

# Kapitel 5.

## Vektorbündel

Betrachte  $TM$  als glatte Mannigfaltigkeit durch

$$\underbrace{\pi^{-1}(U)}_{=TM|_U} \rightarrow \underbrace{\varphi(U) \times \mathbb{R}^m}_{\cong U \times \mathbb{R}^m} \quad \underbrace{\sum \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p}_{=X_p} \mapsto (\varphi(p), \xi).$$

Fasern:  $T_p M = \pi^{-1}(p)$   $m$ -dimensionaler Vektorraum und  $X_p = \sum \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p \mapsto \xi$  ist ein linearer Isomorphismus.

**Definition 5.1** *Ein **glattes reelles Vektorbündel** vom Rang  $k$  über einer glatten Mannigfaltigkeit  $M$  ist eine glatte Mannigfaltigkeit  $E$ , der sogenannte **Totalraum** des Bündels, zusammen mit einer glatten Abbildung  $\pi: E \rightarrow M$ , der Projektion, sodass für jedes  $p \in M$  gilt:*

- (i) *Die Faser  $E_p = \pi^{-1}(p)$  trägt die Struktur eines  $k$ -dimensionalen reellen Vektorraumes.*
- (ii) *Es existiert eine Umgebung  $U$  von  $p$  in  $M$  und ein Diffeomorphismus*

$$\tau: E|_U = \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{R}^k,$$

*so dass die Einschränkung*

$$\tau_p: E_p \rightarrow \mathbb{R}^k \quad (\cong \{p\} \times \mathbb{R}^k)$$

*ein linearer Isomorphismus ist. Ein solches  $\tau$  heißt **Bündelkarte**.*

**Beispiel** (1)  $E = M \times \mathbb{R}^k$  mit  $\pi: E \rightarrow M, (p, x) \mapsto p$ .

(2) Das Tangentialbündel  $TM$  auf  $M$ .

(3) Ist  $E \xrightarrow{\pi} M$  ein Vektorbündel über  $M$  und  $U \subseteq M$  offen (oder eine Untermannigfaltigkeit), so ist  $E|_U = \pi^{-1}(U)$  ein Vektorbündel über  $U$ .

Ein **Vektorbündelmorphismus** zwischen zwei Vektorbündeln  $E \xrightarrow{\pi} M$  und  $E' \xrightarrow{\pi'} N$  ist eine glatte Abbildung  $F: E \rightarrow E'$ , so dass eine glatte Abbildung  $f$  existiert für die das folgende Diagramm kommutiert

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{F} & E' \\ \pi \downarrow & \# & \downarrow \pi' \\ M & \xrightarrow{f} & N \end{array}$$

und ferner für  $p \in M$  die Abbildung  $E_p \xrightarrow{F} E'_{f(p)}$  linear ist.

Gilt  $M = N$  so ist ein  $M$ -Vektorbündelmorphismus  $F$  von  $E$  nach  $E'$  eine glatte Abbildung  $F: E \rightarrow E'$ , so dass das folgende Diagramm kommutiert und  $F$  faserweise linear ist.

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{F} & E' \\ & \searrow \pi & \swarrow \pi' \\ & M & \end{array}$$

Die Vektorbündel  $E, E'$  über  $M$  heißen **isomorph**, wenn ein  $M$ -Vektorbündelmorphismus  $G$  existiert mit  $G \circ F = \text{id}_E$  und  $F \circ G = \text{id}_{E'}$ . Dies ist genau dann der Fall, wenn  $F$  faserweise ein Inverses besitzt. (Der Beweis dieser Aussage sei als Übungsaufgabe überlassen.)

Ein Vektorbündel  $E \xrightarrow{\pi} M$  heißt **trivial**, wenn es einen Vektorbündelisomorphismus von  $E$  auf  $M \times \mathbb{R}^k$  gibt. Jedes

$$\tau: E|_U \rightarrow U \times \mathbb{R}^k$$

ist ein Vektorbündelisomorphismus. Die Bündelkarten werden daher auch **lokale Trivialisierungen** genannt.

Es sei  $(\tau_\alpha, U_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{I}}$  eine Familie lokaler Trivialisierungen von  $E$  mit  $M = \bigcup_{\alpha \in \mathcal{I}} U_\alpha$ . Der Diffeomorphismus

$$\tau_\alpha \circ \tau_\beta^{-1}: (U_\alpha \cap U_\beta) \times \mathbb{R}^k \rightarrow (U_\alpha \cap U_\beta) \times \mathbb{R}^k$$

definiert die sogenannten **Übergangsfunktionen**

$$g_{\alpha\beta}: U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow \text{GL}_k(\mathbb{R})$$

durch

$$\tau_\alpha \circ \tau_\beta^{-1}(p, x) = (p, g_{\alpha\beta}(p)x).$$

Die Übergangsfunktionen sind glatt und für alle  $p \in U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma$  gilt:

$$g_{\alpha\gamma}(p) = g_{\alpha\beta}(p) \cdot g_{\beta\gamma}(p),$$

denn

$$\begin{aligned} (p, g_{\alpha\gamma}(p)x) &= \tau_\alpha \circ \tau_\gamma^{-1}(p, x) \\ &= \tau_\alpha \circ \tau_\beta^{-1} \circ \tau_\beta \circ \tau_\gamma^{-1}(p, x) \\ &= (\tau_\alpha \circ \tau_\beta^{-1})(p, g_{\beta\gamma}(p)x) \\ &= (p, g_{\alpha\beta}(p) \cdot g_{\beta\gamma}(p)x). \end{aligned}$$

**Beispiel** Die Übergangsfunktionen von  $TM$  sind gegeben durch

$$D(\psi \circ \varphi^{-1}) = \left( \partial_i(\psi^j \circ \varphi^{-1}) \right)_{i,j \leq m}.$$

---

**Satz 5.2** Es sei  $M$  eine glatte Mannigfaltigkeit mit einer offenen Überdeckung  $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{I}}$  und einer glatten Abbildung

$$g_{\alpha\beta}: U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow \mathrm{GL}_k(\mathbb{R})$$

so dass für alle  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathcal{I}$  und  $p \in U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma$  gilt:

$$g_{\alpha\gamma}(p) = g_{\alpha\beta}(p)g_{\beta\gamma}(p).$$

Dann ist

$$E = \bigcup_{\alpha \in \mathcal{I}} U_\alpha \times \mathbb{R}^k / \sim,$$

wobei  $(p, x)_\alpha \sim (q, y)_\beta$  genau dann gilt, wenn  $p = q$  und  $x = g_{\alpha\beta}(p)y$ , ein glattes Vektorbündel.

Der Beweis sei erneut als Aufgabe überlassen.

**Korollar** Ist  $E$  ein glattes Vektorbündel über  $M$  mit Übergangsfunktionen  $\{g_{\alpha\beta}\}$ , so ist das oben konstruierte Vektorbündel isomorph zu  $E$ .

Es sei  $E \xrightarrow{\pi} N$  ein Vektorbündel und  $\Phi: M \rightarrow N$  glatt. Das längs  $\Phi$  zurückgezogene Bündel („pullback“) ist definiert durch den Totalraum

$$E' = \Phi^*E = \{(p, x) \mid x \in E_{\Phi(p)}\} \subseteq M \times E,$$

die Projektion  $\pi': \Phi^*E \rightarrow M, (p, x) \mapsto p$  und die folgenden Bündelkarten: Es sei  $p \in M$  und  $(\tau, U)$  eine Bündelkarte von  $E$  um  $\Phi(p)$ , sowie  $(\varphi, V)$  eine Karte von  $M$  um  $p$  mit  $\Phi(V) \subseteq U$ . Dann definiert

$$\Phi^*E|_V \rightarrow V \times \mathbb{R}^k \quad (p, x) \mapsto (p, \tau_{\Phi(p)}(x))$$

eine Bündelkarte.

Sind  $E \xrightarrow{\pi} M, E' \xrightarrow{\pi'} N$  Vektorbündel, dann ist  $E \times E' \xrightarrow{\pi \times \pi'} M \times N$  mit lokalen Trivialisierungen  $\tau \times \tau'$  ebenfalls ein Vektorbündel. Insbesondere ist im Falle  $M = N$   $E \times E'$  ein Bündel über  $M \times M$ . Es sei  $\Delta: M \rightarrow M \times M, p \mapsto (p, p)$ .

$$\begin{array}{ccc} E \oplus E' = \Delta^*(E \times E') & \longrightarrow & E \times E' \\ \downarrow & & \downarrow \\ M & \xrightarrow{\Delta} & M \times M \end{array}$$

Das längs  $\Delta$  zurückgezogene Bündel  $E \oplus E' = \Delta^*(E \times E')$  heißt die **Whitneysumme** von  $E$  und  $E'$ . Faserweise gilt

$$(E \oplus E')_p = E_p \oplus E'_p.$$

Überlege:  $\mathrm{Hom}(E, E')$ , sowie  $E \otimes E', \otimes E$  und  $\wedge^p E, \wedge E$  sind „vernünftige“ Bündel.

## 1. Intermezzo: Multilineare Algebra

Es seien  $V$  und  $W$   $K$ -Vektorräume. Das **Tensorprodukt**  $V \otimes W$  ist der von den Elementen  $v \otimes w$  mit  $v \in V$ ,  $w \in W$ ,  $\lambda \in K$  und den Relationen

- (i)  $(v + v') \otimes w = v \otimes w + v' \otimes w$
- (ii)  $v \otimes (w + w') = v \otimes w + v \otimes w'$
- (iii)  $(\lambda v) \otimes w = \lambda(v \otimes w) = v \otimes (\lambda w)$

erzeugte Vektorraum.

**Eigenschaften:** (1) Die Abbildung  $b : V \times W \rightarrow V \otimes W$ ,  $(v, w) \mapsto v \otimes w$  ist bilinear.

(2)  $v \otimes w = 0 \Leftrightarrow v = 0$  oder  $w = 0$

(3)  $V \otimes K \cong V$

(4)  $V \otimes W \cong W \otimes V$

(5)  $V^* \otimes W \cong \text{Hom}(V, W)$  vermöge  $(\varphi \otimes w)(v) = \varphi(v) \cdot w$  wobei  $V^*$  der Dualraum zu  $V$  ist

(6) Sind  $\{v_i\}_{i \in \mathcal{I}}$  und  $\{w_j\}_{j \in \mathcal{J}}$  Basen von  $V$  und  $W$ , so ist  $\{v_i \otimes w_j\}_{(i,j) \in \mathcal{I} \times \mathcal{J}}$  eine Basis von  $V \otimes W$ . Insbesondere gilt für Vektorräume endlicher Dimension, dass  $\dim(V \otimes W) = \dim V \cdot \dim W$

**Universelle Eigenschaft:** Ist  $U$  ein Vektorraum und  $\beta$  eine bilineare Abbildung von  $V \times W$  in  $U$ . Dann existiert genau eine lineare Abbildung  $\varphi : V \otimes W \rightarrow U$  mit  $\beta = \varphi \circ b$ .

$$\begin{array}{ccc} V \times W & \xrightarrow{\beta} & U \\ \downarrow b & \searrow \varphi & \\ V \otimes W & & \end{array}$$

Diese Eigenschaft bestimmt  $(V \otimes W, b)$  eindeutig bis auf Isomorphie.

Das Bilden von Tensorprodukten ist bis auf Isomorphie assoziativ. Man schreibt daher

$$\bigotimes^p V = \underbrace{V \otimes \dots \otimes V}_{p\text{-mal}}$$

Setzt man  $\bigotimes^0 V = K$ , so wird  $\bigotimes V = \bigoplus_{p=0}^{\infty} \bigotimes^p V$  mit dem durch die Zuordnungen

$$(v_1 \otimes \dots \otimes v_{p+1} \otimes \dots \otimes v_{p+q}) \mapsto v_1 \otimes \dots \otimes v_{p+q} \in \bigotimes^{p+q} V$$

induzierten Produkt zu einer graduierten Algebra.

Das  $p$ -fach **äußere Produkt**  $\bigwedge^p V$  ist der von den Elementen  $v_1 \wedge \dots \wedge v_p$ ,  $v_i \in V$  und den Relationen

- (i)  $v_1 \wedge \dots \wedge v_i \wedge v_{i+1} \wedge \dots \wedge v_p = -v_1 \wedge \dots \wedge v_{i+1} \wedge v_i \wedge \dots \wedge v_p$  (Schiefsymmetrie)
- (ii)  $(v_1 + w_1) \wedge \dots \wedge v_p = v_1 \wedge \dots \wedge v_p + w_1 \wedge v_2 \wedge \dots \wedge v_p$
- (iii)  $(\lambda v_1) \wedge \dots \wedge v_p = \lambda(v_1 \wedge \dots \wedge v_p)$

erzeugte Vektorraum.

**Eigenschaften:** (1) Die Abbildung  $s : V \times \dots \times V \rightarrow \bigwedge^p V$ ,  $(v_1, \dots, v_p) \mapsto v_1 \wedge \dots \wedge v_p$  ist multilinear und schief.

- (2) Es gilt  $v_1 \wedge \cdots \wedge v_p = 0$  genau dann wenn  $v_1, \dots, v_p$  linear abhängig sind.
- (3) Ist  $\{e_i\}_{i \leq n}$  eine Basis von  $V$ , so ist  $\{e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_p} \mid i_1 < i_2 < \cdots < i_p\}$  eine Basis von  $\bigwedge^p V$ , es gilt also  $\dim \bigwedge^p V = \binom{n}{p}$ . Insbesondere ist  $\bigwedge^p V = 0$  falls  $p > n$  und  $\dim \bigwedge^n V = 1$  und für  $v_i = \sum \alpha_i^j e_j$  gilt:

$$v_1 \wedge \cdots \wedge v_p = \det(\alpha_i^j) \cdot e_1 \wedge \cdots \wedge e_n$$

**Universelle Eigenschaft:** Ist  $U$  ein Vektorraum und  $\sigma$  eine schiefsymmetrische multilineare Abbildung  $\underbrace{V \times \cdots \times V}_{p\text{-mal}} \rightarrow U$ , so existiert genau eine lineare Abbildung  $\varphi : \bigwedge^p V \rightarrow U$  mit  $\sigma = \varphi \circ s$ .

$$\begin{array}{ccc} \bigotimes^p V & \xrightarrow{\sigma} & U \\ s \downarrow & \searrow \varphi & \\ \bigwedge^p V & & \end{array}$$

Die Isomorphieklasse von  $(\bigwedge^p V, s)$  ist durch diese Eigenschaft eindeutig bestimmt.

Setzt man  $\bigwedge^0 V = k$ , so wird  $\bigwedge V = \bigoplus_{p=0}^{\infty} \bigwedge^p V$  mit dem durch

$$(v_1 \wedge \cdots \wedge v_p, v_{p+1} \wedge \cdots \wedge v_{p+q}) \mapsto v_1 \wedge \cdots \wedge v_{p+q}$$

induzierten Produkt zu einer assoziativen, graduiert kommutativen Algebra:  $v \in \bigwedge^p V$ ,  $w \in \bigwedge^q V$ ,  $v \wedge w = (-1)^{p \cdot q} w \wedge v$ . Sind  $V_1, V_2, W_1, W_2$  Vektorräume und  $\varphi \in \text{Hom}(V_1, W_1)$ ,  $\psi \in \text{Hom}(V_2, W_2)$ , so definiert die Fortsetzung von

$$\varphi \otimes \psi(v_1 \otimes v_2) = (\varphi(v_1)) \otimes (\psi(v_2))$$

ein Element  $\varphi \otimes \psi \in \text{Hom}(V_1 \otimes V_2, W_1 \otimes W_2)$ . Sind  $V, W$  Vektorräume und  $\varphi_1, \dots, \varphi_p \in \text{Hom}(V, W)$ , so induzieren diese eine lineare Abbildung

$$\varphi_1 \otimes \cdots \otimes \varphi_p : \bigoplus^p V \rightarrow \bigoplus^p W$$

und

$$\varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_p : \bigwedge^p V \rightarrow \bigwedge^p W$$

## 2. Bündelkonstruktion

Es seien  $E$  und  $E'$  Vektorbündel vom Rang  $k$  und  $l$ . Es bezeichnen stets  $\tau$  und  $\tau'$  lokale Trivialisierungen mit dem gleichen Trivialisierungsgebiet  $U$  sowie  $g_{\alpha\beta}$  und  $g'_{\alpha\beta}$  die Übergangsfunktionen von  $E$  beziehungsweise  $E'$ . Das **Tensorprodukt**  $E \otimes E'$  von  $E$  und  $E'$  ist das Vektorbündel mit den Fasern  $(E \otimes E')_p = E_p \otimes E'_p$ , also  $E \otimes E' = \bigcup_{p \in M} E_p \otimes E'_p \rightarrow M$  mit lokalen Trivialisierungen

$$\sigma : \begin{cases} (E \otimes E')|_U = \bigcup_{p \in U} E_p \otimes E'_p & \rightarrow U \times (\mathbb{R}^k \otimes \mathbb{R}^l) \cong U \times \mathbb{R}^{kl} \\ E_p \otimes E'_p \ni w = \sum v_i \otimes u_i & \mapsto (p, \sum \tau_p(v_i) \otimes \tau'_p(u_i)) \end{cases}$$

das heißt dass  $\sigma = (\pi, \tau_p \otimes \tau'_p)$  ist. Wie in Kapitel 4 zeigt man dass  $E \otimes E'$  ein Bündel ist. Alternativ lässt sich  $E \otimes E'$  mit Satz 5.2 durch die Übergangsfunktion definieren:

$$E \otimes E' = \dot{\bigcup} U_\alpha \times (\mathbb{R}^k \otimes \mathbb{R}^l) / \sim$$

$$h_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta} \otimes g'_{\alpha\beta}$$

Die Relation  $\sim$  ist durch  $h_{\alpha\beta}$  wie in Satz 5.2 definiert. Analog definiert man höhere Tensorprodukte  $\otimes^p E$ , die Tensoralgebra  $\otimes E$  und äußere Produkte  $\wedge^p E$  und  $\Lambda E$ . Das **duale Bündel**  $E^*$  hat die Fasern  $E_p^* = \text{Hom}(E_p, \mathbb{R})$  und lokale Trivialisierungen:

$$\sigma : E^*|_U \rightarrow U \times \mathbb{R}^k$$

$$v^* \in E_p^* : \sigma(v^*) = (p, v^* \circ \tau_p^{-1})$$

$$= (p, (\tau_p^{-1})^*(v^*))$$

Die Übergangsfunktionen von  $E^*$  sind die transponierten Inversen der Übergangsfunktionen von  $E$ :

$$h_{\alpha\beta} = (g_{\alpha\beta}^{-1})^*$$

Das Bündel

$$T_s^r E = \underbrace{E \otimes \cdots \otimes E}_r \otimes \underbrace{E^* \otimes \cdots \otimes E^*}_s$$

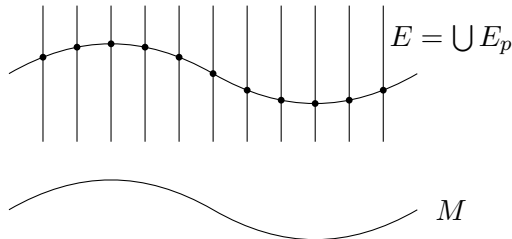
heißt das  $(r, s)$ -**Tensorbündel** von  $E$ . Das Homomorphismenbündel  $\text{Hom}(E, E^*)$  ist definiert durch

$$\sigma : \begin{cases} \text{Hom}(E, E')|_U = \dot{\bigcup}_{p \in U} \text{Hom}(E_p, E'_p) & \rightarrow & U \times \text{Hom}(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^l) \\ \varphi \in \text{Hom}(E_p, E'_p) & \mapsto & (p, \tau'_p \circ \varphi \circ \tau_p^{-1}) \end{cases}$$

Zur Definition der Übergangsfunktionen schreibt man  $\text{Hom}(E, E') \cong E^* \otimes E'$  und definiert  $h_{\alpha\beta} = (g_{\alpha\beta}^{-1})^* \otimes g'_{\alpha\beta}$ .

$$\begin{array}{ccc} V^* & & V \\ g_{\alpha\beta}^* \uparrow & \leftarrow (g_{\alpha\beta}^*)^{-1} & \downarrow g_{\alpha\beta} \\ W^* & & W \end{array}$$

**Definition 5.3** Es sei  $E \xrightarrow{\pi} M$  ein Vektorbündel über  $M$ . Ein **Schnitt** in  $E$  ist eine glatte Abbildung  $S : M \rightarrow E$  mit  $\pi \circ S = \text{id}_M$ , also  $S(p) \in E_p = \pi^{-1}(p)$ . Der Raum der Schnitte wird mit  $\Gamma(E)$  bezeichnet.  $\Gamma(E)$  ist ein  $C^\infty(M)$ -Modul.



$$\begin{array}{ccc}
 S_i^{-1}(p) = \tau^{-1}(p, e_i) & & \\
 S|_U : U & \xrightarrow{\quad} & E|_U \xrightarrow[\tau]{\cong} U \times \mathbb{R}^k \\
 & \searrow \pi \circ S|_U & \swarrow \text{Basis } \{e_i\} \text{ von } \mathbb{R}^k \\
 p & \mapsto & (p, x) \\
 p & \longleftarrow & (p, e_i)
 \end{array}$$

Die  $S_i$  bilden punktweise eine Basis der Fasern.

Die Schnitte des  $(r, s)$ -Tensorbündels  $\Gamma(T_s^r(TM)) = \mathcal{T}_s^r(M)$  bezeichnet man als  $(r, s)$ -**Tensorfelder** auf  $M$ . Die  $(1, 0)$ -Tensorfelder sind genau die Vektorfelder auf  $M$ ;  $\mathcal{T}_0^1(M) = \mathcal{V}(M)$ . Es bezeichne  $\mathcal{V}^*(M) = \mathcal{T}_1^0(M)$  den Raum der  $(0, 1)$ -Tensorfelder.

**Proposition 5.4** Die  $(r, s)$ -Tensorfelder auf  $M$  entsprechen genau den  $C^\infty(M)$ -multilinearen Abbildungen

$$\underbrace{\mathcal{V}^*(M) \times \cdots \times \mathcal{V}^*(M)}_{r\text{-mal}} \times \underbrace{\mathcal{V}(M) \times \cdots \times \mathcal{V}(M)}_{s\text{-mal}} \rightarrow C^\infty(M)$$

vermöge der linearen Forsetzung

$$\begin{aligned}
 p &\mapsto X_1 \otimes \cdots \otimes X_r \otimes \omega_1 \otimes \cdots \otimes \omega_s(\eta_1, \dots, \eta_r, Y_1, \dots, Y_s) \\
 &= \eta_1(X_1) \eta_2(X_2) \cdots \eta_r(X_r) \cdot \omega(Y_1) \cdots \omega_s(Y_s)(p)
 \end{aligned}$$

Der Beweis sei als Übung überlassen (siehe dazu auch Übungsblatt 5, Aufgabe 1).

**Beispiel** (1) Ist  $f \in C^\infty(M)$ , so ist durch sein Differential

$$df|_p(X_p) = X_p(f)$$

ein  $(0, 1)$ -Tensorfeld gegeben.

(2) Die Lieklammer  $[\cdot, \cdot]$  ist *nicht*  $C^\infty(M)$ -linear, also kein Tensorfeld.

Ein Element von  $T_p^*M$  bezeichnet man als **Kotangentialvektoren**,  $T_p^*M$  als **Kotangentialvektorraum** und das Bündel  $T^*M$  als **Kotangentialbündel**.

Ist  $(\varphi, U)$  eine Karte von  $M$ , dann bilden die Differentiale  $d\varphi^i = dx^i$  der Koordinatenfunktionen (punktweise) eine Basis von  $T_p^*M$ , denn

$$dx^i|_p \left( \frac{\partial}{\partial x^j} \Big|_p \right) = \frac{\partial}{\partial x^j}(\varphi^i) = \delta_j^i.$$

Die  $dx^i$  sind also punktweise linear unabhängige  $(0, 1)$ -Tensorfelder über dem Kartengebiet  $U$ .

Ist  $\psi$  eine weitere Karte und bezeichnen  $\frac{\partial}{\partial y^i}$  beziehungsweise  $dy^i$  die entsprechenden Koordinaten(ko)tangentialvektoren, so gilt:

$$dx^i = \sum \alpha_j^i dy^j$$

mit

$$\alpha_j^i \stackrel{!}{=} dx^i \left( \frac{\partial}{\partial y^j} \right) = \sum \alpha_k^i dy^k \underbrace{\left( \frac{\partial}{\partial y^j} \right)}_{\delta_j^k}$$

denn

$$\alpha_j^i = \frac{\partial}{\partial y^j}(\varphi^i) = \frac{\partial \varphi^i}{\partial y^j} = \partial_j(\varphi^i \circ \psi^{-1})$$

Es gilt also  $\alpha = D(\psi \circ \varphi^{-1})^{x^{-1}}$ , vergleiche Satz 2.10.

$$\frac{\partial}{\partial x^i} = \sum \partial_i(\psi^j \circ \varphi^{-1}) \frac{\partial}{\partial y^j}.$$

Diese transponierten Inversen der Differentiale der Kartenwechsel sind genau die Übergangsfunktionen  $h_{\alpha\beta} = (g_{\alpha\beta}^*)^{-1}$  in der Definition von  $(TM)^* = T^*M$ .

Ist  $S$  ein Tensorfeld vom Typ  $(0, s)$  auf einer Mannigfaltigkeit  $N$  und  $\Phi: M \rightarrow N$  eine glatte Abbildung.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{T}_s^0(M) & \xleftarrow{\Phi^*} & \mathcal{T}_s^0(N) \\ \downarrow & & \downarrow \\ M & \xrightarrow{\Phi} & N \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} S: & \mathcal{V}(N) \times \cdots \times \mathcal{V}(N) & \rightarrow C^\infty(N) \\ \Phi^*S: & \mathcal{V}(M) \times \cdots \times \mathcal{V}(M) & \rightarrow C^\infty(M) \end{array}$$

Dann ergibt

$$\Phi^*S(X_1, \dots, X_s) = S(\Phi_*X_1, \dots, \Phi_*X_s)$$

ein  $(0, s)$ -Tensorfeld auf  $M$ , das entlang  $\Phi$  zurückgezogene Tensorfeld (**pullback**).

Es gilt  $\Phi^*(S \otimes T) = \Phi^*S \otimes \Phi^*T$  für  $S \in \mathcal{T}_s^0(N), T \in \mathcal{T}_t^0(N)$ . Ist  $\Psi: P \rightarrow M$  glatt, so gilt

$$(\Phi \circ \Psi)^* = \Psi^* \circ \Phi^*.$$

Ist  $\Phi$  ein Diffeomorphismus, so lässt sich  $\Phi^*$  für beliebige Tensorfelder  $S \in \mathcal{T}_s^r(M)$  definieren:

$$\begin{aligned} p &\mapsto \Phi^*S(\omega_1, \dots, \omega_r, X_1, \dots, X_s)(p) \\ &S((\Phi^*)^{-1}\omega_1, \dots, (\Phi^*)^{-1}\omega_r, \Phi_*X_1, \dots, \Phi_*X_s)(p) \end{aligned}$$

mit

$$\begin{array}{lll} S: & \underbrace{\mathcal{V}^*(N) \times \cdots \times \mathcal{V}^*(N)}_{r\text{-mal}} \times \underbrace{\mathcal{V}(N) \times \cdots \times \mathcal{V}(N)}_{s\text{-mal}} & \rightarrow C^\infty(N) \\ \Phi^*S: & \mathcal{V}^*(M) \times \cdots \times \mathcal{V}^*(M) \times \mathcal{V}(M) \times \cdots \times \mathcal{V}(M) & \rightarrow C^\infty(M) \end{array}$$

$$\begin{aligned} \omega &\in \mathcal{V}^*(M) = \mathcal{T}_1^0(M) & \rightarrow C^\infty(M) \\ X &\in \mathcal{V}(M) = \mathcal{T}_0^1(M) & \rightarrow C^\infty(M) \end{aligned}$$

Insbesondere:  $X \in \mathcal{T}_0^1(M) = \mathcal{V}(M) = \{\mathcal{V}^*(M) \rightarrow C^\infty(M)\}$

$$\Phi^*X(\omega) = X((\Phi^*)^{-1}\omega) = ((\Phi^*)^{-1}\omega)(X) = \omega(\Phi_*^{-1}X)$$

also  $\Phi^*X = \Phi_*^{-1}X$ .



**Beispiel (Anwendung)** Es sei  $(\varphi_\alpha, U_\alpha)$  ein Atlas von  $M$ . Dann ist jedes  $\varphi_\alpha$  ein Diffeomorphismus von  $U_\alpha$  auf  $\varphi_\alpha(U_\alpha) = V_\alpha \subset \mathbb{R}^m$ . Ist  $S \in \mathcal{T}_s^r(M)$ , so ist

$$S_\alpha = (\varphi_\alpha^{-1})^* S|_{U_\alpha}$$

ein  $(r, s)$ -Tensorfeld auf  $V_\alpha$ .

Für alle  $\alpha, \beta$  mit  $U_\alpha \cap U_\beta$  gilt

$$\begin{aligned} (\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1})^* S_\alpha|_{V_\alpha \cap V_\beta} &= (\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1})^* \left( (\varphi_\alpha^{-1})^* S|_{U_\alpha} \right) |_{V_\alpha \cap V_\beta} \\ &= (\varphi_\beta^{-1})^* \circ \varphi_\alpha^* \circ (\varphi_\alpha^{-1})^* S|_{U_\alpha} |_{V_\alpha \cap V_\beta} \\ &= (\varphi_\beta^{-1})^* S|_{U_\beta} |_{V_\alpha \cap V_\beta} \\ &= S_\beta|_{V_\alpha \cap V_\beta} \end{aligned}$$

Ist umgekehrt  $S_\alpha$  eine Familie von  $(r, s)$ -Tensorfeldern auf  $V_\alpha$  mit obigem Transformationsverhalten, so definiert dies ein  $(r, s)$ -Tensorfeld auf  $M$ .

**Definition 5.5** Es sei  $X \in \mathcal{V}(M)$  mit dem Fluss  $\gamma$  und  $S \in \mathcal{T}_s^r(M)$  ein glattes Tensorfeld auf  $M$ . Dann heißt

$$\mathcal{L}_X S = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (\gamma^{t*} S)$$

die **Lieableitung** von  $S$  in Richtung  $X$ .

**Eigenschaften** (1)  $f \in \mathcal{T}_0^0(M) = C^\infty(M)$ . Dann ist  $\mathcal{L}_X f = df(X) = X(f)$ .

(2)  $X, Y \in \mathcal{T}_0^1(M) = \mathcal{V}(M)$ , so gilt

$$\mathcal{L}_X Y = [X, Y].$$

(3) Für  $S \in \mathcal{T}_s^r(M), T \in \mathcal{T}_{s'}^{r'}(M)$  gilt:

$$\mathcal{L}_X(S \otimes T) = (\mathcal{L}_X S) \otimes T + S \otimes (\mathcal{L}_X T).$$

### 3. Differentialformen und die äußere Ableitung

**Definition 5.6** Das Vektorbündel  $\wedge^k(T^*M)$  wird mit  $\wedge^k(M)$  bezeichnet und der Raum seiner Schnitte  $\Gamma(\wedge^k(T^*M))$  mit  $\Omega^k(M)$ . Die Elemente von  $\Omega^k(M)$  heißen **Differentialformen** vom Grad  $k$  oder kurz  **$k$ -Formen** auf  $M$ .

Ist  $(\varphi, U)$  eine Karte von  $M$ , so bilden die Differentiale der Koordinatenfunktionen  $dx^i = d\varphi^i$  eine Basis von  $T^*M$ . Diese sind (lokale) Schnitte in  $\wedge^1(T^*M)$ , also lokal 1-Formen. Das Differential von  $f \in C^\infty(M)$  ist eine 1-Form  $df(X) = X(f)$ . Lokal gilt  $df = \sum f_i dx^i$ , wobei  $f_i = df\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right) = \frac{\partial}{\partial x^i}(f) = \frac{\partial f}{\partial x^i}$ .

Desweiteren sind (lokal) die  $\binom{m}{k}$   $k$ -Formen  $dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$  mit  $i_1 < \dots < i_k$  eine Basis von  $\Omega^k$ . Jede  $k$ -Form  $\omega$  ist lokal von der Gestalt

$$\omega = \sum_{i_1 < \dots < i_k} f_{i_1, \dots, i_k} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}.$$

Jede  $k$ -Form definiert eine schiefssymmetrische  $C^\infty(M)$ -multilineare Abbildung

$$\underbrace{\mathcal{V}(M) \times \cdots \times \mathcal{V}(M)}_{k\text{-mal}} \rightarrow C^\infty(M)$$

$$\omega(X_1, \dots, X_k)(p) = \sum_{\sigma} \text{sgn}(\sigma) f_{i_1, \dots, i_k} dx^{i_1}(X_{\sigma(i_1)}|_p) dx^{i_2}(X_{\sigma(i_2)}|_p) \cdots$$

Analog zu Proposition 5.4 gilt, dass jede solche schiefe  $C^\infty(M)$ -multilineare Abbildung eine  $k$ -Form definiert. Insbesondere gilt für

$$\omega = \sum f_{i_1, \dots, i_k} dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}$$

dass

$$\begin{aligned} \omega\left(\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^{i_k}}\right) &= \sum_{\sigma} \text{sgn}(\sigma) f_{i_1, \dots, i_k} dx^{i_1}\left(\frac{\partial}{\partial x^{i_{\sigma(1)}}}\right) \cdots dx^{i_k}\left(\frac{\partial}{\partial x^{i_{\sigma(k)}}}\right) \\ &= \sum_{\sigma} \text{sgn}(\sigma) f_{i_1, \dots, i_k} \frac{\partial x^{i_1}}{\partial x^{j_{\sigma(1)}}} \cdots \frac{\partial x^{i_k}}{\partial x^{j_{\sigma(k)}}} \\ &= \sum_{\sigma} \text{sgn}(\sigma) f_{i_1, \dots, i_k} \delta_{j_{\sigma(1)}}^{i_1} \cdots \delta_{j_{\sigma(k)}}^{i_k} \\ &= f_{j_1, \dots, j_k}. \end{aligned}$$

Sind  $\omega \in \Omega^k(M)$  und  $\eta \in \Omega^l(M)$ , so definiert  $\omega \wedge \eta$  (punktweise) eine  $(k+l)$ -Form auf  $M$ . Ist  $\Phi: M \rightarrow N$  glatt und  $\omega \in \Omega^k(N)$ , so definiert  $(\Phi^*\omega)(X_1, \dots, X_k) = \omega(\Phi_*X_1, \dots, \Phi_*X_k)$  („push forward“) eine  $k$ -Form auf  $M$ . Für  $\eta \in \Omega^l(N)$  gilt  $\Phi^*(\omega \wedge \eta) = \Phi^*\omega \wedge \Phi^*\eta$ .

Damit ist für  $\omega \in \Omega^k(M)$  und  $X \in \mathcal{V}(M)$ ,  $\gamma$  der Fluss von  $X$ , die **Lieableitung** von  $\omega$  längs  $X$  definiert:

$$\mathcal{L}_X \omega = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (\gamma^{t*} \omega).$$

Es gilt

$$\mathcal{L}_X(\omega \wedge \eta) = (\mathcal{L}_X \omega) \wedge \eta + \omega \wedge (\mathcal{L}_X \eta).$$

Die 0-Formen sind die  $C^\infty$ -Funktionen auf  $M$ ,  $\Omega^0(M) = C^\infty(M)$ . Die 1-Formen sind genau die Schnitte des Kotangentbündels von  $M$ .

Für eine  $C^\infty$ -Funktion  $f$  auf  $M$  definiert  $df$  eine 1-Form auf  $M$  durch  $df(X) = X(f)$ . In lokalen Koordinaten gilt damit  $df = \sum_i g_i dx^i$  mit  $g_i = df\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right) = \frac{\partial f}{\partial x^i}$ , also gilt  $df = \sum \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i$ .

Die  $\mathbb{R}$ -lineare Abbildung  $d: \Omega^0(M) \rightarrow \Omega^1(M)$  soll für beliebige Formen definiert werden. In lokalen Koordinaten definiert man für  $\omega \in \Omega^k(M)$ ,  $\omega = f dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}$  durch Lineare Fortsetzung

$$d\omega = df \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}.$$

Es bleibt zu zeigen, dass diese Definition unabhängig von der Wahl der Karte ist. Man geht dabei entweder vor wie im Beispiel vor Definition 5.5 beschrieben oder verwendet den folgenden Satz.

**Satz 5.7** Es seien  $\omega \in \Omega^k(M)$  und  $X_0, \dots, X_k \in \mathcal{V}(M)$ . Dann gilt:

$$\begin{aligned} d\omega(X_0, \dots, X_k) &= \sum_i (-1)^i X_i(\omega(X_0, \dots, \hat{X}_i, \dots, X_k)) \\ &\quad + \sum_{i < j} (-1)^{i+j} \omega([X_i, X_j], X_0, \dots, \hat{X}_i, \dots, \hat{X}_j, \dots, X_k). \end{aligned}$$

**Beweis** Man zeigt zunächst, dass der Term auf der rechten Seite, welcher offensichtlich schieb ist, auch  $C^\infty(M)$ -linear ist. Es bezeichne dafür  $\eta$  den rechten Term und es seien  $X_0, \dots, X_k \in \mathcal{V}(M)$  und  $f \in C^\infty(M)$ . Dann gilt:

$$\begin{aligned} \eta(X_0, \dots, fX_l, \dots, X_k) &= \sum_{i \neq l} (-1)^i X_i(f) \omega(X_0, \dots, \hat{X}_i, \dots, X_k) \\ &\quad + \sum_{i \neq l} (-1)^i f X_i(\omega(X_0, \dots, \hat{X}_i, \dots, X_k)) \\ &\quad + (-1)^l f X_l(\omega(X_0, \dots, \hat{X}_l, \dots, X_k)) \\ &\quad + \sum_{\substack{i < j \\ i \neq l \neq j}} (-1)^{i+j} f \omega([X_i, X_j], \dots) \\ &\quad + \sum_{l < j} (-1)^{l+j} \omega([fX_l, X_j], \dots) \\ &\quad + \sum_{i < l} (-1)^{i+l} \omega([X_i, fX_l], \dots) \end{aligned}$$

Nebenrechnung (beziehungsweise Überlegung):

$$[fX, Y] = f[X, Y] - Y(f)X$$

Damit folgt weiter:

$$\begin{aligned} \eta(X_0, \dots, fX_l, \dots, X_k) &= f\eta(X_0, \dots, X_k) \\ &\quad + \sum_{i \neq l} (-1)^i X_i(f) \omega(X_0, \dots, \hat{X}_i, \dots, X_k) \\ &\quad - \sum_{l < j} (-1)^{l+j} X_j(f) \omega(X_l, X_0, \dots, \hat{X}_l, \dots, \hat{X}_j, \dots, X_k) \\ &\quad + \sum_{i < l} (-1)^{i+l} X_i(f) \omega(X_l, X_0, \dots, \hat{X}_i, \dots, \hat{X}_l, \dots, X_k) \\ &= f\eta(X_0, \dots, X_k) \\ &\quad + \sum_{i \neq l} (-1)^i X_i(f) \omega(X_0, \dots, \hat{X}_i, \dots, X_k) \\ &\quad - \sum_{l < j} (-1)^j X_j(f) \omega(X_0, \dots, X_l, \dots, \hat{X}_j, \dots, X_k) \\ &\quad - \sum_{i < l} (-1)^i X_i(f) \omega(X_0, \dots, \hat{X}_i, \dots, X_l, \dots, X_k) \\ &= f\eta(X_0, \dots, X_k). \end{aligned}$$

Somit ist  $\eta$   $C^\infty$ -linear, das heißt definiert eine  $(k+1)$ -Form auf  $M$ . Im Folgenden kann man also annehmen:

$$\begin{aligned} d\omega &= f dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} \\ X_l &= \frac{\partial}{\partial x^{j_l}}, j_0 < \dots < j_k. \end{aligned}$$

Damit verschwinden alle Lieklammern auf der rechten Seite. Es gilt

$$\begin{aligned}
 \eta(X_0, \dots, X_k) &= \sum_l (-1)^l X_l \left( f \sum_{\sigma(0)=l} (-1)^l \operatorname{sgn}(\sigma) dx^{i_1}(X_{\sigma(1)}) \dots dx^{i_k}(X_{\sigma(k)}) \right) \\
 &= \sum_{\sigma} \operatorname{sgn}(\sigma) X_{\sigma(0)}(f) dx^{i_1}(X_{\sigma(1)}) \dots dx^{i_k}(X_{\sigma(k)}) \\
 &= \sum_{\sigma} \operatorname{sgn}(\sigma) df(X_{\sigma(0)}) dx^{i_1}, \dots \\
 &= d\omega(X_0, \dots, X_k). \quad \square
 \end{aligned}$$

**Definition 5.8** Es sei  $\omega \in \Omega^k(M)$ . Die  $(k+1)$ -Form  $d\omega$  heißt das (**äußere**) **Differential** der Form  $\omega$ . Gilt  $d\omega = 0$ , so heißt  $\omega$  **geschlossen**. Existiert ein  $\eta \in \Omega^{k-1}(M)$  mit  $d\eta = \omega$ , so heißt  $\omega$  **exakt**.

**Beispiel** (1) Für eine 1-Form  $\omega$  ist  $d\omega$  eine 2-Form:

$$d\omega(X, Y) = X(\omega(Y)) - Y(\omega(X)) - \omega([X, Y]).$$

(2) Für  $f \in C^\infty(M)$  ist  $df \in \Omega^1(M)$  und  $d(df)$  eine 2-Form:

$$\begin{aligned}
 d(df)(X, Y) &= X(df(Y)) - Y(df(X)) - df[X, Y] \\
 &= X(Y(f)) - Y(X(f)) - [X, Y](f) \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

Betrachte alternativ in lokalen Koordinaten:

$$\begin{aligned}
 d(df) &= d \left( \sum_i \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i \right) \\
 &= \sum d \left( \frac{\partial f}{\partial x^i} \right) \wedge dx^i \\
 &= \sum_{i,j} \underbrace{\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}}_{\frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i}} \underbrace{dx^j \wedge dx^i}_{-dx^i \wedge dx^j} \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

(3)  $\omega = xydy \in \Omega^1(\mathbb{R}^2)$  ist nicht geschlossen, denn

$$d\omega = \frac{\partial xy}{\partial x} dx \wedge dy + \frac{\partial xy}{\partial y} \underbrace{dy \wedge dy}_{=0} = ydx \wedge dy \in \Omega^2(\mathbb{R}^2).$$

(4)  $\omega = ydx + xdy \in \Omega^1(\mathbb{R}^2)$  ist exakt, denn für  $f(x, y) = xy$  gilt:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = ydx + xdy = \omega.$$

**Lemma 5.9** (i)  $d: \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^{k+1}(M)$  ist  $\mathbb{R}$ -linear.

(ii)  $d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge d\eta$  für  $\omega \in \Omega^k(M), \eta \in \Omega^l(M)$ .

(iii)  $d \circ d = 0$ .

(iv)  $\Phi^*(d\omega) = d(\Phi^*\omega)$  für  $\Phi: M \rightarrow N$  glatt und  $\omega \in \Omega^k(M)$ .

**Beweis** (i) Klar, nach Definition.

(ii)  $\omega = f dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$ ,  $\eta = g dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_l}$ . Dann gilt:

$$\begin{aligned} \omega \wedge \eta &= f g dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} \wedge dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_l}. \\ d(\omega \wedge \eta) &= (g df + f dg) \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_l} \\ &= g df \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_l} \\ &\quad + (-1)^k (f dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}) \wedge dg \wedge dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_l} \\ &= d\omega \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge d\eta. \end{aligned}$$

(iii)  $\omega = f dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$ ,  $d\omega := df \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$

$$\begin{aligned} d^2(\omega) &= d(df \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}) \\ &\stackrel{(ii)}{=} d^2 f \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} + \sum_l df \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge d^2 x^{i_l} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}. \\ &= 0 \end{aligned}$$

(iv)  $f \in C^\infty(N)$ ,  $X \in \mathcal{V}(M)$

$$\begin{aligned} (\Phi^* df)(X) &= df(\Phi_* X) = (\Phi_* X)(f) = X(f \circ \Phi) \\ &= X(\Phi^* f) = d(\Phi^* f)(X) \end{aligned}$$

Damit gilt für  $\omega = f dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$ :

$$\begin{aligned} \Phi^*(d\omega) &= \Phi^*(df \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}) \\ &= (\Phi^* df) \wedge \Phi^*(dx^{i_1}) \wedge \dots \wedge \Phi^*(dx^{i_k}) \\ &= d(\Phi^* f \Phi^* dx^{i_1} \wedge \dots \wedge \Phi^* dx^{i_k}) = d(\Phi^* \omega) \end{aligned} \quad \square$$

**Erinnerung:** {geschlossene  $k$ -Formen} = Kern $\{d: \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^{k+1}(M)\}$ , {exakte  $k$ -Formen} = Bild $\{d: \Omega^{k-1}(M) \rightarrow \Omega^k(M)\}$ ,  $d \circ d = 0$

Der Quotient  $H_{\text{dR}}^k(M) = \frac{\text{Kern}\{d: \Omega^k \rightarrow \Omega^{k+1}\}}{\text{Bild}\{d: \Omega^{k-1} \rightarrow \Omega^k\}}$  heißt die  $k$ -te **deRham-Kohomologiegruppe**. Ist  $\Phi: M \rightarrow N$  glatt, so induziert  $\Phi^*$  wegen Lemma 5.9 (iv) einen Homomorphismus  $\Phi^* H_{\text{dR}}^k(N) \rightarrow \Phi^* H_{\text{dR}}^k(M)$ . Ist  $\Psi: P \rightarrow M$  glatt, so gilt

$$(\Phi \circ \Psi)^* = \Psi^* \circ \Phi^*$$

insbesondere gilt  $\text{id}_M^* = \text{id}_{H_{\text{dR}}^k}$  und ein Diffeomorphismus  $M \rightarrow N$  induziert einen Isomorphismus von  $H_{\text{dR}}^k(N)$  nach  $H_{\text{dR}}^k(M)$ .

**Beispiel** (1)  $H_{\text{dR}}^1(\mathbb{R}^2) = \{0\}$ , zu zeigen:  $d\omega = 0 \Rightarrow \omega = dh, \omega \in \Omega^1$   
 $\omega = f dx + g dy$  geschlossen

$$\begin{aligned} 0 = d(\omega) &= df \wedge dx + dg \wedge dy \\ &= \frac{\partial f}{\partial y} dy \wedge dx + \frac{\partial g}{\partial x} dx \wedge dy \\ &= \left( \frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \right) dx \wedge dy \end{aligned}$$

Setzt man

$$h(x, y) = \int_0^x f(t, 0) dt + \int_0^y g(x, t) dt$$

so gilt

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial x}(x) &= f(x, 0) + \int_0^y \frac{\partial g}{\partial x}(x, t) dt \\ &= f(x, 0) + \int_0^y \frac{\partial f}{\partial y}(x, t) dt \\ &= f(x, y) \end{aligned}$$

Analog zeigt man, dass  $\frac{\partial h}{\partial y}(x, y) = g(x, y)$ . Damit gilt

$$dh = \frac{\partial h}{\partial x} dx + \frac{\partial h}{\partial y} dy = f dx + g dy = \omega$$

Daraus folgt  $H_{\text{dR}}^1(\mathbb{R}^2) = \{0\}$

(2)  $H_{\text{dR}}^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}) \neq \{0\}$

Die Form  $\omega(x, y) = \frac{1}{x^2+y^2}(x dy - y dx)$  ist geschlossen. Wäre  $\omega$  exakt, so gäbe es  $h \in C^\infty(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$  mit  $dh = \omega$ , das heißt

$$\frac{\partial h}{\partial x}(x, y) = \frac{-y}{x^2 + y^2} \qquad \frac{\partial h}{\partial y}(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}$$

Dann wäre

$$\begin{aligned} 0 &= h(1, 0) - h(1, 0) = \int_0^{2\pi} \frac{d}{dt} h(\cos t, \sin t) dt \\ &= \int_0^{2\pi} -\sin t \frac{\partial h}{\partial x}(\cos t, \sin t) + \cos t \frac{\partial h}{\partial y}(\cos t, \sin t) dt \\ &= \int_0^{2\pi} \sin^2 t + \cos^2 t dt = 2\pi \end{aligned}$$

$\omega$  ist geschlossen aber *nicht* exakt und definiert eine Klasse

$$0 \neq [\omega] \in H_{\text{dR}}^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$$

Insbesondere sind  $\mathbb{R}^2$  und  $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  *nicht* diffeomorph.