随机过程基本概念

- 随机过程
  - 定义
    - ① 参数集 $T \subset (-\infty, +\infty)$
      - $\forall t \in T$，有对应随机变量 $X(t)$
      - 对所有 $t \in T$，产生一族随机变量 $\{X(t) = X(e, t), t \in T\}$ ⇒ 随机过程记为……
    - ② 随机试验E 样本空间 $S = \{e\}$，非空集合 $T \subset (-\infty, +\infty)$
      - 固定 e_0 对应函数 $X(e_0, t) = x(t)$，$t \in T$，称为随机过程的样本函数 / 一个实现 / 一条轨道
      - 所有 $e \in S$ 对应一族 $\{X(e, t), t \in T, e \in S\}$
      - 任意 $t_1 \in T$，$X(t_1) = X(e, t_1)$ 为一随机变量，称为随机过程在 $t = t_1$ 时的状态，简称状态
    - ③ 定义在 $S \times T = \{(e, t) \mid e \in S, t \in T\}$ 上的二元函数 $X(e, t)$ — $\{X(e, t) \mid e \in S, t \in T\}$
      - 对 $\forall$ 固定 t，$X(\cdot, t)$ 为可测函数
  - 状态空间：对固定 t，$X(e, t)$ 所有可能取值构成的实数空间
- 分类
  - 参数集T：离散、连续
  - 状态空间S：离散、连续
  - 概率结构
- 随机过程的有限维概率分布
  - n个状态的联合分布
    - 记 $F(x_1, \cdots, x_n; t_1, \cdots, t_n) = P\{X(t_1) \le x_1, \cdots, X(t_n) \le x_n\}$
    - 概率密度：$F(x_1, \cdots, x_n; t_1, \cdots, t_n) = \int_{-\infty}^{x_1} \cdots \int_{-\infty}^{x_n} f(x_1, \cdots, x_n; t_1, \cdots, t_n)\, dx_1 \cdots dx_n$
    - 对 $\forall n \in N_+$，随机过程任意n个状态相互独立，则称此过程为独立过程
  - 两个随机过程的有限维联合分布及独立性
    - 随机过程 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 的 $m+n$ 维联合分布函数
      - $X(t)$ 的任意m个状态 $X(t_1), \cdots, X(t_m)$，$Y(t)$ 的任意n个状态 $Y(t_1'), \cdots, Y(t_n')$，组成的 $m+n$ 维随机向量的分布函数
      - $F_{XY}(x_1, \cdots, x_m, y_1, \cdots, y_n; t_1, \cdots, t_m, t_1', \cdots, t_n')$
    - 独立性
      - $F_{XY}(\cdots) = F_X(\cdots) \cdot F_Y(y_1, \cdots, y_n; t_1', \cdots, t_n')$
      - → 两个随机过程相互独立。
  - 数字特征
    - 均值函数 / 均值 — $\mu_X(t) = E[X(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x; t)\, dx$
    - 均方值函数 / 均方值 — $\psi_X^2(t) = E[X^2(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x; t)\, dx$
    - 方差函数 / 方差 — $\sigma_X^2(t) = D[X(t)] = E[X(t) - EX(t)]^2$
    - 标准差函数 — $\sigma_X(t)$
    - 自相关函数 / 相关函数 — $R_X(t_1, t_2) = E[X(t_1) \cdot X(t_2)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x_1 x_2 f(x_1, x_2; t_1, t_2)\, dx_1 dx_2$
    - 自协方差函数 / 协方差函数 — $C_X(t_1, t_2) = \mathrm{cov}[X(t_1), X(t_2)] = E\{[X(t_1) - EX(t_1)] \cdot [X(t_2) - EX(t_2)]\}$
      - $= E\{[X(t_1) - \mu_X(t_1)] \cdot [X(t_2) - \mu_X(t_2)]\}$
    - 关系
      - $\psi_X^2(t) = R_X(t, t)$
      - $C_X(t_1, t_2) = R_X(t_1, t_2) - \mu_X(t_1) \cdot \mu_X(t_2)$
      - $\sigma_X^2(t) = R_X(t, t) - \mu_X^2(t) = \psi_X^2(t) - \mu_X^2(t)$
    - 互相关函数
      - 互协方差函数
      - 二阶原点混合矩
      - 二阶中心混合矩