2. Der Integralsatz von Gauss im $\mathbb{R}^2$

Stets in diesem Paragraphen: $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ sei fest, $R : [0, 2\pi] \to (0, \infty)$ sei stetig und stückweise stetig differenzierbar, $R(0) = R(2\pi)$.

$$\gamma(t) := (x_0 + R(t)\cos t, y_0 + R(t)\sin t) \quad (t \in [0, 2\pi])$$

γ ist stückweise stetig differenzierbar, also rektifizierbar, $\gamma(0) = \gamma(2\pi)$

$$B := \{(x_0 + r\cos t, y_0 + r\sin t) : t \in [0, 2\pi], 0 \leq r \leq R(t)\}$$

Sind γ und B wie oben, so heißt B **zulässig**. B ist beschränkt und abgeschlossen, $\partial B = \Gamma_\gamma = \gamma([0, 2\pi])$. Analysis II, 17.1 $\implies B$ ist messbar.

Beispiel
$R(t) = 1 \implies \gamma(t) = (x_0 + \cos t, y_0 + \sin t)$. $B = \overline{U_1(x_0, y_0)}$

Satz 2.1 (Integralsatz von Gauss im $\mathbb{R}^2$)
B und $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2)$ seien wie oben, B also zulässig und $\partial B = \Gamma_\gamma$. Weiter sei $D \subseteq \mathbb{R}^2$ offen, $D \supseteq B$ und $f = (u, v) \in C^1(D, \mathbb{R}^2)$. Dann:

(1) $\int_B u_x(x, y) d(x, y) = \int_\gamma u(x, y) dy$

(2) $\int_B v_y(x, y) d(x, y) = -\int_\gamma v(x, y) dx$

(3) $\int_B div f(x, y) d(x, y) = \int_\gamma (u dy - v dx)$

Anwendung 2.2
B und γ seien wie in 2.1. Mit $f(x, y) = (x, y)$ folgt

$$\lambda_2(B) = \int_\gamma x dy = -\int_\gamma y dx = \frac{1}{2}\int_\gamma (x dy - y dx)$$

Beweis
(nach Lemmert)
Wir zeigen nur (1). ((2) zeigt man Analog, (3) folgt aus (1) und (2).)
OBdA: $(x_0, y_0) = (0, 0)$ und γ stetig db. Also: $\gamma(t) = (R(t)\cos t, R(t)\sin t)$ mit $R(t)$ stetig db.
$A := \int_B u_x(x, y) d(x, y)$. Z.z.: $A = \int_0^{2\pi} u(\gamma(t))\gamma_2'(t) dt$
Polarkoordinaten, Substitution, Fubini $\implies A = \int_0^{2\pi}(\int_0^{R(t)} u_x(r\cos t, r\sin t) r dr) dt$.
$\beta(r, t) := u(r\cos t, r\sin t)$. Nachrechnen: $u_x(r\cos t, r\sin t) r = r\beta_r(r, t)\cos t - \beta_t(r, t)\sin t \implies$
$A = \int_0^{2\pi}(\int_0^{R(t)}(r\beta_r(r, t)\cos t - \beta_t(r, t)\sin t) dr) dt$

$\int_0^{R(t)} r\beta_r(r,t)dr = \underbrace{r\beta(r,t)|_{r=0}^{r=R(t)}}_{=R(t)\beta(R(t),t)=R(t)u(\gamma(t))} - \underbrace{\int_0^{R(t)} \beta(r,t)dr}_{=:\alpha(t)}$

AII,21.3 $\implies$ α ist stetig db und $\alpha'(t) = R'(t)\beta(R(t),t) + \int_0^{R(t)} \beta_t(r,t)dr$
$\implies \int_0^{R(t)} \beta_t(r,t)dr = \alpha'(t) - R'(t)u(\gamma(t))$
$\implies A = \int_0^{2\pi}(R(t)u(\gamma(t))\cos t - \alpha(t)\cos t - \alpha'(t)\sin t + R'(t)u(\gamma(t))\sin t)dt$
$= \int_0^{2\pi} u(\gamma(t))\underbrace{(R(t)\sin t)'}_{\gamma_2'(t)}dt - \underbrace{\int_0^{2\pi}(\alpha(t)\sin t)'dt}_{=\alpha(t)\sin t|_0^{2\pi}=0}$ ∎