# 6. Konvergente Folgen

**Definition (Umgebung)**
Sei $a \in \mathbb{R}$ und $\varepsilon > 0$: $U_\varepsilon(a) : \{x \in \mathbb{R} : |x - a| < \varepsilon\}$ heißt $\varepsilon$-***Umgebung*** *von* $a$.

$$x \in U_\varepsilon(a) \iff -\varepsilon < x - a < \varepsilon \iff a - \varepsilon < x < a + \varepsilon \iff x \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$$

Also gilt: $U_\varepsilon(a) = (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$

**Definition („für fast alle")**
Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei eine Aussage $A(n)$ gemacht. $A(n)$ gilt **für fast alle** ( ffa ) $n \in \mathbb{N} \iff \exists m \in \mathbb{N}$ so dass $A(n)$ wahr ist für alle $n \geq m$. Ein Beispiel ist $n^2 \geq n + 17$ gilt ffa $n \in \mathbb{N}$.

**Vereinbarung:** Alle vorkommenden Folgen seien Folgen in $\mathbb{R}$.

**Definition (Beschränkte Folgen)**
$(a_n)$ heißt beschränkt (*nach oben beschränkt*)/(*nach unten beschränkt*) $:\iff$ $\{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$ ist beschränkt (*nach oben beschränkt*)/(*nach unten beschränkt*).

Ist $(a_n)$ nach oben beschränkt, so setze

$$\sup_{n=1}^{\infty} a_n := \sup_{n \in \mathbb{N}} a_n := \sup_{n \geq 1} a_n := \sup \{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$$

Ist $(a_n)$ nach unten beschränkt, so setze

$$\inf_{n=1}^{\infty} a_n := \inf_{n \in \mathbb{N}} a_n := \inf_{n \geq 1} a_n := \inf \{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$$

**Beachte:** $(a_n)$ ist beschränkt $\iff \exists c > 0 : |a_n| \leq c \ \forall n \in \mathbb{N}$.

**Definition (Konvergente Folge)**
Sei $(a_n)$ eine Folge. $(a_n)$ heißt **konvergent** $:\iff$ $\exists a \in \mathbb{R}$, so dass es für *jedes* $\varepsilon > 0$ ein $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $|a_n - a| < \varepsilon \ \forall n \geq n_0$ gilt. In diesem Fall heißt $a$ der **Grenzwert** (GW) oder **Limes** von $(a_n)$ und man schreibt: $\lim_{n\to\infty}(a_n) = a$ oder $\lim a_n = a$ oder $a_n \to a \ (n \to \infty)$ oder $a_n \to a$. Ist $(a_n)$ nicht konvergent, so heißt $(a_n)$ **divergent**.

$$\begin{aligned} \text{Also: } a_n \to a \ (n \to \infty) \quad &\iff \quad \forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} : |a_n - a| < \varepsilon \ \forall n \geq n_0 \\ &\iff \quad \forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} : a_n \in U_\varepsilon(a) \ \forall n \geq n_0 \\ &\iff \quad \forall \varepsilon > 0 \text{ gilt: } a_n \in U_\varepsilon(a) \ \text{ ffa } n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

**Satz 6.1 (Grenzwert und Beschränktheit konvergenter Folgen)**
$(a_n)$ sei konvergent.

(1) Dann ist der Grenzwert von $(a_n)$ eindeutig bestimmt.

(2) $(a_n)$ ist beschränkt.

**Beweis**

(1) Es gelte $a_n \to a$ und $a_n \to b$.
**Annahme:** $a \neq b$, etwa $a < b$.
$\varepsilon := \frac{b-a}{2} > 0$. Dann $U_\varepsilon(a) \cap U_\varepsilon(b) = \emptyset$ $(*)$
$a_n \to a \implies a_n \in U_\varepsilon(a)$ ffa $n \in \mathbb{N}$, $a_n \to b \implies a_n \in U_\varepsilon(b)$ ffa $n \in \mathbb{N} \implies a_n \in U_\varepsilon(a) \cap U_\varepsilon(b)$ ffa $n \in \mathbb{N}$. Widerspruch zu $(*)$, also $a = b$.

(2) Sei $a := \lim(a_n)$. Zu $\varepsilon = 1$ existiert ein $n \in \mathbb{N} : |a_n - a| < 1\ \forall n \geq n_0$. Dann: $|a_n| = |a_n - a + a| \leq |a_n - a| + |a| < 1 + |a| =: c_1\ \forall n \geq n_0$. $c_2 := \max\{|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_{n_0-1}|\}$, $c := \max\{c_1, c_2\}$. Dann: $|a_1| \leq c\ \forall n \in \mathbb{N}$. ■

**Bemerkung (Endlich viele Elemente sind egal):** Sind $(a_n)$ und $(b_n)$ Folgen und gilt $a_n = b_n$ ffa $n \in \mathbb{N}$, so gilt $(a_n)$ konvergent $\iff$ $(b_n)$ konvergent. Im Konvergenzfall: $\lim(a_n) = \lim(b_n)$.

**Beispiele:**

(1) Sei $c \in \mathbb{R}$ und $a_n = c$ ffa $n \in \mathbb{N}$. Dann: $|a_n - c| = 0$ ffa $n \in \mathbb{N}$, d.h. $\lim a_n = c$.

(2) $a_n = \frac{1}{n}$. Behauptung: $a_n \to 0$ (**Nullfolge**). Beweis: Sei $\varepsilon > 0$. 2.1(4) $\implies \exists n_0 \in \mathbb{N} : n_0 > \frac{1}{\varepsilon} \implies \frac{1}{n_0} < \varepsilon$. Für $n \geq n_0 : |a_n - 0| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < \varepsilon$.

(3) $a_n = n$. 2.1(3) $\implies$ $(a_n)$ ist nicht beschränkt. $\overset{6.1(2)}{\implies}$ $(a_n)$ ist divergent.

(4) $a_n = (-1)^n$, also $(a_n) = (-1, 1, -1, \cdots)$ $|a_n| = 1\ \forall n \in \mathbb{N} \implies a_n$ ist beschränkt. Annahme: $(a_n)$ ist konvergent. Sei $a := \lim a_n$. $\exists n_0 \in \mathbb{N} : |a_n - a| < \frac{1}{2}\ \forall n \geq n_0$. Dann: $2 = |a_{n_0} - a_{n_0+1}| = |a_{n_0} - a + a - a_{n_0+1}| \leq |a_{n_0} - a| + |a_{n_0+1} - a| < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ Widerspruch! Also: $(a_n)$ ist divergent.

(5) $a_n = \frac{n^2}{n^2+1}$. Behauptung: $a_n \to 1$. $|a_n - 1| = |\frac{n^2}{1+n^2} - \frac{n^2+1}{n^2+1}| = \frac{1}{1+n^2} \leq \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n}$. Sei $\varepsilon > 0$. Bsp(2) $\implies \exists n_0 \in \mathbb{N} : \frac{1}{n} < \varepsilon\ \forall n \geq n_0 \implies |a_n - 1| < \varepsilon\ \forall n \geq n_0$.

(6) $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$. $a_n = \frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$. D.h. $|a_n - 0| = a_n \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$. Sei $\varepsilon > 0$. 2.1(4) $\implies \exists n_0 \in \mathbb{N} : n_0 > \frac{1}{\varepsilon^2} \implies \frac{1}{\sqrt{n_0}} < \varepsilon$. Sei $n \geq n_0 : |a_n - 0| \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n_0}} \leq \varepsilon$. D.h. $a_n \to 0$.

**Bemerkung:** Sei $p \in \mathbb{Z}$ fest. Eine Funktion $a : \{p, p+1, p+2, \ldots\} \to \mathbb{R}$ heißt ebenfalls Folge in $\mathbb{R}$. Schreibweise: $a = (a_n)_{n \geq p} = (a_n)_{n=p}^{\infty}$. Beispiele: $(a_n)_{n=0}^{\infty}$, $(a_n)_{n=-1}^{\infty} = (a_{-1}, a_0, a_1, \ldots)$

**Satz 6.2 (Konvergenzsätze)**
$(a_n)$, $(b_n)$, $(c_n)$ seien Folgen in $\mathbb{R}$.

(1) $a_n \to a\ (n \to \infty) \iff |a_n - a| \to 0\ (n \to \infty)$

(2) Sei $a \in \mathbb{R}$ und es gelte $|a_n - a| \leq b_n$ ffa $n \in \mathbb{N}$ und $b_n \to 0$. Dann: $a_n \to a$.

(3) Es gelte $a_n \to a$, $b_n \to b$.

  (i) gilt $a_n \leq b_n$ ffa $n \in \mathbb{N} \implies a \leq b$

  (ii) gilt $a = b$ und $a_n \leq c_n \leq b_n$ ffa $n \in \mathbb{N} \implies c_n \to a$.

(iii) $|a_n| \to |a|$

(iv) $a_n + b_n \to a + b$

(v) $\alpha a_n \to \alpha a \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$

(vi) $a_n \cdot b_n \to a \cdot b$

(vii) Ist $b \neq 0$, so existiert ein $m \in \mathbb{N}$: $b_n \neq 0$ $\forall n \geq m$ und die Folge $(\frac{1}{b_n})_{n \geq m}$ konvergiert gegen $\frac{1}{b}$

**Beweis**

(1) folgt aus der Definition der Konvergenz

(2) $\exists m \in \mathbb{N}$: $|a_n - a| \leq b_n$ $\forall n > m$. Sei $\varepsilon > 0$. $\exists n_1 \in \mathbb{N} : b_n \leq \varepsilon$ $\forall n > n_1$. $m_0 := \max\{m, n1\}$. Dann: $|a_n - a| \leq b_n < \varepsilon$ $\forall n \geq n_0$.

(3)

(i) Annahme: $b < a$. $\varepsilon := \frac{a-b}{2}$. $a_n \to a \implies a_n \in U_\varepsilon(a)$ ffa $n \in \mathbb{N} \implies a_n > a - \varepsilon$ ffa $n \in \mathbb{N}$. $b_n \to b \implies b_n \in U_\varepsilon(b)$ ffa $n \in \mathbb{N} \implies b_n < b + \varepsilon$ ffa $n \in \mathbb{N} \implies b_n < b + \varepsilon = a - \varepsilon < a_n$ ffa $n \in \mathbb{N}$. Widerspruch zur Voraussetzung $\implies a_n < b_n$ ffa $n \in \mathbb{N}$.

(ii) Sei $\varepsilon > 0$. $a_n \to a$, $b_n \to a \implies a - \varepsilon < a_n \leq c_n \leq b_n < a + \varepsilon$ ffa $n \in \mathbb{N} \implies c_n \in U_\varepsilon(a)$ ffa $n \in \mathbb{N}$.

(iii) $||a_n| - |a|| \leq |a_n - a| \implies |a_n| \to |a|$

(iv) *Zur Übung*

(v) *Zur Übung*

(vi) $|a_n b_n - ab| = |a_n b_n - a_n b + a_n b - ab| = |a_n(b_n - b) + b(a_n - a)| \leq |a_n||b_n - b| + |b||a_n - a|$. $6.1(2) \implies \exists c > 0 : |a_n| \leq c$ $\forall n \in \mathbb{N} \implies |a_n b_n - ab \leq c \cdot |b_n - b| + |b||a_n - a| =: \alpha_n$. **(iv),(v)** $\implies \alpha_n \to 0 \overset{(2)}{\implies} a_n b_n \to ab$.

(vii) (iii) $\implies |b_n| \to b \implies |b| > 0$. $\varepsilon := \frac{|b|}{2}$; $|b_n| \to |b| \implies |b_n| \in U_\varepsilon(|b|)$ ffa $n \in \mathbb{N} \implies |b_n| > |b - \varepsilon| = \frac{|b|}{2}$ ffa $n \in \mathbb{N}$: $b_n \neq 0$ $\forall n > m$. Für $n > m$: $|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}| = |\frac{b - b_n}{b_n \cdot b}| = \frac{|b - b_n|}{|b_n||b|} \leq \frac{2}{|b|^2}|b_n - b| =: \beta_n$. $\beta_n \to 0 \overset{(2)}{\implies} \frac{1}{b_n} \to |\frac{1}{b}|$. ∎

**Beispiel**

$$a_n = \frac{n^2 + 3n + 5}{n^2 - 3n + 8} = \frac{1 + \frac{3}{n} + \frac{5}{n^2}}{1 - \frac{3}{n} + \frac{8}{n^2}} \to 1 \ (n \to \infty)$$

**Definition (Monotonie)**

- $(a_n)$ heißt **monoton wachsend** $:\iff a_{n+1} \geq a_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$
- $(a_n)$ heißt **streng monoton wachsend** $:\iff a_{n+1} > a_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$

- $(a_n)$ heißt **monoton fallend** $:\iff a_{n+1} \leq a_n \; \forall n \in \mathbb{N}$
- $(a_n)$ heißt **streng monoton fallend** $:\iff a_{n+1} < a_n \; \forall n \in \mathbb{N}$
- $(a_n)$ heißt **monoton** $:\iff (a_n)$ ist monoton wachsend oder fallend.
- $(a_n)$ heißt **streng monoton** $:\iff (a_n)$ ist streng monoton wachsend oder fallend.

**Satz 6.3 (Monotoniekriterium)**
$(a_n)$ sei monoton wachsend (*fallend*) und sei nach oben (*unten*) beschränkt. Dann ist $(a_n)$ konvergent. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \sup\limits_{n=1}^{\infty} a_n \; (\inf\limits_{n=1}^{\infty} a_n)$.

**Beweis**
$a := \sup\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \sup\{a_1, a_2, \ldots\}$. $a - \varepsilon$ ist keine obere Schranke von $\{a_1, a_2, \ldots\} \implies \exists n_0 \in \mathbb{N}:$ $a_{n_0} > a - \varepsilon$. Für $n > n_0$: $a - \varepsilon < a_{n_0} \leq a_n \leq a < a + \varepsilon \implies |a_n - a| < \varepsilon \; \forall n \geq n_0$. ∎

**Beispiel**
$a_1 := \sqrt[3]{6}, a_{n+1} := \sqrt[3]{6 + a_n} \; (n \in \mathbb{N})$
$a_2 := \sqrt[3]{6 + a_1} > \sqrt[3]{6} = a_1$ (wegen Satz 5.1 (1))
$a_3 := \sqrt[3]{6 + a_2} > \sqrt[3]{6 + a_1} = a_2$

**Behauptung:** $a_{n+1} > a_n \; \forall n \in \mathbb{N}$

**Beweis**
$n = 1$: s.o.

$n \longrightarrow n+1$: $a_{n+2} = \sqrt[3]{6 + a_{n+1}} \overset{\text{IV}}{>} \sqrt[3]{6 + a_n} = a_{n+1}$. ∎

Also: $(a_n)$ ist streng monoton wachsend.

$a_1 = \sqrt[3]{6} < 2$
$a_2 = \sqrt[3]{6 + a_1} < \sqrt[3]{8} = 2$

**Behauptung:** $a_n < 2 \; \forall n \in \mathbb{N}$

**Beweis**
$n = 1$: s.o.

$n \longrightarrow n+1$: $a_{n+1} = \sqrt[3]{6 + a_n} \overset{\text{IV}}{<} \sqrt[3]{6 + 2} = 2$. ∎

Also: $(a_n)$ ist nach oben beschränkt. Aus 6.3 folgt: $(a_n)$ ist konvergent.

$a := \lim_{n\to\infty} a_n$
$a_{n+1} = \sqrt[3]{6 + a_n} \implies a_{n+1}^3 = 6 + a_n \implies a^3 = 6 + a$
$\implies 0 = a^3 - a - 6 = (a-2)(a^2 + 2a + 3) = (a-2)\underbrace{\left((a+1)^2 + 2\right)}_{>0} \implies a = 2$