Kapitel 6

Einige Verteilungen

Im folgenden sei (Ω, \mathcal{A}, P) ein Wahrscheinlichkeitsraum

Definition 6.1 Eine Zufallsvariable $X : \Omega \to \mathbb{R}$ bzw. ihre Verteilung heißen **diskret** falls es eine endliche oder abzählbare Menge $C \subset \mathbb{R}$ gibt, so dass $P(X \in C) = 1$. O.B.d.A. sei $C = \{x_1, x_2, \ldots\}$ (x verschieden). Die Folge $\{p_X(k)\}_{k \in \mathbb{N}}$ mit $p_X(k) = P(X = x_k)$ heißt **Zähldichte** (oder Wahrscheinlichkeitsfunktion) von X

Bemerkung 6.1

- a) Für eine Zähldichte $\{p_X(k)\}_{k\in\mathbb{N}}$ gilt $p_X(k)\geq 0 \quad \forall k\in\mathbb{N} \text{ und } \sum_{k=1}^\infty p_X(k)=1$
- b) Die Verteilung von X wird durch die Zähldichte bestimmt, denn $\forall B \in \mathfrak{B}$ gilt:

$$P_X(B) = P_X(B \cap C) = P_X(\sum_{k|x_k \in B} \{x_k\}) = \sum_{k|x_k \in B} p_X(k)$$

6.1 Wichtige diskrete Verteilungen

6.1.1 Binomialverteilungen

Eine diskrete Zufallsvariable X heißt **binomialverteilt**, mit Parameter $n \in \mathbb{N}$ und $p \in [0,1]$ (kurz $X \sim B(n,p)$) falls $p_X(k) = P(X=k) = \binom{n}{k} \ p^k (1-p)^{n-k}$ für $k=0,1,\ldots,n$

Beispiel 6.1 Eine Münze wird n-mal geworfen

 $\Omega = \{(\omega_1, \dots, \omega_n) | \omega_i \in \{K, Z\}, i = 1, \dots, n\} = \{K, Z\}^n$ Es sei $X : \Omega \to \{0, 1, 2, \dots, n\}$ mit $X(\omega) = \sum_{i=1}^n 1_{\{\omega_i = K\}}$ die Anzahl der Kopf-Würfe in der Folge. Weiter seien die Ereignisse $A_i = \{\omega | \omega_i = K\} = \{\text{i-ter Wurf}\}$ Kopf $\}$, i = 1, ..., n unabhängig und $P(A_i) = p, i = 1, ..., n$ Dann gilt:

$$P(X = k) = P(\sum_{1 \le i_1 < \dots < i_k \le n} A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k} \bigcap_{j \notin \{i_1, \dots, i_k\}} A_j^c)$$

$$= \sum_{1 \le i_1 < \dots < i_k \le n} P(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k} \bigcap_{j \notin \{i_1, \dots, i_k\}} A_j^c)$$

$$= \sum_{1 \le i_1 < \dots < i_k \le n} \underbrace{P(A_{i_1}) \cdot \dots \cdot P(A_{i_k})}_{=p} \cdot \underbrace{\prod_{j \notin \{i_1, \dots, i_k\}} P(A_j^c)}_{=(1-p)^{n-k}}$$

$$= \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Die Verteilungsfunktion F_X ist hier

$$F_X(x) = \sum_{k \le x} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, x \in \mathbb{R}$$

hier fehlt ein Bild

Es gilt
$$P(X = x) = F_X(x) - F_X(x^-), x \in \mathbb{R}$$

6.1.2 Hypergeometrische Verteilung

Eine Urne enthält r rote und s schwarze Kugeln, r+s=n. Es werden m Kugeln ohne Zurücklegen gezogen. $X(\omega)$ sei die Anzahl der gezogenen roten Kugeln. Dann gilt:

$$P(X = k) = \frac{\binom{r}{k} \binom{n-r}{m-k}}{\binom{n}{m}}$$

X nimmt die Werte $k = \max\{0, m - s\}, \ldots, \min\{r, m\}$ an und X heißt **hypergeometrisch verteilt** mit Parameter $r, n, m \in \mathbb{N}$

6.1.3 Geometrische Verteilung

Eine diskrete Zufallsvariable X heißt **geometrisch verteilt** mit Parameter $p \in (0,1)$, falls

$$P(X = k) = (1 - p)^{k-1}p$$
 für $k = 1, 2, 3, ...$

Beispiel 6.2 Wir würfeln bis erstmals eine 6 fällt. $X(\omega)$ sei die Anzahl der benötigten Würfe. Dann gilt:

$$P(X = k) = P(\text{Wurf 1 bis } k - 1 \text{ keine 6, dann 6}) = \frac{5^{k-1} \cdot 1}{6^k} = \frac{1}{6} (\frac{5}{6})^{k-1}$$

6.1.4 Poisson-Verteilung

Eine diskrete Zufallsvariable X heißt **Poisson-verteilt** mit Parameter $\lambda > 0$ wenn: $P(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$ für k = 0, 1, 2...

Die Poisson-Verteilung kann man auffassen als Approximation der Binomialverteilung bei großem n und kleinem p. Es gilt:

Satz 6.1 Sei $\lambda > 0$ und $p_n := \frac{\lambda}{n} < 1$. Dann gilt:

$$\lim_{n \to \infty} \binom{n}{k} p_n^k (1 - p_n)^{n-k} = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$$

Beweis

$$\binom{n}{k} p_n^k (1 - p_n)^{n-k} = \binom{n}{k} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}$$

$$= \frac{\lambda^k}{k!} \cdot \underbrace{\frac{n!}{(n-k)!n^k}}_{\rightarrow 1} \cdot \underbrace{\frac{1 - \frac{\lambda}{n}}{(1 - \frac{\lambda}{n})^k}}_{\rightarrow 1}$$

$$\xrightarrow{n \to \infty} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

Wichtiges Beispiel:

Eine Versicherung hat ein Portfolio von n Risiken (n groß). Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Risiko in einem bestimmten Zeitraum einen Schaden liefert sei $p_n = \frac{\lambda}{n}$. Dann ist X = Anzahl der Risiken, die einen Schaden liefern $\sim B(n, p_n)$, also X in etwa Poisson-verteilt.

6.1.5 Diskrete Gleichverteilung

Eine diskrete Zuvallsvariable X heißt **gleichverteilt** auf $\{x_1, \ldots, x_m\} \subset \mathbb{R}$, falls: $P(X = x_i) = \frac{1}{m}$ für $i = 1, \ldots, m$

6.2 Wichtige stetige Verteilungen

Definition 6.2 Eine Zufallsvariable $X : \Omega \to \mathbb{R}$ bzw. ihre Verteilung heißen **absolutstetig**, falls die Verteilungsfunktion F_X von X die folgende Darstellung besitzt:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(y) dy \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

wobei $f_X : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ die **Dichte** von X ist.

Bemerkung 6.2

a) Jede integrierbare Funktion $f_X: \mathbb{R} \to [0, \infty)$ mit der Eigenschaft

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(y)dy = 1 \quad \text{definiert durch} \quad F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(y)dy$$

ist eine Verteilungsfunktion.

- b) Die Dichte ist das stetige Analogon zur Zähldichte. Es gilt: $P_X(B) = P(x \in B) = \int_B f_X(y) dy \quad \forall B \in \mathfrak{B}$ da P_X eine Verteilung ist (nachrechnen!) und auf $\{(-\infty, b], b \in \mathbb{R}\}$ mit F_X übereinstimmt. f_X kann aber Werte größer als 1 annehmen.
- c) Bei einer absolutstetigen Zufallsvariable gilt $P(X = x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ und $F_X(x)$ ist stetig. Ist $f_X(x)$ stetig, so ist F_X differenzierbar und es gilt: $F'_X(x) = f_X(x)$. Im Allgemeinen ist F_X aber <u>nicht</u> differenzierbar.

6.2.1 Gleichverteilung

Eine Zufallsvariable X heißt **gleichverteilt** auf dem Intervall (a, b), a < b (Schreibweise: $X \sim U(a, b)$ bzw. Unif(a, b)), falls die Dichte von X gegeben ist durch:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & \text{für } a < x < b \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Die Verteilungsfunktion ist gegeben durch:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{falls } x \le a \\ \int_a^x \frac{1}{b-a} dy = \frac{x-a}{b-a}, & \text{falls } x \le b \\ 1, & \text{falls } x \ge b \end{cases}$$

6.2.2 Exponential verteilt

Eine Zufallsvariable X heißt **exponentialverteilt** mit Parameter $\lambda > 0$ ($X \sim \exp(\lambda)$), falls die Dichte von X gegeben ist durch:

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \ge 0\\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Für die Verteilungsfunktion gilt:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0\\ \int_0^x \lambda e^{-\lambda y} dy = 1 - e^{-\lambda x}, & x \ge 0 \end{cases}$$

Die Exponentialverteilung wird oft zur Beschreibung von Lebens- oder Zeitdauern verwendet und besitzt die Eigenschaft der "Gedächtnislosigkeit", d.h. für zwei Zeitpunkte 0 < s < t gilt:

$$P(X \ge t | X \ge s) = \frac{P(X \ge t, X \ge s)}{P(X \ge s)} = \frac{P(X \ge t)}{P(X \ge s)}$$
$$= \frac{1 - F_X(t)}{1 - F_X(s)} = \frac{e^{-\lambda t}}{e^{-\lambda s}} = e^{-\lambda(t-s)} = P(X \ge t - s)$$

6.2.3 Normalverteilung

Eine Zufallsvariable X heißt **normalverteilt** mit Parameter $\mu \in \mathbb{R}$ und $\sigma^2 > 0$ (Schreibweise $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$) falls die Dichte von X gegeben ist durch:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}\right) , x \in \mathbb{R}$$
$$=: \varphi_{\mu,\sigma^2}(x)$$

Ist $\mu = 0$ und $\sigma^2 = 1$ so nennt man X standard normalverteilt. Die Verteilungsfunktion wird hier häufig mit Φ bezeichnet, also:

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{1}{2}y^2) \, dy$$

Lemma 6.2 Es gilt:

- a) $\lim_{x\to\infty} \Phi(x) = 1$
- b) $\Phi(x) = 1 \Phi(-x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$
- c) $X \sim N(\mu, \sigma^2), a \neq 0, b \in \mathbb{R} \rightarrow aX + b \sim N(a\mu + b, a^2\sigma^2)$

Beweis a) $(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ ist Konstante und wird hier weggelassen; Trick: wir quadrieren)

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\frac{1}{2}y^2) \, dy\right)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\frac{1}{2}(x^2 + y^2)) \, dx dy = \int_{0}^{2\pi} \int_{0}^{\infty} re^{-\frac{r^2}{2}} \, dr d\varphi = \int_{0}^{2\pi} -e^{\frac{r^2}{2}} \Big|_{0}^{\infty} d\varphi = 2\pi$$

- b) es gilt $\varphi_{0,1}(x) = \varphi_{0,1}(-x)$
- c) sei Y = aX + b. Es gilt:

$$P(Y \le y) = P(X \le \frac{y-b}{a}) = \int_{-\infty}^{\frac{y-b}{a}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp(-\frac{1}{2} \frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}) dx$$
$$= \int_{-\infty}^{y} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp(-\frac{1}{2} \frac{(x'-b-a\mu)^2}{a^2\sigma^2}) \frac{1}{a} dx'$$
$$\Rightarrow Y \sim \mathcal{N}(a\mu + b, a^2\sigma^2)$$