

# 3 Lokale Eigenschaften

## §14 Lokale Ringe zu Punkten

### Erinnerung / Definition + Bemerkung 3.14.1

Sei  $V$  eine Varietät (über einem algebraisch abgeschlossenen Körper  $k$ ) und  $x \in V$ .

(a)

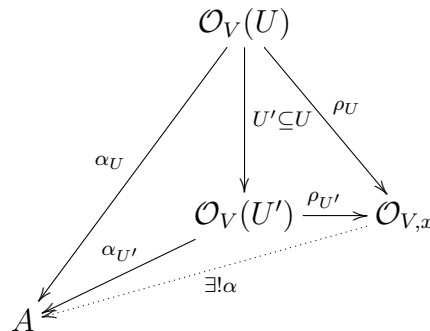
$$\mathcal{O}_{V,x} := \{[(U, f)] : U \subseteq V \text{ offen, } x \in U, f \in \mathcal{O}_V(U)\}$$

heißt **lokaler Ring** von  $V$  in  $x$ , dabei sei  $(U, f) \sim (U', f') \Leftrightarrow f|_{U \cap U'} = f'|_{U \cap U'}$

(b)  $\mathcal{O}_{V,x}$  ist ein lokaler Ring mit maximalem Ideal

$$m_x = \{[(U, f)] \in \mathcal{O}_{V,x} : f(x) = 0\}.$$

(c)  $\mathcal{O}_{V,x} = \varinjlim_{U \subseteq V \text{ offen, } x \in U} \mathcal{O}_V(U)$



### Bemerkung 3.14.2

Seien  $V, x \in V$  wie in 3.14.1, sei weiter  $V_0 \subseteq V$  offen und affin mit  $x \in V_0$ . Dann gilt:

- (a)  $\mathcal{O}_{V,x} \cong k[V_0]_{m_x^{V_0}}$ , wobei  $k[V_0]$  der affine Koordinatenring von  $V_0$  sei und  $m_x^{V_0}$  das zu  $x$  gehörige maximale Ideal in  $k[V_0]$ , das heißt  $m_x^{V_0} = \{f \in k[V_0] : f(x) = 0\}$ .
- (b) Ist  $V$  irreduzibel, so ist  $\mathcal{O}_{V,x} \cong \{f = \frac{g}{h} \in k(V) : g, h \in k[V_0], h(x) \neq 0\}$ .

**Beweis** Übung. □

### Proposition 3.14.3

Seien  $V, W$  Varietäten,  $x \in V, y \in W$ . Ist  $\mathcal{O}_{V,x} \cong \mathcal{O}_{W,y}$  (als  $k$ -Algebra), so gibt es (affine) offene Umgebungen  $U_1 \subseteq V$  von  $x$  und  $U_2 \subseteq W$  von  $y$  mit  $U_1 \cong U_2$ .

**Beweis** Übungsblatt 7 Aufgabe 1. □

**Bemerkung 3.14.4**

Sei  $\varphi : V \longrightarrow W$  ein Morphismus von Varietäten. Für jedes  $x \in V$  induziert  $\varphi$  einen  $k$ -Algebrenhomomorphismus

$$\varphi_x^\# : \mathcal{O}_{W, \varphi(x)} \longrightarrow \mathcal{O}_{V, x} \quad \text{mit} \quad \varphi_x^\#(m_{\varphi(x)}) \subseteq m_x.$$

**Beweis** ☞  $V, W$  affin (geeignet einschränken!).

Dann induziert  $\varphi$  einen  $k$ -Algebrenhomomorphismus

$$\varphi^\# : \begin{array}{ccc} k[W] & \longrightarrow & k[V] \\ f & \longmapsto & f \circ \varphi \end{array}$$

Dabei gilt für  $f \in k[W]$ :

$$(*) \quad f \in m_{\varphi(x)}^W \Leftrightarrow f(\varphi(x)) = 0 \Leftrightarrow (f \circ \varphi)(x) = 0 \Leftrightarrow \varphi_x^\#(f) \in m_x^V$$

$\Rightarrow \varphi^\#$  induziert einen Homomorphismus

$$\varphi_x^\# : \underbrace{k[W]_{m_{\varphi(x)}^W}}_{\cong \mathcal{O}_{W, \varphi(x)}} \longrightarrow \underbrace{k[V]_{m_x^V}}_{\cong \mathcal{O}_{V, x}}.$$

Aus (\*) folgt weiter:

$$\varphi_x^\#(\underbrace{m_{\varphi(x)}^W \cdot k[W]_{m_{\varphi(x)}^W}}_{=m_{\varphi(x)}}) \subseteq m_x^V k[V]_{m_x^V} = m_x$$

□

## §15 Dimension einer Varietät

**Definition 3.15.1**

Sei  $X$  ein topologischer Raum ( $\neq \emptyset$ ). Dann heißt

$$\dim(X) := \sup\{n \in \mathbb{N} : \text{Es gibt irreduzible Teilmengen } \emptyset \neq V_0 \subsetneq \dots \subsetneq V_n \subseteq X\}$$

die **(Krull-)Dimension** von  $X$ .

**Erinnerung / Definition 3.15.2**

Sei  $R$  ein Ring (kommutativ mit Eins).

(a) Für ein Primideal  $\wp \subseteq R$  heißt

$$\text{ht}(\wp) := \sup\{n \in \mathbb{N} : \text{Es gibt Primideale } \wp_0 \subsetneq \dots \subsetneq \wp_n = \wp\}$$

die **Höhe** von  $\wp$ .

(b)  $\dim R := \sup\{\text{ht}(\wp) : \wp \subset R \text{ Primideal}\}$  heißt **(Krull-)Dimension** von  $R$ .

**Bemerkung 3.15.3**

Sei  $V$  eine affine Varietät. Dann ist  $\dim(V) = \dim(k[V])$ .

**Beweis** Nach Proposition 1.3.2 ist eine abgeschlossene Teilmenge  $Z$  von  $V$  genau dann irreduzibel, wenn ihr Verschwindungsideal  $I(Z)$  ein Primideal ist. Nach Satz 2 ist das eine Bijektion. □

**Proposition 3.15.4**

- (a)  $\dim(k[X_1, \dots, X_n]) = n$
- (b) Ist  $A$  eine nullteilerfreie  $k$ -Algebra, so haben alle maximalen Primidealketten die gleiche Länge.

**Beweis** Algebra 2. □**Bemerkung + Definition 3.15.5**Sei  $V$  eine Varietät,  $x \in V$ ,  $V_0 \subseteq V$  eine offene und affine Umgebung von  $x$ .

- (a)  $\dim \mathcal{O}_{V,x} = \text{ht}(m_x^{V_0}) (= \text{ht}(m_x^{V_0} \cdot k[V_0]_{m_x^{V_0}}))$
- (b) Ist  $V$  irreduzibel, so ist

$$\dim \mathcal{O}_{V,x} = \dim \mathcal{O}_{V,y} = \dim V \text{ für alle } x, y \in V.$$

- (c)  $\dim_x V := \dim \mathcal{O}_{V,x}$  heißt **lokale Dimension** von  $V$  in  $x$ .
- (d)  $\dim_x V = \max\{\dim Z : Z \text{ irreduzible Komponente von } V, x \in Z\}$

**Beweis** b) Ist  $V$  affin (also  $V = V_0$ ), so folgt die Aussage aus a) und Proposition 3.15.4(b). Im allgemeinen Falle überdecke  $V$  durch affine Varietäten  $V_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ). Da  $V$  irreduzibel ist, ist  $V_i \cap V_j \neq \emptyset \forall i, j$ .

$\Rightarrow \dim \mathcal{O}_{V,x}$  ist unabhängig von  $x$ , also gleich  $\dim V_i$  für jedes  $i = 1, \dots, n$ .

noch zu zeigen:  $\dim V_i = \dim V$ .

Sei  $Z_0 \subsetneq Z_1 \subsetneq \dots \subsetneq Z_d = V$  eine maximale Kette von irreduziblen Teilmengen. Dabei ist  $Z_0 = \{z_0\}$  einpunktig. Es folgt  $d = \dim \mathcal{O}_{V,z_0}$ .

d) ☞ sei  $V$  affin. Die irreduziblen Komponenten  $Z_1, \dots, Z_n$  von  $V$  entsprechen den minimalen Primidealen in  $k[V]$ . Es gilt  $x \in Z_i \Leftrightarrow m_x^V \supseteq I(Z_i) =: \mu_i$ . Weiter ist  $k[Z_i] = k[V]/\mu_i$ . Es folgt:  $\dim \mathcal{O}_{V,x} = \text{ht}(m_x^V) = \max_{i=1; \mu_i \subseteq m_x^V}^n \{\text{maximale Länge einer Primidealkette } \mu_i \subsetneq \wp_1 \subsetneq \dots \subsetneq m_x^V\} = \max_{i=1; \mu_i \subseteq m_x^V}^n \{\underbrace{\dim k[Z_i]}_{=\dim Z_i}\}.$  □

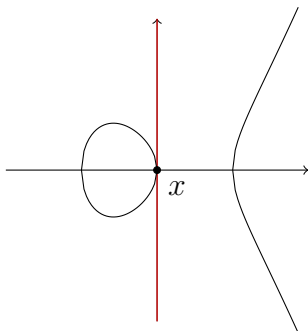
## §16 Der Tangentialraum

Zunächst einige einführende Beispiele:

**Beispiele**

- 1.)  $V = V(Y^2 - X^3 + X)$ ,  $x = (0, 0)$ .

Die Tangente in  $x$  an  $V$  ist die  $y$ -Achse, also  $V(X)$ . Der Tangentialraum in  $x = (1, 0)$  ist derselbe, d.h. der Tangentialraum ist nicht als affiner Raum, sondern als Vektorraum zu verstehen.



- 2.)  $V = V(Y^2 - X^3 + X^2)$  (Newton-Knoten),  $x = (0, 0)$ .  
Hier kann man an den Nullpunkt 2 Tangenten anlegen ( $y = x$  und  $y = -x$ ). Der Tangentialraum, wie wir ihn definieren werden, ist der davon aufgespannte  $\mathbb{A}^2(k)$ .
- 3.)  $V = V(Y^2 - X^3)$ ,  $x = (0, 0)$ .  
Ist jeder beliebige eindimensionale Unterraum im Tangentialraum enthalten?
- 4.)  $V = V(X^2 + Y^2 - Z^2)$  (doppelter Kegel),  $x = (0, 0, 0)$ ,  $y = (1, 0, 1)$ .

### Definition + Bemerkung 3.16.1

Sei  $V \subseteq \mathbb{A}^n(k)$  eine affine Varietät,  $x \in V$ ,  $I = I(V)$ .

- (a) Für  $f \in I$  sei  $f^{(1)} := f_x^{(1)} := \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial X_i}(x) \cdot X_i$ . Weiter sei  $I_x$  das von den  $f^{(1)}$ ,  $f \in I$ , erzeugte Ideal in  $k[X_1, \dots, X_n]$  und  $T_x := T_{V,x} := V(I_x)$ .  $T_{V,x}$  heißt **Tangentialraum** an  $V$  in  $x$ .
- (b)  $T_x$  ist ein linearer Unterraum von  $\mathbb{A}^n(k)$ .
- (c) Sind  $f_1, \dots, f_r$  Erzeuger von  $I$ , so wird  $I_x$  erzeugt von  $f_1^{(1)}, \dots, f_r^{(1)}$ .

Beispiele von oben:

- 1.)  $I_x = (X)$ ,  $T_x = V(X)$
- 2.)  $I_x = (0)$ ,  $T_x = \mathbb{A}^2(k)$
- 3.)  $I_x = (0)$ ,  $T_x = \mathbb{A}^2(k)$
- 4.)  $I_x = (0)$ ,  $T_x = \mathbb{A}^3(k)$ ;  
 $I_y = (2X - 2Z) = (X - Z)$ ,  $T_y = V(X - Z)$

### Bemerkung 3.16.2

Jeder Morphismus  $\varphi : V \rightarrow W$  von affinen Varietäten induziert für jedes  $x \in V$  eine  $k$ -lineare Abbildung  $d_x\varphi : T_{V,x} \rightarrow T_{W,\varphi(x)}$ .

**Beweis**  $\text{OE } x = 0, \varphi(x) = 0$ .

Schreibe  $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_m)$ . Brauche  $k$ -Algebrenhomomorphismus:

$$(d_x\varphi)^\# : k[Y_1, \dots, Y_m]/I_{\varphi(x)} \rightarrow k[X_1, \dots, X_n]/I_x$$

Für  $j = 1, \dots, m$  ist  $\varphi^\#(Y_j) = Y_j \circ \varphi = \varphi_j \Rightarrow (\varphi^\#(Y_j))^{(1)} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \varphi_j}{\partial X_i}(0) \cdot X_i =: (d_x\varphi)^\#(Y_j)$ .

Sei  $f \in I_\varphi$ ,  $\text{OE } f = g^{(1)}$  für ein  $g \in I(V)$ .

Schreibe  $g^{(1)} = \sum_{j=1}^m a_j Y_j$ ,  $a_j \in k = (d_x\varphi)^\#(f) = \sum_{j=1}^m a_j \sum_{i=1}^n \frac{\partial \varphi_i}{\partial X_i}(0) \cdot X_i = \sum_{i=1}^n (\sum_{j=1}^m a_j \frac{\partial \varphi_i}{\partial X_i}(0)) \cdot X_i = (g \circ \varphi)^{(1)}$

da  $\frac{\partial (g \circ \varphi)}{\partial X_i}(0) = \sum_{j=1}^m \underbrace{\frac{\partial g}{\partial Y_j}(\varphi(0))}_{=a_j} \frac{\partial \varphi_j}{\partial X_i}(0)$  □

### Proposition + Definition 3.16.3

Sei  $V \subseteq \mathbb{A}^n(k)$  eine affine Varietät,  $x \in V$ . Dann ist  $T_x$  in natürlicher Weise isomorph zu dem Dualraum  $(m_x/m_x^2)^\vee$  von  $m_x/m_x^2$ . Der  $k$ -Vektorraum  $(m_x/m_x^2)^\vee$  heißt **Zariski-Tangentialraum** an  $V$  in  $x$ .

$m_x/m_x^2$  ist ein  $k$ -Vektorraum: Zunächst ist  $m_x/m_x^2$  ein  $R$ -Modul für  $R = \mathcal{O}_{V,x}$ . Weiter ist  $R/m_x = k$ .

Da  $m_x \cdot (m_x/m_x^2) = 0$  ist, hat  $m_x/m_x^2$  eine Struktur als  $R/m_x$ -Modul.

### Definition + Bemerkung 3.16.4

Sei  $V$  eine Varietät,  $x \in V$ .

- (a)  $x$  heißt **nichtsingulärer Punkt** (oder **regulärer Punkt**), wenn

$$\dim T_{V,x} = \dim_x V.$$

- (b) (Jacobi-Kriterium) Sei  $U \subseteq V$  eine offene, affine Umgebung von  $x$ ,  $f_1, \dots, f_r \in k[X_1, \dots, X_n]$  Erzeuger des Verschwindungsideals  $I(U)$ . Dann gilt:

$$x \text{ nichtsingulär} \Leftrightarrow \text{Rang} \left( \frac{\partial f_i}{\partial X_j}(x) \right)_{i,j} = n - \dim_x V$$

- (c) Ist  $x$  singulär, so ist  $\dim T_{V,x} > \dim_x V$ .

**Beweis** b) Sei  $x \in V$ ,  $V = V(f_1, \dots, f_r) \subseteq \mathbb{A}^n(k)$ .

$$\mathcal{J}_f(x) := \left( \frac{\partial f_i}{\partial X_j}(x) \right)_{\substack{i=1, \dots, r \\ j=1, \dots, n}}$$

$T_{V,x}$  ist die Lösungsmenge des LGS  $\mathcal{J}_f(x) \cdot X = 0$ , denn  $f_i^{(1)} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial X_j}(x) \cdot X_j$ .

- c) Sei  $\mathcal{J}_f := \left( \frac{\partial f_i}{\partial X_j} \right)_{i,j}$ .

$\Rightarrow \text{Rang}(\mathcal{J}_f(x)) = \max\{d : \exists (d \times d)\text{-Minor } M \text{ von } \mathcal{J}_f \text{ mit } \det M(x) \neq 0\}$

$\Rightarrow$  Es gibt eine offene Teilmenge  $U$  von  $V$ , auf der  $\text{Rang}(\mathcal{J}_f(x))$  maximal ist.  $\square$

### Beispiele 3.16.5

- (a)  $V = (Y^2 - X^3 - X^2) =: V(f)$

$$\mathcal{J}_f = \left( \frac{\partial f}{\partial X}, \frac{\partial f}{\partial Y} \right) = (-3X^2 - 2X, 2Y)$$

$$\text{Rang}(\mathcal{J}_f(x)) = \begin{cases} 0 & , -3X^2 - 2X = 0 \text{ und } Y = 0 \\ 1 & , \text{sonst} \end{cases}$$

- (b)  $V = V(f) \subseteq \mathbb{A}^n(k)$  mit einem Polynom  $f \in k[X_1, \dots, X_n]$ .

$$x \in \mathbb{A}^n(k) \text{ singulärer Punkt von } V \Leftrightarrow 0 = f(x) = \frac{\partial f}{\partial X_1}(x) = \dots = \frac{\partial f}{\partial X_n}(x)$$

### Proposition 3.16.6

$$\mathcal{T}_{V,x} \cong (m_x/m_x^2)^* \quad \mathcal{O}_{V,x}/m_x \cong k$$

(in natürlicher Weise)

**Beweis** Sei  $I = I(V)$  das Verschwindungsideal von  $V$  in  $k[X_1, \dots, X_n]$ .  $\mathbf{\text{OE}}$   $x = (0, \dots, 0)$

Dann ist  $\mathcal{M} := m_x^{\mathbb{A}^n} = (x_1, \dots, x_n)$

$$\Rightarrow m_x^V = \mathcal{M}_x/I \cap \mathcal{M}_x = \mathcal{M}_x/I, \text{ da } I \subseteq \mathcal{M}_x$$

Beh. 1:  $m_x/m_x^2 \cong m_x^V/(m_x^V)^2$

Denn:  $\mathcal{O}_{x,V} \cong k[v]_{m_x^V}$

$$m_x = m_x^V k[V]_{m_x^V}$$

$a \mapsto \frac{a}{1}$  ist ein Homomorphismus  $\rho : m_x^V \rightarrow m_x \rightarrow m_x/m_x^2$  mit Kern  $(m_x^V)^2$

$\rho$  ist surjektiv: Sei  $p = q \cdot \frac{a}{b} \in m_x$  mit  $q \in m_x^V$ ,  $a, b \in k[V]$ ,  $b \notin m_x^V$

Ansatz: Wähle  $\tilde{a}(= q \cdot \tilde{b}) \in m_x^V \Rightarrow p - \frac{\tilde{a}}{1} = q \cdot \frac{a}{b} - \frac{q \cdot \tilde{b}}{1} = q \frac{a - \tilde{b}b}{b}$   
Hätte gerne:  $a - b\tilde{b} \in m_x^V$

????????????????????

Beh. 2:  $m_x/(m_x^V)^2 \cong \mathcal{M}_x/\mathcal{M}_x^2 + I = \mathcal{M}_x/\mathcal{M}_x^2 + I_x$

denn:  $m_x/(m_x^V)^2 \cong \mathcal{M}_x/I/(\mathcal{M}_x/I)^2$

$\cong (\mathcal{M}_x/I)/(\mathcal{M}_x^2/I \cap \mathcal{M}_x^2)$

$\cong (\mathcal{M}_x/I)/(\mathcal{M}_x^2 + I/I)$

$\cong \mathcal{M}_x/\mathcal{M}_x^2 + I$

Definiere  $k$ -lineare Abbildung:  $\alpha : (m_x/m_x^2)^* \rightarrow \mathcal{T}_x$  durch  $l \mapsto (l(\overline{X}_1), \dots, l(\overline{X}_n)) \in k^n$

Zu zeigen:  $\alpha$  ist wohldefiniert, d.h.  $\alpha(l) \in \mathcal{T}_x$

Sei also  $f \in I_x$ . Zu zeigen:  $f(\alpha(l)) = 0$

$f = g_x^{(1)}$  für ein  $g \in I$

$\Rightarrow f(L(l)) = \sum \frac{\partial g}{\partial \overline{X}_i}(x) l(\overline{X}_i)$

$= l(\sum_{i=1}^n \frac{\partial g}{\partial \overline{X}_i}(x) \overline{X}_i)$

$= l(g_x^{(1)}) = 0$  weil  $g_x^{(1)} \in I_x \subseteq \mathcal{M}_x^2 + I_x$

Umkehrabbildung:

$$\beta : \begin{array}{ccc} \mathcal{T}_x & \longrightarrow & (m_x/m_x^2)^* \\ (l_1, \dots, l_n) & \longmapsto & (\overline{X}_i \mapsto l_i) \end{array}$$

Wohldefiniertheit von  $\beta$ : Ist  $\sum \lambda_i X_i \in I_x$ , so ist  $\sum \lambda_i l_i = 0$ , da jedes Polynom in  $I_x$  auf dem Tangentialraum verschwindet,  $l_i \in \mathcal{T}_x$   $\square$

### Definition 3.16.7

- (a) Ein lokaler Ring heißt **regulär**, wenn  $\dim R = \dim_{R/m}(m/m^2)$  ist.
- (b) Sei  $V$  eine Varietät. Ein Punkt  $x \in V$  ist genau dann nichtsingulär, wenn  $\mathcal{O}_{V,x}$  ein regulärer, lokaler Ring ist.

### Definition + Bemerkung 3.16.8

Sei  $V = V(f_1, \dots, f_r) \subseteq \mathbb{A}^n(k)$  eine affine Varietät.

- (a) Für  $i = 1, \dots, r$  sei

$$f_i^1 := \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial X_j} \cdot Y_j \in k[X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_n]$$

Dann heißt

$$\mathcal{T}_V = V(f_1, \dots, f_r, f_1^1, \dots, f_r^1) \subseteq \mathbb{A}^n \times \mathbb{A}^n = \mathbb{A}^{2n}$$

**Tangentialbündel** über  $V$ .

- (b) Sei  $p : \mathbb{A}^n \times \mathbb{A}^n \rightarrow \mathbb{A}^n$  die Projektion auf die ersten  $n$  Komponenten. Dann ist  $p(\mathcal{T}_V) = V$ .
- (c) Für jedes  $x \in V$  ist  $p^{-1}(x) \cong T_{V,x}$ .
- (d) Ist  $V$  eine beliebige Varietät und  $V_1, \dots, V_m$  eine affine Überdeckung von  $V$ , so verkleben sich die Tangentialbündel  $\mathcal{T}_{V_1}, \dots, \mathcal{T}_{V_m}$  zu einer Varietät  $\mathcal{T}_V$ , dem **Tangentialbündel** über  $V$ .

**Beispiele 3.16.9**

$$V = V(\underbrace{Y^2 - X^3 - X^2}_{=:f}) \quad \mathcal{T} = V(Y^2 - X^3 - X^2, -(2X + 3X^2)W + 2YZ) \subseteq \mathbb{A}^4$$

Beh:  $\mathcal{T}_V$  hat 2 irreduzible Komponenten  $\mathcal{T}_1$  und  $\mathcal{T}_2$ .

Äquivalent dazu:  $I := I(Y^2 - X^3 - X^2, -(2X + 3X^2)W + 2YZ)$  ist kein Primideal.

$$\underbrace{X^2}_{\notin I} \underbrace{(W^2(2 + 3X)^2 - 4Z^2(X + 1))}_{\notin I} =$$

$$\underbrace{(WX(2 + 3X) - 2YZ)}_{\in I} \underbrace{(WX(2 + 3X) + 2YZ)}_{\in I} - \underbrace{4Z^2X^2(X + 1) + 4Z^2Y^2}_{=4Z^2 \underbrace{(Y^2 - X^2(X + 1))}_{\in I}}$$

$$\Rightarrow \mathcal{T}_1 = V(Y^2 - X^3 - X^2, W^2(2 - 3X)^2 - 4Z^2(X + 1)) \subset \mathcal{T}_V$$

$$\mathcal{T}_2 = V(Y^2 - X^3 - X^2, X) \subset \mathcal{T}_V = V(X, Y) = \mathbb{A}^2 \text{ über dem Nullpunkt.}$$

$$\mathcal{T}_1 \cap \mathcal{T}_2 = V(X, Y, W^2 - Z^2)$$

## §17 Der singuläre Ort einer Varietät

**Definition 3.17.1**

Für eine Varietät  $V$  heißt

$$\text{Sing}(V) := \{x \in V : x \text{ ist singulärer Punkt}\}$$

der *singuläre Ort* von  $V$ .

**Satz 6**

Sei  $V$  eine Varietät über  $k$ . Dann ist  $\text{Sing}(V)$  echte Untervarietät von  $V$ .

**Beweis** ☞ sei  $V$  affin in  $\mathbb{A}^n(k)$ ,  $V$  irreduzibel. Sei  $d = \dim V$ .

Sing(V) ist abgeschlossen: Sei  $V = V(f_1, \dots, f_r)$ ,  $\mathcal{J} = (\frac{\partial f_i}{\partial X_j})_{\substack{i=1, \dots, r \\ j=1, \dots, n}}$ .

Dann ist  $\text{Sing}(V) = \{x \in V : \text{Rg}(\mathcal{J}(x)) < n - d = d'\} =$

$\{x \in V : \det(M(x)) = 0 \text{ für alle } (d' \times d')\text{-Minoren } M \text{ von } \mathcal{J}\} =$

$(\bigcap_{(d' \times d')\text{-Minoren } M \text{ von } \mathcal{J}} V(\det(M))) \cap V$ .

Sing(V)  $\neq V$ :

Fall 1:  $V = V(f)$  Hyperfläche,  $f$  quadratfreies Polynom

$$\Rightarrow \text{Sing}(V) = \{x \in V : \frac{\partial f}{\partial X_j}(x) = 0, j = 1, \dots, n\}$$

Wäre  $\text{Sing}(V) = V$ , so wäre  $\frac{\partial f}{\partial X_j} \in I(V) = (f)$  für  $j = 1, \dots, n \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial X_j} = 0$  für  $j = 1, \dots, n \Rightarrow$

$\begin{cases} \text{char}(k) = 0 : f \in k, \text{Wid!} \\ \text{char}(k) = p : f(X_1, \dots, X_n) = g(X_1^p, \dots, X_n^p) = g^p, \text{Wid!} \end{cases}$

Fall 2  $V$  ist beliebig. Dann folgt die Behauptung aus der folgenden Proposition. □

**Proposition 3.17.2**

Jede irreduzible Varietät  $V$  der Dimension  $d$  ist birational Äquivalent zu einer Hyperfläche in  $\mathbb{A}^{d+1}(k)$

**Beweis** Ziel: Finde eine irreduzible Hyperfläche  $W \subseteq \mathbb{A}^{d+1}(k)$  mit  $k(W) \cong k(V)$ . Dann folgt die Proposition aus Korollar 7.5.

Sei  $X_1, \dots, X_d$  Transzendenzbasis von  $k(V)$  (Noether-Normalisierung von  $k(V)$ ).

Dann ist  $k(V)/k(X_1, \dots, X_d)$  endlich.

OE Sei  $k(V)/k(X_1, \dots, X_d)$  einfach (falls  $\text{char}(k) = p$ , so gibt es eine Transzendenzbasis mit dieser Eigenschaft).

Sei  $y \in k(V)$  ein primitives Element.

Sei  $y^m + a_{m-1}y^{m-1} + \dots + a_1y + a_0$  das Minimalpolynom.

Sei  $a_i = \frac{f_i}{g_i}$  mit  $f_i, g_i \in k[X_1, \dots, X_d]$ .

Sei  $g = \prod g_i$ ,  $W := V(g^m y^m + g^m a_{m-1} y^{m-1} + \dots + g^m a_0)$ .

$W$  ist eine Hyperfläche in  $\mathbb{A}^{d+1}(k)$

$k[W] = k[X_1, \dots, X_d, gY]/(\dots) \Rightarrow k(W) \cong k(V)$  □

### Bemerkung 3.17.3

Sei  $V$  eine Varietät,  $x \in V$ . Dann gilt:

$\mathcal{O}_{V,x}$  nullteilerfrei  $\Leftrightarrow$  es gibt genau eine irreduzible Komponente  $Z$  von  $V$  mit  $x \in Z$ .

**Beweis** OE  $V$  affin. Seien  $V_1 \neq V_2$  irreduzible Komponenten von  $V$ . Dann gilt:

$$\begin{aligned} x &\in V_1 \cap V_2 \\ \Leftrightarrow I(V_1) + I(V_2) &\subseteq m_x^V \\ \Leftrightarrow \mu_{i,x} := I(V_i) \cdot \mathcal{O}_{V,x} &\text{ ist minimales Primideal in } \mathcal{O}_{V,x} \text{ (} i = 1, 2 \text{) mit } \mu_{1,x} \neq \mu_{2,x} \\ \Leftrightarrow (0) &\text{ nicht Primideal in } \mathcal{O}_{V,x} \\ \Leftrightarrow \mathcal{O}_{V,x} &\text{ nicht nullteilerfrei} \end{aligned}$$

(das vorletzte " $\Leftarrow$ " folgt mit der Übung:  $\bigcap_{\mathfrak{p} \text{ Primideal in } R} \mathfrak{p} = \sqrt{(0)}$ ) □

### Proposition 3.17.4

Sei  $V$  eine Varietät,  $x \in V$ . Gibt es irreduzible Komponenten  $V_1 \neq V_2$  von  $V$  mit  $x \in V_1 \cap V_2$ , so ist  $x$  singulärer Punkt von  $V$ .

**Beweis** Es genügt zu zeigen:

### Proposition 3.17.5

Jeder reguläre lokale Ring  $R$  ist nullteilerfrei.

**Beweis (mit Import von (1), •, (3); siehe unten)** Sei  $d = \dim R$ . Induktion über  $d$ :

$d=0$ :  $m/m^2 = 0 \Rightarrow m = 0$  (Nakayama)

$d=1$ :  $\dim(m/m^2) = 1 \Leftrightarrow R$  ist diskreter Bewertungsring, also insbesondere nullteilerfrei.

$d>1$ : Seien  $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_r$  die minimalen Primideale von  $R$ .  $\mathfrak{p}_i \neq m$ , da  $\dim R \geq 1$ , außerdem  $m \neq m^2$ .

$$\stackrel{(2)}{\Rightarrow} \exists a \in m \text{ mit } a \notin \mathfrak{p}_i, i = 1, \dots, r$$

### Behauptung

$a$  ist ein Primelement in  $R$ .

Dann gibt es ein  $i$  mit  $\mathfrak{p}_i \subseteq (a)$

Für jedes  $b \in \mathfrak{p}_i$  gibt es also  $q \in R$  mit  $b = q \cdot a$

$$\Rightarrow q \in \mathfrak{p}_i, \text{ da } \mathfrak{p}_i \text{ Primideal, } a \notin \mathfrak{p}_i$$

$$\Rightarrow \mathfrak{p}_i \subseteq \mathfrak{p}_i \cdot (a) \subseteq \mathfrak{p}_i \cdot m$$

$$\stackrel{(Nakayama)}{\Rightarrow} \mathfrak{p}_i = 0$$

□



**Beweis (der Behauptung)** Zeige:  $S := R/(a)$  ist regulärer lokaler Ring der Dimension  $d - 1$ .

Es ist  $m_S = m/(a)$  und  $m_S/m_S^2 = m/(a)/m^2/m^2 \cap (a) \cong m/(a)/m^2 + (a)/(a) \cong m/m^2 + (a)$

Da  $a \notin m^2$ , ist  $m_S/m_S^2 \subsetneq m/m^2 \Rightarrow \dim(m_S/m_S^2) \leq d - 1$ .

Noch zu zeigen:  $\dim S = d - 1$

Sei  $\mathfrak{p}$  minimales Primideal in  $R$ , das in einer Kette der Länge  $d$  vorkommt und  $R' := R/\mathfrak{p}$ . Dann ist  $\dim R' = \dim R = d$  und  $R'$  nullteilerfrei. Da  $a \notin \mathfrak{p}$ , ist  $\bar{a} \neq 0$  in  $R' \Rightarrow \text{ht}(\mathfrak{p}) = 1$  für jedes minimale (Primideal  $\mathfrak{q}$  in  $R'$  mit  $\bar{a} \in \mathfrak{q}$ )

$\Rightarrow \dim S = \dim R'/(a) = \dim R'/\mathfrak{q} = d - 1$

□

### Import:

- (1) Jeder noethersche Ring hat nur endlich viele minimale Primideale.
- (2) Vermeiden von Primidealen: Sei  $R$  ein Ring,  $\mathfrak{p}_0 \subseteq R$  ein Ideal,  $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_r$  Primideale. Ist  $I \subseteq R$  Ideal mit  $I \not\subseteq \mathfrak{p}_i, i = 0, \dots, r$ , so ist  $I \not\subseteq \bigcap_{i=0}^r \mathfrak{p}_i$
- (3) Krullscher Hauptidealsatz: Sei  $R$  nullteilerfrei, noethersch,  $x \in R, x \neq 0, x \notin R^\times$ .  
Dann hat jedes Primideal, das  $x$  enthält und minimal mit dieser Eigenschaft ist, Höhe 1.