

5. Differentiation

Vereinbarung: Stets in dem Paragraphen: $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{R}^n$, D offen und $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine Funktion, also $f = (f_1, \dots, f_m)$

Definition

- (1) Sei $k \in \mathbb{N}$. $f \in C^k(D, \mathbb{R}^m) : \iff f_j \in C^k(D, \mathbb{R})$ ($j = 1, \dots, m$)
- (2) Sei $x_0 \in D$. f heißt partiell differenzierbar in $x_0 : \iff$ jedes f_j ist in x_0 partiell differenzierbar. In diesem Fall heißt

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0) := \frac{\partial(f_1, \dots, f_m)}{\partial(x_1, \dots, x_n)} := J_f(x_0) := \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_0) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x_0) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x_0) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(x_0) \end{pmatrix}$$

die **Jacobi-** oder **Funktionalmatrix** von f in x_0 .

Beachte: (1) $J_f(x_0)$ ist eine $(m \times n)$ -Matrix, (2) Ist $m = 1 \implies J_f(x_0) = \text{grad } f(x_0)$

Erinnerung: Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion, $x_0 \in I$. φ ist in x_0 differenzierbar

$$\begin{aligned} & \stackrel{\text{ANA}}{\iff} \exists a \in \mathbb{R} : \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varphi(x_0 + h) - \varphi(x_0)}{h} = a \\ & \iff \exists a \in \mathbb{R} : \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varphi(x_0 + h) - \varphi(x_0) - ah}{h} = 0 \\ & \iff \exists a \in \mathbb{R} : \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varphi(x_0 + h) - \varphi(x_0) - ah}{|h|} = 0 \end{aligned}$$

Definition

- (1) Sei $x_0 \in D$. f heißt **differenzierbar** (db) in $x_0 : \iff \exists (m \times n)$ -Matrix $A : \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - Ah}{\|h\|} = 0$ (*)
- (2) f heißt differenzierbar auf $D : \iff f$ ist in jedem $x \in D$ differenzierbar.

Bemerkungen:

- (i) f ist differenzierbar in $x_0 \iff \exists (m \times n)$ -Matrix A :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - A(x - x_0)}{\|x - x_0\|} = 0$$

- (ii) Ist $m = 1$, so gilt: f ist differenzierbar in x_0

$$\iff \exists a \in \mathbb{R}^n : \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - ah}{\|h\|} = 0 (**)$$

(iii) Aus 2.1 folgt: f ist differenzierbar in $x_0 \iff$ jedes f_j ist differenzierbar in x_0 .

Satz 5.1 (Differenzierbarkeit und Stetigkeit)

f sei in $x_0 \in D$ differenzierbar

- (1) f ist in x_0 stetig
- (2) f ist in x_0 partiell differenzierbar und die Matrix A in (*) ist eindeutig bestimmt:
 $A = J_f(x_0)$. $f'(x_0) := A = J_f(x_0)$ (**Ableitung** von f in x_0).

Beweis

Sei A wie in (*), $A = (a_{jk})$, $\varrho(h) := \frac{f(x_0+h)-f(x_0)-Ah}{\|h\|}$, also: $\varrho(h) \rightarrow 0$ ($h \rightarrow 0$). Sei $\varrho = (\varrho_1, \dots, \varrho_m)$. 2.1 $\implies \varrho_j(h) \rightarrow 0$ ($h \rightarrow 0$) ($j = 1, \dots, m$)

$$(1) \quad f(x_0 + h) = f(x_0) + \underbrace{Ah}_{\xrightarrow{3.5} 0} + \underbrace{\|h\|\varrho(h)}_{\rightarrow 0 \text{ (} h \rightarrow 0 \text{)}} \rightarrow f(x_0) \quad (h \rightarrow 0)$$

- (2) Sei $j \in \{1, \dots, m\}$ und $k \in \{1, \dots, n\}$. Zu zeigen: f_j ist partiell differenzierbar und $\frac{\partial f_j}{\partial x_k}(x_0) = a_{jk}$. $\varrho_j(h) = \frac{1}{\|h\|}(f_j(x_0+h) - f_j(x_0) - (a_{j1}, \dots, a_{jn}) \cdot h) \rightarrow 0$ ($h \rightarrow 0$). Für $t \in \mathbb{R}$ sei $h = te_k \implies \varrho_j(h) = \frac{1}{|t|}(f_j(x_0 + te_k) - a_{jk}t) \rightarrow 0$ ($t \rightarrow 0$) $\implies \left| \frac{f_j(x_0 + te_k) - f_j(x_0)}{t} - a_{jk} \right| \rightarrow 0$ ($t \rightarrow 0$) $\implies f_j$ ist in x_0 partiell differenzierbar und $\frac{\partial f_j}{\partial x_k}(x_0) = a_{jk}$. ■

Beispiele:

(1)

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & , \text{ falls } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , \text{ falls } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Bekannt: f ist in $(0, 0)$ **nicht** stetig, aber partiell differenzierbar und $\text{grad } f(0, 0) = (0, 0)$
 5.1 $\implies f$ ist in $(0, 0)$ **nicht** differenzierbar.

(2)

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & , \text{ falls } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , \text{ falls } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Für $(x, y) \neq (0, 0)$: $|f(x, y)| = (x^2 + y^2) \left| \sin \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \right| \leq x^2 + y^2 \xrightarrow{(x,y) \rightarrow (0,0)} 0$ f ist in $(0, 0)$ stetig. $\frac{f(t, 0) - f(0, 0)}{t} = \frac{1}{t} t^2 \sin \frac{1}{|t|} = t \sin \frac{1}{|t|} \rightarrow 0$ ($t \rightarrow 0$) $\implies f$ ist in $(0, 0)$ partiell differenzierbar nach x und $f_x(0, 0) = 0$. Analog: f ist in $(0, 0)$ partiell differenzierbar nach y und $f_y(0, 0) = 0$. $\varrho(h) = \frac{1}{\|h\|} f(h) \stackrel{h=(h_1, h_2)}{=} \frac{1}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} (h_1^2 + h_2^2) \sin \frac{1}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} = \underbrace{\sqrt{h_1^2+h_2^2} \sin \frac{1}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}}_{\text{beschränkt}} \rightarrow 0$ ($h \rightarrow 0$) $\implies f$ ist differenzierbar in $(0, 0)$ und $f'(0, 0) = \text{grad } f(0, 0) = (0, 0)$

(3)

$$f(x, y) := \begin{cases} \frac{x^3}{x^2+y^2} & , \text{ falls } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , \text{ falls } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Übung: f ist in $(0, 0)$ stetig.

$$\frac{f(t, 0) - f(0, 0)}{t} = \frac{1}{t} \frac{t^3}{t^2} = 1 \rightarrow 1 \quad (t \rightarrow 0). \quad \frac{f(0, t) - f(0, 0)}{t} = 0 \rightarrow 0 \quad (t \rightarrow 0).$$

$\implies f$ ist in $(0, 0)$ partiell db und $\text{grad } f(0, 0) = (1, 0)$.

$$\text{Für } h = (h_1, h_2) \neq (0, 0) : \rho(h) = \frac{1}{\|h\|} (f(h) - f(0, 0) - \text{grad } f(0, 0) \cdot h) = \frac{1}{\|h\|} \left(\frac{h_1^3}{h_1^2 + h_2^2} - h_1 \right) = \frac{1}{\|h\|} \frac{-h_1 h_2^2}{h_1^2 + h_2^2} = \frac{-h_1 h_2^2}{(h_1^2 + h_2^2)^{3/2}}.$$

Für $h_2 = h_1 > 0 : \rho(h) = \frac{-h_1^3}{(\sqrt{2})^3 h_1^3} = -\frac{1}{(\sqrt{2})^3} \implies \rho(h) \not\rightarrow 0 \quad (h \rightarrow 0) \implies f$ ist in $(0, 0)$ nicht db.

Satz 5.2 (Stetigkeit aller partiellen Ableitungen)

Sei $x_0 \in D$ und alle partiellen Ableitungen $\frac{\partial f_j}{\partial x_k}$ seien auf D vorhanden und in x_0 stetig ($j = 1, \dots, m, k = 1, \dots, n$). Dann ist f in x_0 db.

Beweis

O.B.d.A: $m = 1$ und $x_0 = 0$. Der Übersicht wegen sei $n = 2$.

Für $h = (h_1, h_2) \neq (0, 0) :$

$$\rho(h) := \frac{1}{\|h\|} (f(h) - f(0, 0) - \underbrace{(h_1 f_x(0, 0) + h_2 f_y(0, 0))}_{=\text{grad } f(0, 0) \cdot h})$$

$$f(h) - f(0) = f(h_1, h_2) - f(0, 0) = \underbrace{f(h_1, h_2) - f(0, h_2)}_{=: \Delta_1} + \underbrace{f(0, h_2) - f(0, 0)}_{=: \Delta_2}$$

$$\varphi(t) := f(t, h_2), \quad t \text{ zwischen } 0 \text{ und } h_1 \implies \Delta_1 = \varphi(h_1) - \varphi(0), \quad \varphi'(t) = f_x(t, h_2)$$

Aus dem Mittelwertsatz aus Analysis I folgt: $\exists \xi = \xi(h)$ zw. 0 und $h_1 : \Delta_1 = h_1 \varphi'(\xi) = h_1 f_x(\xi, h_2)$
 $\exists \eta = \eta(h)$ zw. 0 und $h_2 : \Delta_2 = h_2 \varphi(\eta) = h_2 f_y(\eta, h_2)$

$$\implies \rho(h) := \frac{1}{\|h\|} (h_1 f_x(\xi, h_2) - h_2 f_y(0, \eta) - (h_1 f_x(0, 0) + h_2 f_y(0, 0))) \\ = \frac{1}{\|h\|} h \underbrace{(f_x(\xi, h_2) - f_x(0, 0), f_y(0, \eta) - f_y(0, 0))}_{=: v(h)} = \frac{1}{\|h\|} h \cdot v(h)$$

$$\implies |\rho(h)| = \frac{1}{\|h\|} |h \cdot v(h)| \stackrel{\text{CSU}}{\leq} \frac{1}{\|h\|} \|h\| \|v(h)\| = \|v(h)\|$$

f_x, f_y sind stetig in $(0, 0) \implies v(h) \rightarrow 0 \quad (h \rightarrow 0) \implies \rho(h) \rightarrow 0 \quad (h \rightarrow 0)$ ■

Folgerung 5.3

Ist $f \in C^1(D, \mathbb{R}^m) \implies f$ ist auf D db.

Definition

Sei $k \in \mathbb{N}$ und $f \in C^k(D, \mathbb{R}^m)$. Dann heißt f **auf D k -mal stetig db.**

Beispiele:

$$(1) \quad f(x, y, z) = (x^2 + y, xyz). \quad J_f(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2x & 1 & 0 \\ yz & xz & xy \end{pmatrix} \implies f \in C^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$$

$$\stackrel{5.3}{\implies} f \text{ ist auf } \mathbb{R}^3 \text{ db und } f'(x, y, z) = J_f(x, y, z) \quad \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

$$(2) \quad \text{Sei } f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m \text{ linear, es ex. also eine } (m \times n)\text{-Matrix } A : f(x) = Ax \quad (x \in \mathbb{R}^n).$$

Für $x_0 \in \mathbb{R}^n$ und $h \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ gilt:

$$\rho(h) = \frac{1}{\|h\|} (f(x_0 + h) - f(x_0) - Ah) = \frac{1}{\|h\|} (f(x_0) + f(h) - f(x_0) - f(h)) = 0.$$

Also: f ist auf \mathbb{R}^n db und $f'(x) = A \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$. Insbesondere ist $f \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$.

$$(2.1) \quad n = m \text{ und } f(x) = x = Ix \quad (I = (m \times n)\text{-Einheitsmatrix}). \text{ Dann: } f'(x) = I \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

$$(2.2) \quad m = 1 : \exists a \in \mathbb{R}^n : f(x) = ax \quad (x \in \mathbb{R}^n) \text{ (Linearform)}. \quad f'(x) = a \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

(3)

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} & , \text{ falls } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , \text{ falls } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Bekannt: f ist in $(0, 0)$ db. Übungsblatt: f_x, f_y sind in $(0, 0)$ *nicht* stetig.

$$(4) \quad \text{Sei } I \subseteq \mathbb{R} \text{ ein Intervall und } g = (g_1, \dots, g_m) : I \rightarrow \mathbb{R}^m; \quad g_1, \dots, g_m : I \rightarrow \mathbb{R}.$$

g ist in $t_0 \in I$ db $\iff g_1, \dots, g_m$ sind in $t_0 \in I$ db. In diesem Fall gilt: $g'(t_0) = (g'_1(t_0), \dots, g'_m(t_0))$.

$$(4.1) \quad m = 2 : g(t) = (\cos t, \sin t), \quad t \in [0, 2\pi]. \quad g'(t) = (-\sin t, \cos t).$$

$$(4.2) \quad \text{Seien } a, b \in \mathbb{R}^m, \quad g(t) = a + t(b - a), \quad t \in [0, 1], \quad g'(t) = b - a.$$

Satz 5.4 (Kettenregel)

f sei in $x_0 \in D$ db, $\emptyset \neq E \subseteq \mathbb{R}^m$, E sei offen, $f(D) \subseteq E$ und $g : E \rightarrow \mathbb{R}^p$ sei db in $y_0 := f(x_0)$. Dann ist $g \circ f : D \rightarrow \mathbb{R}^p$ db in x_0 und

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0) \quad (\text{Matrizenprodukt})$$

Beweis

$$A := f'(x_0), \quad B := g'(y_0) = g'(f(x_0)), \quad h := g \circ f.$$

$$\tilde{g}(y) = \begin{cases} \frac{g(y) - g(y_0) - B(y - y_0)}{\|y - y_0\|} & , \text{ falls } y \in E \setminus \{y_0\} \\ 0 & , \text{ falls } y = y_0 \end{cases}$$

g ist db in $y_0 \implies \tilde{g}(y) \rightarrow 0 \quad (y \rightarrow y_0)$. Aus Satz 5.1 folgt, dass f stetig ist in $x_0 \implies f(x) \rightarrow f(x_0) = y_0 \quad (x \rightarrow x_0) \implies \tilde{g}(f(x)) \rightarrow 0 \quad (x \rightarrow x_0)$

Es ist $g(y) - g(y_0) = \|y - y_0\| \tilde{g}(y) = B(y - y_0) \forall y \in E$.

$$\begin{aligned} \frac{h(x) - h(x_0) - BA(x - x_0)}{\|x - x_0\|} &= \frac{1}{\|x - x_0\|} (g(f(x)) - g(f(x_0)) - BA(x - x_0)) \\ &= \frac{1}{\|x - x_0\|} (\|f(x) - f(x_0)\| \tilde{g}(f(x)) + B(f(x) - f(x_0)) - BA(x - x_0)) \\ &= \underbrace{\frac{\|f(x) - f(x_0)\|}{\|x - x_0\|}}_{=: D(x)} \underbrace{\tilde{g}(f(x)) + B(f(x) - f(x_0)) - BA(x - x_0)}_{\xrightarrow{f \xrightarrow{\text{db}} 0} 0} \end{aligned}$$

Noch zu zeigen: $D(x)$ bleibt in der „Nähe“ von x_0 beschränkt.

$$\begin{aligned} 0 \leq D(x) &= \frac{\|f(x) - f(x_0) - A(x - x_0) + A(x - x_0)\|}{\|x - x_0\|} \\ &= \underbrace{\frac{\|f(x) - f(x_0) - A(x - x_0)\|}{\|x - x_0\|}}_{\xrightarrow{0} 0} + \underbrace{\frac{\|A(x - x_0)\|}{\|x - x_0\|}}_{\leq \|A\|}. \end{aligned}$$

Wichtigster Fall $g = g(x_1, \dots, x_m)$ reellwertig, $h(x) = h(x_1, \dots, x_n) = g(f_1(x_1, \dots, x_n), f_2(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n))$.

$$h_{x_j}(x) = g_{x_1}(f(x)) \frac{\partial f_1}{\partial x_j}(x) + g_{x_2}(f(x)) \frac{\partial f_2}{\partial x_j}(x) + \dots + g_{x_m}(f(x)) \frac{\partial f_m}{\partial x_j}(x)$$

Beispiel

$$g = g(x, y, z), \quad h(x, y) = g(xy, x^2 + y, x \sin y) = g(f(x, y)).$$

$$h_x(x, y) = g_x(f(x, y))y + g_y(f(x, y))2x + g_z(f(x, y)) \sin y.$$

$$h_y(x, y) = g_x(f(x, y))x + g_y(f(x, y))1 + g_z(f(x, y))x \cos y.$$

Hilfssatz

Es sei A eine $(m \times n)$ -Matrix (reell), es sei B eine $(n \times n)$ -Matrix (reell) und es gelte

(i) $BA = I (= (n \times n)\text{-Einheitsmatrix})$ und

(ii) $AB = \tilde{I} (= (m \times m)\text{-Einheitsmatrix})$

Dann: $m = n$.

Beweis

$\Phi(x) := Ax (x \in \mathbb{R}^n)$. Lin. Alg. $\implies \Phi$ ist linear, $\Phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$. $\xrightarrow{(i)} \Phi$ ist injektiv, also $\text{Kern} \Phi = 0$. (ii) Sei $z \in \mathbb{R}^m, x := Bz \xrightarrow{(ii)} z = ABz = Ax = \Phi(x) \implies \Phi$ ist surjektiv. Dann: $n = \dim \mathbb{R}^n \stackrel{\text{LA}}{=} \dim \text{Kern} \Phi + \dim \Phi(\mathbb{R}^n) = m$. ■

Satz 5.5 (Injektivität und Dimensionsgleichheit)

$f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ sei db auf D , es sei $f(D)$ offen, f injektiv auf D und $f^{-1} : f(D) \rightarrow \mathbb{R}^n$ sei db auf $f(D)$. Dann:

(1) $m = n$

$$(2) \quad \forall x \in D : f'(x) \text{ ist eine invertierbare Matrix und } f'(x)^{-1} = (f^{-1})'(f(x))$$

Beachte:

- (1) Ist D offen und $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$ db, so muss i. A. $f(D)$ nicht offen sein. Z.B.: $f(x) = \sin x, D = \mathbb{R}, f(D) = [-1, 1]$
- (2) Ist D offen, $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$ db und injektiv, so muss i.A. f^{-1} nicht db sein. Z.B.: $f(x) = x^3, D = \mathbb{R}, f^{-1}$ ist in 0 nicht db.

Beweis

von 5.5: $g := f^{-1}; x_0 \in D, z_0 := f(x_0) (\implies x_0 = g(z_0))$ Es gilt: $g(f(x)) = x \forall x \in D, f(g(z)) = z \forall z \in f(D) \xrightarrow{5.4} g'(f(x)) \cdot f'(x) = I \forall x \in D; f'(g(z)) \cdot g'(z) = \tilde{I} \forall z \in f(D) \implies \underbrace{g'(z_0)}_{=:B} \cdot \underbrace{f'(x_0)}_{=:A} = I, f'(x_0) \cdot g'(z_0) = \tilde{I} \xrightarrow{5.5} m = n \text{ und } f'(x_0)^{-1} = g'(z_0) = (f^{-1})'(f(x_0)). \quad \blacksquare$