# 2 Morphismen von Schemata

# §6 Einbettungen

#### Definition 2.6.1

Sei  $i:(Y,\mathcal{O})\to(X,\mathcal{O}_X)$  ein Morphismus von Schemata.

- (a) i heißt offene Einbettung, wenn i ein Isomorphismus auf ein offenes Unterschema von X ist.
- (b) i heißt abgeschlossene Einbettung, wenn i ein Homöomorphismus auf eine abgeschlossene Teilmenge Z := i(Y) von X ist und  $i^{\sharp} : \mathcal{O}_X \to i_* \mathcal{O}_Y$  surjektiv ist.  $(Z, i_* \mathcal{O})$  heißt dann abgeschlossenes Unterschema von X.

### Beispiele 2.6.2

- (a) Sei  $X = \operatorname{Spec} R$  affin. Die abgeschlossenen Teilmengen von X sind die V(I),  $(I \subseteq R \text{ Ideal})$ . V(I) wird zum abgeschlossenen Unterschema durch die Schemastruktur als  $\operatorname{Spec}(R/I)$ . Die abgeschlossene Einbettung  $\operatorname{Spec}(R/I) \to \operatorname{Spec} R$  wird induziert von der Restklassenabbildung  $R \to R/I$ . Warnung:  $V(I) = V(I^2)$ , aber  $R/I = R/I^2$  gilt im Allgemeinen nicht!
- (b) Seien k ein Körper, R = k[X, Y] und  $I = (X^2, XY) \subsetneq (X)$ . Es gilt V(I) = V(X) (y-Achse). In V(I) ist außerhalb von 0 = (0, 0) = V(X, Y), also auf

$$D(Y) = \operatorname{Spec}\left(k[X,Y]/I\right)_{Y} = \operatorname{Spec}(k[Y]_{Y})$$

das abgeschlossene Unterschema V(I), also  $\operatorname{Spec}(R/I)$ , isomorph zu  $\operatorname{Spec}(R/I)$ . ? Aber:  $\mathcal{O}_{\operatorname{Spec}(R/I),0}$  enthält ein nilpotentes Element, nämlich X.

# Erinnerung / Definition 2.6.3

(Übungblatt 3, Aufgabe 1)

Ein Schema  $(X, \mathcal{O}_X)$  heißt reduziert, wenn für jedes  $x \in X$  der Halm  $\mathcal{O}_{X,x}$  ein reduzierter Ring ist. Äquivalent: Für jedes offene  $U \subseteq X$  ist  $\mathcal{O}_X(U)$  ein reduzierter Ring.

#### Proposition 2.6.4

Zu jedem Schema  $(X, \mathcal{O}_X)$  gibt es ein eindeutiges abgeschlossenes Unterschema  $X_{red}$  von X, das folgende UAE erfüllt:

Ist  $f:Y\to X$  ein Morphismus von einem reduzierten Schema Y, so gibt es genau einen Morphismus  $\tilde{f}:Y\to X_{red}$  mit



 $f = i \circ \tilde{f}$ . Dabei ist  $X = X_{red}$  (gleich als topologische Räume).

**Beweis** (1) Sei  $X = \operatorname{Spec} R$  affin. Setze  $X_{red} := \operatorname{Spec}(R/\sqrt{(0)})$ , dann ist  $X_{red}$  ein reduziertes abgeschlossenes Unterschema.

UAE: Sei Y reduziert,  $f:Y\to X$  ein Morphismus mit zugehörigem Ringhomomorphismus  $\alpha_f:R\to \mathcal{O}_Y(Y).$ 

Zu zeigen:  $\sqrt{(0)} \subseteq \operatorname{Kern}(\alpha_f)$ 

Sei also  $a \in \sqrt{(0)}$ , also  $a^n = 0$  für  $n \ge 1$ . Daraus folgt:  $(\alpha_f(a))^n = 0$ . Und weil Y reduziert ist:  $\alpha_f(a) = 0$ .

(2) Allgemeiner Fall:

Benutze:

$$\left(R/\sqrt{(0)}\right)_f \cong R_f/\sqrt{(0)} \qquad \Box$$

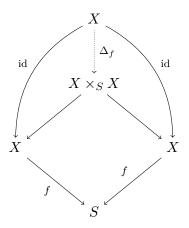
### Folgerung 2.6.5

Zu jedem abgeschlossenen Unterschema Z von X gibt es ein eindeutig bestimmtes reduziertes Unterschema  $Z_{red}$  (die "reduzierte induzierte Struktur").

# §7 Separierte Morphismen

#### Definition 2.7.1

(a) Ein Morphismus  $f:X\to S$  von Schemata heißt separiert, wenn der "Diagonalmorphismus"  $\Delta_f:X\to X\times_S X$  eine abgeschlossene Einbettung ist.



(b) X heißt separiert, wenn  $X \to \operatorname{Spec} \mathbb{Z}$  separiert ist.

#### Beispiele

Sei X die affine Gerade mit doppeltem Nullpunkt. X ist nicht separiert (über k):

Seien also  $S=\operatorname{Spec} k, U=\mathbb{A}^1_k\backslash\{(0,0)\}=\operatorname{Spec}(k[X]_X)$  und X die Verklebung von  $\mathbb{A}^1_k$  mit sich selbst längs U. Es ist

$$U \times_S U = \mathbb{A}_k^2$$
 - "Achsenkreuz"  
 $\Delta = \Delta_f(X) = \{(u, u) : u \in U\} \cup \{(0_1, 0_1), (0_2, 0_2)\}$ 

Es gilt

$$\bar{\Delta} = \Delta \cup \{(0_1, 0_2), (0_2, 0_1)\}$$

denn: jede Umgebung von  $(0_1, 0_2)$  enthält Punkte von  $\Delta!$ 

#### Bemerkung 2.7.2

Jeder Morphismus von affinen Schemata ist separiert.

**Beweis** Sei  $X = \operatorname{Spec} B, Y = \operatorname{Spec} A, f : X \to Y, \alpha : A \to B, \alpha$  der Ringhomomorphismus zu f. Dann ist  $X \times_Y X = \operatorname{Spec}(B \otimes_A B)$ .  $\Delta$  wird induziert von

$$\mu:\begin{array}{ccc} B\otimes_A B & \longrightarrow & B \\ b_1\otimes b_2 & \longmapsto & b_1\cdot b_2 \end{array}$$

 $\mu$  ist surjektiv, also ist  $\Delta$  abgeschlossen. (Das ist so, weil ein surjektiver Ringhomomorphismus Primideale auf Primideale abbildet und deswegen alle Primideale, die

$$\bigcap_{\mathfrak{p} \text{ Primideal}} \mu^{-1}(\mathfrak{p})$$

enthalten, schon Urbilder von Primidealen waren.)

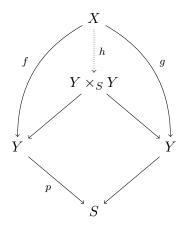
#### Bemerkung 2.7.3

Seien  $f, g: X \to Y$  Morphismen von S-Schemata. Ist Y über S separiert, so ist

$$E(f,g) := \{ x \in X : f(x) = g(x) \}$$

abgeschlossen in X.

**Beweis** Sei  $h: X \to Y \times_S Y$  der von f und g induzierte Morphismus.



Dann ist  $E(f,g) = h^{-1}(\Delta)$ ,  $(\Delta = \Delta_p(Y))$ . Also ist E(f,g) abgeschlossen.

#### Proposition 2.7.4

Seien  $(X, \mathcal{O}_X)$  ein Schema, R ein diskreter Bewertungsring, K = Quot(R), T = Spec R. Dann gibt es eine natürliche Bijektion

$$\operatorname{Hom}(T,X) \longrightarrow \{(x_0,x_1,i): x_0,x_1 \in X \text{ mit } x_0 \in \overline{\{x_1\}}, i: \kappa(x_1) \to K \text{ K\"orperhomomorphismus } i(\mathcal{O}_{Z,x_0}) \subseteq R \text{ und } i(m_{Z,x_0}) = m_R \cap i(\mathcal{O}_{Z,x_0})\},$$

wobei  $Z = \overline{\{x_1\}}_{red}$  sei. Dann ist  $\mathcal{O}_{Z,x_1} = \kappa(x_1) = \mathcal{O}_{X,x_1}/m_{x_1}$ .

**Beweis** Für  $f: T \to X$  sei  $x_0 := f(m_R), x_1 = f(0), i = f_{x_1}^{\sharp}$ . Da T reduziert ist, "ist" f ein Morphismus nach Z:

#### 2 Morphismen von Schemata



 $f^{\sharp}$  induziert also einen Morphismus

$$\mathcal{O}_{Z,x_0} \longrightarrow \mathcal{O}_{T,m} = R$$

mit  $f^{\sharp}(m_{Z,x_0}) \subseteq m$ .

Umgekehrt induziert jedes  $i: \mathcal{O}_{Z,x_0} \hookrightarrow R$  einen Morphismus

$$\operatorname{Spec} R = T \to \operatorname{Spec}(\mathcal{O}_{Z,x_0}) \to Z \to X$$

#### Satz 2

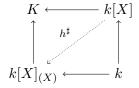
Sei  $f: X \to Y$  ein Morphismus noetherscher Schemata. f ist genau dann separiert, wenn es zu jedem "Bewertungsdiagramm"



 $(T = \operatorname{Spec} R, R \text{ diskreter Bewertungsring}, U = \operatorname{Spec} K, K = \operatorname{Quot} R)$ höchstens einen Morphismus  $h: T \to X$  gibt, der das Diagramm kommutativ macht.

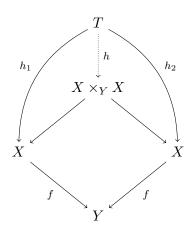
#### Beispiele

Seien X die affine Gerade mit doppeltem Nullpunkt,  $Y = \operatorname{Spec} k$  für einen Körper k,  $R = k[X]_{(X)}$ , K = k(X). Sei weiter  $X' = \operatorname{Spec} k[X]$ , dann existiert ein Morphismus, der das Bewertungsdiagramm kommutativ macht:



Also gibt es für beide offenen Teile von X, die gleich  $\mathbb{A}^1_k$  sind, je eine Fortsetzung.

**Beweis** " $\Rightarrow$ " Sei ein Bewertungsdiagramm (mit den üblichen Bezeichnungen) gegeben. Zwei  $h_1, h_2 : T \to X$  Fortsetzungen von  $h_0 : U \to X$ , induzieren einen Morphismus h:



Es ist  $h_1(0) = h_0(0) = h_2(0)$ 

$$\Rightarrow h(0) \in \Delta = \Delta_f(X) \Rightarrow h(m) \in \overline{\{h(0)\}} \subseteq \Delta$$
$$\Rightarrow h_1(m) = h_2(m)$$

" $\Leftarrow$ " Nach Übungsblatt 6, Aufgabe 1 genügt es zu zeigen:  $\Delta$  ist abgeschlossen in  $X \times_Y X$ .

#### Behauptung (1)

Ist für jedes  $x_1 \in \Delta$  auch  $\overline{\{x_1\}} \subseteq \Delta$ , so ist  $\Delta$  abgeschlossen.

Seien also 
$$x_1 \in \Delta, x_0 \in \overline{\{x_1\}}, Z := \overline{\{x_1\}}_{red}, \mathcal{O} := \mathcal{O}_{Z,x_0}, K = \mathcal{O}_{Z,y_1} = \kappa(x_1)$$

# Behauptung (2)

Es gibt einen diskreten Bewertungsring  $R \subseteq K$ , der  $\mathcal{O}$  dominiert, das heißt  $\mathcal{O} \subseteq R$  und  $m_{\mathcal{O}} = m_R \cap \mathcal{O}$ .

Dann gibt es nach Proposition 2.7.4 einen Morphismus  $h: T = \operatorname{Spec} R \to X \times_Y X$  mit  $h(0) = x_1$  und  $h(m) = x_0$ . Für  $h_i = pr_i \circ h$ , i = 1, 2, ist  $f \circ h_1 = f \circ h_2$ ,  $h_i: T \to X$ . Da  $x_1 \in \Delta$ , ist  $h_1(0) = h_2(0)$ . Mit  $h_0 := h|U$  folgt:  $h_1 = h_2 \Rightarrow h(m) \in \Delta$ .

**Beweis (2)**  $m = m_{\mathcal{O}}$  ist endlich erzeugt, etwa  $m = (x_1, \dots, x_n)$ . Sei  $\mathcal{O}' = \mathcal{O}[\frac{X_2}{X_1}, \dots, \frac{X_n}{X_1}]$  und  $I = X_1 \cdot \mathcal{O}'$ . (Œ  $I \neq \mathcal{O}'$ )

Krullscherr Hauptidealsatz: es gibt ein Primideal  $\mathfrak{p} \subseteq \mathcal{O}'$  der Höhe 1 mit  $I \subseteq \mathfrak{p}$  (Eisenbud Theorem 10.1)

 $\mathcal{O}'_{\mathfrak{p}}$  ist ein noetherscher lokaler Ring der Dimension 1. Sei  $\tilde{\mathcal{O}}$  der ganze Abschluss von  $\mathcal{O}'_{\mathfrak{p}}$  in K.

 $\Rightarrow \tilde{\mathcal{O}}$  ist normal, dim  $\tilde{\mathcal{O}} = 1$ , Œ  $\tilde{\mathcal{O}}$  lokal,  $\tilde{\mathcal{O}}$  ist noethersch (Satz von Krull-Akizuki, Eisenbud Theorem 11.13)

 $\Rightarrow \tilde{\mathcal{O}}$  ist diskreter Bewertungsring. Es gilt:

 $m_{\tilde{\mathcal{O}}} \cap \mathcal{O} \subseteq m_{\mathcal{O}}$ : Klar.

$$m_{\tilde{\mathcal{O}}} \cap \mathcal{O} \supseteq m_{\mathcal{O}}, \text{ weil } X_1, \dots, X_n \in I.$$

Behauptung 1 ist (für  $f = \Delta$ ) ein Spezialfall von

#### Proposition 2.7.5

Sei  $f: W \to X$  Morphismus noetherscher Schemata. Dann gilt:

f(W) ist abgeschlossen

 $\Leftrightarrow f(W)$  ist abgeschlossen unter Spezialisierung: Für  $x_1 \in f(W)$  und  $x_0 \in \overline{\{x_1\}}$  ist  $x_0 \in f(W)$ .

Beweis "⇒" Klar.

"\( = " \) Sei  $Y = \overline{f(W)}$  (als abgeschlossenes Unterschema mit reduzierter Struktur)

Sei  $y \in Y$ ; zu zeigen:  $y \in f(W)$ .

Œ  $Y = \operatorname{Spec} A$  affin, sei  $B = \mathcal{O}_W(W)$ . f wird also induziert von  $\alpha : A \to B$  und  $\alpha$  ist injektiv, weil f dominant ist (AG I, Proposition 6.8 (b) ). Sei  $y' \subseteq y$  ein minimales Primideal, dann gilt  $y \in \overline{\{y'\}}$ . Also genügt es zu zeigen:  $y' \in f(W)$  (das ist die Voraussetzung)

Es gilt  $f^{-1}(y') = \operatorname{Spec}(\underline{B \otimes_A \kappa(y')})$ . Zu zeigen:  $R \neq \{0\}$ 

Es ist  $\kappa(y') = {}^{A}y'/y'A_{y'}$  und  $A_{y'}$  ist ein Körper, weil A reduziert ist. ? Damit gilt:  $R = B \otimes_A A_{y'}$ . Weiter gilt:  $A \subseteq B \Rightarrow A \otimes_A A_{y'} \subseteq B \otimes_A A_{y'} = R$ . Und  $A_{y'}$  ist ein flacher A-Modul, weil er eine Lokalisierung ist.

Beispiele

$$A = k[X, Y]/(X \cdot Y), y' = (X) \Rightarrow A_{y'} = k(Y).$$

# Folgerung 2.7.6

Für noethersche Schemata gilt:

- (a) Affine und abgeschlossene Einbettungen sind separiert.
- (b) Die Komposition separierter Morphismen ist separiert.
- (c) "separiert" ist stabil unter Basiswechsel.
- (d)  $g \circ f$  separiert  $\Rightarrow f$  separiert.
- (e) "separiert" ist lokal bezüglich der Basis, das heißt:  $f: X \to Y$  separiert  $\Leftrightarrow$  es existiert eine offene Überdeckung  $(U_i)$  von Y, sodass

$$f|f^{-1}(U_i):f^{-1}(U_i)\to U_i$$
 separiert

Beweis Übung!

# §8 Eigentliche Morphismen

#### Definition 2.8.1

Sei  $f: X \to Y$  ein Morphismus von Schemata.

- (a) f heißt lokal von endlichem Typ, wenn es eine offene Überdeckung  $(U_i)_{i\in\mathcal{I}}$ , mit  $U_i = \operatorname{Spec} A_i$ , von Y gibt und für jedes  $i \in \mathcal{I}$  eine offene Überdeckung  $(U_{ij})_{j\in\mathcal{J}_i}$ , mit  $U_{ij} = \operatorname{Spec} B_{ij}$ , von  $f^{-1}(U_i)$  existiert, sodass für alle i, j  $B_{ij}$  vermöge  $f^{\sharp}$  zu einer endlich erzeugten  $A_i$ -Algebra wird.
- (b) f heißt von endlichem Typ, wenn in (a) alle  $J_i$  endlich gewählt werden können.
- (c) f heißt endlich, wenn in (a) jedes  $J_i$  einelementig gewählt werden kann (also  $f^{-1}(U_i) =: \operatorname{Spec} B_i$ ) und  $B_i$  ein endlich erzeugter  $A_i$ -Modul ist.

# Bemerkung 2.8.2

In Definition 2.8.1 kann "es gibt eine offene affine Überdeckung" ersetzt werden durch "für jedes offene affine  $U \subseteq Y$  gilt".

Beweis (a) Übungsblatt 5, Aufgabe 2, (b) und (c) analog.

### Bemerkung 2.8.3

Ist  $f: X \to Y$  endlich, so ist  $f^{-1}(y)$  für jedes  $y \in Y$  eine endliche Menge.

**Beweis** Sei Œ  $Y = \operatorname{Spec} A$  affin. Dann ist auch  $X = \operatorname{Spec} B$  affin. Es ist  $f^{-1}(y) = \operatorname{Spec}(B \otimes_A \kappa(y))$ .  $B \otimes_A \kappa(y)$  ist eine  $\kappa(y)$ -Algebra und, da B ein endlich erzeugter A-Modul ist, ist  $B \otimes_A \kappa(y)$  ein endlich dimensionaler  $\kappa(y)$ -Vektorraum. Es ist dim $(B \otimes_A \kappa(y)) = 0$  (?), also  $\operatorname{Spec}(B \otimes_A \kappa(y))$  endlich.

#### Definition 2.8.4

Ein Morphismus  $f:X\to Y$  heißt eigentlich, wenn er von endlichem Typ, separiert und universell abgeschlossen ist, das heißt für jeden Basiswechsel

$$X \times_Y Y' \longrightarrow X$$

$$f' \downarrow \qquad \qquad f \downarrow \qquad \qquad \downarrow$$

$$Y' \longrightarrow Y$$

ist f' abgeschlossen.

# Beispiele

 $f: \mathbb{A}^1_k \to \operatorname{Spec} k$  ist abgeschlossen. Basiswechsel:

f' ist nicht abgeschlossen, denn:

V = V(XY - 1) ist abgeschlossene Teilmenge von  $\mathbb{A}^2_k$ , aber  $f'(V) = \mathbb{A}^1_k - \{0\}$  ist nicht abgeschlossen.

#### Satz 3

Seien X,Y noethersche Schemata,  $f:X\to Y$  ein Morphismus von endlichem Typ. f ist genau dann eigentlich, wenn es zu jedem Bewertungsdidagramm



genau eine Fortsetzung h gibt.