

## 19. Lineare Differentialgleichungen $m$ -ter Ordnung

In diesem Paragraphen:  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein Intervall,  $a_0, a_1, \dots, a_{m-1}, b \in C(I, \mathbb{R})$ ,  $x_0, y_0, \dots, y_{m-1} \in \mathbb{R}$ . Die Differentialgleichung  $y^{(m)} + a_{m-1}(x)y^{(m-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x)$  heißt eine **lineare Differentialgleichung  $m$ -ter Ordnung**.

Setze  $Ly := y^{(m)} + a_{m-1}(x)y^{(m-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y$ . Dann schreibt sich obige Gleichung in der Form

$$Ly = b(x)$$

Diese Gleichung heißt **homogen**, falls  $b \equiv 0$ , anderenfalls **inhomogen**. Das zur Gleichung  $Ly = b$  gehörende System (S) aus § 18 lautet

$$z' = A(x)z + b_0(x)$$

mit  $b_0(x) = (0, \dots, 0, b(x))$  und  $A(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & 1 \\ -a_0(x) & \dots & \dots & \dots & -a_{m-1}(x) \end{pmatrix}$

Die Beweise der folgenden Sätze 19.1 bis 19.4 folgen aus den Paragraphen 16 und 18.

### Satz 19.1

Das Anfangswertproblem  $\begin{cases} Ly = b(x) \\ y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1, \dots, y^{(m-1)}(x_0) = y_{m-1} \end{cases}$  hat auf  $I$  genau eine Lösung.

**Wie in § 16:** Ist  $J \subseteq I$  ein Intervall und  $\hat{y} : J \rightarrow \mathbb{R}$  eine Lösung von  $Ly = b$  auf  $J$ , so existiert eine Lösung  $y : I \rightarrow \mathbb{R}$  der Gleichung  $Ly = b$  auf  $I$  mit  $\hat{y} = y|_J$ .

Daher betrachten wir immer Lösungen  $y : I \rightarrow \mathbb{R}$ .

Die zu  $Ly = b$  gehörende *homogene* Gleichung lautet: (H)  $Ly = 0$ .

### Satz 19.2

Sei  $y_s$  eine spezielle Lösung der Gleichung  $Ly = b$  und  $y : I \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion.

Dann:  $y$  ist eine Lösung von  $Ly = b \iff \exists y_0 : I \rightarrow \mathbb{R} : y_0$  ist eine Lösung von (H) und  $y = y_0 + y_s$ .

$\mathbb{L} := \{y : I \rightarrow \mathbb{R} : y \text{ löst (H) auf } I\}$ .

**Satz 19.3**

(1)  $\mathbb{L}$  ist ein reeller Vektorraum,  $\dim \mathbb{L} = m$ .

(2) Für  $y_1, \dots, y_k \in \mathbb{L}$  sind äquivalent:

- (i)  $y_1, \dots, y_k$  sind linear unabhängig in  $\mathbb{L}$ ;
- (ii)  $\forall x \in I$  sind  $(y_j(x), y_j'(x), \dots, y_j^{(m-1)}(x)) \quad (j = 1, \dots, k)$  linear unabhängig in  $\mathbb{R}^m$ ;
- (iii)  $\exists x \in I : (y_j(x), y_j'(x), \dots, y_j^{(m-1)}(x)) \quad (j = 1, \dots, k)$  sind linear unabhängig in  $\mathbb{R}^m$ .

**Definition**

Seien  $y_1, \dots, y_m \in \mathbb{L}$ .  $y_1, \dots, y_m$  heißt ein **Lösungssystem** (LS) von (H) und

$$W(x) := \begin{vmatrix} y_1(x) & \dots & y_m(x) \\ y_1'(x) & \dots & y_m'(x) \\ \vdots & & \vdots \\ y_1^{(m-1)}(x) & \dots & y_m^{(m-1)}(x) \end{vmatrix}$$

heißt **Wronskideterminante**.

Sind  $y_1, \dots, y_m$  linear unabhängig in  $\mathbb{L}$ , so heißt  $y_1, \dots, y_m$  ein **Fundamentalsystem** (FS) von (H).

**Satz 19.4**

Sei  $y_1, \dots, y_m$  ein Lösungssystem von (H).

- (1)  $W(x) = W(\xi) e^{-\int_{\xi}^x a_{m-1}(t) dt} \quad (x, \xi \in I)$
- (2)  $y_1, \dots, y_m$  ist ein Fundamentalsystem von (H)  $\iff W(x) \neq 0 \forall x \in I \iff \exists \xi \in I : W(\xi) \neq 0$

**Satz 19.5 (Reduktionsverfahren von d'Alembert ( $m = 2$ ))**

Sei  $y_1$  eine Lösung von (\*)  $y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$  und  $y_1(x) \neq 0 \forall x \in I$ . Sei  $z$  eine Lösung von  $z' = -(a_1(x) + \frac{2y_1'(x)}{y_1(x)})z$ ,  $z \neq 0$  und  $y_2(x) := y_1(x) \int z(x) dx$ .

Dann ist  $y_1, y_2$  ein Fundamentalsystem von (\*).

### Beweis

Nachrechnen:  $y_2$  löst (\*).  $W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 & y_1 \int z dx \\ y_1' & y_1' \int z dx + y_1 z \end{vmatrix} =$   
 $y_1 y_1' \int z dx + y_1^2 z - y_1 y_1' \int z dx = \underbrace{y_1^2}_{>0} z \xrightarrow{19.4} y_1, y_2 \text{ sind linear unabhängig in } \mathbb{L}.$

### Beispiel

$$(**) \quad y'' + \frac{2x}{1-x^2} y' - \frac{2}{1-x^2} y = 0 \quad (I = (1, \infty)); y_1(x) = x$$

$$z' = -\left(\frac{2x}{1-x^2} + \frac{2}{x}\right)z = -\frac{2x^2+2(1-x^2)}{x(1-x^2)}z = \frac{2}{x(x^2-1)}z \quad (***)$$

$$\int \frac{2}{x(x^2-1)} dx = \log\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)$$

$$\S 7 \implies \text{allgemeine Lösung von (***)}: z(x) = ce^{\log\left(1-\frac{1}{x^2}\right)} = c\left(1 - \frac{1}{x^2}\right) \quad (c \in \mathbb{R})$$

$$z(x) = 1 - \frac{1}{x^2} \implies \int z(x) dx = x + \frac{1}{x} \implies y_2(x) = x\left(x + \frac{1}{x}\right) = 1 + x^2$$

$$\text{Fundamentalsystem: } y_1, y_2. \text{ Allgemeine Lösung von (**): } y(x) = c_1 x + c_2(1 + x^2) \quad (c_1, c_2 \in \mathbb{R})$$

### Satz 19.6

Sei  $y_1, \dots, y_m$  ein FS von (H).  $W$  sei die Wronskideterminante von  $y_1, \dots, y_m$  und für  $k = 1, \dots, m$  sei  $W_k(x)$  die Determinante, die aus  $W(x)$  entsteht, indem man in  $W(x)$  die  $k$ -te Spalte ersetzt durch  $(0, \dots, 0, b(x))^T$ . Dann ist

$$y_s := \sum_{k=1}^m y_k \int \frac{W_k}{W} dx$$

eine spezielle Lösung von  $L_y = b(x)$ .

### Beweis

§16, §18 ■

### Beispiel

$$y'' + \frac{2x}{1-x^2} y' - \frac{2}{1-x^2} y = x^2 - 1$$

FS der homogenen Gleichung:  $x, x^2 + 1$

$$W(x) = \begin{vmatrix} x & x^2 + 1 \\ 1 & 2x \end{vmatrix} = 2x^2 - (x^2 + 1) = x^2 - 1$$

$$W_1(x) = \begin{vmatrix} 0 & x^2 + 1 \\ x^2 - 1 & 2x \end{vmatrix} = -(x^2 + 1)(x^2 - 1) \implies \frac{W_1(x)}{W(x)} = -(x^2 + 1)$$

$$\implies \int \frac{W_1}{W} dx = -\frac{1}{3}x^3 - x$$

$$W_2(x) = \begin{vmatrix} x & 0 \\ 1 & x^2 - 1 \end{vmatrix} = x(x^2 - 1) \implies \frac{W_2(x)}{W(x)} = x \implies \int \frac{W_2}{W} dx = \frac{1}{2}x^2$$

19. Lineare Differentialgleichungen  $m$ -ter Ordnung

$$\implies y_s(x) = -\frac{1}{3}x^4 - x^2 + (x^2 + 1)\frac{1}{2}x^2 = \frac{1}{6}x^4 - \frac{1}{2}x^2.$$

Allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung:

$$y(x) = c_1x + c_2(x^2 + 1) + \frac{1}{6}x^4 + \frac{1}{2}x^2 \quad (c_1, c_2 \in \mathbb{R})$$