

3 Schätzer und ihre Eigenschaften

Es seien $(\mathfrak{X}, \mathcal{B}, \{P_\vartheta : \vartheta \in \Theta\})$ ein statistischer Raum, $\gamma : \Theta \rightarrow \Gamma$ ein Funktional, wobei $\Gamma \supset \gamma(\Theta)$, A_Γ eine σ -Algebra auf Γ .

3.1 Definition

Ein **Schätzer** für $\gamma(\vartheta)$ ist eine messbare Abbildung $S : (\mathfrak{X}, \mathcal{B}) \rightarrow (\Gamma, A_\Gamma)$. $S(x)$ heißt **Schätzwert** für $\gamma(\vartheta)$ zur Beobachtung $x \in \mathfrak{X}$.

3.2 Beispiel

$$(\mathfrak{X}, \mathcal{B}) = (\{0, 1\}^n, \mathcal{P}(\{0, 1\}^n)), \quad \Theta = (0, 1), \quad P_\vartheta = \bigotimes_{j=1}^n \text{Bin}(1, \vartheta)$$

$$\gamma(\vartheta) = \vartheta$$

$$S(x_1, \dots, x_n) := \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X_j$$

(relative Trefferhäufigkeit)

$$\Gamma = [0, 1] = \bar{\Theta}, \quad A_\Gamma = \mathcal{B}^1 \cap [0, 1]$$

[Beachte: $\gamma(\Theta) = \Theta \subset \Gamma$]

Die Güte eines Schätzers wird über die Verteilung $P_\vartheta^{S(X)}$ von $S(X)$ unter ϑ beurteilt. Für jedes $\vartheta \in \Theta$ sollte $P_\vartheta^{S(X)}$ „stark um $\gamma(\vartheta)$ konzentriert“ sein.

3.3 Definition (Sei $\Gamma \subset \mathbb{R}^k$.)

- a) **S erwartungstreu** (unbiased) für $\gamma(\vartheta) : \Leftrightarrow E_\vartheta S(X) = \gamma(\vartheta) \quad \forall \vartheta \in \Theta$
- b) $b_S(\vartheta) := E_\vartheta S(X) - \gamma(\vartheta)$ heißt Verzerrung (bias) von S an der Stelle ϑ .
- c) Ist $S_n = S_n(X_1, \dots, X_n)$, $n \geq 1$ eine Schätzfolge, so heißt (S_n) **asymptotisch erwartungstreu** für $\gamma(\vartheta) : \Leftrightarrow$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E_\vartheta S_n = \gamma(\vartheta) \quad \forall \vartheta \in \Theta$$

Erwartungstreue: $\forall \vartheta \in \Theta$: Schwerpunkt von $P_\vartheta^{S(X)}$ ist $\gamma(\vartheta)$

3.4 Definition (Sei $\Gamma \subset \mathbb{R}$.)

S mediantreu für $\gamma(\vartheta) : \Leftrightarrow \text{med}_{\vartheta} S(X) = \gamma(\vartheta) \forall \vartheta \in \Theta$.

Dabei:

Sei Y Zufallsvariable mit Verteilungsfunktion F.

$$F^{-1}(q) := \inf\{x \in \mathbb{R} : F(x) \geq q\}, \quad 0 < q < 1$$

$$\text{med } Y := \text{med } F := \frac{1}{2} \left(F^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) + \underbrace{F^{-1}\left(\frac{1}{2} + 0\right)}_{=\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}+} F^{-1}(x)} \right)$$

\rightarrow Median⁸

Mediantreue: $\forall \vartheta \in \Theta$:

$$P_{\vartheta}(S(X) \leq \gamma(\vartheta)) = P_{\vartheta}(S(X) \geq \gamma(\vartheta)) \geq \frac{1}{2}$$

(In jeweils 50% der Fälle Unter- bzw. Überschätzung.)

Beispiele:

- a) X_1, \dots, X_n reellwertig, $X_1, \dots, X_n \stackrel{uiv}{\sim} P_{\vartheta}$, $\mu(\vartheta) := E_{\vartheta} X_1$
 $(E_{\vartheta}|X_1| < \infty)$.

\bar{X}_n ist erwartungstreu für $\mu(\vartheta)$

X_1 ist erwartungstreu für $\mu(\vartheta)$

- b) Wie a), $E_{\vartheta} X_1^2 < \infty$. $\sigma^2(\vartheta) := \text{Var}_{\vartheta}(X_1)$.

$$S_n^2 := \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2$$

S_n^2 ist erwartungstreu für $\sigma^2(\vartheta)$.

⁸ \rightarrow Abbildung 3.1

Beweis:

$$\begin{aligned}
 E_{\vartheta} S_n^2 &= \frac{1}{n-1} E_{\vartheta} \left[\sum_{i=1}^n ((X_i - \mu(\vartheta)) - (\bar{X}_n - \mu(\vartheta)))^2 \right] \\
 &= \frac{1}{n-1} \left[\sum_{i=1}^n \underbrace{E_{\vartheta} (X_i - \mu(\vartheta))^2}_{=\text{Var}_{\vartheta}(X_i)} - n \underbrace{E_{\vartheta} (\bar{X}_n - \mu(\vartheta))^2}_{=\text{Var}_{\vartheta}(\bar{X}_n) = \frac{\sigma^2(\vartheta)}{n}} \right] \\
 &= \frac{1}{n-1} (n\sigma^2(\vartheta) - \sigma^2(\vartheta)) \\
 &= \sigma^2(\vartheta)
 \end{aligned}$$

$$\text{c) } X_1, \dots, X_n \stackrel{uiv}{\sim} \mathcal{N}(\mu, \sigma^2), \vartheta = (\mu, \sigma^2), \gamma(\vartheta) = E_{\vartheta} X_1 = \mu$$

$$\bar{X}_n \sim \mathcal{N}(\mu, \frac{\sigma^2}{n}) \Rightarrow \text{med}_{\vartheta} \bar{X}_n = \mu$$

$\Rightarrow \bar{X}_n$ ist mediantreu für $\gamma(\vartheta)$.

3.5 Definition (Sei $\Gamma \subset \mathbb{R}^k$.)

Schätzfolge $S_n = S_n(X_1, \dots, X_n)$, $n \geq 1$, heißt (schwach) **konsistent** für $\gamma(\vartheta) \Leftrightarrow$

$$P_{\vartheta}(\|S_n(X_1, \dots, X_n) - \gamma(\vartheta)\| \geq \varepsilon) \rightarrow 0 \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \forall \vartheta \in \Theta$$

$$(\forall \vartheta \in \Theta : S_n \xrightarrow{P_{\vartheta}} \gamma(\vartheta))$$

3.6 Bemerkung (Sei $\Gamma \subset \mathbb{R}$.)

(S_n) asymptotisch erwartungstreu für $\gamma(\vartheta)$ und $\text{Var}_{\vartheta} S_n \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty) \Rightarrow (S_n)$ konsistent für $\gamma(\vartheta)$.

[Beweis:]

$$\begin{aligned}
 P_{\vartheta}(|S_n - \gamma| \geq \varepsilon) &\leq P_{\vartheta}(|S_n - ES_n| + |ES_n - \gamma| \geq \varepsilon) \\
 &\leq P_{\vartheta}(|S_n - ES_n| \geq \frac{\varepsilon}{2} \text{ oder } |ES_n - \gamma| \geq \frac{\varepsilon}{2}) \\
 &\leq P_{\vartheta}(|S_n - ES_n| \geq \frac{\varepsilon}{2}) + P_{\vartheta}(|ES_n - \gamma| \geq \frac{\varepsilon}{2}) \\
 &\stackrel{(*)}{\leq} \frac{\text{Var}(S_n)}{(\frac{\varepsilon}{2})^2} + P_{\vartheta}(|ES_n - \gamma| \geq \frac{\varepsilon}{2}) \\
 &\rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)
 \end{aligned}$$

(*) : Tschebyscheff

Kurz:

$$|S_n - \gamma| \leq \underbrace{|S_n - E_\vartheta S_n|}_{\xrightarrow{P_\vartheta} 0 \text{ (1)}} + \underbrace{|E_\vartheta S_n - \gamma|}_{\xrightarrow{P_\vartheta} 0 \text{ (2)}} \xrightarrow{P_\vartheta} 0$$

(1): Tschebyscheff, (2): asymptotisch erwartungstreu

Obiges Beispiel a):

\bar{X}_n konsistent für $\mu(\vartheta)$, falls $E_\vartheta X_1^2 < \infty$ nach 3.6.

Starkes Gesetz der großen Zahlen (SGGZ):

$$\bar{X}_n \xrightarrow{P_\vartheta \text{ f.s.}} E_\vartheta X_1 \text{ (ohne weitere Voraussetzung)} \Rightarrow \bar{X}_n \xrightarrow{P_\vartheta} E_\vartheta X_1$$

3.7 Bemerkung und Definition (Sei $\Gamma \subset \mathbb{R}$.)

$$\text{MQA}_S(\vartheta) := E_\vartheta (S(X) - \gamma(\vartheta))^2$$

heißt **mittlere quadratische Abweichung** von S an der Stelle ϑ .

Es gilt:

$$\text{MQA}_S(\vartheta) = E_\vartheta (S(X) - E_\vartheta S(X))^2 + (E_\vartheta S(X) - \gamma(\vartheta))^2 = \text{Var}_\vartheta S(X) + b_s^2(\vartheta)$$

3.8 Beispiel

$X_1, \dots, X_n \stackrel{iid}{\sim} \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, μ, σ^2 unbekannt

Schätzer von σ^2 :

$$\tilde{\sigma}_n^2(c) = c \cdot \sum_{j=1}^n (X_j - \bar{X}_n)^2$$

Ziel: c so wählen, dass MQA von $\tilde{\sigma}_n^2(c)$ minimal wird.

$$E_\vartheta(\tilde{\sigma}_n^2(c)) = c\sigma^2 \cdot E_\vartheta \left[\underbrace{\frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2}_{\sim \chi_{n-1}^2} \right] = c\sigma^2 \cdot (n-1)$$

$$\text{Var}_\vartheta(\tilde{\sigma}_n^2(c)) = c^2 \sigma^4 \cdot 2(n-1)$$

Damit:

$$\begin{aligned}
 \text{MQA}_{\tilde{\sigma}_n^2(c)}(\vartheta) &= 2(n-1)c^2\sigma^4 + (c\sigma^2(n-1) - \sigma^2)^2 \\
 &= \dots \\
 &= \sigma^4(n^2-1) \left[\left(c - \frac{1}{n+1}\right)^2 + \frac{2}{(n-1)(n+1)^2} \right] \\
 &\stackrel{!}{=} \min
 \end{aligned}$$

Dies führt offensichtlich auf $c = \frac{1}{n+1}$.

