第六章 大数定理和中心极限定理

- 马尔可夫不等式 — $E|X|^k$ 存在 — $\forall \varepsilon>0, P\{|X|\ge\varepsilon\}\le\frac{E|X|^k}{\varepsilon^k}$
- 切比雪夫不等式 — EX, DX 存在 — $P\{|X-EX|\ge\varepsilon\}\le\frac{DX}{\varepsilon^2}$
  - $DX=0$ — $P\{X=EX\}=1$
- 大数定律
  - 切比雪夫大数定律 — $\{X_n\}$ 互相独立，$D\{X_i\}\le C$ → $Y_n=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$，$\lim_{n\to\infty}DY_n=0$，$\forall\varepsilon>0, \lim_{n\to\infty}P\{|Y_n-EY_n|<\varepsilon\}=1$
  - 随机变量序列 $\{X_n\}$
  - 收敛于 — $\forall\varepsilon>0$
    - $\lim_{n\to\infty}P\{|X_n-X|<\varepsilon\}=1$ → $X_n\xrightarrow{P}X\ (n\to+\infty)$
    - $\lim_{n\to+\infty}P\{|X_n-a|<\varepsilon\}=1$ → $X_n\xrightarrow{P}a\ (n\to+\infty)$
  - 辛钦大数定律 — $\{X_n\}$ 独立同分布，$EX_i=\mu, DX_i=\sigma^2$ → $\forall\varepsilon>0, \lim_{n\to+\infty}P\{|\bar{X}-\mu|<\varepsilon\}=1$
  - 伯努利大数定律 — $\lim_{n\to+\infty}P\{|\frac{\mu_n}{n}-p|<\varepsilon\}=1$
  - 服从大数定律 — $Y_n=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$ — $Y_n-EY_n\xrightarrow{P}0\ (n\to+\infty)$
    - $X_n\xrightarrow{P}X$，$Y_n\xrightarrow{P}Y$ → $X_n+Y_n\xrightarrow{P}X+Y$
  - 辛钦大数定律 — $\{X_n\}$ 独立，$EX_i=\mu$ → $\forall\varepsilon>0, \lim_{n\to+\infty}P\{|\bar{X}-\mu|<\varepsilon\}=1$
    - $\{X_n\}$ 独立同分布，$EX_i=\mu, DX_i=\sigma^2$ →
      - $\bar{X}\xrightarrow{P}\mu\ (n\to+\infty)$
      - $A_2\xrightarrow{P}\sigma^2+\mu^2\ (n\to+\infty)$ — $A_2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2$
      - $\bar{X}^2\xrightarrow{P}\mu^2\ (n\to+\infty)$
      - $S_n^2\xrightarrow{P}\sigma^2\ (n\to+\infty)$ — $S_n=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$
- 中心极限定理
  - 同分布的… — $\{X_n\}$ 独立同分布，$EX_i=\mu, DX_i=\sigma^2\ne0$ → $Y_n=\sum_{i=1}^{n}X_i$，$EY_n=n\mu, DY_n=n\sigma^2$
  - 棣莫弗-拉普拉斯定理
    - $\lim_{n\to\infty}P\{a<\frac{\mu_n-np}{\sqrt{np(1-p)}}\le b\}=\Phi(b)-\Phi(a)$