

11 Übung vom 07.07.

37. Aufgabe

Es bezeichne (i) die Strategie „i Mann gehen über den Strand, der Rest über das Hinkelsteinfeld“.

Römer	Gallier			
	(0)	(1)	...	(n)
(0)	1	0	...	0
(1)	1
...	0	0
(n)	1
(n+1)	0	...	0	1

Man rechnet einfach nach:

Der Wert des Spiels w ist echt größer als 0.

Damit sind die Strategien für Römer und Gallier Lösungen von linearen Programmen.

Für die Gallier

$$\begin{aligned}
 (DP) \quad & g(x) = \sum_{j=0}^n x_j = \max \\
 & x_0 \leq 1 \\
 & x_0 + x_1 \leq 1 \\
 & \vdots \\
 & x_{n-1} + x_n \leq 1 \\
 & x_n \leq 1 \\
 & x_0, \dots, x_n \geq 0
 \end{aligned}$$

Für die Römer

$$\begin{aligned}
 (PP) \quad & f(y) = \sum_{j=0}^{n+1} y_j = \min \\
 & y_0 + y_1 \geq 1 \\
 & \vdots \\
 & y_n + y_{n+1} \leq 1 \\
 & y_1, \dots, y_{n+1} \geq 0
 \end{aligned}$$

Summe der Nebenbedingungen in (DP) liefert:

$$2 \cdot g(x) \leq n+2 \Leftrightarrow g(x) \leq \frac{n+2}{2}$$

n gerade: Wir suchen nun einen zulässigen Punkt x' mit

$$g(x') = \frac{n+2}{2}$$

Fangen wir mit $x'_0 = 1$ an, so liefern die Nebenbedingungen den Vektor

$$x' = (1, 0, 1, 0, \dots, 1, 0, 1)$$

Der Punkt ist zulässig und optimal, also

$$x^0 = \frac{1}{g(x')}x' = \left(\frac{2}{n+2}, 0, \frac{2}{n+2}, 0, \dots, \frac{2}{n+2}, 0, \frac{2}{n+2}\right)$$

eine optimale Strategie.

Der Wert des Spiels ist $\frac{n+2}{2}$.

Wählen wir $y' = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2})$, so ist dies zulässiger Punkt von (PP) und es gilt $f(y') = g(x')$.

Dann ist

$$y^0 = \left(\frac{1}{n+2}, \dots, \frac{1}{n+2}\right)$$

optimale Strategie.

n ungerade:

$$g(x) \leq \frac{n+1}{2}$$

Setzen wir $x' = (\frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2})$, so gilt:

$$g(x') = \frac{n+1}{2}$$

Damit ist

$$x^0 = \left(\frac{1}{n+1}, \dots, \frac{1}{n+1}\right)$$

optimale Strategie und der Wert des Spiels ist $\frac{2}{n+1}$.

Ebenfalls ist $y' = (0, 1, \dots, 0, 1, 0)$ Lösung von (PP). Damit ist

$$y^0 = \left(0, \frac{2}{n+1}, \dots, 0, \frac{2}{n+1}, 0\right)$$

optimale Strategie.

Für den Wert w_n gilt:

n	1	2	3	4	5
w_n	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

Ab $n \geq 4$ sind die Chancen für die Gallier besser.

38. Aufgabe

Hilfsmittel: Satz von der monotonen Konvergenz

Es seien $a, b \in \mathbb{R}, a < b$. Weiter seien $g_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ mit

- $g_n(x) \rightarrow g(x)$ für alle $x \in [a, b]$
- $g_n \leq g_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ oder
 $g_n \geq g_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$

Dann gilt:

$$\int_a^b g_n(x) dx \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_a^b g(x) dx$$

Es sei nun $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ konvex.

Dann gilt:

(i) Die Folge

$$g_n(t) := \frac{f(t + \frac{1}{n}) - f(t)}{\frac{1}{n}}$$

ist monoton fallend in n (gemäß Vorlesung) und konvergiert punktweise gegen $f^+(t)$.

(ii) $t \mapsto g_n(t)$ ist Riemann-integrierbar, da f stetig ist.
 f' ist monoton wachsend und damit auch Riemann-integrierbar.

(iii) f besitzt eine Stammfunktion F .

Es sei o.E. $x > 0$.

$$\begin{aligned}
 \int_0^x f^+(t) dt &= \int_0^x \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(t) dt \\
 &\stackrel{\text{Hilfsmittel}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^x g_n(t) dt \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\int_0^x f(t + \frac{1}{n}) dt - \int_0^x f(t) dt}{\frac{1}{n}} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F(x + \frac{1}{n}) - F(0 + \frac{1}{n}) - (F(x) - F(0))}{\frac{1}{n}} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(F(x + \frac{1}{n}) - F(x)) - (F(0 + \frac{1}{n}) - F(0))}{\frac{1}{n}} \\
 &= F'(x) - F'(0) \\
 &= f(x) - f(0)
 \end{aligned}$$

Ersetzt man $f(t + \frac{1}{n})$ durch $f(t - \frac{1}{n})$, erhält man die Aussage für f^- .

39. Aufgabe

(a) Die Menge $\partial f(x)$ kann man schreiben als:

$$\partial f(x) = \bigcap_{y \in \mathbb{R}^n} \{v \in \mathbb{R}^n : \underbrace{\langle v, y - x \rangle}_{\text{fest}} \leq \underbrace{f(y)}_{\text{fest}} - \underbrace{f(x)}_{\text{fest}}\}$$

Als Schnitt von konvexen, abgeschlossenen Mengen ist $\partial f(x)$ also selbst abgeschlossen und konvex.

Es sei $v \in \partial f(x)$ und $y := x + \frac{v}{\|v\|}$.
Dann gilt:

$$\begin{aligned}
 \|v\| &= \langle v, (x + \frac{v}{\|v\|} - x) \rangle \\
 &\stackrel{v \in \partial f(x)}{\leq} f(x + \frac{v}{\|v\|}) - f(x) \\
 &\leq \max_{z \in S^{n-1}} f(x + z) - f(x) \\
 &\leq R \quad \text{für ein } R > 0
 \end{aligned}$$

$[S^{n-1} = \{u \in \mathbb{R}^n : \|u\| = 1\} \text{ Einheitssphäre}]$

Also ist $\partial f(x) \subseteq R \cdot B^n$ und damit beschränkt.

$[B^n \text{ ist die n-dimensionale Einheitskugel.}]$

(b) Es gilt:

$$\begin{aligned}
 v \in \partial f(x) &\Leftrightarrow \forall y \in \mathbb{R}^n : \langle v, y - x \rangle \leq f(y) - f(x) \\
 &\Leftrightarrow \forall u \in \mathbb{R}^n, u \neq 0, t > 0 : \langle v, tu \rangle \leq f(x + tu) - f(x) \\
 &\Leftrightarrow \forall u \in \mathbb{R}^n, u \neq 0, t > 0 : \langle v, u \rangle \leq \frac{f(x + tu) - f(x)}{t} \\
 &\Leftrightarrow \forall u \in \mathbb{R}^n, u \neq 0 : \langle v, u \rangle \leq f'(x; u)
 \end{aligned}$$

(c) Ist f differenzierbar, so gilt: $f'(x; u) = \langle \nabla f(x), u \rangle$.

$$\begin{aligned}
 v \in \partial f(x) &\stackrel{(b)}{\Leftrightarrow} \forall u \in \mathbb{R}^n, u \neq 0 : \langle v, u \rangle \leq \underbrace{\langle \nabla f(x), u \rangle}_{f'(x; u)} \\
 &\Leftrightarrow \forall u \in \mathbb{R}^n, u \neq 0 : \langle v - \nabla f(x), u \rangle \leq 0 \\
 &\stackrel{(*)}{\Leftrightarrow} \forall u \in \mathbb{R}^n, u \neq 0 : \langle v - \nabla f(x), u \rangle = 0 \\
 &\Leftrightarrow v = \nabla f(x)
 \end{aligned}$$

Anmerkung: (*) Umformung ok, weil die Ungleichung für alle $u \in \mathbb{R}^n, u \neq 0$ gilt (also zu $u^0 \neq 0$ auch für $-u^0 \neq 0$).

40. Aufgabe

$$\begin{aligned}
 f \text{ konvex} &\Leftrightarrow \forall z, u \in \mathbb{R}^n : g(t) := f(z + tu) \text{ ist konvex in } t \\
 &\Leftrightarrow \forall z, u \in \mathbb{R}^n : g'(t) = \langle \nabla f(z + tu), u \rangle \text{ ist monoton wachsend in } t \\
 &\Leftrightarrow \forall z, u \in \mathbb{R}^n, t_1 < t_2 : \langle \nabla f(z + t_1 u), u \rangle \leq \langle \nabla f(z + t_2 u), u \rangle \\
 &\Leftrightarrow \forall z, u \in \mathbb{R}^n, t_1 < t_2 : \langle \nabla f(z + t_1 u) - \nabla f(z + t_2 u), u \rangle \leq 0 \\
 &\Leftrightarrow \forall z, u \in \mathbb{R}^n, t_1 < t_2 : \langle \nabla f(z + t_1 u) - \nabla f(z + t_2 u), \underbrace{(t_1 - t_2) u}_{<0} \rangle \geq 0 \\
 &\stackrel{*}{\Leftrightarrow} \forall x, y \in \mathbb{R}^n : \langle \nabla f(y) - \nabla f(x), y - x \rangle \geq 0
 \end{aligned}$$

(*) : $u := y - x, z := x, t_1 = 0, t_2 = 1$ [einsetzen und umformen]

Anmerkung: f differenzierbar $\Leftrightarrow g$ differenzierbar (...)