Kapitel 6

Einige Verteilungen

Im folgenden sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum

Definition 6.1 *Eine Zufallsvariable $X : \Omega \to \mathbb{R}$ bzw. ihre Verteilung heißen* ***diskret*** *falls es eine endliche oder abzählbare Menge $C \subset \mathbb{R}$ gibt, so dass $P(X \in C) = 1$. O.B.d.A. sei $C = \{x_1, x_2, \ldots\}$ (x verschieden). Die Folge $\{p_X(k)\}_{k\in\mathbb{N}}$ mit $p_X(k) = P(X = x_k)$ heißt* ***Zähldichte*** *(oder Wahrscheinlichkeitsfunktion) von X*

Bemerkung 6.1

a) Für eine Zähldichte $\{p_X(k)\}_{k\in\mathbb{N}}$ gilt $p_X(k) \geq 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}$ und $\sum_{k=1}^{\infty} p_X(k) = 1$

b) Die Verteilung von X wird durch die Zähldichte bestimmt, denn $\forall B \in \mathfrak{B}$ gilt:

$$P_X(B) = P_X(B \cap C) = P_X(\sum_{k|x_k \in B} \{x_k\}) = \sum_{k|x_k \in B} p_X(k)$$

6.1 Wichtige diskrete Verteilungen

6.1.1 Binomialverteilungen

Eine diskrete Zufallsvariable X heißt **binomialverteilt**, mit Parameter $n \in \mathbb{N}$ und $p \in [0, 1]$ (kurz $X \sim B(n, p)$) falls
$p_X(k) = P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ für $k = 0, 1, \ldots, n$

Beispiel 6.1 Eine Münze wird n-mal geworfen
$\Omega = \{(\omega_1, \ldots, \omega_n)|\omega_i \in \{K, Z\}, i = 1, \ldots, n\} = \{K, Z\}^n$
Es sei $X : \Omega \to \{0, 1, 2, \ldots, n\}$ mit $X(\omega) = \sum_{i=1}^{n} 1_{\{\omega_i = K\}}$ die Anzahl der Kopf-Würfe in der Folge. Weiter seien die Ereignisse $A_i = \{\omega|\omega_i = K\}$={i-ter Wurf

Kopf}, $i = 1, \dots, n$ unabhängig und $P(A_i) = p, i = 1, \dots, n$ Dann gilt:

$$\begin{aligned}
P(X = k) &= P(\sum_{1 \le i_1 < \dots < i_k \le n} A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k} \bigcap_{j \notin \{i_1, \dots, i_k\}} A_j^c) \\
&= \sum_{1 \le i_1 < \dots < i_k \le n} P(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k} \bigcap_{j \notin \{i_1, \dots, i_k\}} A_j^c) \\
&= \sum_{1 \le i_1 < \dots < i_k \le n} \underbrace{\underbrace{P(A_{i_1})}_{=p} \cdot \dots \cdot \underbrace{P(A_{i_k})}_{=p}}_{=p^k} \cdot \underbrace{\prod_{j \notin \{i_1, \dots, i_k\}} \underbrace{P(A_j^c)}_{=1-p}}_{=(1-p)^{n-k}} \\
&= \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}
\end{aligned}$$

Die Verteilungsfunktion F_X ist hier

$$F_X(x) = \sum_{k \le x} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, x \in \mathbb{R}$$

hier fehlt ein Bild

Es gilt $P(X = x) = F_X(x) - F_X(x^-), x \in \mathbb{R}$

6.1.2 Hypergeometrische Verteilung

Eine Urne enthält r rote und s schwarze Kugeln, $r + s = n$. Es werden m Kugeln ohne Zurücklegen gezogen. $X(\omega)$ sei die Anzahl der gezogenen roten Kugeln. Dann gilt:

$$P(X = k) = \frac{\binom{r}{k}\binom{n-r}{m-k}}{\binom{n}{m}}$$

X nimmt die Werte $k = \max\{0, m - s\}, \dots, \min\{r, m\}$ an und X heißt **hypergeometrisch verteilt** mit Parameter $r, n, m \in \mathbb{N}$

6.1.3 Geometrische Verteilung

Eine diskrete Zufallsvariable X heißt **geometrisch verteilt** mit Parameter $p \in (0, 1)$, falls
$P(X = k) = (1 - p)^{k-1} p$ für $k = 1, 2, 3, \dots$

Beispiel 6.2 Wir würfeln bis erstmals eine 6 fällt. $X(\omega)$ sei die Anzahl der benötigten Würfe. Dann gilt:

$$P(X = k) = P(\text{Wurf 1 bis } k - 1 \text{ keine 6, dann 6}) = \frac{5^{k-1} \cdot 1}{6^k} = \frac{1}{6}(\frac{5}{6})^{k-1}$$

6.1.4 Poisson-Verteilung

Eine diskrete Zufallsvariable X heißt **Poisson-verteilt** mit Parameter $\lambda > 0$ wenn:
$P(X = k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$ für $k = 0, 1, 2 \dots$
Die Poisson-Verteilung kann man auffassen als Approximation der Binomialverteilung bei großem n und kleinem p. Es gilt:

Satz 6.1 *Sei $\lambda > 0$ und $p_n := \frac{\lambda}{n} < 1$. Dann gilt:*

$$\lim_{n\to\infty}\binom{n}{k}p_n^k(1-p_n)^{n-k} = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$$

Beweis

$$\begin{aligned}
\binom{n}{k}p_n^k(1-p_n)^{n-k} &= \binom{n}{k}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^k\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} \\
&= \frac{\lambda^k}{k!}\cdot\underbrace{\frac{n!}{(n-k)!n^k}}_{\to 1}\cdot\underbrace{\frac{\overbrace{(1-\frac{\lambda}{n})^n}^{\to e^{-\lambda}}}{(1-\frac{\lambda}{n})^k}}_{\to 1} \\
&\xrightarrow{n\to\infty} \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}
\end{aligned}$$

■

Wichtiges Beispiel:
Eine Versicherung hat ein Portfolio von n Risiken (n groß). Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Risiko in einem bestimmten Zeitraum einen Schaden liefert sei $p_n = \frac{\lambda}{n}$. Dann ist X = Anzahl der Risiken, die einen Schaden liefern $\sim B(n, p_n)$, also X in etwa Poisson-verteilt.

6.1.5 Diskrete Gleichverteilung

Eine diskrete Zuvallsvariable X heißt **gleichverteilt** auf $\{x_1, \dots, x_m\} \subset \mathbb{R}$, falls:
$P(X = x_i) = \frac{1}{m}$ für $i = 1, \dots, m$

6.2 Wichtige stetige Verteilungen

Definition 6.2 *Eine Zufallsvariable $X : \Omega \to \mathbb{R}$ bzw. ihre Verteilung heißen **absolutstetig**, falls die Verteilungsfunktion F_X von X die folgende Darstellung besitzt:*

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(y)dy \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

*wobei $f_X : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ die **Dichte** von X ist.*

Bemerkung 6.2

a) Jede integrierbare Funktion $f_X : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ mit der Eigenschaft

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(y)dy = 1 \quad \text{definiert durch} \quad F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(y)dy$$

ist eine Verteilungsfunktion.

b) Die Dichte ist das stetige Analogon zur Zähldichte. Es gilt:
$P_X(B) = P(x \in B) = \int_B f_X(y)dy \qquad \forall\, B \in \mathfrak{B}$
da P_X eine Verteilung ist (nachrechnen!) und auf $\{(-\infty, b], b \in \mathbb{R}\}$ mit F_X übereinstimmt.
f_X kann aber Werte größer als 1 annehmen.

c) Bei einer absolutstetigen Zufallsvariable gilt $P(X = x) = 0 \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$ und $F_X(x)$ ist stetig. Ist $f_X(x)$ stetig, so ist F_X differenzierbar und es gilt:
$F'_X(x) = f_X(x)$. Im Allgemeinen ist F_X aber <u>nicht</u> differenzierbar.

6.2.1 Gleichverteilung

Eine Zufallsvariable X heißt **gleichverteilt** auf dem Intervall (a, b), $a < b$ (Schreibweise: $X \sim U(a, b)$ bzw. $\text{Unif}(a, b)$), falls die Dichte von X gegeben ist durch:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & \text{für } a < x < b \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Die Verteilungsfunktion ist gegeben durch:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{falls } x \leq a \\ \int_a^x \frac{1}{b-a} dy = \frac{x-a}{b-a}, & \text{falls } x \leq b \\ 1, & \text{falls } x \geq b \end{cases}$$

6.2.2 Exponentialverteilt

Eine Zufallsvariable X heißt **exponentialverteilt** mit Parameter $\lambda > 0\,(X \sim \exp(\lambda))$, falls die Dichte von X gegeben ist durch:

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Für die Verteilungsfunktion gilt:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \int_0^x \lambda e^{-\lambda y} dy = 1 - e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \end{cases}$$

Die Exponentialverteilung wird oft zur Beschreibung von Lebens- oder Zeitdauern verwendet und besitzt die Eigenschaft der „Gedächtnislosigkeit“, d.h. für zwei Zeitpunkte $0 < s < t$ gilt:

$$
\begin{aligned}
P(X \geq t | X \geq s) = \frac{P(X \geq t, X \geq s)}{P(X \geq s)} &= \frac{P(X \geq t)}{P(X \geq s)} \\
&= \frac{1 - F_X(t)}{1 - F_X(s)} = \frac{e^{-\lambda t}}{e^{-\lambda s}} = e^{-\lambda(t-s)} = P(X \geq t - s)
\end{aligned}
$$

6.2.3 Normalverteilung

Eine Zufallsvariable X heißt **normalverteilt** mit Parameter $\mu \in \mathbb{R}$ und $\sigma^2 > 0$ (Schreibweise $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$) falls die Dichte von X gegeben ist durch:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp(-\frac{1}{2}\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}) \quad , x \in \mathbb{R} \\
&=: \varphi_{\mu,\sigma^2}(x)
\end{aligned}
$$

Ist $\mu = 0$ und $\sigma^2 = 1$ so nennt man X **standard normalverteilt**. Die Verteilungsfunktion wird hier häufig mit Φ bezeichnet, also:

$$
\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{1}{2}y^2)\, dy
$$

Lemma 6.2 *Es gilt:*

a) $\lim_{x\to\infty} \Phi(x) = 1$

b) $\Phi(x) = 1 - \Phi(-x) \quad , \forall\, x \in \mathbb{R}$

c) $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, $a \neq 0$, $b \in \mathbb{R} \to aX + b \sim N(a\mu + b, a^2\sigma^2)$

Beweis a) ($\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ ist Konstante und wird hier weggelassen; Trick: wir quadrieren)

$$
(\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\frac{1}{2}y^2)\, dy)^2 = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\frac{1}{2}(x^2+y^2))\, dxdy = \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} re^{-\frac{r^2}{2}}\, drd\varphi =
$$

$$
= \int_0^{2\pi} -e^{\frac{r^2}{2}}\Big|_0^{\infty} d\varphi = 2\pi
$$

b) es gilt $\varphi_{0,1}(x) = \varphi_{0,1}(-x)$

c) sei $Y = aX + b$. Es gilt:

$$
\begin{aligned}
P(Y \leq y) = P(X \leq \frac{y-b}{a}) &= \int_{-\infty}^{\frac{y-b}{a}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp(-\frac{1}{2}\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2})\, dx \\
&= \int_{-\infty}^{y} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp(-\frac{1}{2}\frac{(x'-b-a\mu)^2}{a^2\sigma^2})\frac{1}{a}\, dx' \\
&\Rightarrow \; Y \sim \mathcal{N}(a\mu + b, a^2\sigma^2)
\end{aligned}
$$

■