

## 24. Uneigentliche Integrale

In diesem Paragraphen gelte stets: Ist  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein Intervall und  $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion, so gelte  $\varphi \in R[a, b]$  für jedes Intervall  $[a, b] \subseteq I$ .

**(I) 1. Typ uneigentlicher Integrale** Sei  $a \in \mathbb{R}$ ,  $\beta \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ ,  $a < \beta$  und  $f : [a, \beta) \rightarrow \mathbb{R}$ . Existiert der Grenzwert  $\lim_{t \rightarrow \beta} \int_a^t f(x) dx$  und ist dieser Grenzwert reell, so heißt das **uneigentliche Integral**  $\int_a^\beta f(x) dx$  **konvergent** und  $\int_a^\beta f(x) dx := \lim_{t \rightarrow \beta} \int_a^t f(x) dx$ . Ist das Integral  $\int_a^\beta f(x) dx$  nicht konvergent, so heißt es **divergent**.

**Beispiele:**

(1)

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx \quad (a=0, \beta=1)$$

Für  $t \in (0, 1)$  :  $\int_0^t \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x \Big|_0^t = \arcsin t \rightarrow \frac{\pi}{2} \quad (t \rightarrow 1)$ . Das heißt:  $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$  konvergiert und hat den Wert  $\frac{\pi}{2}$ .

(2)

$$\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2} dx \quad (a=0, \beta=\infty)$$

Für  $t > 0$  :  $\int_0^t \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x \Big|_0^t = \arctan t \rightarrow \frac{\pi}{2} \quad (t \rightarrow \infty)$ . Also:  $\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2} dx$  konvergiert und hat den Wert  $\frac{\pi}{2}$ .

(3) (*wichtig*) Sei  $\alpha > 0$ . Übung:

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha} dx \text{ konvergiert} \iff \alpha > 1$$

**(II) 2. Typ uneigentlicher Integrale** Sei  $\alpha \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ ,  $a \in \mathbb{R}$ ,  $\alpha < a$  und  $f : (\alpha, a] \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion. Entsprechend zum 1. Typ definiert man die Konvergenz bzw. Divergenz des uneigentlichen Integrals  $\int_\alpha^a f(x) dx$  (nämlich  $\lim_{t \rightarrow \alpha} \int_t^a f(x) dx$ ).

**Beispiele:**

(1)

$$\int_{-\infty}^0 \frac{1}{1+x^2} dx$$

Für  $t < 0$  :  $\int_t^0 \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x \Big|_t^0 = -\arctan t = \arctan(-t) \rightarrow \frac{\pi}{2} \quad (t \rightarrow -\infty)$

(2) (*wichtig*) Sei  $\alpha > 0$ . Übung:

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} dx \text{ konvergiert} \iff \alpha < 1$$

**(III) 3. Typ uneigentlicher Integrale** Sei  $\alpha \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ ,  $\beta \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ ,  $\alpha < \beta$  und  $f : (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion. Das uneigentliche Integral  $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx$  ist **konvergent**, genau dann wenn es ein  $c \in (\alpha, \beta)$  gibt mit:  $\int_{\alpha}^c f(x) dx$  konvergiert und  $\int_c^{\beta} f(x) dx$  konvergiert. In diesem Fall gilt:  $\int_{\alpha}^{\beta} f dx := \int_{\alpha}^c f dx + \int_c^{\beta} f dx$  (Übung: diese Definition ist unabhängig von  $c$ )

**Beispiele:**

(1)  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$  konvergiert und hat den Wert  $\pi$ .

(2)  $\int_0^{\infty} \frac{1}{x^2} dx$  divergiert, denn  $\int_0^1 \frac{1}{x^2} dx$  divergiert.

Das Folgende formulieren wir nur für den Typ (I) (sinngemäß gilt alles auch für Typ (II), (III)):

**Definition**

$\int_a^{\beta} f dx$  heißt **absolut konvergent** :  $\iff \int_a^{\beta} |f| dx$  ist konvergent.

**Satz**

Sei  $g : [a, \beta) \rightarrow \mathbb{R}$  eine weitere Funktion.

(1)  $\int_a^{\beta} f dx$  konvergiert  $\iff \exists c \in (a, \beta) : \int_c^{\beta} f dx$  konvergiert.

In diesem Fall gilt:  $\int_a^{\beta} f dx = \int_a^c f dx + \int_c^{\beta} f dx$ .

(2) **Cauchy Kriterium:**  $\int_a^{\beta} f dx$  konvergiert  $\iff \forall \varepsilon > 0 \exists c = c(\varepsilon) \in (a, \beta) : |\int_u^v f dx| < \varepsilon \forall u, v \in (c, \beta)$

(3) Ist  $\int_a^{\beta} f dx$  absolut konvergent, dann gilt:  $\int_a^{\beta} f dx < \int_a^{\beta} |f| dx$  und  $|\int_a^{\beta} f dx| < \int_a^{\beta} |f| dx$ .

(4) **Majorantenkriterium:** Ist  $|f| \leq g$  auf  $[a, \beta)$  und  $\int_a^{\beta} g dx$  konvergent, dann konvergiert  $\int_a^{\beta} f dx$  absolut.

(5) **Minorantenkriterium:** Ist  $f \geq g \geq 0$  auf  $[a, \beta)$  und  $\int_a^{\beta} g dx$  divergent, dann divergiert  $\int_a^{\beta} f dx$ .

**Beispiele:**

(1)  $\int_1^{\infty} \underbrace{\frac{x}{1+x^2}}_{=:f(x)} dx$ ,  $g(x) := \frac{1}{x} \cdot \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^2}{1+x^2} \rightarrow 1 \ (x \rightarrow \infty)$ .

$\implies \exists c \in (1, \infty) : \frac{f(x)}{g(x)} \geq \frac{1}{2} \ \forall x \geq c \implies f(x) \geq \frac{1}{2x} \ \forall x \geq c$ .  $\int_c^{\infty} \frac{1}{2x} dx$  divergiert  
 $\implies \int_c^{\infty} f(x) dx$  divergiert  $\implies \int_1^{\infty} f(x) dx$  divergiert.

(2)  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ .  $\int_0^1 f(x) dx$  konvergiert,  $\int_0^1 f^2(x) dx$  divergiert.