Rightarrow |T_n x| \leq m \|x\|_\infty =: c_x \Rightarrow$  Theorem 3.3 benötigt vollst. von  $X$ .

**Korollar 3.5 (Banach-Steinhaus)** Seien  $X, Y$  BRe,  $D \subseteq X$  dichter UVR,  $T_n \in B(X, Y)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

Dann sind äquivalent:

1.  $\exists T \in B(X, Y)$  mit  $T_n x \rightarrow Tx$  ( $n \rightarrow \infty$ ) für alle  $x \in X$  ("starke Konvergenz")
2.  $T_n x$  konvergiert für  $n \rightarrow \infty$  und alle  $x \in X$ .
3.  $T_n x$  konvergiert für  $n \rightarrow \infty$  und alle  $x \in D$  und  $\|T_n\| \leq c$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ .

**Beweis**  $\Rightarrow$  b) trivial.

b)  $\Rightarrow$  c) Nach Vor. gilt  $\|T_n x\| \leq c_x \forall n \in \mathbb{N} \stackrel{\text{PUB}}{\Rightarrow} \exists c > 0 : \|T_n\| \leq c, \forall n \in \mathbb{N}$ .

c)  $\Rightarrow$  a) Setze  $T_0 x = \lim_{n \rightarrow \infty} T_n x$  für  $x \in D$ . Da  $T_n$  linear ist, ist  $T_0$  linear. Ferner:  $\|T_0 x\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|T_n x\| \stackrel{c)}{\leq} c \|x\|$  für alle  $x \in D \Rightarrow T_0 \in B(D, Y) \stackrel{\text{Lemma 1.64}}{\Rightarrow} \exists T \in B(X, Y)$  mit  $Tx = T_0 x \forall x \in D$ .

Sei  $\varepsilon > 0$ ,  $x \in X$ . Dann existiert ein  $y \in D$  mit  $\|x - y\| \leq \varepsilon$  (da  $\overline{D} = X$ ).

Damit  $\overline{\lim} \|T_n x - Tx\| \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (\|T_n(x - y)\| + \|T_n y - Ty\| + \|T(y - x)\|) \stackrel{c)}{\leq} c\varepsilon + \lim_{n \rightarrow \infty} \|T_n y - Ty\| + c\varepsilon = 2c\varepsilon \stackrel{\varepsilon \rightarrow 0}{\Rightarrow} \text{Beh.}$  ■

**Beispiel 3.6** Sei  $X = Y = c_0$ ,  $T_n x = (x_1, 2x_2, \dots, nx_n, 0, \dots)$  ( $n \in \mathbb{N}$ ,  $x \in X$ )  $\Rightarrow T_n \in B(c_0)$  mit  $\|T_n\| \geq \|T_n e_n\| = n \rightarrow \infty$ .

Aber: Für  $x = (x_1, \dots, x_m, 0, \dots) \in c_0$  gilt:  $T_n x \rightarrow (x_1, 2x_2, \dots, mx_m, 0, \dots) \Rightarrow$  man kann in c) die Beh  $\|T_n\| \leq c$  nicht weglassen.

**Beispiel 3.7 (Fourierreihen)** Sei  $X = \{f \in C(\mathbb{R}) : f(t) = f(t + 2\pi), t \in \mathbb{R}\}$  mit sup Norm (BR). Setze

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(kt) dt, \quad k \in \mathbb{N}_0 \\ b_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(kt) dt, \quad k \in \mathbb{N}_0 \end{aligned}$$

Wie in Bsp 2.22 konvergiert  $s_n(f, t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt)$  für  $n \rightarrow \infty$  in  $L^2([-\pi, \pi])$ , Werner S.130 zeigt:

$$\begin{aligned} s_n(f, t) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_n(s+t) D_n(s) ds \text{ mit} \\ D_n(t) &= \begin{cases} \frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2 \sin \frac{t}{2}}, & t \in [-\pi, \pi] \setminus \{0\} \\ n + \frac{1}{2}, & t = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Setze  $T_n f = s_n(f, 0) \Rightarrow T_n \in X^*$ .

Annahme:  $T_n$  konvergiert für alle  $f \in X \xrightarrow{\text{Kor 3.5}} \|T_n\| \leq c \forall n \in \mathbb{N}$ .

Aber: Wie in Bsp 1.67 gilt:  $\|T_n\| = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |D_n(t)| dt \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$ . (Werner IV, 2.10) Wid!  
 $\Rightarrow \exists f \in X : s_n(f, 0)$  divergiert.

“richtiges Gegenbeispiel” (Du Bois-Raymond 1876)

**Beispiel 3.8 (Links-Translation)** Sei  $X = L^p(\mathbb{R})$ ,  $1 \leq p < \infty$ . Setze  $(T(t)f)(s) = f(s+t)$ ,  $s \in \mathbb{R}$ ,  $(t \in \mathbb{R}, f \in X)$ . Klar.  $T(t)f$  ist mb,  $T(t)$  ist linear,  $\|T(t)f\|_p = (\int_{\mathbb{R}} |f(\underbrace{s+t}_{=r})|^p dt)^{\frac{1}{p}} = \|f\|_p \Rightarrow T(t) \in B(X)$  ist Isometrie. Seien  $f \in X, t, s, r \in \mathbb{R}$ ,  $(T(t), T(s), f) = (T(s)f)(r+t) = f(r+t+s) = (T(t+s)f)(r) \Rightarrow T(t)T(s) = T(t+s) = T(s)T(t)$ .

Weiter  $T(0) = T \Rightarrow T(t)$  ist invertierbar mit  $T(t)^{-1} = T(-t)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ .

Sei  $f \in C_0(\mathbb{R})$ ,  $t, t_0 \in \mathbb{R} : \|T(t)f - T(t_0)f\|_{\infty} := \sup_{s \in \mathbb{R}} |f(s+t) - f(s+t_0)| \rightarrow 0$  ( $t \rightarrow t_0$ ), da  $f$  glm stetig. Sei  $\text{supp} \subseteq [a, b]$  und  $|t - t_0| \leq 1$ . Dann  $\text{supp}(T(t)f - T(t_0)f) \subseteq [a - t_0 - 1, b + t_0 + 1] \xrightarrow{1.39} \|T(t)f - T(t_0)f\|_p \leq c_{a,b} \|T(t)f - T(t_0)f\|_{\infty} \rightarrow 0$  ( $t \rightarrow t_0$ )  $\xrightarrow{\text{Kor 3.5, Sa 1.44}} T(t)(f) \rightarrow T(t_0)f$  für  $f \in X$ ,  $t \rightarrow t_0$ .

$(T(t))_{t \in \mathbb{R}}$  heißt **stark stetige Operatorengruppe**.

**Bemerkung**  $t \mapsto T(t) \in B(X)$  ist bzgl der Operatornorm unstetig.

**Beweis** Sei  $t_0 = 0$ .

$$\begin{aligned} f &= t^{\frac{1}{p}} \mathbb{1}_{[0,t]}, \quad t > 0 \Rightarrow \|f\|_p = 1 \\ (T(t)f)(s) &= t^{-\frac{1}{p}} \mathbb{1}_{[0,t]}(s+t) = \begin{cases} t^{-\frac{1}{p}}, & -t \leq s \leq 0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \end{aligned}$$

$\Rightarrow \|T(t) - I\| \geq \|T(t)f - f\|_p = t^{-\frac{1}{p}} (\int_{-t}^0 1^p dt)^{\frac{1}{p}} = 2^{\frac{1}{p}} \Rightarrow T(t) \not\rightarrow I = T(0)$ ,  $t \rightarrow 0$  (in  $B(X)$ ).

(entsprechend für  $X = C_c(\mathbb{R})$ ) ■

**Beispiel 3.9 (Faltungsoperatoren)** Seien  $k \in L^1(\mathbb{R})$ ,  $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ ,  $1 \leq p < \infty$ . AE, Lemma X 7.2 zeigt:  $\mathbb{R}^{d+d} \ni (x, y) \mapsto k(x-y) \in \mathbb{K}$  ist mb  $\Rightarrow (x, y) \mapsto \varphi(x, y) = k(x-y)f(y)$  ist mb.

Sei  $p = 1$ . Fubini a)  $\int_{\mathbb{R}^{d+d}} |\varphi(x, y)| dx dy = \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \underbrace{|k(x-y)|}_{=z} |f(y)| dx dy = \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} |k(z)| dz |f(y)| dy =$

$\|k\|_1 \|f\|_1 \Rightarrow \varphi \in L^1(\mathbb{R}^{d+d})$ . Fubini b) zeigt:  $Tf(x) := (k * f)(x) := \int_{\mathbb{R}^d} k(x-y)f(y) dy$  ist für alle  $x \in \mathbb{R}^d$  definiert, in  $x$  int'bar und  $\|Tf\|_X \leq \|\varphi\|_{L^1(\mathbb{R}^{d+d})} \leq \|k\|_1 \|f\|_X$ .

Sei  $p \in (1, \infty)$ . Dann

$$\begin{aligned} \Psi(x) &:= \int_{\mathbb{R}^d} |\varphi(x, y)| dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} |k(x-y)|^{\frac{1}{p}} |k(x-y)|^{\frac{1}{p'}} |f(y)| dy \\ &\stackrel{\text{Hölder}}{\leq} \left( \int_{\mathbb{R}^d} |k(x-y)|^{\frac{p}{p'}} dy \right)^{\frac{1}{p'}} \cdot \left( \int_{\mathbb{R}^d} |k(x-y)|^{\frac{p}{p}} |f(y)|^p dy \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \|k\|_1^{\frac{1}{p'}} (|k| + |f|^p)^{\frac{1}{p}} \end{aligned}$$

für f.a.  $x \in \mathbb{R}^d$  (vgl. Fubini a))

Da  $|f|^p \in L^1(\mathbb{R}^d)$  liefert Fubini a):  $\Psi^p \in L^1(\mathbb{R}^d)$  und

$$\|\Psi\|_p^p = \|\Psi^p\|_p \stackrel{a)}{\leq} \|k\|_1^{\frac{p}{p'}} \cdot \|k\|_1 \cdot \| |f|^p \|_1 = \|k\|_1^p \cdot \|f\|_p^p (*)$$

$\stackrel{\text{Fub a), Kor 1.35}}{\implies} \varphi \in L^1(B(0, n) \times \mathbb{R}^d) \forall n \in \mathbb{N}$ .

$\stackrel{\text{Fub b)}}{\implies} Tf = k * f$  ist f.ü. definiert, mb und  $(*)$  liefert:

$$\textbf{Youngsche Ungleichung} \quad \|\Psi\|_p = \|k + f\|_p \leq \|k\|_1 \|f\|_p \quad (3.1)$$

für  $1 \leq p < \infty$ .

Insbesondere:  $T \in B(L^p(\mathbb{R})^d)$  mit  $\|T\| \leq \|k\|_1$ .