12. Das Schwarzsche Lemma

$\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$.

Satz 12.1 (Schwarzsches Lemma)
Es sei $f \in H(\mathbb{D}), f(\mathbb{D}) \subseteq \mathbb{D}$ und $f(0) = 0$.
Dann:

$$|f(z)| \leq |z| \forall z \in \mathbb{D} \text{ und } |f'(0)| \leq 1 \ (*).$$

Ist $|f'(0)| = 1$ oder $|f(z_0)| = |z_0|$ für ein $z_0 \in \mathbb{D}\backslash\{0\}$, so ex. ein $\lambda \in \partial\mathbb{D}$ mit: $f(z) = \lambda z$.

Beweis
O.b.d.A.: $f \not\equiv 0$. 11.8 $\Rightarrow \exists g \in H(\mathbb{D}) : f(z) = zg(z)$. Sei $z \in \mathbb{D}$. Wähle $r > 0$ so, dass $r < 1$ und $|z| < r$. Dann: $|g(z)| \overset{11.7}{\leq} \max\limits_{|w|=r} |g(w)| = \max\limits_{|w|=r} \frac{|f(w)|}{|w|} \leq \frac{1}{r} \overset{r \to 1}{\Rightarrow} |g(z)| \leq 1$. Also $|g(z)| \leq 1 \forall z \in \mathbb{D}$. $f'(z) = g(z) + zg'(z) \Rightarrow f'(0) = g(0)$ Also gilt $(*)$. Es sei $|f'(0)| = 1$ oder $|f(z_0)| = |z_0|$ für ein $z_0 \in \mathbb{D}\backslash\{0\} \Rightarrow |g(0)| = 1$ oder $|g(z_0)| = 1 \Rightarrow |g|$ hat ein Maximum in $\mathbb{D}$. 11.6 $\Rightarrow$ g konstant $\Rightarrow \exists \lambda \in \mathbb{C} : g(z) = \lambda \ \forall z \in \mathbb{D}$. Dann: $f(z) = \lambda z$. Es ist $|\lambda| = |g(0)| = 1$ oder $|\lambda| = |g(z_0)| = 1 \Rightarrow \lambda \in \partial\mathbb{D}$. ■

Definition
Sei $a \in \mathbb{D}$ und $S_a \in H(\mathbb{C}\backslash\{\frac{1}{\bar{a}}\})$ def. durch $S_a(z) := \frac{z-a}{1-\bar{a}z}$

Beachte 1
$|\frac{1}{\bar{a}}| = \frac{1}{|a|} > 1$, also $\frac{1}{\bar{a}} \notin \overline{\mathbb{D}}$. $S_a(a) = 0$, $S_a(0) = -a$.

Satz 12.2
Sei $a \in \mathbb{D}$. Dann:

(1) S_a ist auf $\mathbb{C}\backslash\{\frac{1}{\bar{a}}\}$ injektiv.

(2) $S_a^{-1} = S_{-a}$ auf $\overline{\mathbb{D}}$

(3) $S_a(\partial\mathbb{D}) = \partial\mathbb{D}$

(4) $S_a(\mathbb{D}) = \mathbb{D}$

(5) Ist $\lambda \in \partial\mathbb{D}$, so ist $\lambda S_a \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$.

Beweis

(1) Nachrechnen.

(2) $w = S_a(z) = \frac{z-a}{1-\overline{a}z} \iff z - a = w - \overline{a}zw \iff z(1+\overline{a}w) = w + a \iff z = \frac{w+a}{1+\overline{a}w} = S_{-a}(w)$

(3) Sei $|z| = 1$, also $z = e^{it} (t \in \mathbb{R}).|S_a(z)| = |\frac{e^{it}-a}{1-\overline{a}e^{it}}| = |\frac{e^{it}-a}{e^{it}(e^{-it}-\overline{a})}| = \frac{|e^{it}-a|}{|e^{it}||\overline{e^{it}-a}|} = 1$. Also: $S_a(\partial\mathbb{D}) \subseteq \partial\mathbb{D}$, $\partial\mathbb{D} \overset{(2)}{=} S_a(\underbrace{S_{-a}(\partial\mathbb{D})}_{\substack{\text{wie oben}\\ \subseteq \partial\mathbb{D}}}) \subseteq S_a(\partial\mathbb{D})$.

(4) Sei $z \in \mathbb{D}$. $|S_a(z)| \overset{11.7}{\leq} \max\limits_{|w|=1} |S_a(w)| \overset{(3)}{=} 1 \Rightarrow S_a(\mathbb{D}) \subseteq \overline{\mathbb{D}}$ Sei $z \in \mathbb{D}$, $w := S_a(z)$. Annahme: $|w| = 1 \overset{(3)}{\Rightarrow} |z| = |S_{-a}(w)| = 1$ Wid. Also $S_a(\mathbb{D}) \subseteq \mathbb{D}$. Genauso $S_{-a}(\mathbb{D}) \subseteq \mathbb{D}$. Dann $\mathbb{D} \overset{(2)}{=} S_a(S_{-a}(\mathbb{D})) \subseteq S_a(\mathbb{D})$

(5) folgt aus (1) und (4). ∎

Satz 12.3
Sei $f \in H(\mathbb{D})$
$f \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$ und $f(0) = 0 \iff \exists \lambda \in \partial\mathbb{D} : \ f(z) = \lambda z.$

Beweis
"$\Leftarrow$": Klar
"$\Rightarrow$": Dann $f^{-1} \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$, $f^{-1}(0) = 0$. Sei $z \in \mathbb{D}$, $w := f(z)$; dann:
$z = f^{-1}(w)$, $|z| = |f^{-1}(w)| \overset{12.1}{\leq} |w| = |f(z)| \overset{12.1}{\leq} |z|$ Also $|f(z)| = |z|\ \forall z \in \mathbb{D}$. $12.1 \Rightarrow \exists \lambda \in \partial\mathbb{D} : f(z) = \lambda z\ \forall z \in \partial\mathbb{D}$ ∎

Satz 12.4
$\mathrm{Aut}(\mathbb{D}) = \{\lambda S_a : \lambda \in \partial\mathbb{D}, a \in \mathbb{D}\}$

Beweis
"$\supseteq$": 12.2 (5)
"$\subseteq$": Sei $f \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$, $a := f^{-1}(0) \in \mathbb{D}$. $g := f \circ S_a$; $g \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$ und $g(0) = f(S_a(0)) = f(a) = 0$.
$12.3 \Rightarrow \exists \lambda \in \partial\mathbb{D} : g(z) = \lambda z$. Es ist $f = g \circ S_a = \lambda S_a$ ∎