二 随机变量及其分布

- 随机变量（随机试验结果的量化）
  - 定义
  - 简记 — r.v. X
  - 表示
    - 大写英文字母
    - 希腊字母
- 分布函数（概率分布函数）
  - 定义 — $F(x)=P\{X\le x\}$ $(-\infty<x<+\infty)$
  - 表示 — $X\sim F(x)$
  - 基本性质
    - 取值范围
    - 单调不减
    - $F(+\infty)=1$，$F(-\infty)=0$
    - 右连续
    - 满足以上性质即可说明 $F(x)$ 为某随机变量的分布函数
    - $\forall a,b\in R$，$a<b$ $\Rightarrow P\{a<X\le b\}=F(b)-F(a)$
- 离散型随机变量及其概率分布
  - 概率分布（分布律/分布列）
    - X 取各个可能值的概率 — $p_k=P\{X=x_k\}$
    - 表示
      - 公式法
      - 列表法
      - 矩阵法
  - 定理（分布律 ⇔ 分布函数）
    - $F(x)=\sum_{x_k\le x}p_k$
    - $\forall I\Rightarrow P\{X\in I\}=\sum_{x_k\in I}p_k$
  - 常用分布律（离散型）
    - 两点分布（(0-1)分布）— 伯努利实验
    - 泊松分布 — $P\{X=k\}=e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$
    - 超几何分布 — $P\{X=k\}=\frac{C_M^k C_N^{n-k}}{C_{M+N}^n}$
    - 二项分布
      - $P\{X=k\}=C_n^k p^k q^{n-k}$
      - 定义
      - 表示 — $X\sim B(n,p)$
      - 近似计算 — n 大 p 小时 $(n\ge 10, p_n\le 0.1)$：$C_n^k p_n^k q_n^{n-k}\approx\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$
  - 小概率事件及实际推断原理
- 连续型随机变量及其概率密度
  - 定义 $\left[\begin{array}{l}F(x)\text{ — 分布函数}\\ f(x)\text{ — 概率密度}\end{array}\right]$ — $F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)dt$
  - 定理
    - $F(x)$ 连续
    - $P\{X=x\}=F(x)-F(x^-)=0$
    - $P\{a<X\le b\}=F(b)-F(a)$
    - $f(x)$ 在 x_0 处连续 ⇒ $F(x)$ 在 x_0 处可导且 $F'(x_0)=f(x_0)$
  - 常用连续型随机变量分布
    - 均匀分布
      - $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{b-a}, & a\le x\le b\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$
      - 表示 — $\xi\sim U[a,b]$
    - 指数分布 — $f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$
    - 韦布尔分布
    - Γ分布
  - 正态分布
    - 泊松积分 — $\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}dx=\sqrt{\pi}$
    - 概率密度 — $f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]$ $(\mu\in(-\infty,+\infty),\sigma>0)$ → ξ 服从参数为 μ,σ 的正态分布，记为 $\xi\sim N(\mu,\sigma^2)$
    - 性质
      - 对称 — $x=\mu$
      - 渐近线 — x 轴
      - 拐点 — $x=\mu+\sigma$ / $x=\mu-\sigma$
    - 标准正态分布
      - 概率密度函数 $\varphi(x)$、分布函数 $\Phi(x)$
      - 性质
        - $\Phi(0)=\frac{1}{2}$
        - $\Phi(x)+\Phi(-x)=1$
      - 正态分布与标准正态分布 — $F(x)=\Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$
      - α 分位点
        - $Z_\alpha=\Phi^{-1}(\alpha)$ $(\Phi(Z_\alpha)=\alpha)$
        - 性质
          - $Z_\alpha=-Z_{1-\alpha}$
          - $P\{X>Z_{1-\alpha}\}=\alpha$
          - $P\{|X|>Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\}=\alpha$