# Kapitel 2

# Projektive Varietäten

## § 9 Der Projektive Raum

**Definition 9.1**
Sei $k$ ein Körper, $n \geq 0$
$\mathbb{P}^n := \{\text{Geraden durch } 0 \text{ in } k^{n+1}\}$

**Bemerkung 9.2**
$\mathbb{P}^n(k) = {}^{(k^{n+1} \setminus \{0\})}\big/_{\sim}$ Äquivalenzklassen, wobei $(x_0, \dots, x_n) \sim (y_0, \dots, y_n)$ genau dann, wenn ein $\lambda \in k \setminus \{0\}$ existiert, sodass $\lambda \cdot x_i = y_i$ für $i = 0, \dots, n)$

**Beispiel**
0) $n = 0$: $\mathbb{P}^0(k)$ hat genau einen Punkt
1) $n = 1$: $\mathbb{P}^1(k) = k \cup \{\infty\}$
2) $k = \mathbb{R}$, $n = 1$: $\mathbb{P}^1(\mathbb{R}) = S^1/\{\pm 1\}$
$n = 2$: $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ „Kreuzhaube“ (nicht orientierbare geschlossene Fläche)
3) $k = \mathbb{C}$: $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \overset{1)}{=} \mathbb{C} \cup \{\infty\}$
4) $k = \mathbb{F}_2, n = 2$: $\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_2)$ hat 7 Punkte

**Schreibweise:** Die Klasse von $(x_0, \dots, x_n)$ wird mit $(x_0 : \ldots : x_n)$ bezeichnet.

**Bemerkung 9.3**
Für $n \geq 1$ und $i = 1, \dots, n$ sei

$$U_i := \{(x_0 : \ldots : x_n) \in \mathbb{P}^n(k) : x_i \neq 0\}$$

a) $U_i$ ist wohldefinierte Teilmenge von $\mathbb{P}^n(k)$ und $\bigcup\limits_{i=0}^{n} U_i = \mathbb{P}^n(k)$

b) $\varrho_i : \begin{cases} U_i & \to & k^n \\ (x_0 : \ldots : x_n) & \mapsto & (\frac{x_0}{x_i}, \dots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i}) \end{cases}$ ist bijektiv

Umkehrabbildung:

$$\begin{array}{rcl} \psi_i : k^n & \to & U_i \\ (y_1, \dots, y_n) & \mapsto & (y_1 : \ldots : y_i : 1 : y_{i+1} : \ldots : y_n) \end{array}$$

c) $\varphi_i : \begin{cases} \mathbb{P}^n(k) - U_i & \to & \mathbb{P}^{n-1}(k) \\ (x_0 : \ldots : x_n) & \mapsto & (x_0 : \ldots : x_{i-1} : x_{i+1} : \ldots : x_n) \end{cases}$ ist bijektiv

Umkehrabbildung:

$$(y_1 : \ldots : y_n) \mapsto (y_1 : \ldots : y_{i-1} : 0 : y_i : \ldots : y_n)$$

**Beweis**
b)

$$\begin{aligned}\varrho_i \circ \psi_i(y_1, \dots, y_n) &= \varrho_i(y_1 : \dots : y_i : 1 : y_{i+1} : \dots : y_n) \\ &= (y_1, \dots, y_i, \dots, y_n)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\psi_i \circ \varrho_i(x_1 : \dots : x_n) &= \psi_i(\tfrac{x_0}{x_i}, \dots, \tfrac{x_{i-1}}{x_i}, \tfrac{x_{i+1}}{x_i}, \dots, \tfrac{x_n}{x_i}) \\ &= (\tfrac{x_0}{x_i} : \dots : \tfrac{x_{i-1}}{x_i} : 1 : \tfrac{x_{i+1}}{x_i} : \dots : \tfrac{x_n}{x_i}) \sim (x_1 : \dots : x_n)\end{aligned}$$

□

**Folgerung 9.4**
$\mathbb{P}^n(k) = \mathbb{A}^n(k) \dot\cup \mathbb{P}^{n-1}(k) = k^n \dot\cup k^{n-1} \dot\cup \mathbb{P}^{n-2}(k) = \dots = k^n \dot\cup k^{n-1} \dot\cup \dots \dot\cup k \dot\cup \{0\}$

# § 10 Varietäten in $\mathbb{P}^n(k)$

**Bemerkung 10.1**
Sei $f \in k[X_0, \dots, X_n]$ homogen vom Grad $d > 0$.
a) Für $(x_0, \dots, x_n) \in k^{n+1}$ und $\lambda \in k$ gilt:

$$f(\lambda x_0, \dots, \lambda x_n) = \lambda^d \cdot f(x_0, \dots, x_n)$$

b) $f$ hat wohlbestimmte Nullstellenmenge $V(f) \subset \mathbb{A}^n(k)$

**Definition 10.2**
Eine Teilmenge $V \subseteq \mathbb{P}^n(k)$ heißt ***projektive Varietät***, wenn es eine Menge $F \subset k[X_0, \dots, X_n]$ von homogenen Polynomen gibt mit $V = \{x \in \mathbb{P}^n(k) : f(x) = 0 \forall f \in F\}$

**Beispiel 10.3**
a) $V(X_0, \dots, X_n) = \emptyset$
b) $H_i := V(X_i)$ „=“ $\mathbb{P}^{n-1} = \mathbb{P}^n(k) - U_i$
   $H_i$ heißt Hyperebene
c) $V(X_0X_1 - X_2^2) \subseteq \mathbb{P}^2(k)$ projektive Varietät
   $V \cap U_0 = V(\frac{x_1}{x_0} - (\frac{x_2}{x_0})^2) \subseteq U_0$ „=“ $\mathbb{A}^2(k)$
   $\qquad = V(y - x^2)$ Parabel
   $V \cap U_2 = V(\frac{x_0}{x_2}\frac{x_1}{x_2} - 1) \subset U_2 = \mathbb{A}^2(k)$
   $\qquad = V(xy - 1)$ Hyperbel

**Warnung:** Ist $V \subset \mathbb{P}^n(k), v \neq 0$, so ist

$$I_0(V) := \{f \in k[X_0, \dots, X_n] : f \text{ homogen}, f(x) = 0 \forall x \in V\}$$

kein Ideal!
*Denn:* ist $f \in I_0(V), \deg(f) \geq 1 \Rightarrow f^2 \in I_0(V)$, aber $f + f^2$ ist nicht homogen.

**Definition 10.4**
a) Für $V \subseteq \mathbb{P}^n(k)$ sei $I(V) \subseteq k[X_0, \dots, X_n]$ das von $I_0(V) = \{f \in k[X_1, \dots, X_n]$ homogen, $f(x) = 0 \forall x \in V\}$ erzeugte Ideal. $I(V)$ heißt ***Verschwindungsideal***.
b) Ein Ideal $I \subseteq k[X_0, \dots, X_n]$ heißt ***homogen***, wenn es von homogenen Polynomen erzeugt werden kann.
c) Für ein homogenes Ideal $I \subseteq k[X_0, \dots, X_n]$ sei

$$V(I) := \{x \in \mathbb{P}^n(k) : f(x) = 0 \text{ für alle homogenen } f \in I\}$$

**Definition + Bemerkung 10.5**
a) Ein Ring $R$ heißt ***graduiert***, wenn es eine Zerlegung $R = \bigoplus_{d=0}^{\infty} R_d$ gibt mit abelschen Gruppen $R_d$, sodass $R_d R_e \subseteq R_{d+e}$ für alle $d, e \geq 0$
b) Eine $k$-Algebra $S$ heißt ***graduiert***, wenn $S = \bigoplus_{d=0}^{\infty} S_d$ graduierter Ring ist und $S_0 = k$. Dann ist jedes $S_d$ ein $k$-Vektorraum.
c) Die Elemente von $R_d$ heißen ***homogen*** vom Grad $d$.
d) Ein Ideal $I \subseteq R$ heißt ***homogen***, wenn es von homogenen Elementen erzeugt werden kann.

e) $I$ homogen $\Leftrightarrow I = \bigoplus_{d=0}^{\infty}(I \cap R) \Leftrightarrow$ für jedes $a \in I, a = \sum_{d=0}^{n} a_d$, $a_d \in R_d$ ist $a_d \in I$ für jedes $d = 0, \dots, n$

f) Ist $I \subset R$ homogenes Ideal, so ist $R/I$ graduierter Ring mit $(R/I)_d = R_d/I \cap R_d$

g) Summe, Produkt, Durchschnitt und Radikal von homogenen Idealen ist homogen.

**Beweis**

e) „$\Leftarrow$“: ✓

„$\Rightarrow$“: Seien $(a_i)_{i\in J}$ homogene Erzeuger von $I$, $a_i \in R_{d_i}$, sei $a \in I$ beliebig, schreibe

$a = \sum\limits_{\text{endl.}} r_i a_i$ mit $r_i \in R$. Sei $r_i = \sum\limits_{d=0}^{n} r_{i,d}$ mit $r_{i,d} \in R$

$$\Rightarrow \quad r_i a_i = \sum_{d=0}^{n} \underbrace{r_{i,d} a_i}_{\in I \cap R_{d+d_i}} \quad \Rightarrow \quad r_i a_i \in \bigoplus_{d \geq 0} (R_d \cap I)$$
$$\Rightarrow \quad a \in \bigoplus_{d \geq 0} (R_d \cap I)$$

f) $$\begin{array}{rcl} \pi : \bigoplus\limits_{d=0}^{\infty} R_d/I \cap R_d & \to & R/I \\ r \bmod I \cap R_d & \mapsto & r \bmod I \end{array} \quad \text{ist surjektiver Homomorphismus.}$$

Sei $\sum\limits_{d=0}^{n} r_d \bmod I \cap R_d \in \operatorname{Kern} \pi \Leftrightarrow \sum r_d \in I \overset{I\text{ hom.}}{\Longleftrightarrow} r_d \in I$ für alle $d$

$\Rightarrow r_d \in R_d \cap I \forall d \Rightarrow \sum\limits_{d} r_d \bmod I \cap R_d = 0$ in $\bigoplus\limits_{d=0}^{\infty} R_d/I \cap R_d$

$\Rightarrow \pi$ injektiv $\Rightarrow \pi$ ist Isomorphismus.

g) Seien $I_1, I_2$ homogen mit homogenem Erzeuger $(a_i)_{i\in J}$ bzw. $(b_i)_{i\in J}$.

- $I_1 + I_2$ wird von den $a_i$ und den $b_i$ erzeugt.
- $I_1 \cdot I_2$ wird von den $a_i b_i$ erzeugt.
- $\bigoplus\limits_{d=0}^{\infty}((I_1 \cap I_2) \cap R_d) = \bigoplus\limits_{d=0}^{\infty}((I_1 \cap R_d) \cap (I_2 \cap R_d)) = \bigoplus\limits_{d}(I_1 \cap R_d) \cap \bigoplus\limits_{d}(I_2 \cap R_d) = I_1 \cap I_2$

Sei $I$ homogen, $x \in \sqrt{I}$, schreibe $x = \sum\limits_{d=0}^{n} x_d$.

*Zu zeigen:* $x_d \in \sqrt{I}$ für alle $d$

$x \in \sqrt{I} \Rightarrow \exists m \geq 1$ mit $x^m \in I$

$x^m = (\sum\limits_{d=0}^{n} x_d)^m = x_n^m +$ Terme niedrigeren Grades

$\Rightarrow x_n^m \in I \Rightarrow x_n \in \sqrt{I} \Rightarrow x - x_n \in \sqrt{I}$

$\overset{\text{Ind.}}{\Longrightarrow} x_d \in \sqrt{I}$ für jedes $d$ □

**Bemerkung + Definition 10.6**

a) Für jede Teilmenge $V \subseteq \mathbb{P}^n(k)$ ist $I(V)$ ein Radikalideal.

b) Die projektiven Varietäten in $\mathbb{P}^n(k)$ bilden die abgeschlossenen Teilmengen einer Topologie auf $\mathbb{P}^n(k)$. Diese heißt ***Zariski-Topologie***.

c) Eine projektive Varietät $V \subseteq \mathbb{P}^n(k)$ ist genau dann irreduzibel, wenn $I(V)$ Primideal ist.

d) Jede projektive Varietät besitzt eine eindeutige Zerlegung in endlich viele irreduzible Komponenten.

**Beweis**

a) *Zu zeigen:* $\sqrt{I(V)} \subseteq I(V)$

Sei $f \in \sqrt{I(V)}$ homogen, $m \geq 1$ mit $f^m \in I(V)$

$\Rightarrow f^m(x) = 0 \forall x \in V$

$\Rightarrow f(x) = 0 \forall x \in V$

$\Rightarrow f \in I(V)$

$\overset{\sqrt{I}\text{ homogen}}{\Longrightarrow} \sqrt{I(V)} \subseteq I(V)$ □

**Definition + Bemerkung 10.7**

Sei $V \subseteq \mathbb{P}^n(k)$ projektive Varietät, $V \neq 0$

a) $\widetilde{V} := \{(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{A}^{n+1}(k) | (x_0 : \dots : x_n) \in V\} \cup \{(0, \dots, 0)\}$ heißt ***affiner Kegel*** über $V$.

b) $\widetilde{V}$ ist affine Varietät.

*Genauer:* ist $V = V_{\text{proj}}(I)$ für ein homogenes Ideal $I \subseteq k[X_0, \dots, X_n]$, so ist $\widetilde{V}$ die Nullstellenmenge von $I$ in $\mathbb{A}^{n+1}(k)(V_{\text{aff}}(I))$

c) $I(\widetilde{V}) = I(V)$, falls $k$ unendlich

**Beweis**

c) Für homogene Polynome $f \in k[X_0, \dots, X_n]$ gilt:

$$f \in I(V) \Leftrightarrow f \in I(\widetilde{V})$$

*Zu zeigen:* $I(\widetilde{V})$ ist homogenes Ideal

Sei also $f \in I(\widetilde{V}), f = \sum_{i=0}^d f_i$, $f_i$ homogen vom Grad $i$. Für jedes $x = (x_0, \dots, x_n) \in \widetilde{V}$ und jedes $\lambda \in k$ ist $(\lambda x_0, \dots, \lambda x_n) \in \widetilde{V} \Rightarrow 0 = f(\lambda x_0, \dots, \lambda x_n) = \sum_{i=0}^d \lambda^i f_i(x)$ für jedes $\lambda \in k$

$\overset{k\text{ unendl.}}{\Longrightarrow}$ dieses LGS ist nur durch $f_i(x) = 0$ für alle $i$ lösbar $\Rightarrow f_i \in I(\widetilde{V})$ □

**Proposition 10.8 (Projektiver Nullstellensatz)**

Sei $k$ algebraisch abgeschlossen, $n \geq 0, I \subseteq k[X_0, \dots, X_n]$ homogenes Radikalideal. Ist $I \neq (X_0, \dots, X_n)$, so ist $I(V(I)) = I$.

**Beweis**

Ist $I = k[X_0, \dots, X_n]$, so ist $V(I) = \emptyset$, also $I(V(I)) = k[X_0, \dots, X_n]$. Ist $I \neq k[X_0, \dots, X_n]$ homogen, so ist $I \subseteq (X_0, \dots, X_n)$.

Sei $V_{\text{aff}}(I) \subseteq \mathbb{A}^{n+1}(k)$ die affine Nullstellenmenge, und $V = V_{\text{proj}}(I) \subseteq \mathbb{P}^n(k)$ die projektive Nullstellenmenge von $I \Rightarrow \widetilde{V} = V_{\text{aff}}(I)$

Dann ist $(0, \dots, 0) \in V_{\text{aff}}(I)$, aber $\{(0, \dots, 0)\} \neq V_{\text{aff}}(I)$. Für $(x_0, \dots, x_n) \in V_{\text{aff}}(I) \setminus \{(0, \dots, 0)\}$ ist $(x_0, \dots, x_n) \in V \Rightarrow V \neq \emptyset$. Nach Bemerkung 10.7 c) ist $I(V) = I(\widetilde{V}) = I(V_{\text{aff}}(I)) \overset{\text{HNS}}{=} I$ □

**Definition 10.9**

Sei $V \subseteq \mathbb{P}^n(k)$ projektive Varietät, $I(V) \subset k[X_0, \dots, X_n]$ das Verschwindungsideal. Dann heißt $K[V] := k[X_0, \dots, X_n]/I(V)$ ***homogener Koordinatenring*** zu $V$.

# § 11 Homogenisieren und Dehomogenisieren

**Definition + Bemerkung 11.1**
Sei $k$ ein Körper, $n \geq 1$

a) $H : \begin{cases} k[X_1, \ldots, X_n] & \rightarrow & k[X_0, \ldots, X_n] \\ f = \sum\limits_{i=0}^{d} f_i & \mapsto & \sum\limits_{i=0}^{d} f_i X_0^{d-i} \end{cases}$ ($f_i$ homogen vom Grad $i$, $f_d \neq 0$) heißt ***Homogenisierung***.

b) $D : \begin{cases} k[X_0, \ldots, X_n] & \rightarrow & k[X_1, \ldots, X_n] \\ f & \mapsto & f(1, X_1, \ldots, X_n) \end{cases}$ heißt ***Dehomogenisierung***.

c) $D \circ H = \mathrm{id}$

d) Für jedes homogene $F \in k[X_0, \ldots, X_n]$ sei $\nu = \nu_{x_0}(F)$ mit $F = X_0^{\nu} \cdot \widetilde{F}$ wobei $X_0 \nmid \widetilde{F}$.

e) $D$ ist $k$-Algebren-Homomophismus. Im Allgemeinen:

$$\begin{array}{rcl} H(f+g) & \neq & H(f) + H(g) \\ H(f \cdot g) & = & H(f) \cdot H(g) \end{array}$$

**Beweis**

c) Sei $f = \sum\limits_{i=0}^{d} f_i \in k[X_1, \ldots, X_n] \Rightarrow H(f) = \sum\limits_{i=0}^{d} f_i X_0^{d-i} \Rightarrow D(H(f)) = \sum\limits_{i=0}^{d} f_i = f$

d) $\widetilde{F}$ ist homogen. Schreibe $\widetilde{F} = \sum_{i=0}^{d} f_i X_0^{d-i}$ mit $f_i \in f[X_1, \ldots, X_n]$ homogen vom Grad $i$. $f_d \neq 0$, weil $X_0 \nmid \widetilde{F} \Rightarrow D(F) = D(\widetilde{F}) = \sum_{i=0}^{d} f_i \Rightarrow H(D(F)) = \sum_{i=0}^{d} f_i X_0^{d-i} = \widetilde{F}$

e) Sei $f = \sum_{i=0}^{d} f_i, g = \sum_{i=0}^{e} g_i \Rightarrow f \cdot g = \sum_{k=0}^{d+e}(\sum_{i=0}^{k} f_i g_{k-i}) \Rightarrow H(f \cdot g) = \sum_{k=0}^{d+e} \sum_{i=0}^{k} f_i g_{k-i} X_0^{d+e-k}$
$H(f) \cdot H(g) = (\sum_{i=0}^{d} f_i X_0^{d-i}) \cdot (\sum_{i=0}^{e} g_i X_0^{e-i}) = \sum_{k=0}^{d+e}(\sum_{i=0}^{k} f_i X_0^{d-i} g_{k-i} X_0^{e-(k-i)}) = \sum_{k=0}^{d+e} \sum_{i=0}^{k} f_i g_{k-i} X_0^{d+e-}$
$\square$

**Proposition 11.2**
Sei $\mathbb{P}^n(k) = \bigcup_{i=0}^{n} U_i, U_i = D(X_i)$. Mit der Zariski-Topologie von $\mathbb{P}^n(k)$ ist $U_i$ homomorph zu $\mathbb{A}^n(k)$.

**Beweis**
ŒE $i = 0$

*Zeige:*

$\varrho := \varrho : \begin{cases} U_0 & \rightarrow & k^n \\ (x_0, : \ldots : x_n) & \mapsto & (\frac{x_1}{x_0}, \ldots, \frac{x_n}{x_0}) \end{cases}$ und $\varphi : \begin{cases} k^n & \rightarrow & U_0 \\ (x_1, \ldots, x_n) & \mapsto & (1 : x_1 : \ldots : x_n) \end{cases}$
sind stetig

*$\varrho$ stetig:*

*Zeige:* $\varrho^{-1}(V) = \varphi(V)$ ist abgeschlossen für jedes abgeschlossene $V \subseteq \mathbb{A}^n(k)$

Sei $V = V(I)$ für ein Ideal $I \subseteq k[X_1, \ldots, X_n]$, seien $f_1, \ldots, f_r$ Erzeuger von $I \Rightarrow V = \bigcap\limits_{i=1}^{r} V(f_i) \Rightarrow \varphi(V) = \bigcap\limits_{i=1}^{r} \varphi(V(f_i))$

Also ŒE $r = 1$, d. h. $V = V(f)$ für ein $f \in k[X_1, \ldots, X_n]$

*Behauptung:* $\varphi(V(f)) = V(H(f)) \cap U_0$

*denn:* Sei $f = \sum_{i=0}^{d} f_i$, $x = (x_1, \ldots, x_n) \in V(f) \Leftrightarrow$ für $\varphi(x) = (1 : x_1 : \ldots : x_n)$ gilt
$0 = H(f)(\varphi(x)) = \sum_{i=0}^{d} f_i X_0^{d-1}(1 : x_1 : \ldots : x_n) = \sum_{i=0}^{d} f_i(x) = f(x)$

*$\varphi$ stetig:*

Wie oben genügt es zu zeigen, dass $\varrho(V(F)\cap U_0) = V(D(F))$ für jedes homogene $F \in k[X_0,\dots,X_n]$.

*denn:* $(x_0:\dots:x_n) \in \varrho(V(F)\cap U_0)$

$\Leftrightarrow x_0 \neq 0$ und $F(x_0:\dots:x_n) = 0$

$0 = F(1, \frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0})$

$0 = D(F)(\frac{x_1}{x_0},\dots,\frac{x_n}{x_0}) = D(F)(\varrho(x_0:\dots:x_n))$ □

**Definition + Proposition 11.3**

Sei $k$ algebraisch abgschlossen.

a) Für ein Radikalideal $I \subset k[X_1,\dots,X_n]$ sei $I^*$ das von den $H(f), f\in I$ erzeugte Ideal.

b) Es gilt $\varphi(V(I)) = V(I^*)\cap U_0$

c) $\overline{\varphi(V(I))} = V(I^*)$ (Zariski-Abschluss von $\mathbb{P}^n(k)$)

*alternativ:* $\overline{V(I)} = V(I^*)$

$\overline{V(I)}$ Zariski-Abschluss in $\mathbb{P}^n(k)$, identifiziere dabei $\mathbb{A}^n(k)$ mit $\varphi(\mathbb{A}^n(k)) = U_0 \subset \mathbb{P}^n(k)$

**Beweis**

c) „$\subseteq$“: ✓

„$\supseteq$“: Sei $V \subseteq \mathbb{P}^n(k)$ abgeschlossen mit $V(I)\subset V$. Sei $V = V(\mathcal{J})$ für ein homogenes Ideal $\mathcal{J} \subset k[X_0,\dots,X_n]$

*Behauptung:* $\mathcal{J} \subseteq I^*$ (denn dann ist $V = V(\mathcal{J}) \supseteq V(I^*)$)

*denn:* Sei $F \in \mathcal{J}$ homogen, $x = (y_1,\dots,y_n) \in V(I)$. Dann ist Dehomogenisierung bezüglich $x_0$: $D_0(F)(x) = 0$ (weil $\varphi(x) \in V \subseteq V(F)$)

$\Rightarrow D_0(F) \in I(V(I)) \overset{\text{HNS}}{=} I$

$\widetilde{F} = H_0(D_0(F)) \in I^* \overset{F = X_0^\nu\cdot\widetilde{F}}{\Rightarrow} F \in I^* \Rightarrow \mathcal{J}\subseteq I^*$ □

**Beispiel**

$V = \{(x,x^2,x^3) \subseteq \mathbb{A}^3(k) : x\in k\} = V(y-x^2, z-x^3)$

$\overline{V} \neq V(x_0y - x^2, x_0^2 z - x^3)$ (Übung)

**Definition + Bemerkung 11.4**

a) Eine Teilmenge $W \subseteq \mathbb{P}^n(k)$ heißt ***quasi-projektive Varietät***, wenn $W$ offene Teilmenge einer projektiven Varietät ist.

b) $W$ quasi-projektiv $\Leftrightarrow$ es gibt $V\subseteq \mathbb{P}^n(k)$ abgeschlossen und $U \subseteq \mathbb{P}^n(k)$ offen, sodass $W = V\cap U$

c) Die Zariski-Topologie auf einer quasi-projektiven Varietät besitzt eine Basis aus (abstrakt) affinen Varietäten.

d) Jede quasi-projektive Varietät ist quasikompakt.

**Beweis**

c) Sei $U \subseteq W$ offen. Für $i = 0,\dots,n$ ist $U\cap U_i$ offen in $U_i \cap W$ und damit in der affinen Varietät $\overline{U_i\cap W}$ (Zariski-Abschluss in $\mathbb{A}^n(k) = \varrho_i(U_i)$).

Nach Bemerkung 3.6 ii) bilden die $D(f)$, $f\in k[V_i]$, eine Basis der Zariski-Topologie auf $V_i$. $D(f)$ ist (abstrakt) affin nach Bemerkung 7.8.

d) $W\cap U_i$ ist quasi-kompakt für jedes $i$ nach Bemerkung 7.5 b) $\Rightarrow W$ ist auch quasi-kompakt. □

# § 12 Reguläre Funktionen

**Bemerkung 12.1**
Sind $F, G \in k[X_0, \dots, X_n]$ homogen, $\deg(F) = \deg(G)$, so ist $\frac{F}{G}$ wohldefinierte Funktion auf $D(G) = \mathbb{P}^n(k) - V(G)$.

**Beweis**
klar! □

**Definition 12.2**
Sei $W \subseteq \mathbb{P}^n(k)$ quasiprojektive Varietät, $f : W \to k$ Abbildung.

a) $f$ heißt ***regulär in*** $x \in W$, wenn es eine Umgebung $U_x \subseteq W$ von x gibt und homogene Polynome $F, G \in k[X_0, \dots, X_n]$ mit $f(y) = \frac{F}{G}(y)$ für alle $y \in U_x$ (insbesondere $U_x \subseteq D(G)$).
b) $f$ heißt ***regulär***, wenn es in jedem $x \in W$ regulär ist.

**Bemerkung 12.3**
Eine Funktion $f : W \to k$ ($W \subseteq \mathbb{P}^n(k)$ quasiprojektiv) ist regulär $\Leftrightarrow$ $f|_{U_i \cap W} = f \circ \varphi_i$ regulär für $i = 0, \dots, n$ wobei

$$\begin{array}{rrcl} \varphi_i : & \mathbb{A}^n(k) & \to & U_i \subset \mathbb{P}^n(k) \\ & (x_1, \dots, x_n) & \mapsto & (x_1 : \dots : x_{i-1} : 1 : x_i : \dots : x_n) \\ & (x_0, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_n) & \mapsto & (x_0 : \dots : x_{i-1} : 1 : x_{i+1} : \dots : x_n) \end{array}$$

**Beweis**
„$\Rightarrow$“: Sei $x \in W \cap U_i$, $f = \frac{F}{G}$ in Umgebung $U_x$ von $x$, Œ $U_x \subset U_i$.
$\Rightarrow f \circ \varphi_i = \frac{F \circ \varphi_i}{G \circ \varphi_i} = \frac{D_i(F)}{D_i(G)}$ auf $U_x \Rightarrow f \circ \varphi_i$ regulär im Sinne von Definition 7.2.

„$\Leftarrow$“: Sei $x \in W \cap U_i$, $f = \frac{g}{h}$ in einer Umgebung $U_x \subseteq U_i$ von $x$, $g, h \in k[X_0, \dots, \widehat{X_i}, \dots, X_n]$.
Sei $G = H_i(g)$, $H = H_i(k)$. Ist $\deg(G) < \deg(H)$, ersetze $G$ durch $\widetilde{G} = G \cdot X_i^{\deg(H) - \deg(G)}$
$\Rightarrow \frac{\widetilde{G}}{H}$ ist reguläre Funktion im Sinne von Definition 12.2 auf $U_x$ und $f = \frac{\widetilde{G}}{H}$ auf $U_x$. □

**Definition + Bemerkung 12.4**
Sei $W \subseteq \mathbb{P}^n(k)$ quasiprojektive Varietät.

a) Für $U \subseteq W$ sei $\mathcal{O}_W(U) := \{f : U \to k | f \text{ regulär}\}$.
b) $\mathcal{O}_W(U)$ ist $k$-Algebra.
c) $U \mapsto \mathcal{O}_W(U)$ ist Garbe von $k$-Algebren.

**Satz 7**
Sei $k$ algebraisch abgeschlossen, $V \subseteq \mathbb{P}^n(k)$ projektive Varietät.

a) Ist $V$ zusammenhängend, so ist $\mathcal{O}_V(V) = k$.
b) Sei $F \in k[X_0, \dots, X_n]$ homogen, $\deg(F) \geq 1, F \notin I(V)$. Dann gilt

$$\mathcal{O}_V(D(F)) \cong k[V]_{(F)} := \left\{ \frac{G}{F^r} : G \in k[V] \text{ homogen}, \deg(G) = r \deg(F) \right\}$$

(homogene Lokalisierung)

**Beweis**
b) Definiere: $\psi : k[V]_{(F)} \to \mathcal{O}_V((F))$, $\frac{G}{F^r} \mapsto (x \mapsto \frac{G}{F^r}(x))$

$\psi$ *ist wohldefinierter k-Algebren-Homomophismus.*

$\psi$ *injektiv:* Ist $\frac{G}{F^r}(x) = 0$ für alle $x \in D(F)$, so ist $D(F) \subseteq V(G) \Rightarrow F \cdot G = 0$ auf ganz $V$, das heißt $F \cdot G \in I(V) \Rightarrow \frac{G}{F^r} = 0$ in $k[V]_{(F)}$

$\psi$ *surjektiv:* Sei $h \in \mathcal{O}_V(D(F))$

Für $i = 0, \ldots, n$ mit $D(F) \cap U_i \neq 0$ ist $h \circ \varphi_i$ regulär auf $D(F) \cap U_i = D(f_i)$, wobei $f_i = D_i(F) \overset{\text{Satz 5b)}}{\Longrightarrow} h \circ \varphi_i = \frac{g_i}{f_i^{r_i}}$ für ein $g_i \in k[X_0, \ldots, \widehat{X_i}, \ldots, X_n]$ und ein $r_i > 0$.

Homogenisiere bezüglich $X_i$: erhalte $\frac{G_i}{F^{r_i} X_i^{e_i}}$, Œ $r_i = 1$ (sonst ersetze $F$ durch $F^{r_i}$) $\Rightarrow$

Auf $D(F) \cap U_i \cap U_j$ ist $\frac{G_i}{F \cdot X_i^{e_i}} = \frac{G_j}{F \cdot X_j^{e_j}}$, also $G_i F X_j^{e_j} = G_j F X_i^{e_i} = 0$

$$G_i F X_j^{e_{j+1}} X_i - G_j F X_i^{e_{i+1}} X_j = 0 \text{ in } k[V] \qquad (*)$$

$F \in (X_0, \ldots, X_n)$

$\overset{!}{\Rightarrow} \exists m \geq 1$ mit $F^m \in (X_0^{e_0+1}, \ldots, X_n^{e_n+1})$

Das heißt $F^{m+1} = \sum_{i=0}^{n} H_i F X_i^{e_i+1}, H_i \in k[X_0, \ldots, x_n]$ homogen. Setze $G := \sum_{i=0}^{n} H_i G_i X_i$

$\Rightarrow F^{m+1} G_j X_j = \sum_{i=0}^{n} H_i F X_i^{e_i+1} G_j X_j \overset{(*)}{=} \sum_{i=0}^{n} H_i F X_j^{e_j+1} G_i X_i = G \cdot F X_j^{e_j+1}$

$\Rightarrow$ Auf $D(F) \cap U_j$ ist $\frac{G}{F^{m+1}} = \frac{G_j}{F \cdot X_j^{e_j}} = h \circ \varphi_j \Rightarrow h = \psi\left(\frac{G}{F^{m+1}}\right)$

a) Œ $V$ irreduzibel

*denn:* Sei $V = \bigcup_{j=1}^{r} V_j, V_j$ irreduzibel. Ist $h|_{V_j} = c_j$ konstant für jedes $j$, so ist $c_i = c_j$ falls $V_i \cap V_j \neq \emptyset$. Da $V$ zusammenhängend ist, ist $h$ konstant.

Sei also $V$ irreduzibel, $f \in \mathcal{O}_V(V) \overset{10.6}{\Longrightarrow} I(V)$ ist Primideal, also $k[V]$ nullteilerfrei, sei also $L := \text{Quot}(k[V])$

Sei $f_i = f|_{V \cap U_i} \in \mathcal{O}_V(U \cap U_i)$. Falls $V \cap U_i \neq \emptyset$, so ist $f_i = \frac{G_i}{X_i^{d_i}}$ (nach Teil b)) für ein homogenes $G_i \in k[X_0, \ldots, X_n]$ vom Grad $d_i$.

Ist für $j \neq i$ auch $V \cap U_j \neq \emptyset$, so ist $V \cap U_i \cap U_j$ dicht in $V$ und $\frac{G_i}{X_i^{d_i}} = \frac{G_j}{X_j^{d_j}} =: f \in L$.

*Behauptung 1*: $f$ ist ganz über $k[V]$

Dann gibt es ein $m \geq 1$ und $a_0, \ldots, a_{m-1} \in k[V]$, so dass

$$f^m - \sum_{j=0}^{m-1} a_j f^j = 0 \qquad | \cdot X^{d_i \cdot m}$$

$$\underbrace{G_i^m}_{\deg = d_i \cdot m} + \sum_{j=0}^{m-1} a_j \cdot \underbrace{G_i^j \cdot X_i^{d_i(m-j)}}_{\deg = d_i j + d_i m - d_i j = d_i m} = 0$$

$\Rightarrow$ Œ $a_j \in k$ für alle $j$

$\Rightarrow f$ algebraisch über $k \overset{k \text{ alg. abg.}}{\Longrightarrow} f \in k$

*Bew. von Beh. 1*: Sei $d := \sum_{i=1}^{n} d_i$ und $k[V]_d$ die homogenen Elemente vom Grad $d$.

*Behauptung 2*: $k[V]_d \cdot f^j \subseteq k[V]_d$ für alle $j \geq 0$

Dann ist insbesondere $X_0^d \cdot f^j \in k[V]$ für jedes $j \geq 0$

$\Rightarrow k[V][f]$ ist in einem endlich erzeugbaren $k[V]$-Modul enthalten $\Rightarrow k[V][f]$ ist selbst endlich erzeugter $k[V]$-Modul (da $k[V]$ noethersch ist)

$\Rightarrow f$ ist ganz über $k[V]$

*Bew. von Beh. 2*: $k[V]_d$ wird erzeugt von den $X_0^{j_0} \cdot \ldots \cdot X_n^{j_n}$ mit $\sum\limits_{i=1}^{n} j_i = d = \sum\limits_{i=1}^{n} d_i$.

Es gibt also ein $i$ mit $j_i \geq d_i$

$\Rightarrow X_0^{j_0} \cdot \ldots \cdot X_n^{j_n} \cdot \frac{G_i}{X_i^{d_i}} = X_0^{j_0} \cdot \ldots \cdot X_i^{j_i - d_i} \cdot \ldots \cdot X_n^{j_n} G_i \in k[V]_d \underset{\text{Ind. über } j}{\Longrightarrow}$ Beh. 2 $\square$

# § 13 Morphismen

**Definition + Bemerkung 13.1**
Seien $V \subseteq \mathbb{P}^n(k), W \subseteq \mathbb{P}^m(k)$ quasiprojektive Varietäten.

a) Eine Abbildung $f : V \to W$ heißt ***Morphismus***, wenn es zu jedem $x \in V$ eine offene Umgebung $U_x \subset V$ und homogene Polynome $F_0, \dots, F_m \in k[X_0, \dots, X_n]$ vom gleichen Grad gibt, sodass $f(y) = (F_0(y) : \dots : F_n(y))$ für jedes $y \in U_x$

b) $f$ ist genau dann Morphismus, wenn für alle $i = 0, \dots, n$ und $j = 0, \dots, m$ mit $U_{ij} := f^{-1}(W \cap U_j) \cap U_i$ gilt: $f|_{U_{ij}} : U_{ij} \to W \cap U_j$ ist Morphismus von quasiaffinen Varietäten

c) Die Morphismen $V \to \mathbb{A}^1(k)$ entsprechen bijektiv den regulären Funktionen auf $V$.

d) Morphismen sind stetig

e) Die quasiprojektiven Varietäten über $k$ bilden mit den Morphismen eine Kategorie $\underline{\mathrm{Var}(k)}$

**Beispiel 13.2**

1) Sei $k$ unendlicher Körper.

   Sei $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{P}^2(k) \setminus \{(0:0:1)\} & \to & \mathbb{P}^1(k) \\ (x_0 : x_1 : x_2) & \mapsto & (x_0 : x_1) \end{array}$

   $f$ ist Morphismus.

   *Behauptung:* $f$ lässt sich nicht fortsetzen zu Morphismus $\tilde{f} : \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^1$

   *denn:* $\tilde{f}^{-1}(1 : 1)$ ist abgeschlossen in $\mathbb{P}^2$, enthält alle $(\lambda : \lambda : 1) \in \mathbb{P}^2 : \lambda \neq 0$ Das ist unendliche, also dichte Teilmenge von $V(X_0 \pm X_1)$

   $(0 : 0 : 1) \in V(X_0 - X_1) \cap V(X_0 + X_1)$ ↯

2) Sei $E = V(X_0 X_2^2 - X_1^3 + X_0^2 X_1)$

   $E \cap U_0 = V(y^2 - x^3 + x)$ mit $y = \frac{x_2}{x_0}, x = \frac{x_1}{x_0}$

   Sei $f : E \setminus \{P_2\} \to \mathbb{P}^1(k), (x_0 : x_1 : x_2) \mapsto (x_0 : x_1)$ :

   $P_2 = (0 : 0 : 1) \in E$

   *Behauptung*: $f$ lässt sich in $P_2$ fortsetzen.

   Sei $f(x_0 : x_1 : x_2) := \begin{cases} (x_0 : x_1) & ,(x_0 : x_1 : x_2) \neq (0:0:1) = P_2 \\ (x_1^2 : x_2^2 + x_1 x_0) & ,(x_0 : x_1 : x_2) \neq (1:0:0) = P_0 \end{cases}$

   $f$ ist wohldefiniert, denn für $\overbrace{(x_0 : x_1 : x_2)}^{=:P} \in E \setminus \{P_0, P_2\}$

   $(x_0 : x_1) = (x_0 \underbrace{(x_2^2 + x_1 x_0)}_{\substack{\neq 0, \text{ weil aus } x_2^2 + x_1 x_0 = 0 \text{ folgt: } x_1 = 0 \\ \text{also muss auch } x_2 = 0, \text{ d.h. } P = P_2}} : x_1(x_2^2 + x_1 x_0)) \overset{P \in E}{=} (x_1^3 : x_1(x_2^2 + x_1 x_0)) = (x_1^2 : x_2^2 + x_1 x_0), x_1 \neq 0$ da sonst $P = P_2$ oder $P = P_0$

**Beweis (Beweis von Bemerkung 13.1)**

b) Œ $i = 0, x \in U_{0j}$

   „⇒“: Sei $f(y) = (F_0(y) : \dots : F_m(y))$ in einer Umgebung $U_x \subseteq U_0$ von $x$.

   $\Rightarrow f(y) = (F_0(1 : y_1 : \dots : y_n) : \dots : F_m(1 : y_1 : \dots : y_n)) = (f_0(y) : \dots : f_m(y)) = (\frac{f_0(y)}{f_j(y)}, \dots, \frac{f_{j-1}(y)}{f_j(y)}, \frac{f_{j+1}(y)}{f_j(y)}, \dots, \frac{f_n(y)}{f_j(y)})$

   $f_i := D_0(F_i) \Rightarrow f$ ist Morphismus von quasiaffinen Varietäten.

„$\Leftarrow$": Sei $f(y) = (f_1(y), \dots, f_m(y))$ (für $y \in U_x$) mit $f_i = \frac{g_i}{h_i}, g_i, h_i \in k[X_1, \dots, X_n]$
Sei $G_i := H_0(g_i), H_i = H_0(h_i)$ (Homogenisierung bezüglich $X_0$)
Für geeignete Exponenten ist dann:
$f(y) = (H_1(y) \cdot \ldots \cdot H_n(y) \cdot X_0^{e_0} : G_1(y) \cdot H_1(y) \cdot \ldots \cdot H_n(y) \cdot X_0^{e_1} : \ldots : G_n(y) \cdot H_1(y) : \ldots : H_{n-1}(y) \cdot X_0^{e_n})$ □

**Bemerkung 13.3**
Seien $V, W$ quasiprojektive Varietäten, $f : V \to W$ Abbildungen. Dann gilt: $f$ Morphismus $\Leftrightarrow$ $f$ stetig und für jedes $U \subset W$ offen und jedes $g \in \mathcal{O}_W(U)$ ist $g \circ f \in \mathcal{O}_V(f^{-1}(U))$

**Beweis**
„$\Rightarrow$": $f$ stetig nach Bemerkung 13.1 d)
Nach 13.1 c) ist $g : U \to \mathbb{A}^1(k)$ Morphismus.
$\Rightarrow g \circ f : f^{-1}(U) \to \mathbb{A}^1(k)$ Morphismus $\overset{13.1\text{ c)}}{\Longrightarrow}$ $g \circ f$ regulär
„$\Leftarrow$": Folgt aus 13.1 b) und Bemerkung 7.7. □

**Bemerkung 13.4**
Sei $f : \mathbb{P}^n(k) \to \mathbb{P}^m(k)$ Morphismus. Dann gibt es homogene Polynome $F_0, \dots, F_m$ in $k[X_0, \dots, X_n]$ mit $f(x) = (F_0(x) : \ldots : F_m(x))$ für alle $x \in \mathbb{P}^n(k)$

**Beweis**
Übung? □

**Beispiel 13.5**
Sei $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(k)$

Dann ist die Abbildung $\varphi_A : \begin{array}{ccc} \mathbb{P}^1(k) & \to & \mathbb{P}^1(k) \\ (x_0 : x_1) & \mapsto & (cx_1 + dx_0 : ax_1 + bx_0) \end{array}$ ein Isomorphismus, Umkehrabbildung $\varphi_{A^{-1}}$

**Definition + Bemerkung 13.6**
Sei $V \subseteq \mathbb{P}^n(k)$ quasiprojektive Varietät, $k$ algebraisch abgeschlossen.

a) Eine ***rationale Funktion*** auf $V$ ist eine Äquivalenzklasse von Paaren $(U, f)$, wobei $U \subseteq V$ offen, dicht, $f \in \mathcal{O}_V(U)$. Dabei ist $(U, f) \sim (U', f') :\Leftrightarrow f|_{U \cap U'} = f'|_{U \cap U'}$
b) Ist $V$ irreduzibel, so bilden die rationalen Funktionen auf $V$ einen Körper, den ***Funktionenkörper*** $k(V)$.
c) Ist $V$ irreduzibel, so ist $k(V) = \mathrm{Quot}(k[U])$ für jede offene, dichte, affine Teilmenge $U \subseteq V$.
d) Ist $V$ irreduzibel und projektiv mit homogenem Koordinatenring $k[V]$, so ist $k(V) = \{\frac{f}{g} \in \mathrm{Quot}(k[V]) : f, g \text{ homogen vom gleichen Grad}\} =: \mathrm{Quot}_0(k[V])$.

**Beweis**
c) Sei $U \subseteq V$ offen, dicht, affin.
$\alpha : \mathrm{Rat}(V) \to \mathrm{Rat}(U), [(U', f)] \mapsto [(U' \cap U, f|_{U' \cap U})]$
$\alpha$ ist injektiv nach Definition der Äquivalenzrelation.
$\alpha$ ist surjektiv, weil $U$ dicht in $V$ ist.
Nach 8.1 d) ist $\mathrm{Rat}(U) \cong \mathrm{Quot}(k[U])$.

d) $\begin{array}{rcl} \mathrm{Quot}_0(k[V]) & \to & \mathrm{Rat}(V) \\ \frac{f}{g} & \mapsto & [(D(g), x \mapsto \frac{f}{g}(x))] \end{array}$ ist bijektiver Homomorphismus von $k$-Algebren. $\square$

**Definition + Bemerkung 13.7**
Seien $V, W$ quasiprojektive Varietäten

a) Eine ***rationale Abbildung*** $f : V \dashrightarrow W$ ist eine Äquivalenzklasse von Paaren $(U, f)$ wo $U \subset V$ offen, dicht und $f : U \to W$ Morphismus.
b) Eine rationale Abbildung $f$ heißt ***dominant***, wenn $f(U) \subset W$ dicht ist für einen Vertreter $(U, f)$ der Klasse (und damit für jeden).
c) Die Zuordnung $V \mapsto k(V)$ induziert eine Äquivalenz von Kategorien

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{irred. quasi-proj. Var.}/k \\ +\text{dominante rat. Abb.} \end{array} \right\} \leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \text{endl. erz. Körpererw. } K|k \\ +k\text{-Alg-Hom.} \end{array} \right\}$$

# § 14 Graßmann-Varietäten

**Definition + Bemerkung 14.1**
Sei $k$ ein Körper, $n \geq 1$, $V$ ein $n$-dimensionaler $k$-Vektorraum. Für $0 \leq d \leq n$ sei $G(d,n)(V) := \{U \subseteq V : U \text{ Untervektorraum}, \dim U = d\}$. *Speziell* $G(d,n) := G(d,n)(k^n)$
Jeder Isomorphismus $V \to k^n$ induziert eine Bijektion $G(d,n)(V) \to G(d,n)$

**Beispiel**
1) $G(0,n)$ und $G(n,n)$ sind einelementig.
2) $G(1,n) = \mathbb{P}^{n-1}(k)$

**Bemerkung 14.2**
Für jedes $d = 0, \ldots, n$ gibt es eine „natürliche" Bijektion $G(d,n) \to G(n-d,n)$

**Beweis**
Sei $V^* = \mathrm{Hom}_k(V,k)$ der Dualraum von $V$.
Die Abbildungen

$$\begin{array}{rcl} G(d,n) & \to & G(n-d,n)(V^*) \\ U & \mapsto & \{l \in V^* : U \subseteq \mathrm{Kern}(l)\} \\ \bigcap\limits_{l \in U^*} \mathrm{Kern}(l) & \leftarrow\!\shortmid & U^* \end{array}$$

sind zueinander invers. □

**Einschub 14.3**
$\Lambda^d$ sei $k$-Vektorraum mit Basis $e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_d}$ für alle $1 \leq i_1 < \ldots < i_d \leq n$ wobei $e_1, \ldots, e_n$ einen Basis von $V$ sei. $\Lambda^d V$ ist $\binom{n}{d}$-dimensionaler $k$-Vektorraum.

Die Abbildung $\wedge = \wedge_d : \begin{array}{rcl} V^d & \to & \Lambda^d V \\ (e_{i_1}, \ldots e_{i_d}) & \mapsto & (e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_d}) \end{array}$ ist multilinear und alternierend.

*Dann*: $(v_1, \ldots v_n) \mapsto ?$

$$v_j = \sum_{i=1}^{n} \lambda_{ij} e_i \qquad \begin{array}{rcl} (v_1, \ldots, v_d) & \mapsto & \sum\limits_{\substack{1 \leq i_1 < \ldots < i_d \leq n \\ \sigma \in S_d}} (-1)^{\mathrm{sign}(\sigma)} e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_d} \cdot \lambda_{1 i_1} \cdot \lambda_{2 i_2} \cdot \ldots \lambda_{d i_d} \\ & = & \sum\limits_{1 \leq i_1 < \ldots < i_d \leq n} e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_d} \cdot \sum\limits_{\sigma \in S_d} (-1)^{\mathrm{sign}(\sigma)} \lambda_{\sigma(1) i_1} \cdot \ldots \cdot \lambda_{\sigma(d) i_d} \end{array}$$

a) $\Lambda^d V$ ist $\binom{n}{d}$-dimensionaler $k$-Vektorraum mit Basis

$$\{e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_d} : 1 \leq i_1 < \ldots < i_d \leq n\}$$

b) $V^d \to \Lambda^d V, (v_1, \ldots, v_n) \mapsto v_1 \wedge \ldots \wedge v_d$ ist multilinear und alternierend.

**Bemerkung 14.4**
Die Abbildung $\Psi : G(d,n)(V) \to \mathbb{P}(\Lambda^d V), U \mapsto [u_1 \wedge \ldots \wedge u_d]$ ist wohldefiniert und injektiv, dabei sei $u_1, \ldots, u_d$ eine Basis von $U$.

**Beweis**
Sei $v_1, \ldots, v_d$ weitere Basis von $U$. Dann gibt es $A \in \mathrm{GL}_d(k)$ mit $A \cdot u_i = v_i, i = 1, \ldots, d$.

$\Rightarrow v_1 \wedge \ldots \wedge v_d = \sum\limits_{i=1}^{d} a_{1i} u_i \wedge \ldots \wedge \sum\limits_{i=1}^{d} a_{di} u_i \overset{\text{s. o.}}{=} \det(A) u_1 \wedge \ldots \wedge u_d$

$\Rightarrow \Psi$ wohldefiniert

$\Psi$ *injektiv*:

*Behauptung:* $U = \{v \in V : \overbrace{v \wedge (u_1 \wedge \ldots \wedge u_d)}^{\in \Lambda^{d+1}V} = 0\}$
*Beweis der Behauptung:*

$$v \wedge (u_1 \wedge \ldots \wedge u_d) = 0 \Leftrightarrow vu_1, \ldots, u_d \text{ lin. unabh. } \Leftrightarrow v \in \langle u_1, \ldots, u_d \rangle = U \qquad \square$$

**Definition + Bemerkung 14.5**
Sei $d \geq 2$ und $\omega \in \Lambda^d V$

a) $\omega$ heißt ***total zerlegbar***, wenn es linear unabhägige Vektoren $v_1, \ldots, v_d$ in $V$ gibt mit $\omega = v_1 \wedge \ldots \wedge v_d$.
b) $[\omega] \in \text{Bild}(\Psi) \Leftrightarrow \omega$ total zerlegbar
c) Die Abbildung $\varphi_\omega : V \to \Lambda^d V, v \mapsto v \wedge \omega$ ist linear.
d) Für $v \in V$ gilt: $v \in \text{Kern}(\varphi_\omega) \Leftrightarrow \exists \omega' \in \Lambda^d V$ mit $\omega = v \wedge \omega'$
e) Für unabhägige $v_1, \ldots, v_k \in V$ gilt:

$$v_1, \ldots, v_k \in \text{Kern}(\varphi_\omega) \Leftrightarrow \exists \omega' \in \Lambda^{d-k} V \text{ mit } \omega \in v_1 \wedge \ldots \wedge v_k \wedge u\omega'$$

f) $\dim(\text{Kern}(\varphi_\omega)) \leq d$
g) $\dim(\text{Kern}(\varphi_\omega)) = d \Leftrightarrow \omega$ total zerlegbar

**Beweis**
b) und c) klar
d) ist Spezialfall von e)
f) und g) folgen aus e)
e) Ergänze zur Basis $v_1, \ldots, v_k, v_{k+1}, \ldots, v_n$ von $V$. Schreibe $\omega = \sum\limits_{\substack{1 \leq i_1 < \ldots i_d \leq n \\ \underline{i} = (i_1, \ldots, i_d))}} \lambda_{\underline{i}} v_{i_1} \wedge \ldots \wedge v_{i_d}$

Für $j = 1, \ldots, k$ ist nach Voraussetzung

$$\begin{aligned} 0 = \varphi_\omega(v_j) \quad &= \omega v_j = \sum_{\underline{i}} \lambda_{\underline{i}} v_{i_1} \wedge \ldots \wedge v_{i_d} \wedge v_j \\ &= \sum_{\substack{\underline{i} \\ j \in \underline{i}}} \lambda_{\underline{i}} v_{i_1} \wedge \ldots \wedge v_{i_d} \wedge v_j \end{aligned}$$

$\Rightarrow \lambda_{\underline{i}} \neq 0$ höchstens wenn $\{1, \ldots, k\} \subseteq \{i_1, \ldots, i_d\}$

$$\begin{aligned} \omega \quad &= \sum_{\substack{\underline{i} = (1, \ldots, k, i_{k+1}, \ldots, i_d) \\ k < i_{k+1} < \ldots < i_d \leq n}} \lambda_{\underline{i}} v_1 \wedge \ldots \wedge v_k \wedge v_{i_{k+1}} \wedge \ldots \wedge v_d \\ &= v_1 \wedge \ldots \wedge v_k \wedge \underbrace{\sum_{k < i_{k+1} < \ldots < i_d \leq n} \lambda_{\underline{i}} v_{i_{k+1}} \wedge \ldots \wedge v_{i_d}}_{=:\omega' \in \Lambda^{d-k} V} \end{aligned} \qquad \square$$

**Proposition 14.6**
$\text{Bild}(\Psi)$ ist Zariski-abgeschlossen in $\mathbb{P}(\Lambda^d V)$, das heißt $\Psi$ ist eine Bijektion von $G(d, n)$ auf eine projektive Varietät.

**Beweis**
Für $\omega \in \Lambda^d V$ ist $\varphi_\omega : V \to \Lambda^d V$ linear. Sei $L_\omega$ die Abbildungsmatrix von $\varphi_\omega$ bezüglich der Basen $e_1, \ldots, e_n$ und $e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_d}$. Sei $L_\omega = \left(l_{ij}^{(\omega)}\right)_{\substack{j=1,\ldots,n \\ i=1,\ldots,\binom{n}{d+1}}}$, $l_{ij} : \Lambda^d V \to k$ ist linear (!)

(Die $l_{ij}$ heißen ***Plücker Koordinaten*** auf $\Lambda^d V$)

$[\omega] \in \mathrm{Bild}(\Psi) \Leftrightarrow \dim(\mathrm{Kern}(\varphi_\omega)) \geq d \Leftrightarrow \mathrm{Rang}(L_\omega) \leq n-d$

$\Leftrightarrow$ Jede $(n-d+1) \times (n-d+1)$-Untermatrix von $L$ hat Determinante 0

Diese Determinanten sind homogene Polynome $f_{IJ}$ vom Grad $n-d+1$ in den $l_{ij}(\omega)$ ($|I| = |J| = n-d+1, I \subset \{1, \ldots, \binom{n}{d}\}, J \subset \{1, \ldots, n\}$)

$\Rightarrow \mathrm{Bild}(\Psi) = V(f_{IJ} : |I| = |J| = n-d+1)$ ist abgeschlossen. □

**Proposition + Definition 14.7**
Für $n \geq 1$ und $1 \leq d \leq n$ sei

$$\mathcal{F}_{d.n}(k) := \{(\omega, v) \in \mathbb{P}(\Lambda^d k^n) \times k^n : \omega = \Psi(U) \in \mathrm{Bild}(\Psi), v \in U\}$$

a) $\mathcal{F}_{d,n}(k)$ ist quasiprojektive Varietät.
b) $\pi_{d,n} := \pi : \mathcal{F}_{d,n}(k) \to G(d,n), (\omega, v) \mapsto \omega$ ist surjektiver Morphismus.
c) Für jedes $\omega = \Psi(U) \in G(d,n)$ ist $\pi^{-1}(\omega) = U \subset \{\omega\} \times k^n$
d) $\mathcal{F}_{d,n}(k)$ heißt ***tautologisches Bündel***.

**Beweis**
a) Es ist $U = \{v \in k^n : v \wedge (\overbrace{u_1 \wedge \ldots \wedge u_d}^{=\omega}) = 0\} = \mathrm{Kern}(\varphi_\omega) = \{v \in k^n : L_\omega v = 0\}$
$\Rightarrow \mathcal{F}_{d,n}(k)$ ist die Menge aller Paare $(\omega, v)$ mit $f_{IJ}(\omega) = 0$ für alle $I, J$ wie oben *und* $\sum_{j=1}^n l_{ij}(\omega) v_j = 0$ □

**Beispiel**
$d = 1$: $\mathcal{F}_{1,n}(k) = \{((x_1 : \ldots : x_n), (y_1, \ldots, y_n)) \in \mathbb{P}^{n-1}(k) \times k^n : (y_1 : \ldots : y_n) = (x_1 : \ldots : x_n)$ oder $(y_1, \ldots, y_n) = (0, \ldots, 0)\}$

Gleichungen: $y_i x_j = y_j x_i$ für alle $i, j$, konkret $n = 3, \omega = (x_1 : x_2 : x_3)$

$$\varphi_\omega : \begin{array}{ccc} k^3 & \to & \Lambda^2 k^3 \\ v & \mapsto & v \wedge \omega \end{array} \quad \text{(Basis } e_1 \wedge e_2, e_1 \wedge e_3, e_2 \wedge e_3)$$

$$\begin{array}{rcccl} \varphi_\omega(e_1) & = & e_1(x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3) & = & x_2 e_1 \wedge e_2 + x_3 e_1 \wedge e_3 \\ \varphi_\omega(e_2) & = & e_2(x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3) & = & -x_1 e_1 \wedge e_2 + x_3 e_2 \wedge e_3 \\ \varphi_\omega(e_3) & = & e_3(x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3) & = & -x_1 e_1 \wedge e_3 + x_2 e_2 \wedge e_3 \end{array}$$

$$\Rightarrow L_\omega = \begin{pmatrix} x_2 & -x_1 & 0 \\ x_3 & 0 & -x_1 \\ 0 & x_3 & -x_2 \end{pmatrix}$$

$$L_\omega \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{array}{l} x_2 y_1 - x_1 y_2 = 0 \\ x_3 y_1 - x_1 y_3 = 0 \\ x_3 y_2 - x_2 y_3 = 0 \end{array}$$