

Kapitel 3

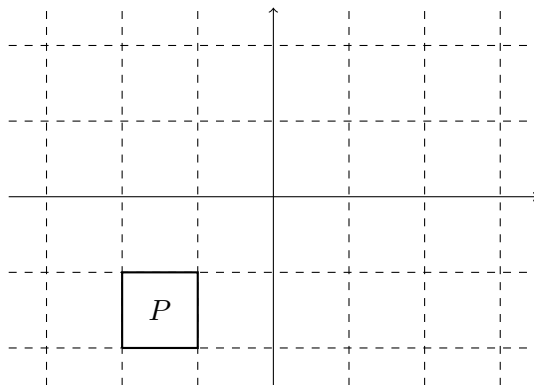
Hyperbolische Parkettierungen und Fuchssche Gruppen

3.1 Parkettierungen und Gruppen

Die allgemeine Situation ist die folgende: Gegeben sei ein metrischer Raum (X, d) sowie eine abgeschlossene Teilmenge $P \subseteq X$. Eine *Parkettierung* bzw. *Pflasterung von X mit Fundamentalbereich P* ist eine Überdeckung $X = \bigcup_{i \in I} P_i$ mit einer abzählbaren Indexmenge I , sodass gilt:

- (i) Für jedes $i \in I$ ist $P_i = T_i(P)$ für eine Isometrie $T_i \in \text{Isom}(X)$. Insbesondere sind alle P_i kongruent zu P .
- (ii) Für je zwei $i \neq j$ in I gilt $\overset{\circ}{P}_i \cap \overset{\circ}{P}_j = \emptyset$.

Beispiel 3.1.1 (i) \mathbb{R}^2 lässt sich beispielsweise durch gleichseitige, kongruente Dreiecke oder Quadrate parkettieren. Auch Variationen sind möglich, haben aber eine geringere Symmetrie zur Folge. Die Symmetriegruppe der Parkettierung

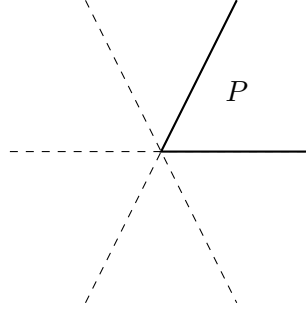


von \mathbb{R}^2 besitzt beispielsweise \mathbb{Z}^2 als Untergruppe, denn sie ist invariant unter Translationen

in x - und y -Richtung. Allgemeiner gilt für eine Parkettierung \mathcal{P}

$$G := \langle \{T_i\}_{i \in I} \rangle \subseteq \text{Isom}(X) \cap \text{Sym}(\mathcal{P}).$$

- (ii) Die Sphäre $X = \mathbb{S}^2$ lässt sich durch die vier Viertelsphären parkettieren.
- (iii) Betrachte Die Parkettierung



Dann ist die Symmetriegruppe gegeben durch die zyklische Gruppe G der Ordnung 6, erzeugt von den Rotationen T_k um den Winkel $\frac{2\pi k}{6}$.

Operiert nun umgekehrt eine Gruppe G auf X , so erhalten wir eine dazugehörige Parkettierung auf X (Modell für den Bahnenraum). Dies wollen wir im Folgenden explizit beschreiben. Sei (X, d) ein zusammenhängender, metrischer Raum und $G \subseteq \text{Isom}(X)$ eine Gruppe von Isometrien von X . Dann operiert G diskret auf X , falls jede Bahn $G \cdot x := \{g \cdot x \mid g \in G\} \subseteq X$ diskret ist, das heißt für jedes $x \in X$ ein $\epsilon_x > 0$ existiert, sodass

$$B_{\epsilon_x}(x) \cap B_{\epsilon_x}(g \cdot x) = B_{\epsilon_x}(x) \cap g \cdot B_{\epsilon_x}(x) = \emptyset$$

für alle $g \in G \setminus \{e_G\}$.

Beispiel 3.1.2 (i) \mathbb{Z} operiert diskret auf \mathbb{R} durch Translationen:

$$\cdot : \mathbb{Z} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (k, t) \mapsto k \cdot t = k + t.$$

- (ii) Analog operiert \mathbb{Z}^2 diskret auf \mathbb{R}^2 durch

$$\cdot : \mathbb{Z}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad ((k, l), (x, y)) \mapsto (k, l) \cdot (x, y) = (x + k, y + l)$$

- (iii) Betrachte nun die hyperbolische Isometrie

$$T : \mathbb{H}^2 \longrightarrow \mathbb{H}^2, \quad z \mapsto 2z.$$

Dann ist $\langle T \rangle = \{\dots, T^{-2}, T^{-1}, \text{id}, T, T^2, \dots\} \cong \mathbb{Z}$ und erhalten dadurch eine diskrete Operation auf \mathbb{H}^2 (Achtung: Funktioniert im Euklidischen nicht, da $z \mapsto 2z$ keine euklidische

Isometrie ist).

(iv) Die Gruppe $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}) \subseteq \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ operiert diskret auf \mathbb{H}^2 (siehe später).

Satz 3.1.3 (Dirichlet-Parkettierung) *Sei G eine abzählbare Gruppe, welche diskret auf einem metrischen Raum (X, d) operiere und $p \in X$ ein Punkt in X , der durch kein Element aus $G \setminus \{e_G\}$ fixiert werde. Dann ist der Dirichlet-Bereich von G zentriert in p*

$$\begin{aligned} D_p(G) &:= \{x \in X \mid d(x, p) \leq d(x, g \cdot p) \text{ für alle } g \in G\} \\ &= \{x \in X \mid d(x, p) \leq d(g \cdot x, p) \text{ für alle } g \in G\} \end{aligned}$$

ein Fundamentalbereich P für eine Parkettierung \mathcal{P} von X . Dabei gilt die Mengengleichheit wegen der Invarianz von d unter Isometrien.

Bemerkung: Jede Bahn von G trifft jeden Punkt von $\overset{\circ}{D}_p(G)$ genau einmal.

Beweis. Sei $D := D_p(G)$ und $y \in X$ beliebig. Wir müssen zeigen, dass y in einer Bahn $g \cdot D$ für ein $g \in G$ enthalten ist. Betrachte nun die Bahn $G \cdot y$ von y . Nach Voraussetzung ist $G \cdot y$ diskret, es existiert also $y_0 \in G \cdot y$ mit $d(y_0, p) = \min_{g \in G} d(g \cdot y, p)$. Dann ist aber $d(y_0, p) \leq d(g \cdot y_0, p)$ für alle $h \in G$, also gerade $y_0 \in D$. Wegen $G \cdot y = G \cdot y_0$ folgt der erste Teil der Behauptung. Es bleibt noch zu zeigen, dass die Inneren der Translate disjunkt sind. Hierfür genügt es zu zeigen, dass falls $x_1, x_2 \in \overset{\circ}{D}$ für $x_1 \neq x_2$, dass dann x_1 und x_2 nicht zu derselben Bahn gehören. Wir überlegen uns hierfür zunächst, dass falls $d(x, p) = d(g \cdot x, p)$ für $g \in G \setminus \{e_G\}$ gilt, dass dann $d(x, p) = d(x, g^{-1} \cdot p)$ und x damit in der Mittelebene von p und $g^{-1} \cdot p$

$$M(p, g^{-1}) := \{x \in X \mid d(x, p) = d(x, g^{-1} \cdot p)\}$$

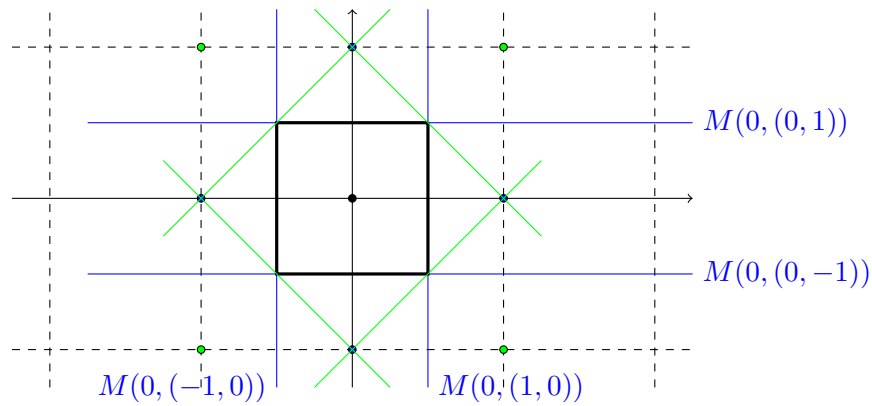
liegt. Dann gilt entweder $x \notin D$ oder $x \in \partial D$. Insbesondere gilt dann für $x \in \overset{\circ}{D}$ also $d(x, p) < d(g \cdot x, p)$ für alle $g \in G \setminus \{e_G\}$. Sind nun also $x_1 \neq x_2$ in derselben Bahn, also $x_2 = g_0 \cdot x_1$, so folgt

$$d(x_1, p) < d(g_0 \cdot x_1, p) = d(x_2, p) < d(g_0^{-1} \cdot x_2, p) = d(x_1, p),$$

ein Widerspruch. □

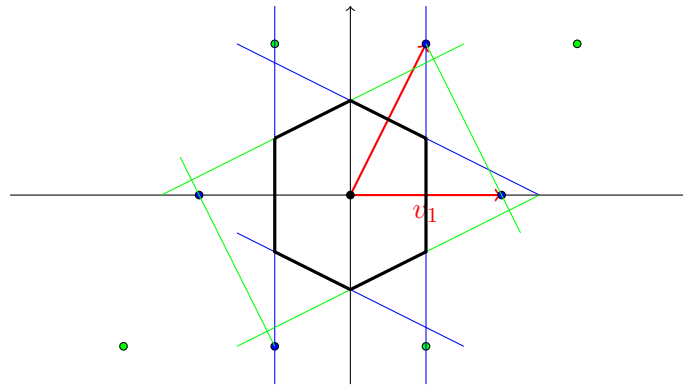
Beispiel 3.1.4 (i) Betrachte die Gruppenoperation von \mathbb{Z} auf \mathbb{R} von oben. Dann wird $p = 0$ in \mathbb{R} von keinem $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ fix gelassen und Anwenden von Satz 1.3 liefert den Fundamentalbereich $D_0(\mathbb{Z}) = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. Die relevanten Mitteleben sind dabei $M(0, 1) : x = \frac{1}{2}$ sowie $M(0, -1) : x = -\frac{1}{2}$.

(ii) Analog lässt sich dies für die Gruppenaktion von \mathbb{Z}^2 auf \mathbb{R}^2 anwenden.

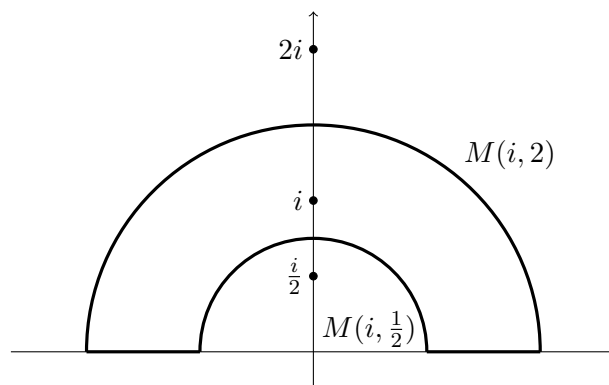


Als Fundamentalbereich er gibt sich nun $D_{(0,0)}(\mathbb{Z}^2) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| < \frac{1}{2}, |y| < \frac{1}{2}\}$.

- (iii) Das Beispiel aus (ii) lässt sich verallgemeinern. Für zwei linear unabhängige Vektoren $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^2$ ist $G := \{mv_1 + nv_2 \mid m, n \in \mathbb{Z}\} \cong \mathbb{Z}^2$ und wir erhalten durch die Mittelebenenkonstruktion ein Hexagon als Fundamentalbereich.



- (iv) Betrachte $T : \mathbb{H}^2 \longrightarrow \mathbb{H}^2, z \mapsto 2z$. Dann ist i nicht fixiert und $G = \langle T \rangle \cong \mathbb{Z}$ operiert auf \mathbb{H}^2 . Die Mittelebenen sind diesmal hyperbolische Geodätische, also Halbkreise und wir erhalten folgenden Fundamentalbereich:



Satz 3.1.5 *Die Gruppe*

$$\mathrm{SL}_2\mathbb{Z} := \left\{ T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2\mathbb{R} \mid a, b, c, d \in \mathbb{Z} \right\}$$

operiert durch Möbiustransformationen diskret auf \mathbb{H}^2 , d.h. alle Bahnen sind diskret.

Bemerkung 3.1.6 *Die Gruppe $\mathrm{SL}_2\mathbb{R}$ wird mit der von \mathbb{R}^4 induzierten Teilraumtopologie versehen.*

Lemma 3.1.7 *Sei $z_0 = x_0 + iy_0 \in \mathbb{H}^2$ und $K \subseteq \mathbb{H}^2$ kompakt. Dann ist die Menge*

$$E_{z_0} := E = \left\{ T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2\mathbb{R} \mid T \cdot z_0 = \frac{az_0 + b}{cz_0 + d} \in K \right\}$$

kompakt in $\mathrm{SL}_2\mathbb{R}$.

Beweis. Wir müssen zeigen, dass E abgeschlossen und beschränkt bezüglich der von \mathbb{R}^4 induzierten Teilraumtopologie ist. Die Abbildung

$$\Psi : \mathrm{SL}_2\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{H}^2, \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \frac{az_0 + b}{cz_0 + d}$$

ist stetig, also ist $E = \Psi^{-1}(K)$ als stetiges Urbild einer kompakten Menge abgeschlossen. Es bleibt also noch die Beschränktheit zu zeigen. Dabei ist $T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2\mathbb{R}$ bezüglich der Teilraumtopologie beschränkt genau dann, wenn die Koeffizienten a, b, c, d beschränkt in \mathbb{R} sind. Nun ist K beschränkt in \mathbb{H}^2 , das heißt es existiert eine Konstante $M_1 > 0$, sodass

$$|\Psi(T)| = \left| \frac{az_0 + b}{cz_0 + d} \right| \leq M_1$$

für alle $T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2\mathbb{R}$, denn eine bezüglich d_h beschränkte Menge ist auch euklidisch beschränkt. Weiter ist K kompakt in \mathbb{H}^2 , es gibt also $M_2 > 0$, sodass

$$\mathrm{Im} \Psi(z_0) = \mathrm{Im} \frac{az_0 + b}{cz_0 + d} = \mathrm{Im} \frac{(az_0 + b)(c\bar{z}_0 + d)}{|cz_0 + d|^2} = \mathrm{Im} \frac{adz_0 + bc\bar{z}_0}{|cz_0 + d|^2} = \frac{\mathrm{Im} z_0}{|cz_0 + d|^2} \geq M_2.$$

Damit folgt

$$|cz_0 + d| \leq \sqrt{\frac{\mathrm{Im} z_0}{M_2}}$$

sowie

$$|az_0 + b| \leq M_1 |cz_0 + d| \leq M_1 \sqrt{\frac{\mathrm{Im} z_0}{M_2}}.$$

Wegen

$$|az_0 + b| = |a(x_0 + iy_0) + b| = \sqrt{(ay_0)^2 + (ax_0 + b)^2} \geq |ay_0|$$

folgt damit

$$|a| \leq \frac{M_1}{|y_0|} \sqrt{\frac{\operatorname{Im} z_0}{M_2}}$$

und

$$|b| = |az_0 + b - az_0| \leq |az_0 + b| + |az_0| \leq M_1 \sqrt{\frac{\operatorname{Im} z_0}{M_2}} \left(1 + \frac{|z_0|}{|y_0|}\right).$$

Analog zeigt man die Beschränktheit von c und d und erhält die Behauptung. \square

Beweis von Satz 3.1.5. Sicherlich ist $\operatorname{SL}_2\mathbb{Z}$ diskret in $\operatorname{SL}_2\mathbb{R}$. Sei nun $z_0 \in \mathbb{H}^2$ und $\epsilon > 0$. Die Menge

$$\begin{aligned} S &= \left\{ T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \operatorname{SL}_2\mathbb{Z} \mid T \cdot z_0 = \frac{az_0 + b}{cz_0 + d} \in B_\epsilon(z_0) \right\} \\ &= \left\{ T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \operatorname{SL}_2\mathbb{R} \mid T \cdot z_0 = \frac{az_0 + b}{cz_0 + d} \in B_\epsilon(z_0) \right\} \cap \operatorname{SL}_2\mathbb{Z} \end{aligned}$$

ist als Durchschnitt einer kompakten mit einer diskreten Menge endlich. Durch verkleinern von ϵ erreicht man

$$B_\epsilon(z_0) \cap B_\epsilon(T \cdot z_0) = B_\epsilon(z_0) \cap T \cdot B_\epsilon(z_0) = \emptyset$$

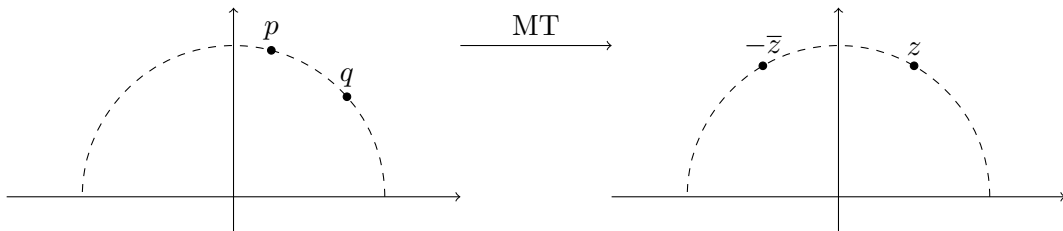
für alle $T \in \operatorname{SL}_2\mathbb{Z} \setminus \{\operatorname{id}\}$, was den Satz beweist. \square

Im Folgenden wollen wir nun den Dirichlet-Bereich für $\operatorname{SL}_2\mathbb{Z}$ konstruieren.

Bemerkung 3.1.8 Ist (X, d) ein metrischer Raum und $p, q \in X$, so ist die Mittelgerade gegeben durch

$$M_{pq} = \{x \in X \mid d(p, x) = d(q, x)\}.$$

Diese entspricht im Euklidischen der Mittelsenkrechten. Sind nun $p, q \in \mathbb{H}^2$ beliebige Punkte, so lassen sich wegen der 2-Punkt-Homogenität der hyperbolischen Ebene p, q in die spezielle Lage $p = z$ und $q = -\bar{z}$ überführen:



Durch die expliziten Abstandsformeln rechnet man nach, dass in der speziellen Lage die Mittelgerade gerade durch die imaginäre Achse gegeben ist.

Für die Konstruktion des Dirichlet-Bereichs benötigen wir einen Punkt, der nicht fixiert wird.

Lemma 3.1.9 Für $\lambda > 1$ gilt $T(\lambda i) \neq \lambda i$ für alle Möbiustransformationen $T \in \mathrm{SL}_2\mathbb{Z} \setminus \{\pm \mathrm{id}\}$.

Beweis. Sei $T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2\mathbb{Z}$, das heißt es gilt $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ sowie $ad - bc = 1$. Fixiert T nun λi , so erhalten wir

$$\lambda i = T(\lambda i) = \frac{\lambda ai + b}{\lambda ci + d} = \frac{(a\lambda i + b)(d - c\lambda i)}{c^2\lambda^2 + d^2} = \frac{bd + ac\lambda^2}{c^2\lambda^2 + d^2} + \frac{\lambda i}{c^2\lambda^2 + d^2}.$$

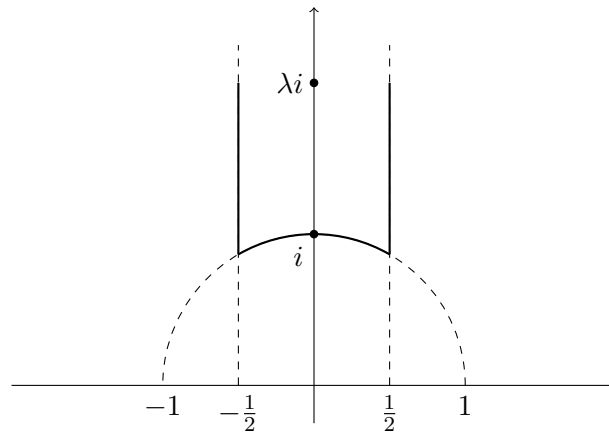
Koeffizientenvergleich liefert zum einen $c^2\lambda^2 + d^2 = 1$, woraus wegen $\lambda > 1$ bereits $c = 0$ und damit $d = \pm 1$ folgt. Weiter ist $bd + ac\lambda^2 = \pm b = 0$, also auch $b = 0$. Die Normiertheit impliziert schließlich $a = d$, also $T = \pm I_2$, womit die zu T assoziierte Möbiustransformation also bereits die Identität ist. \square

Wir können nun also $p = \lambda i$ als Zentrum für den Dirichlet-Bereich wählen.

Satz 3.1.10 Das geodätische Dreieck

$$\Delta = \left\{ z \in \mathbb{H}^2 \mid |z| \geq 1, |\operatorname{Re} z| \leq \frac{1}{2} \right\}$$

ist der Dirichletbereich $D_{\lambda i}(\mathrm{SL}_2\mathbb{Z})$ von $\mathrm{SL}_2\mathbb{Z}$ zentriert in λi .



Beweis. Die Isometrien

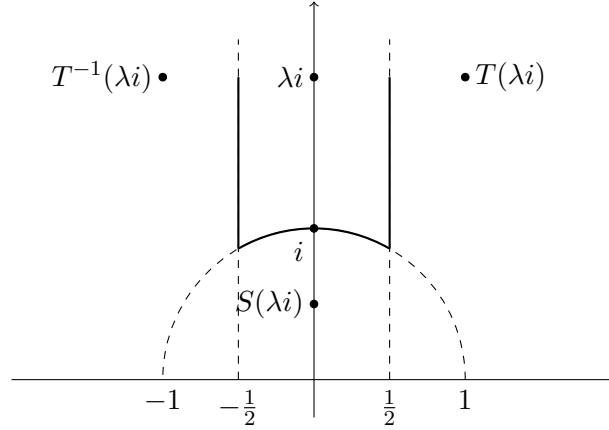
$$T(z) = z + 1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot z$$

$$S(z) = -\frac{1}{z} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot z$$

sind in $\mathrm{SL}_2\mathbb{Z}$ (und erzeugen die Gruppe sogar) und es gilt

$$S(\infty) = 0, \quad S(0) = \infty, \quad S(i) = i, \quad S(\lambda i) = \frac{1}{\lambda}i.$$

Die drei Mittelgeraden von $T(\lambda i)$, $T^{-1}(\lambda i)$, λi und $S(\lambda i)$ sind gerade die Seiten von Δ .



Dies zeigt bereits $D_{\lambda i}(\mathrm{SL}_2\mathbb{Z}) \subseteq \Delta$. Angenommen es gelte keine Gleichheit. Dann ist Δ kein Fundamentalbereich, also überlappen sich die Translate von Δ , das heißt es gibt $z \in \overset{\circ}{\Delta}$ und $R \in \mathrm{SL}_2\mathbb{Z}$ sodass $R(z) \in \overset{\circ}{\Delta}$. Sei $R = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} |cz + d|^2 &= c^2|z|^2 + 2|cd|\operatorname{Re} z + d^2 \\ &> c^2 + d^2 - |cd| \\ &= (|c| - |d|)^2 + |cd| \\ &\geq 1, \end{aligned}$$

wobei die letzte Gleichheit gilt, da der Term ganzzahlig, nichtnegativ und verschieden von Null ist, denn andernfalls wäre $|c| = |d|$ und $0 = |cd| = |c|^2$ und damit $c = d = 0$, ein Widerspruch zu $ad - bc = 1$. Damit erhalten wir die strikte Ungleichung

$$\operatorname{Im} R(z) = \frac{\operatorname{Im} z}{|cz + d|^2} < \operatorname{Im} z.$$

Dasselbe Argument mit z und h ersetzt durch $R(z)$ und R^{-1} liefert aber auch

$$\operatorname{Im} z = \operatorname{Im} R^{-1}(R(z)) < \operatorname{Im} R(z),$$

ein Widerspruch. Somit folgt $\Delta = D_{\lambda i}(\mathrm{SL}_2\mathbb{Z})$. □

Bemerkung 3.1.11 Analog wie im Beweis von Satz 3.1.5 zeigt man: Eine diskrete Untergruppe

von $\mathrm{SL}_2\mathbb{R}$ oder $\mathrm{PSL}_2\mathbb{R}$ operiert diskret auf \mathbb{H}^2 und liefert einen Dirichletbereich für eine Parkettierung von \mathbb{H}^2 . Solche Gruppen heißen Fuchssche Gruppen.

3.2 Dreiecksgruppen und zugehörige Parkettierungen

Sie betrachten zunächst die Spiegelung an Geodätischen in den uns drei bekannten Modellen der Geometrie. In der euklidischen Ebene \mathbb{E}^2 ist die Spiegelung an der euklidischen Geodätischen $g_0 : x = 0$ (der y -Achse) gegeben durch

$$\sigma_{g_0} : \mathbb{E}^2 \longrightarrow \mathbb{E}^2, \quad (x, y) \mapsto (-x, y).$$

Ist g nun beliebig, so wähle eine euklidische Isometrie $\phi \in \mathrm{Isom}(\mathbb{E}^2)$ mit $\phi(g_0) = g$ und setze $\sigma_g := \phi \circ \sigma_{g_0} \circ \phi^{-1}$. Dann ist σ_g die Spiegelung an der Geraden g . Man sieht leicht ein, dass diese Definition unabhängig von der Wahl von ϕ ist.

Auf der Sphäre \mathbb{S}^2 verfahren wir analog. Die sphärischen Geodätischen sind gerade die Großkreise, also speziellen Großkreis wählen wir g_0 in der x - z -Ebene. Dann ist durch

$$\sigma_{g_0} : \mathbb{S}^2 \longrightarrow \mathbb{S}^2, \quad (x, y, z) \mapsto (x, -y, z)$$

die Spiegelung an g_0 gegeben. Für einen beliebigen Großkreis g wähle eine sphärische Isometrie ϕ mit $\phi(g_0) = g$ und setze $\sigma_g := \phi \circ \sigma_{g_0} \circ \phi^{-1}$. In der hyperbolischen Halbebene funktioniert das genau so: Als spezielle hyperbolische Geodätische wählen wir die imaginäre Achse $i\mathbb{R}$. Die Formel

$$\sinh^2 \left(\frac{1}{2} d_h(z, w) \right) = \frac{|z - w|^2}{4 \operatorname{Im} z \operatorname{Im} w}$$

zeigt, dass die Abbildung

$$\sigma_{g_0} : \mathbb{H}^2 \longrightarrow \mathbb{H}^2, \quad z \mapsto -\bar{z}$$

eine hyperbolische Isometrie ist, die g_0 punktweise festhält und $\sigma_{g_0}^2 = \operatorname{id}_{\mathbb{H}^2}$ erfüllt, also eine Spiegelung an g_0 ist. Ist g nun eine beliebige hyperbolische Geodätische, so wähle eine hyperbolische Isometrie ϕ mit $\phi(g_0) = g$ und setze $\sigma_g := \phi \circ \sigma_{g_0} \circ \phi^{-1}$.

Proposition 3.2.1 *Seien g_1, g_2 zwei sich in einem Punkt p schneidene Geodätische in \mathbb{E}^2 (bzw. in \mathbb{S}^2 oder \mathbb{H}^2) sowie σ_1, σ_2 die Spiegelungen an g_1, g_2 . Dann ist $\sigma_1 \circ \sigma_2$ eine Drehung um p um den Winkel $2\angle(g_1, g_2)$.*

Beweis. Wir zeigen die Behauptung für den euklidischen Fall; der sphärische und hyperbolische verbleiben als Übung. Es sei ohne Einschränkung $p = 0$ und g_1, g_2 seien euklidische Geodätische

gegeben durch

$$g_1 = \{(x, \tan \theta) \mid x \in \mathbb{R}\}, \quad g_2 = \{(x, \tan \psi) \mid x \in \mathbb{R}\},$$

mit $\mu, \lambda \in [0, \frac{\pi}{2})$ und ohne Einschränkung gelte $\psi > \theta$. Es ist dann $\angle_p(g_1, g_2) = \psi - \theta$. Wir wollen die Spiegelungen an g_1 und g_2 nun wie oben beschreiben. Wir suchen also Isometrien A und B , welche g_0 auf g_1 und g_2 abbilden. Diese sind aber gerade gegeben durch Drehungen um die Winkel $\theta - \frac{\pi}{2}$ bzw. $\psi - \frac{\pi}{2}$, also durch die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} \cos(\theta - \frac{\pi}{2}) & -\sin(\theta - \frac{\pi}{2}) \\ \sin(\theta - \frac{\pi}{2}) & \cos(\theta - \frac{\pi}{2}) \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \cos(\psi - \frac{\pi}{2}) & -\sin(\psi - \frac{\pi}{2}) \\ \sin(\psi - \frac{\pi}{2}) & \cos(\psi - \frac{\pi}{2}) \end{pmatrix}.$$

Mit

$$\sigma_{g_0} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

folgt

$$\begin{aligned} \sigma_{g_1} = A \circ \sigma_{g_0} \circ A^{-1} &= \begin{pmatrix} \cos(\theta - \frac{\pi}{2}) & -\sin(\theta - \frac{\pi}{2}) \\ \sin(\theta - \frac{\pi}{2}) & \cos(\theta - \frac{\pi}{2}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\theta - \frac{\pi}{2}) & -\sin(\theta - \frac{\pi}{2}) \\ \sin(\theta - \frac{\pi}{2}) & \cos(\theta - \frac{\pi}{2}) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\cos^2(\theta - \frac{\pi}{2}) + \sin^2(\theta - \frac{\pi}{2}) & -2\sin(\theta - \frac{\pi}{2})\cos(\theta - \frac{\pi}{2}) \\ -2\sin(\theta - \frac{\pi}{2})\cos(\theta - \frac{\pi}{2}) & -\sin^2(\theta - \frac{\pi}{2}) + \cos^2(\theta - \frac{\pi}{2}) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\cos(2\theta - \pi) & -\sin(2\theta - \pi) \\ -\sin(2\theta - \pi) & \cos(2\theta - \pi) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

und genau so

$$\sigma_{g_2} = \begin{pmatrix} -\cos(2\psi - \pi) & -\sin(2\psi - \pi) \\ -\sin(2\psi - \pi) & \cos(2\psi - \pi) \end{pmatrix}.$$

Damit ist die Hintereinanderausführung der beiden Spiegelungen gerade

$$\begin{aligned} \sigma_1 \circ \sigma_2 &= \begin{pmatrix} -\cos(2\theta - \pi) & -\sin(2\theta - \pi) \\ -\sin(2\theta - \pi) & \cos(2\theta - \pi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\cos(2\psi - \pi) & -\sin(2\psi - \pi) \\ -\sin(2\psi - \pi) & \cos(2\psi - \pi) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(2(\psi - \theta)) & \sin(2(\psi - \theta)) \\ -\sin(2(\psi - \theta)) & \cos(2(\psi - \theta)) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

was also der Drehung um den doppelten Schnittwinkel entspricht. \square

Sei nun $\Delta = ABC$ ein euklidisches (bzw. sphärisches oder hyperbolisches) Dreieck mit Winkeln α, β, γ und Schenkeln a, b, c . Wir spiegeln nun das Dreieck an den Seiten von Δ . Als eine notwendige Bedingung dafür, dass sich dadurch eine Parkettierung des zugrundeliegenden Raumes

ergibt, müssen sich die Innenwinkel α, β und γ jeweils zu 2π vervielfachen, d.h. $l\alpha = 2\pi$ für ein $l \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$ und ebenso für β und γ . Weiter fordert man, dass sich die von 2 Spiegelungen erzeugten Drehungen ebenfalls zu 2π vervielfachen, also $2k\alpha = 2\pi$ für $k \geq 2$ und analog für β und γ . Dies führt zu folgender Definition:

Definition 3.2.2 Sei $\Delta = ABC$ ein euklidisches (bzw. sphärisches oder hyperbolisches Dreieck) mit Schenkeln a, b, c und Winkeln $\alpha = \frac{\pi}{l}, \beta = \frac{\pi}{m}, \gamma = \frac{\pi}{n}$ für $l, m, n \geq 2$. Dann heißt die von den Spiegelungen $\sigma_a, \sigma_b, \sigma_c$ erzeugte Gruppe *Dreiecksgruppe* und wird notiert als $\Delta(l, m, n) := \langle \sigma_a, \sigma_b, \sigma_c \rangle \subseteq \text{Isom}(X)$, wobei $X = \mathbb{E}^2$ (bzw. $X = \mathbb{S}^2$ oder $X = \mathbb{H}^2$). Es gelten folgende Relationen in $\Delta(l, m, n)$:

$$\sigma_a^2 = \sigma_b^2 = \sigma_c^2 = \text{id}_X, \quad (\sigma_c \circ \sigma_b)^l = \text{id}_X, \quad (\sigma_c \circ \sigma_a)^m = \text{id}_X, \quad (\sigma_a \circ \sigma_b)^n = \text{id}_X$$

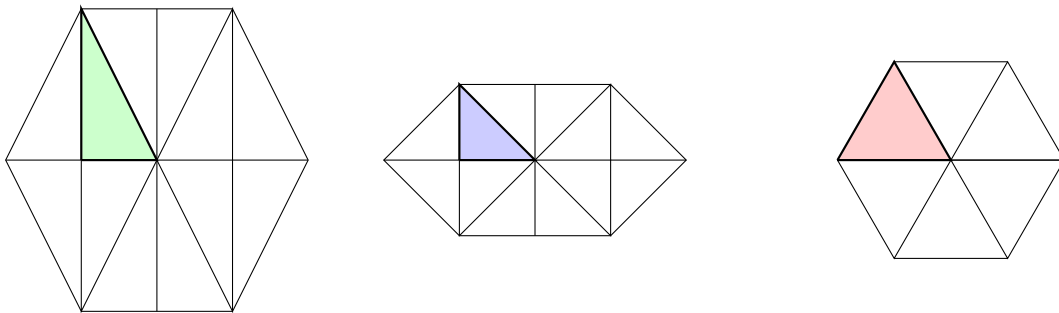
Im Folgende wollen wir die Möglichkeiten für l, m, n untersuchen. Dies müssen wir für jede Geometrie separat tun.

Satz 3.2.3 (Satz von Gauß-Bonnet für euklidische Dreiecke) Ist $\Delta \subseteq \mathbb{E}^2$ ein euklidisches Dreieck mit Innenwinkeln α, β, γ , so ist $\alpha + \beta + \gamma = \pi$.

Eine euklidische Dreiecksgruppe erfüllt also

$$\frac{1}{l} + \frac{1}{m} + \frac{1}{n} = 1$$

mit $l, m, n \geq 2$. Es ergeben sich durch sukzessives Steigern der Konstanten die 3 Lösungen $\Delta_1 = \Delta(2, 3, 6)$, $\Delta_2 = \Delta(2, 4, 4)$ sowie $\Delta_3 = \Delta(3, 3, 3)$. Diese liefern folgende Parkettierungen:



Für den sphärischen Fall betrachte zunächst folgende Proposition:

Proposition 3.2.4 (Satz von Gauß-Bonnet für sphärische Dreiecke) Ist $\Delta \subseteq \mathbb{S}^2$ ein sphärisches Dreieck mit Innenwinkeln α, β, γ , so ist $\alpha + \beta + \gamma > \pi$.

Beweis. Für zwei Großkreise auf der Sphäre, die sich im Winkel $\alpha \leq \pi$ schneiden bezeichne $M(\alpha)$ die eingeschlossene Fläche. Für diese gilt $M(\alpha) = M(\mathbb{S}_R^2) \cdot \frac{\alpha}{2\pi}$. Weiter ist

$$\mathbb{S}_R^2 = 2(M(\alpha) + M(\beta) + M(\gamma)) - 2\Delta,$$

also

$$4\pi R^2 = A(\mathbb{S}_R^2) = 4R^2(\alpha + \beta + \gamma) - 2A(\Delta),$$

und folglich

$$0 < A(\Delta) = 2R^2(\alpha + \beta + \gamma - \pi),$$

woraus $\alpha + \beta + \gamma > \pi$ folgt. □

Für die Sphäre erhalten wir also als Bedingung für eine Dreiecksgruppe

$$\frac{1}{l} + \frac{1}{m} + \frac{1}{n} > 1$$

mit $l, m, n \geq 2$. Durch sukzessives Steigern der Konstanten erhalten wir die Lösungen $\Delta_{1n} = \Delta(2, 2, n)$, $\Delta_2 = \Delta(2, 3, 3)$, $\Delta_3 = \Delta(2, 3, 4)$ und $\Delta_4 = \Delta(2, 3, 5)$ für $n \geq 2$ beliebig.

Für \mathbb{H}^2 wissen wir bereits, dass gilt $\alpha + \beta + \gamma < \pi$, die Bedingung für Dreiecksgruppen ergibt sich hier also zu

$$\frac{1}{l} + \frac{1}{m} + \frac{1}{n} < 1$$

für $l, m, n \geq 2$. Hierfür gibt es unendlich viele Lösungen. Beachte: $l = m = n = \infty$ ist erlaubt.

Bemerkung 3.2.5 *Wir haben nun für die euklidische, sphärische und hyperbolische Geometrie jeweils eine Version des Satzes von Gauß-Bonnet gesehen. Doch was haben diese mit dem Satz aus der Topologie zu tun? Für eine zweidimensionale, kompakte, orientierbare Mannigfaltigkeit M mit Rand ∂M , Gaußkrümmung κ und geodätische Randkrümmung k_g auf ∂M gilt:*

$$2\pi\chi(M) = \int_M \kappa \, dA + \int_{\partial M} k_g \, ds.$$

Betrachte $M = \Delta = \Delta(\alpha, \beta, \gamma) \subseteq X$ mit $X \in \{\mathbb{E}^2, \mathbb{S}^2, \mathbb{H}^2\}$. Aus der Differentialgeometrie wissen wir, dass diese drei Räume von konstanter Krümmung 0, 1 bzw. -1 sind. Weiter ist die Eulercharakteristik eines Dreiecks sicherlich 1 und die geodätische Krümmung des Randes verschwindet überall außer in den Ecken. Damit ergibt sich das Integral zu

$$2\pi = \int_{\Delta} \kappa \, dA + \int_{\partial\Delta} k_g \, ds = \mu(\Delta)\kappa + k_g(A) + k_g(B) + k_g(C) = \mu(\Delta)\kappa + (\pi - \alpha) + (\pi - \beta) + (\pi - \gamma).$$

Wir erhalten damit

- (i) Im Euklidischen $2\pi = \pi - \alpha + \pi - \beta + \pi - \gamma$, also $\pi = \alpha + \beta + \gamma$,
 - (ii) Im Sphärischen $2\pi = \mu(A) + \pi - \alpha + \pi - \beta + \pi - \gamma$, also $\mu(A) = \alpha + \beta + \gamma - \pi$ und
 - (iii) Im Hyperbolischen $2\pi = -\mu(A) + \pi - \alpha + \pi - \beta + \pi - \gamma$, also $\mu(A) = \pi - \alpha - \beta - \gamma$,
- also gerade die drei vorgestellten Versionen.

Bemerkung 3.2.6 Man kann zeigen: Hyperbolische Dreiecksgruppen operieren diskret auf \mathbb{H}^2 und induzieren also hyperbolische Parkettierungen (Siehe z.B. [Caratheodory, Funktionentheorie II, S: 159 ff]).

