五 随机变量的数字特征

数学期望

- 离散
  - $\sum_{k=1}^{+\infty} x_k p_k$ 绝对收敛 → $E(X)=EX=\sum_{k=1}^{n} x_k p_k$
  - $Y=g(X)$：$\sum_{k=1}^{+\infty} g(x_k) p_k$ 绝对收敛 → $EY=Eg(X)=\sum_{k=1}^{+\infty} g(x_k) p_k$
- 连续
  - $\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)dx$ 绝对收敛 → $E(X)=EX=\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)dx$
  - $Y=g(X)$：$\int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f(x)dx$ 绝对收敛 → $EY=Eg(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f(x)dx$
  - ~~$Z=g(x,y)$~~
- $Z=g(X,Y)$
  - 离散：$\sum_{i=1}^{+\infty}\sum_{j=1}^{+\infty} g(x_i,y_j)p_{ij}$ 绝对收敛 → $E(Z)=\sum_{i=1}^{+\infty}\sum_{j=1}^{+\infty} g(x_i,y_j)p_{ij}$
  - 连续：…绝对收敛 → $E(Z)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)g(x,y)dxdy$
- 性质
  - C为常数 → $E(C)=C$
    - → $E(CX)=CEX$
  - X, Y为任意随机变量
    - → $E(X+Y)=EX+EY$
  - X, Y互相独立
    - → $E(XY)=EX\cdot EY$

方差

- 定义
  - $E(X-EX)^2$ 存在 → $DX=D(X)=E(X-EX)^2$
  - 标准差/均方差
- $DX=EX^2-(EX)^2$
- 性质
  - C为常数 → $D(C)=0$
    - → $D(CX)=C^2DX$
  - X, Y互相独立 →
    - $D(X-Y)=DX+DY$
    - $D(X+Y)=DX+DY$
    - $D(XY)=EX^2EY^2-(EX)^2(EY)^2$
    - $D(aX+c)=a^2DX$

常用随机变量的期望与方差

- $X\sim(0,1)$ → $EX=p$，$DX=p(1-p)$
- $X\sim B(n,p)$ → $EX=np$，$DX=np(1-p)$
- $X\sim\Pi(\lambda)$ → $EX=\lambda$，$DX=\lambda$
  - $(P\{X=k\}=\frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!})$
- 均匀分布$[a,b]$ → $EX=\frac{a+b}{2}$，$DX=\frac{(b-a)^2}{12}$
- 指数分布 → $EX=\frac{1}{\lambda}$，$DX=\frac{1}{\lambda^2}$
  - $(f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases})$
- 正态分布
  - $EX=\mu$
  - $DX=\sigma^2$
  - 性质
    - $X_i\sim N(\mu_i,\sigma_i^2)$，$X_i$互相独立
      - → $Z=k_1X_1+k_2X_2+b$
      - $Z\sim N(k_1\mu_1+k_2\mu_2+b,\ k_1^2\sigma_1^2+k_2^2\sigma_2^2)$
    - $(X_1,X_2)\sim N(\mu_1,\sigma_1^2;\mu_2,\sigma_2^2;\rho)$
      - $X_i\sim N(\mu_i,\sigma_i^2)$，$EX_i=\mu_i$，$DX_i=\sigma_i^2$
      - X_1,X_2互相独立 ⟺ $\rho=0$
      - $Z=k_1X_1+k_2X_2+b$ 服从正态分布
    - X_i互相独立 → $g(X_1,X_2,\cdots,X_n)$与$h(X_{n+1},\cdots,X_m)$互相独立

协方差与相关系数

- 协方差
  - $Cov(X,Y)=E[(X-EX)\cdot(Y-EY)]$
  - $Cov(X,Y)=E(XY)-EX\cdot EY$
  - 性质
    - $Cov(X,Y)=Cov(Y,X)$
    - $Cov(aX,bY)=abCov(X,Y)$
    - $Cov(X_1+X_2,Y)=Cov(X_1,Y)+Cov(X_2,Y)$
    - $D(X+Y)=DX+DY+2Cov(X,Y)$
    - $D(X-Y)=DX+DY-2Cov(X,Y)$
    - X, Y互相独立 ⇒ $Cov(X,Y)=0$
- 相关系数
  - $\rho=\frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{DX}\cdot\sqrt{DY}}$
  - $|\rho|\le 1$
  - $|\rho|=1 \Leftrightarrow P\{Y=aX+b\}=1$
  - X, Y互相独立 → $\rho=0$
  - $\rho=0$ → X, Y不相关