15.11.06

Das `latexki`-Team

Stand: 28. September 2017

Für $A \in \mathcal{L}_d$ und $f : A^d \to \mathbb{C} \qquad f : A \to [-\infty, \infty]$ beschränkt betrachtet man
$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & , x \in A \\ 0 & , x \in \mathbb{R}^d \backslash A \end{cases}$
f heißt integrierbar über A wenn $\tilde{f}$ integrierbar ist (über $\mathbb{R}^d$) und wir setzen

$$\int_A f(x)dx = \int_{\mathbb{R}^d} \tilde{f}(x)dx.$$

Beachte: Für integrierbare f auf $\mathbb{R}d$ gilt

$$\int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_A(x)f(x)dx = \int_A f(x)dx.$$

Bemerkung 1.34

a) Die obigen Def. sind unabhängig von der Darstellung der einfachen Funktionen und der Wahl der aprox. Fkt. φ_k (siehe AÂ§,X,2.1,2.7,3.2). Obiges Integral und das in Königsberger II stimmen überein.

b) Sei $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ messbar. Dann ist f int'bar $\iff$ $|f|$ int'bar.

   Beweis : „$\Rightarrow$“verwende zu φ_n aus Def. 1.33 die Folge $|\varphi_n|$ (AE,X,2.8).
   „$\Leftarrow$“Es gilt $f = f_1 - f_2 + if_3 - if_4$ mit $0 \leq f_k \leq |f|$. Verwende c). ■

c) Für $A \in \mathcal{L}_d$ setzt man $\mathcal{L}^1(A) : \{f : A \to \mathbb{C} : f \text{integrierbar}\}$.
   Dann gilt: $\mathcal{L}^1(A)$ ist VR und $||f||_1 = \int_A |f|dx$ ist Halbnorm auf $\mathcal{L}^1(A)$.
   (Beachte $||\mathbb{1}_N||_1 = \lambda(N) = 0$ für jede NM N.)
   Seien $f, g \in \mathcal{L}^1(A)$, α,$\beta \in \mathbb{K}$. Dann:

   i)
   $$\int_A (\alpha f + \beta g)dx = \alpha \int_A f dx + \beta \int_A g dx$$

   ii)
   $$\mathbb{K} = \mathbb{R}, f \leq g \implies \int_A f dx \leq \int_A g dx.$$

   iii)
   $$|\int_A f dx| \leq \int_A |f| dx \qquad \text{(nach b))}$$

iv) h messbar, $|h| \leq |f|$ dann $h \in \mathcal{L}^1(A)$. Analoge Eigenschaften für: $f : A \to [0, \infty]$. (Folgt leicht per Approximation. Siehe AE 2.4,2.9,2.11,3.3)

d) Sei $\varphi : A \to [0, \infty]$ messbar mit $\int_A \varphi dx < \infty$. Dann ist $\varphi(x) < \infty$ ffa. $x \in A$.

Beweis Anm.: $\varphi(x) = \infty$ für $x \in B$ mit $\lambda(B) > 0$. $B \subseteq A$ messbar. Dann folgt für alle $n \in N$: $\int_A \varphi dx \geq \int_A n \cdot \mathbb{1}_B dx = n \cdot \lambda(B) \to_{n\to\infty} \infty$ Wid.! ∎

Theorem 1.35 *(Lemma von Fatou, mojorisierte konvergenz)(Beppo Levi)*
Seien $f_n : A \to [0.\infty]$ *messbar* $(n \in \mathbb{N})$, $A \in \mathcal{L}_d$.
Dann gelten:

a)

$$\int_A \varliminf_{n\to\infty} f_n dx \leq \varliminf_{n\to\infty} \int_A f_n dx. (AE,X,3.7)$$

b)

$$f_n \leq f_{n+1} \implies \int_A \lim_{n\to\infty} f_n dx = \lim_{n\to\infty} \int_A f_n dx$$

Theorem 1.36 *(majorisierte Konvergenz)*
Seien $f_n, g \in \mathcal{L}^1(A), A \in \mathcal{L}_d$ $f_n(x) \to f(x) (n \to \infty)$ *ffa.* $x \in A$
und $|f_n(x)| \leq g(x)$ *ffa.* $x \in A$ *und alle* $n \in \mathbb{N}$.*Dann gilt:*

$$f \in \mathcal{L}^1(A) \text{ und } ||f_n - f||_1 \to 0 (n \to \infty) \text{ somit } \int_A f_n dx \to \int_A f dx.$$

Bemerkung Majorante bzw. Monotonie sind oben wesentlich.
Bsp: hier steht eine Zeichnung!
$\implies f_n(x) \to 0 \quad \forall x \geq 0, n \to \infty$ aber $||f_n||_1 = n \quad \to \infty$
Für $A \in \mathcal{L}_d$, $p \in [1, \infty]$ messbare $f : A \to \mathbb{C}$ definiert man

$$||f||_p = (\int_A |f(x)|^p dx)^{\frac{1}{p}} \quad p < \infty (\text{betrachte } |f|^p \text{ ist messbar.})$$

$$||f||_\infty = \inf\{c \geq 0 : |f(x)| \leq c, \text{ füer } x \notin N = N(c)\} = ess \sup_{x\in A} |f(x)| \quad (\text{wobei } \inf \varnothing = \infty)$$

$\mathcal{L}^p(A) = \{f : A \to \mathbb{C} : \text{messbar und } ||f||_p < \infty\}$
Schon gesehen $\mathcal{L}^1(A)$ ist VR, $|| \cdot ||_1$ ist Halbnorm.

Satz 1.37 $\mathcal{L}^\infty(A)$ *ist VR mit Halbnorm* $|| \cdot ||_\infty$

Beweis
Seien $f_j \in \mathcal{L}^\infty(A), |f_j(x)| \leq c_j \qquad x \notin N_j j = 1, 2, ... N_j = NM$
Dann: $|f_1(x) + f_2(x)| \leq c_1 + c_2 \qquad \forall x \notin N_1 \bigcup N_2$, wobei $N = N_1 \bigcup N_2 = NM$.
$\implies f_1 + f_2 \in \mathcal{L}^\infty(A), ||f_1 + f_2||_\infty \leq ||f_1||_\infty + ||f_2||_\infty$ "$||\alpha f_1|| = |\alpha| ||f_1||_\infty$" zeigt man genau so. ∎

Satz 1.38 *Seien* $p \in [1, \infty], A \in \mathcal{L}_d, f, g \in \mathcal{L}^p(A), h \in \mathcal{L}^p(A)$. *Dann:*

a) $fh \in \mathcal{L}^1(A)$. $\qquad \int\limits_A |fh|dx = ||fh||_1 \leq ||f||_p \cdot ||h||_p$

b) $||f + g||_p \leq ||f||_p + ||g||_p$
und $\mathcal{L}^p(A)$ *ist* VR *mit Halbnorm* $|| \cdot ||_p$ *(Minkowski).*

c) $f_n \in \mathcal{L}^p(A), f_n \to \varphi$ $f\tilde{A}\frac{1}{4}r$ $(n \to \infty)$. $|f_n| \leq g$ *fast überall,* $g \in \mathcal{L}^p(A)$.
Dann $\varphi \in \mathcal{L}^p(A), f_n \to \varphi$ *in* $\mathcal{L}^p(A) \quad (n \to \infty)$.

Beweis Für Fall $p = 1$ ist klar, verwende für Hölder (Bem 1.40)
Sei also $p \in (1, \infty)$ und $p' = \frac{p}{(p-1)}$.

a) Da f, g messbar sind, nur Abschätzung zu zeigen. Wie in (1.26) liefert(1.4)
$\int\limits_A |f(x)||h(x)|dx \leq \frac{t^p}{p} \underbrace{\int\limits_A |f(x)|^p dx}_{=||f||_p^p} + \frac{t^{-p'}}{p'} \int\limits_A |h(x)|^{p'} dx \qquad \forall t > 0$
$\underbrace{inf}_{t>0}$ liefert Behauptung mit (1.4)

b) $|f(x) + g(x)|^p \leq 2^p(|f(x)|^p + |g(x)|^p) \implies f + g \in \mathcal{L}^p(A)$
$\underbrace{||f + g||_p^p}_{endlich} = \int\limits_A |f + g||f + g|^{p-1} dx \leq \int\limits_A |f| + |f + g|^{p-1} dx + \int\limits_A |g||f + g|^{p-1} dx \leq$
$||f||_p (\int\limits_A |f + g|^{(p-1)\frac{p}{p-1}} dx)^{\frac{p-1}{p}} \leq ||f||_p (\int\limits_A |f + g|^{p-1} \frac{p}{p-1} dx)^{\frac{p-1}{p}} + ||g||_p (\int\limits_A |f + g|^p dx)^{\frac{p-1}{p}} = (||f||_p + ||g||_p)||f + g||_p^{p-1} \implies$ Behauptung (b).

c) Haben $|f_n|^p \leq g^p$ fast überall $(n \in \mathbb{N})$
und $|f_n|^p \to |f|^p$ fast überall $(n \to \infty)$
major.konv. $\implies |f|^p \in \mathcal{L}^1(A) \implies f \in \mathcal{L}^p(A)$
Setze $h_n = |f_n - f|^p \in \mathcal{L}^1(A) \implies h_n \to 0$ f.ü. $(n \to \infty)$.
$0 \leq h_n \leq 2^p(|f_n|^p + |f|^p) \leq 2^p(g^p + |f|^p) \in \mathcal{L}^1$. majorisierte Konvergenz:
$||f - f_n||_p = ||h_n||_1 \to 0 (n \to \infty)$ ∎