

cm

Algèbre linéaire I

Arthur Herbette
Prof. Jérôme Scherer

Jeudi 29 mai 2025

Table des matières

1	Equation linéaires en algèbre	5
2	Calcul matriciel	7
3	Déterminant	9
4	Espace vectoriel	17
5	Valeurs propres et vecteurs propres	39
6	Les corps	53
7	Orthogonalité	63

Liste des cours

Cours 1 : Equation linéaire — Mardi 10 septembre 2024	5
Cours 2 : Vecteur — Jeudi 12 septembre 2024	6
Cours 10 : Déterminant et opération élémentaire — Jeudi 10 octobre 2024	9
Cours 11 : Inverse de Matrice et déterminant — Mardi 15 octobre 2024	13
Cours 12 : Générateur — Jeudi 17 octobre 2024	17
Cours 13 : Base, noyau, image — Mardi 29 octobre 2024	22
Cours 14 : Noyau, sous-espace, image — Jeudi 31 octobre 2024	25
Cours 15 : Théorème du rang — Mardi 5 novembre 2024	29
Cours 16 : Matrice d'application linéaire et changement de base — Jeudi 7 novembre 2024	33
Cours 18 : Changement de base — Mardi 12 novembre 2024	36
Cours 19 : Valeur propre — Mercredi 13 novembre 2024	41
Cours 19 : Polynôme caractéristique — Mardi 19 novembre 2024	46
Cours 20 : Diagonalisation — Jeudi 21 novembre 2024	48
Cours 21 : Corps et diagonalisation — Mardi 26 novembre 2024	55
Cours 22 : Orthogonalité — Jeudi 28 novembre 2024	60
Cours 23 : Famille Orthogonales — Lundi 23 décembre 2024	66
Cours 24 : moindres carrés, équation normale et les corps — Jeudi 5 décembre 2024	71
Cours 25 : corps \mathbb{F}_4 — Mardi 10 décembre 2024	75
Cours 26 : Dernier cours peut être ? — Jeudi 12 décembre 2024	82

Cours 28 : Trucs à savoir pour l'examen — Mardi 2 janvier 2024	87
Cours 27 : Résumé du court — Lundi 1er janvier 2024	88

Chapitre 1

Equation linéaires en algèbre

Mardi 10 septembre 2024 — Cours 1 : Equation linéaire

Equation linéaires

Notation

- Les lettres k, m, n, \dots représentent des nombres entiers
- Les lettres a, b, c, \dots ou a_1, a_2, \dots, a_n seront utilisées pour des nombres (réels), des **paramètres**
- Les lettres x, y, z ou x_1, x_2, \dots, x_n seront utilisées pour les **inconnues**

On note \mathbb{R} pour les nombres réels, qu'on représente par une droite.

- $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(a, b) | a, b, \in \mathbb{R}\}$ est le plan (cartésien)
- $\mathbb{R}^n = \{(a_1, \dots, a_n) | a_i \in \mathbb{R}^n\}$
- En général $X \times Y = \{(x, y) | x \in X, y \in Y\}$

Matrice échelonnée et réduite

Définition 1 Une matrice est échelonnée et **réduite** si

- les lignes non nulles se trouvent au-dessus des lignes nulles ;
- le premier coefficient non nul d'une ligne (le coefficient principal) se trouve à droite du coefficient principal des lignes précédentes
- les coefficients situés en-dessous d'un coefficient principal des lignes précédentes
- les coefficients situés en-dessous d'un coefficient principal sont nuls Elle est dite **échelonnée-réduite** si de plus
- les coefficients principaux sont tous égaux à 1
- dans la colonnes d'un coefficient principal tout les autres coefficients sont nul

Pivots et compatibilité

Définition 2 Les emplacements des coefficients principaux sont des **pivots** (ou échelons). Les colonnes de ces coefficients sont les colonnes pivots.

Définition 3 Un système d'équation linéaire est **compatible** s'il admet au moins une solution. Sinon il est dit incompatible

S'il y a un pivot dans la dernière colonne (celle des termes inhomogènes), on a alors une équation $0 = \bar{b}_{k+1}$ et \bar{b}_{k+1} est non nul. Il n'y a donc aucune solution

Jeudi 12 septembre 2024 — Cours 2 : Vecteur

Espaces vectoriels

Définition 4 Un *espace vectoriel* est un ensemble V non vide dont les éléments sont appelés *vecteurs*. Il est muni de deux opérations

- **addition** $+$: $V \times V \rightarrow V$ qui associe deux vecteurs (u, v) leur somme $u + v$
- **action** $\mathbb{R} \times V \rightarrow V$ qui associe à un nombre α et un vecteur u leur produit αu

<i>Espaces</i>	1. commutativité de $+$: $u + v = v + u$
<i>vectoriels :</i>	2. associativité de $+$: $(u + v) + w = u + (v + w)$
<i>axiomes</i>	3. vecteur nul : il existe un élément 0 de V tel que $u + 0 = u$
	4. opposé : il existe un vecteur $-u$ de V tel que $u + (-u) = 0$
	5. distributivité 1 : $\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$
	6. distributivité 2 : $(\alpha + \beta)u = \alpha u + \beta u$
	7. "compatibilité" : $(\alpha\beta)u = \alpha(\beta u)$
	8. unité : $1 \cdot u = u$

Donc un espace vectoriel peut être un peu n'importe quoi tant que ces règles sont respectés, cela pourrait être des fonctions, des polynômes, des suites etc...

Chapitre 2

Calcul matriciel

Chapitre 3

Déterminant

Jeudi 10 octobre 2024 — Cours 10 : Déterminant et opération élémentaire Application

des opérations élémentaires sur le déterminant

Opération sur le déterminant

- Type I : Interchanger des lignes entre elle ne change pas le déterminant
- Type II : changer le signe de la matrice change le signe du déterminant
- Type III : En multipliant une ligne par un scalaire $\alpha \in \mathbb{R}$, le déterminant est aussi multiplié par ce scalaire.

La preuve est par récurrence, le but est d'initialiser pour des matrice $M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ et de le prouver pour des matrice de taille $n + 1 \times n + 1$.

On suppose donc le résultat vrai pour les matrices de taille $\leq n$ et on passe au cas $M_{n+1 \times n+1}(\mathbb{R})$. Ici $n \geq 2$. Comme une opération élémentaire fait intervenir au plus deux lignes, il existe une ligne L_i qui ne change pas. On développe alors $\det(E^*A)$ selon L_i et on obtien la même formule que $\det A$, où les $*$ où E est la matrice d'une opération élémentaire sous-déterminant, $\det A_{ij}$ ont été remplacés par $\det E'A_{ij}$ où E' est bien une matrice d'opération élémentaire équivalente à E .

On écrit parfois $\det A = |A|$.

Exemple

Le déterminant de :

$$\begin{vmatrix} 5 & 4 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & -2 \\ -5 & -7 & -6 & 9 \\ 1 & -2 & -2 & -4 \end{vmatrix}$$

Le but est d'avoir que deux 0 sauf à une endroit sur la ligne 2 :

On peut par exemple faire $C_1 - C_3$ et $C_4 + C_3$, on a :

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 4 & 5 \\ 0 & 3 & 2 & 0 \\ 1 & -7 & -6 & 3 \\ 3 & -2 & -2 & 2 \end{vmatrix} \rightarrow 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & -7 & -3 & 3 \\ 3 & -2 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

On sort le facteur 2 de C_3 et donc il faut multiplier le det avec (Type III), On fait maintenant $C_2 3C_3$:

$$2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -3 & 3 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

En utilisant les cofacteurs on a que :

$$\det A = 2[-0 \cdot \det A_{21} + 0 \cdot \det A_{22} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}] = -2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

On fait le même procédé ($L_2 - L_1$ et $L_3 - 3L_1$) :

$$-2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} \rightarrow -2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 0 & 4 & -2 \\ 0 & 7 & -13 \end{vmatrix}$$

Ce qui nous donne à la fin :

$$= -2 \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 4 & -13 \\ 7 & -13 \end{vmatrix} = -2 \cdot 1[-52 + 14] = 76$$

Propriétés du déterminant

Soit A une matrice de taille $n \times n$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors, $\det(\lambda A) = \lambda^n \cdot \det A$. $\lambda \cdot A$ est obtenu de A en effectuant n opérations élémentaires de type III (sur chacune des lignes).

Si une ligne de A est combinaison linéaire des autres lignes, alors $\det A = 0$.

Théorème 1 Une matrice carrée est inversible si et seulement si $\det A \neq 0$.

Une matrice carrée est inversible $n \times n$ iff elle a n pivots iff il existe des opérations élémentaires qui transforment A en une matrice échelonnée avec des pivots, non nuls, sur la diagonale.

Le déterminant de cette matrice est le produit des termes de la diagonale, et il est non nul, donc $\det A \neq 0$.

Le déterminant peut être changé de signe ou être multiplié par $\alpha \neq 0$, mais il reste $\neq 0$.

Théorème 2 $\det(A^t) = \det A$

Le développement du déterminant de A selon la première ligne est identique au développement du déterminant de sa transposée selon la première colonne. Soit A et B deux matrices $n \times n$. Alors :

$$\det(AB) = \det A \cdot \det B$$

La preuve se fait en deux parties selon les deux cas où la matrice est inversible ou non.

- Supposons que A soit inversible. Alors nous savons que A peut s'écrire comme produit des matrices élémentaires. La preuve se fait par induction sur le nombre de matrices élémentaires.
 - Pour initialiser l'induction on doit traiter le cas où A est une matrice élémentaire. Il y a donc trois sous-cas.
1. $A = E_{ij}(\lambda)$ est de type I. Comme elle est triangulaire et que sa diagonale est constituée de 1, on a à $\det(E_{ij}(\lambda)) = 1$. Il faut encore calculer $\det(E_{ij}(\lambda)B)$.
On peut le faire car comme la matrice est triangulaire supérieur, son déterminant ne veut seulement le produit des éléments qui sont trouvés dans sa diagonales (que des 1 dans notre cas) et donc :

$$\det(E_{ij}(\lambda) \cdot B) = \det E_{ij}(\lambda) \cdot \det B = 1 \cdot \det B$$

2. $A = E_{ij}$, $\det E_{ij} = -1$ car c'est I_n avec L_i et L_j échangées.
3. $A = E_i(\lambda)$, $\det(E_i(\lambda)) = \lambda$ (diagonale). $\det(E_i(\lambda) \cdot B) = \lambda \cdot \det B = \det E_j(\lambda) \cdot \det B$.

Hypothèse de récurrence :

$$\det(AB) = \det A \cdot \det B$$

Pour toutes les matrices A qui sont produits d'au plus n matrices élémentaires.

Pas de récurrence. Considérons une matrice $A = E_{n+1} \cdot E_n \dots$, qui est le produit de $n + 1$ matrices élémentaires. Nous devons montrer que :

$$\det(E_{n+1} \cdot E_n \dots E_1 \cdot B) = \det(E_{n+1} \cdot E_n \dots E_1) \cdot B$$

On sait que $\det(E_n \dots E_1) = C$ donc $\det(E_{n+1} \cdot E_n \dots E_1 \cdot B) = \det(E_{n+1}) \cdot C$.
On fait la suite jusqu'à trouver :

$$\det(E_{n+1} \cdot E_n \dots E_1) \cdot B$$

2^e cas : A non inversible, Alors par le théorème précédent, $\det A = 0$. Donc $\det(A) \cdot \det(B) = 0$.

On montre que $A \cdot B$ n'est pas inversible si bien que $\det(A \cdot B) = 0$. Si AB est inversible il existe C tel que $(AB)C = I_n$ et $A(BC) = I_n$ mais on sait que A n'est pas inversible, **Contradiction**.

corollaire 1 Si A est inversibles, alors

$$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$$

Même si en général $AB \neq BA$ on a toujours $\det(AB) = (\det BA)$ car les deux déterminants donnent $\det A \cdot \det B = \det B \cdot \det A$.

Attention :

$$\det(A + B) \neq \det A + \det B$$

Le déterminant n'est pas **linéaire** comme application, $\det : M_n \times n \rightarrow \mathbb{R}$.

Linéarité du déterminant comme fonction d'une colonne Le déterminant est linéaire comme fonction d'une colonne, pour cela nous devons vérifier :

1. $T(\vec{0}) = 0$ car c'est le déterminant d'une matrice ayant une colonne nulle.
2. $T(\lambda\vec{x}) = \lambda T(\vec{x})$ car il s'agit d'une opération de type III sur la j^{eme} colonne.
3. $T(\vec{x} + \vec{y}) = T(\vec{x}) + T(\vec{y})$ se prouve en développant le déterminant selon la j^{eme} colonne.

$A \in M_{3 \times 3}(\mathbb{R})$, il faut alors tout développé mais faut juste le faire avec la commutativité et distributivité dans les nombres réels.

Règles de Charmer

Théorème 3 Si $\det A = ad - bc \neq 0$, le système

$$\begin{aligned} ax + by &= e \\ cx + dy &= f \end{aligned}$$

A une solution unique (qu'on trouve grâce à la matrice inverse)

la solution du système est $A^{-1}\vec{b}$:

$$\frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$$

Alors :

$$x = \frac{ed - bf}{ad - bc} = \frac{\det \begin{pmatrix} e & b \\ f & d \end{pmatrix}}{\det A}$$

Et :

$$y = \frac{af - ec}{ad - bc} = \frac{\det \begin{pmatrix} a & e \\ c & f \end{pmatrix}}{\det A}$$

Soit A une matrice carrée **inversible**. Pour tout vecteur \vec{b} on pose :

$$A_i \vec{b} = (\vec{a}_1 \dots \vec{a}_{i-1} \vec{b} \vec{a}_{i+1} \dots \vec{a}_n)$$

La seule solution du système $A\vec{x} = \vec{b}$ est donnée par la formule :

$$x_i = \frac{\det A_i(\vec{b})}{\det A}$$

Preuve. Soit $B_i = (I_n)_i(\vec{x}) = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_{i-1}, \dots, \vec{e}_{i+1}, \dots, \vec{e}_n)$.

La ligne L_i est constituée de zéros, sauf le coefficient x_i en position (i, i) , si bien que $\det(B_i) = x_i$.
 A étant inversible, la solution unique est :

$$\vec{a} = A^{-1}\vec{b}$$

Soit $B_i = (I_n)_i(\vec{x}) = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_{i-1}, \dots, \vec{e}_{i+1}, \dots, \vec{e}_n)$.

$$\det B_i = x_i$$

On calcule :

$$\begin{aligned} A \cdot B_i &= A \cdot (\vec{e}_1, \dots, \vec{x}, \dots, \vec{e}_n) \\ &= (A \cdot \vec{e}_1, \dots, A \cdot \vec{x}, \dots, A\vec{e}_n) \\ &= (\vec{a}_1, \dots, \vec{b}, \dots, \vec{a}_n) \end{aligned}$$

Ainsi

$$\det(A_i(\vec{b})) = \det(A \cdot B_i) = \det A \cdot \det B_i$$

En divisant par $\det A \neq 0$, on obtient notre formule :

$$x_i = \frac{\det A_i(\vec{b})}{\det A}$$

Mardi 15 octobre 2024 — Cours 11 : Inverse de Matrice et déterminant

La matrice des cofacteurs Soit A une matrice $n \times n$ et A_{ij} la matrice $(n-1) \times (n-1)$ obtenue en supprimant la $i^{\text{ème}}$ ligne et la $j^{\text{ème}}$ colonne de A .

Exemple 1 Si on prend la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ et qu'on prend A_{23} , alors on enlève la ligne 2 et la colonne 3 ce qui donne que

$$A_{23} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$$

Définition 5 Le cofacteur $C_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij}$.

Définition 6 La comatrice ou matrice des cofacteurs de A est la matrice

$$\text{Com}A = (C_{ij})_{n \times n}$$

Cofacteur et inverse Soit A une matrice $n \times n$ inversible. On pose :

$$A_j(\vec{e}_i) = (\vec{a}_1 \dots \vec{a}_{j-1} \vec{e}_i \vec{a}_{j+1} \dots \vec{a}_n)$$

La seule solution du système $A\vec{x} = \vec{e}_i$ est donnée par la formule :

Définition 7 (Formules de Cramer)

$$x_j = \frac{\det A_j(\vec{e}_i)}{\det A}$$

De plus, en développant le déterminant selon la j^{eme} colonne on calcule :

$$\det A_j(\vec{e}_i) = (-1)^{i+j} \det A_{ij}$$

Formule pour l'inverse

Définition 8

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} (\text{Com}A)^t$$

En français, la matrice inverse est donnée par la transposée des cofacteurs multiplié par l'inverse du déterminant.

Exemple 2 Prenons une matrice 2×2 :

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

On a donc :

- $C_{11} = (-1)^{1+1} \det(d) = d$
- $C_{21} = (-1)^{2+1} \det(b) = -b$
- $C_{12} = (-1)^{1+2} \det(c) = -c$
- $C_{22} = (-1)^{2+2} \det(a) = a$

Par conséquent A^{-1} est la seule solution du système $A\vec{x} = \vec{e}_i$ qui est donné par la formule :

$$x_j = \frac{\det A_j(\vec{e}_i)}{\det A} = \frac{(-1)^{i+j} \det A_{ij}}{\det A} = \frac{C_{ij}}{\det A}$$

On calcule la i^{eme} colonne de la matrice $A \cdot \frac{1}{\det A} (\text{Com}A)^T$:

$$A \cdot \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} C_{i1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ C_{in} \end{pmatrix} = A\vec{x} = \vec{e}_i$$

Exemple 3 Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

Alors : $\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ on peut prendre le cofacteur de $A_{11} : 1 \cdot$

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \text{ si on développe selon le 1 en bas à gauche : } (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -4$$

Prenons maintenant :

$$|A_{32}| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \dots = -1$$

Conclusion :

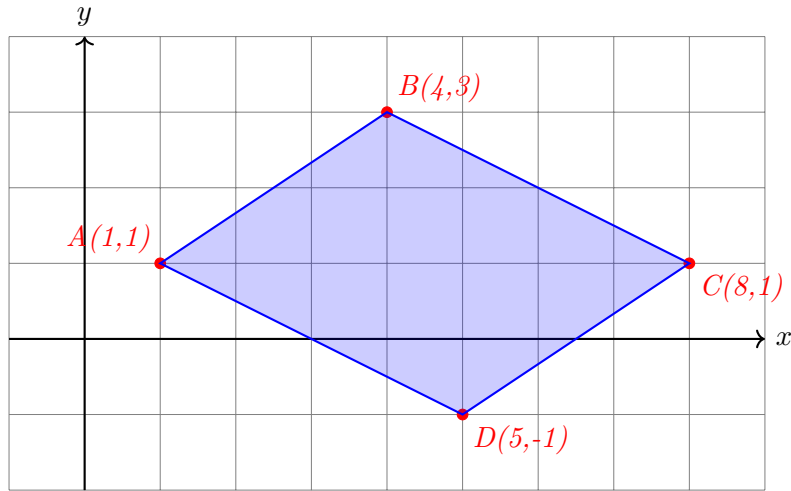
$$\begin{aligned} b_{23} &= \frac{1}{\det A} \cdot (Com A)^T = \frac{C_{32}}{\det A} \\ &= \frac{(-1)^{2+3} \cdot \det A_{23}}{\det A} \\ b_{23} &= -\frac{1}{4} \end{aligned}$$

Aire d'un parallélogramme Soit $\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$ deux vecteur de \mathbb{R}^2 et $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ L'aire du parallélogramme construit sur $\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$ vaut $|\det A|$.

Preuve. Quitte échanger les vecteur \vec{u} et \vec{v} (resp. les colonnes de A), on peut supposer que $a_{11} \neq 0$ sans changer l'aire du parallélogramme (resp. sans changer la valeur absolue de $\det A$). En effectuant une opération de type I sur les colonnes de A on obtient 0 sur a_{12} sans changer $\det A$, ni l'aire du parallélogramme.

En effectuant une deuxième opération de type I sur les colonne de A , on se retrouve à une matrice $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ le det vaut $\alpha \cdot \beta$, c'est l'aire du rectangle construit sur $\alpha \cdot \hat{e}_1, \beta \cdot \hat{e}_2$

Exemple 4 Prenons les points $A(1, 2), B(4, 3), C(8, 1), D(5, -1)$



On a donc que $Aire(\beta) = |\det(\vec{AB}, \vec{AD})| = \left| \det \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \right| = 14$

Aire et application linéaire Une application linéaire $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ transforme les vecteurs \vec{e}_1 et \vec{e}_2 en deux vecteurs u et v . Ainsi T transforme le carré unité de sommets

Soit $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ une application linéaire représentée par la matrice A . Soit S une région du plan alors :

$$Aire(T(S)) = |\det A| \cdot Aire(S)$$

L'aire d'un parallélogramme ou le volume d'un parallélépipède ne dépendent que des vecteurs qui les supportent. L'un des sommets peut être l'origine ou non. L'aire et le volume sont **invariants par translation**.

Exemple 5 On cherche l'aire de l'ellipse d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$
L'application est :

$$T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} ax \\ by \end{pmatrix}$$

La matrice est donc :

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$$

Le cercle unité e d'équation $x^2 + y^2 = 1$ est transformé en ε par T . Si $(x, y) \in e$:

$$T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax \\ by \end{pmatrix} \in \varepsilon$$

car $\frac{(ax)^2}{a^2} + \frac{(by)^2}{b^2} = x^2 + y^2$

$$Aire(\varepsilon) = \det \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \cdot Aire(e) = \pi \cdot a \cdot b$$

Chapitre 4

Espace vectoriel

Jeudi 17 octobre 2024 — Cours 12 : Générateur

Soit W un sous espace vectoriel V .

- Le sous espace $W = Vect(v_1, \dots, v_k)$ est le sous espace engendré par les vecteurs v_1, \dots, v_k .
- Les vecteurs v_1, \dots, v_k sont les générateurs de W
- L'ensemble $\{v_1, \dots, v_k\}$ forme une **partie génératrice** de W .

Exemple 6 *Il existe en général plusieurs parties génératrices :*

$$W = Vect \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = Vect \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Partie libres Soit W un sous-espace vectoriel de V .

- Les vecteurs v_1, \dots, v_k de W sont linéairement indépendants si la seule combinaison linéaire $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k$ qui donne le vecteur nul est la combinaison linéaire triviale :

$$\alpha_1 = \dots = \alpha_k = 0$$

- On dit que l'ensemble $\{v_1, \dots, v_k\}$ est une **partie libre** de W .

Définition 9 Une famille *ordonnée* de vecteur $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_k)$ de W est une *base* de W si c'est une partie libre qui engendre W

Bases canoniques

Le cas de \mathbb{R}^n La base canonique est

$$\text{Can} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$$

C'est une base car nous avons vu que tout vecteur de \mathbb{R}^n s'écrit comme combinaison linéaire des \vec{e}_i .

Le cas de P_n La base canonique est

$$\text{Can} = (1, t, t^2, \dots, t^n)$$

Ici aussi tout vecteur de \mathbb{P}_n , i.e. tout polynôme de degré $\leq n$ s'écrit comme combinaison linéaire de ces monômes t^i , car un tel polynôme est de la forme $a_0 \cdot 1 + a_1 \cdot t + \dots + a_n \cdot t^n$.

Le cas de $M_{m \times n}(\mathbb{R})$ La base canonique est

$$\text{Can} = (e_{11}, \dots, e_{1n}, e_{21}, \dots, e_{m1}, \dots, e_{mn})$$

où e_{ij} est la matrice constituée de zéros, sauf le coefficient (i, j) qui vaut 1. Dans $M_{3 \times 2}(\mathbb{R})$, la base canonique est donnée dans cet ordre :

$$e_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, e_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, e_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \dots, e_{32} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exemple Soit W le plan dans \mathbb{R}^3 donné par l'équation $x + y + z = 0$. L'inconnue x est principale, les inconnues, y, z sont secondaires et seront nos paramètres.

$$x = -y - z$$

Les vecteurs $\vec{b}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{b}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ forment une base $\beta = (\vec{b}_1, \vec{b}_2)$ de W .

Il n'y a pas de base canonique dans W . Nous avons fait des choix de paramètres, Il y a pas une "norme" pour la base canonique ici.

Exemple 7 Si on considère x, y comme inconnues libres, z en principales, alors on trouve une autre base :

$$c = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$$

Théorème de la base extraite Soit $\{v_1, \dots, v_k\}$ une famille de vecteurs qui engendrent V .

Théorème 4 • Si l'un des vecteurs v_i est combinaison linéaire des autres, alors la famille obtenue en supprimant v_i engendre encore V .
 • Si $V \neq \{0\}$, il existe une sous-famille de $\{v_1, \dots, v_k\}$ qui forme une base de V

Preuve (A) pour $i = k$. On suppose que

$$v_k = \alpha_1 v_i + \dots + \alpha_{k-1} v_{k-1}$$

Puisque la famille $\{v_1, \dots, v_k\}$ engendre V , tout vecteur $v \in V$ est combinaison linéaire de v_i .

$$\begin{aligned} v &= \beta_1 v_1 + \dots + \beta_{k-1} v_{k-1} + \beta_k v_k \\ &= \beta_1 v_1 + \dots + \beta_{k-1} v_{k-1} + \beta_k (\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_{k-1} v_{k-1}) \\ &= (\beta_1 + \beta_k \alpha_1) v_1 + \dots + (\beta_{k-1} + \beta_k \alpha_{k-1}) v_{k-1} \end{aligned}$$

Nous avons montré que v est combinaison linéaire de v_1, \dots, v_{k-1} .

(B) Si la famille est libre on arrête tout, sinon il suffit de prendre notre point (A) et d'enlever un générateur v_i et en enlevant un denouveau et un autre et un autre... jusqu'à que la famille soit libre. Le processus s'arrête puisque le nombre de vecteur au départ est **fini**.

Combinéisons linéaires d'une base Soit V un espace vectoriel et $\mathcal{B} = (e_1 + \dots, e_n)$ une base.

Théorème 5 Tout vecteur x de V s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire $x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$, pour des nombres réels x_1, \dots, x_n .

Existence Une base est un **système de générateurs!**

Unicité Si $x_1 e_1 + \dots + x_n e_n = y_1 e_1 + \dots + y_n e_n$ alors,

$$(x_1 - y_1) e_1 + \dots + (x_n - y_n) e_n = 0$$

Une base est **libre**, ainsi $x_1 = y_1, \dots, x_n = y_n$

Coordonnées

Définition 10 Les composantes ou coordonnées d'un vecteur x dans la base \mathcal{B} sont les coefficients réels x_1, \dots, x_n tel que

$$x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$$

J'affirme que $B = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est une base de \mathbb{R}^3 . En effet, $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est

inversible. Le vecteur $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ de \mathbb{R}^3 s'exprime comme combinaison linéaire des \vec{b}_i et on cherche $(\vec{u})_{\mathcal{B}}$. On doit résoudre :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right)$$

La solution est : $(\vec{u})_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $(\vec{u})_{\mathcal{C}_{can}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

Comparaison avec \mathbb{R}^n

Définition 11 Une application linéaire bijective et appelée *isomorphisme*

Un isomorphisme permet d'identifier la source et le but de cette application linéaire $T : V \rightarrow W$. Les éléments de V et W se correspondent parfaitement, et les opérations de somme et d'action aussi.

Théorème 6 Soit V une espace vectoriel et \mathcal{B} une base de n vecteurs. L'application $T : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ définie par $T(x) = (x)_{\mathcal{B}}$ est un isomorphisme.

Démonstration 1 Nous devons prouver quatre points, les deux premiers pour montrer que T est linéaire, les deux autres pour établir l'injectivité, et enfin la surjectivité.

- $T(\lambda v) = \lambda T(v)$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et tout $v \in V$;
- $T(v + w) = T(v) + T(w)$ pour tous $v, w \in V$;
- $T(v) = \vec{0} \implies v = 0$ (critère d'injectivité) ;
- Pour tout $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$ il existe $v \in V$ tel que $T(v) = \vec{b}$

Soit donc $\lambda \in \mathbb{R}$ et $v, w \in V$ que nous écrivons de manière unique ! comme $v = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$ et $w = y_1 e_1 + \dots + y_n e_n$.

Prouve que le premier point :

$$\begin{aligned} T(\lambda v) &= T(\lambda(v_1 b_1 + \dots + v_n b_n)) \\ &= T(\lambda v_1 b_1 + \dots + \lambda v_n b_n) \\ &= T \begin{pmatrix} \lambda v_1 \\ \vdots \\ \lambda v_n \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \lambda T(v) \end{aligned}$$

Exemple 8 • $T : M_{x \times 2}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^4$ est un isomorphisme. Pour la base canonique $\mathcal{C}_{can} = (e_{11}, e_{12}, e_{21}, e_{22})$, on a :

$$T \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right)_{\mathcal{C}_{can}} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$$

- $T : \mathbb{P}_3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ est un isomorphisme. Pour la base canonique $\text{Can} = (1, t, t^2, t^3)$ on a

$$T(a + bt + ct^2 + dt^3) = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$$

- Soit W le plan dans \mathbb{R}^3 donné par l'équation $x + y + z = 0$ et \mathcal{B} la base formée des vecteurs $\vec{b}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{b}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. On a l'application $T : W \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$w \rightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \text{ si } w = a \cdot \vec{b}_1 + b \cdot \vec{b}_2$$

Base et coordonnées

Définition 12 (pivots) La famille (p, q, r) est une base de \mathbb{P}_2 si et seulement si la matrice carrée A a trois pivots. Où A est la matrice d'application avec les vecteurs (p, q, r) fournis dans la base canonique.

Cardinalité d'une base Pour généraliser ce qu'on a dit avant :

- V est un espace vectoriel
- $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ une base V
- $\mathcal{C} = (c_1, \dots, c_m)$ une famille ordonnée de vecteurs de V .

Théorème 7 La famille ordonnée de \mathcal{C} est une base de V si et seulement si la matrice $A = ((c_1)_{\mathcal{B}}, \dots, (c_m)_{\mathcal{B}})$ a un pivot dans chaque ligne et chaque colonne.

En particulier A est une matrice carrée ($m = n$) et inversible

Théorème 8 Deux bases de V ont le même nombre d'éléments

corollaire 2 Si V admet une base de n vecteurs, alors une famille $\{v_1, \dots, v_k\}$ de vecteurs de V avec $k > n$ est liée.

Définition 13 Soit V un espace vectoriel et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base. La **dimension** de V est n . On note $\dim V = n$.

- $\dim \mathbb{R}^n = n$
- $\dim \mathbb{P}_n = n + 1$
- $M_{m \times n}(\mathbb{R}) = mn$

La dimension rappel — Mardi 29 octobre 2024 — Cours 13 : Base, noyau, image

Définition 14 Un espace vectoriel V est de dimension nulle si et seulement si $V = \{0\}$.

0 est un vecteur linéairement dépendant, il ne peut donc faire partie d'aucune base. La convention dite auparavant est : $Vect\{\emptyset\} = \{0\}$. Ainsi l'ensemble vide est une famille libre de générateur de $\{0\}$.

Théorème 9 (de la base incomplète) Soit V un espace vectoriel de dimension n et $\{e_1, \dots, e_k\}$ une famille libre de vecteurs de V . Il existe alors des vecteurs e_{k+1}, \dots, e_n tels que (e_1, \dots, e_n) forme une base de V .

Attention à ne pas confondre une base et des vecteurs c'est pour ça qu'ici on choisit des parenthèse pour une base et des accolades pour une famille de vecteurs.

preuve Si (e_1, \dots, e_k) forme déjà une base de V , on s'arrête là.

Sinon il existe un vecteur e_{k+1} qui n'est pas dans $Vect\{e_1, \dots, e_k\}$. J'affirme que $\{e_1, \dots, e_k, e_{k+1}\}$ est libre.

- En effet si $\alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_k e_k + \alpha_{k+1} e_{k+1} = 0$ alors $\alpha_{k+1} = 0$ car e_{k+1} n'est pas combinaison linéaire des autres e_j par construction.
- Ainsi $\alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_k e_k = 0$.
- Comme la famille de départ est libre, tous les α_i sont nuls
- On peut donc ajouter e_{k+1} à la famille $\{e_1, \dots, e_k\}$

On continue ce processus inductif jusqu'à compter n vecteurs

Exemple 9 Dans $M_{2 \times 3}(\mathbb{R})$, $\dim = 6$ on prend les quatre matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Si on écrit ces matrices dans la base canonique de $M_{2 \times 3}(\mathbb{R})$, Can et qu'on crée une matrice avec les lignes de ces vecteurs on a :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

On voit ici qu'il y a deux vecteurs ne sont pas des colonnes pivots (e_{13}, e_{23}), il ne sont donc pas combinaison linéaire de A' ni de A .

Et donc $(A, B, C, D, e_{13}, e_{23})$ est une base de $M_{2 \times 3}(\mathbb{R})$.

On a rajouter e_{13} et e_{23} car il ne sont pas combinaison linéaire.

Deux points de vue sur les bases Soit V un espace vectoriel de dimension n . Une **base** est une famille ordonnée de générateurs libre de V . Nous avons vu que toute base est composée du même nombre n de vecteurs.

Critères

- Une famille libre \mathcal{L} de n vecteurs forme une base de V
- une famille génératrice \mathcal{G} de n vecteurs forme une base de V .

Soit $\mathcal{F} = \{f_1, \dots, f_k\}$ une famille génératrice de V et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de V . Pour extraire une base de \mathcal{F} :

- trouver les composantes des f_j dans la base \mathcal{B}
- Ecrire la matrice F dont les **colonnes** sont les $(f_j)_{\mathcal{B}}$.
- Echelonner F . (sur les lignes)
- Ne garder que les n colonnes pivots de F .

Exemple 10 Extraire de la famille $\{1-t, -1+t^2, t^2-t, 1+t, t^2+1\}$ une base de \mathbb{P}^2 . On choisit la base canonique de \mathbb{P}^2 :

$$(1-t)_{can} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, (-1+t^2)_{can} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \dots \text{ et on écrit :}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

La prochaine étape après avoir échelonner et de ne garder que les n colonnes pivots de F , on voit donc choisir ici 3 vecteurs qui ont chacun un pivot sur une ligne différente, les colonnes 1, 2, 4. Ce qui donne :

$$\mathcal{B} = (1-t, 1+t^2, 1+t)$$

Attention!, on prend les colonnes qui sont les vecteurs et non directement les valeurs trouvées lorsqu'on échelonne. on prend les vecteurs qui se trouvaient sur les colonnes 1, 2, 4.

Comment compléter une base Soit $\mathcal{F} = \{f_1, \dots, f_k\}$ une famille libre de V dont on a une base (e_1, \dots, e_n) . Pour compléter \mathcal{F} en une base :

- Trouver les composantes des f_j dans la base \mathcal{B} .
- Ecrire la matrice F dont les **lignes** sont les $(f_j)_{\mathcal{B}}$
- Echelonner F . (comme d'habitude)
- Ajouter les vecteurs e_i pour les valeurs de i qui ne son pas des colonnes pivot.

Exemple 11 Compléter la famille $\{\vec{e}_2 - \vec{e}_1, \vec{e}_3 - \vec{e}_1, \vec{e}_4 - \vec{e}_1\}$ en un base de \mathbb{R}^4 .

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

On voit qu'il y a pas de pivot sur la dernière colonne.

Rappels application linéaires : Soit V et W deux espaces vectoriels.

Définition 15 (application linéaire) Une application $T : V \rightarrow W$ est *linéaire* si

1. $T(u + v) = Tu + Tv$ pour tous $u, v \in V$
2. $T(\alpha v) = \alpha Tv$ pour tous $v \in V$ et $\alpha \in \mathbb{R}$

Exemple 12 1. La dérivée $D : \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ des applications ∞ -dérivables est linéaire. Ici $D(f) = f'$.

En effet $(f + g)' = f' + g'$ et $(\alpha \cdot f)' = \alpha f'$

2. La dérivée $D : \mathbb{P}_n \rightarrow \mathbb{P}_{n-1}$ est linéaire. Ici $D(p) = p'$. En particulier $D(t^k) = kt^{k-1}$

On peut prendre cela comme définition et "étendre par linéarité", c'est à dire définir

$$D(a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \dots + a_1 t + a_0) \text{ comme}$$

$$n \cdot a_n t^{n-1} + (n-1) \cdot a_{n-1} t^{n-2} + \dots + a_1$$

On voit ici que l'application $D(1) = 0$ ce qui signifie plusieurs choses qui sont équivalentes. On voit en premier lieu que l'application n'est pas injective et aussi que le noyau n'est clairement pas nul et qu'il est même de dimension 1 qui est le vecteur des constantes.

Contre exemple :

L'application $C : \mathbb{P}_2 \rightarrow \mathbb{P}_4$ définie par

$$p \rightarrow p^2$$

n'est pas linéaire. En effet on voit par exemple que :

$$C(2t) = (2t)^2 = 4t^2 \neq 2t^2 = 2C(t)$$

Généralement, les applications linéaires n'aiment pas quand on les met au carrées.

Noyau Soit $T : V \rightarrow W$ une application linéaire.

Définition 16 Le *noyau* de T est le sous-ensemble $\text{Ker}T = \{v \in V | Tv = 0\}$.

Ce qui veut dire que le noyau est le sous-ensemble des vecteurs qui ont pour image le zéro. donc si on prend par exemple les dérivées, on voit que tout les constantes ont la même image qui est 0 donc le noyau de l'application linéaire des dérivées et le vecteur des constantes.

Exemple 13 Soit $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ la projection orthogonale sur l'axe $x = y$. On voit que c'est la droite x on a donc que :

$$T(\vec{e}_1) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, T(\vec{e}_2) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

La matrice de T est donnée par :

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Essayons de trouver le noyau :

$$A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

On a donc fini avec deux équation qui sont :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y &= 0 \\ \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y &= 0 \end{aligned}$$

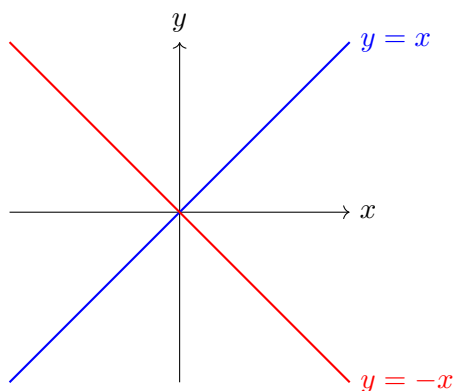
On peut déjà deviner ici que le noyau ne sera pas l'ensemble vide, on a deux équations identiques (donc une seule) avec deux variables, cela veut dire qu'il restera donc une variable libre :

$$\begin{aligned} y &= -x \\ y &= -x \end{aligned}$$

Ce qui donne :

$$\text{Ker}T = \text{Vect} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ce qui si on le voit graphiquement est assez intuitif : Prenons la droite $y = -x$ et $y = x$ on a :



On voit que sur chaque point de la droite rouge, si on les ramènes sur la droite bleu (en faisant la projection) il arrive au point $(0,0)$.

_____ Jeudi 31 octobre 2024 — **Cours 14 : Noyau, sous-espace, image** Le noyau est un sous-espace

Exemple 14 Soit $T : M_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^2$ défini par :

$$T \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ a - d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

On vérifie que T est linéaire. Le noyau de T est un sous-ensemble de $M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$. Lequel ? C'est le sous-espace :

$$\text{Ker}T = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

Théorème 10 Soit $T : V \rightarrow W$ une application linéaire. Alors $\text{Ker}T$ est un sous-espace de V .

Preuve

1. $0 \in \text{Ker}T : T(0) = 0$ car T est linéaire
2. stabilité de $+$: Si $v, v' \in \text{Ker}T$, on montre que $v + v' \in \text{Ker}T$, ce qui donne $0 + 0 = 0$ (les images des éléments du noyau sont tous égaux à 0).
3. Stabilité de l'action : comme c'est une application linéaire on peut surtout α de l'application, on a donc, $\alpha \cdot 0 = 0$.

Définition 17 Soit $T : V \rightarrow W$ une application linéaire. Alors T est injective si et seulement si $\text{ker}T = \{0\}$

Exemple 15 On considère $T : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$ donné par

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

On a donc que

$$\text{Ker}T = \text{Ker}A = \{ \vec{v} \in \mathbb{R}^4 \mid A \cdot \vec{v} = \vec{0} \}$$

est la solution générale S du système homogène donné par A . Si on échelonne la matrice on obtient :

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

On en vient à :

$$S = \text{Ker}A = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Les deux vecteurs ici forment une base de $\text{Ker}A$.

Juste pour expliquer comme on passe de la matrice à vect, on peut par exemple remettre en système d'équation classique du genre :

$$\begin{aligned} x - y + 0 + 0 &= 0 \\ 0 + 0 + z - w &= 0 \end{aligned}$$

On voit qu'il y aura deux variables libres, et donc :

$$\begin{aligned} x &= x \\ y &= x \\ z &= z \\ w &= z \end{aligned}$$

Voilà d'où vient les deux vecteurs, un en fonction de x et l'autre en fonction de z .

Définition 18 L'image d'une application linéaire $T : V \rightarrow W$ est le sous-ensemble $ImT = \{w \in W \mid \text{il existe } v \in V \text{ tel que } Tv = w\}$

Le concept d'image généralise la notion du sous-espace $ColA$ engendré par les colonnes d'une matrice A .

Théorème 11 Soit $T : V \rightarrow W$ une application linéaire. Alors ImT est un sous espace de W .

Preuve On voit d'abord que $0 = T(0)$ appartient à l'image. Il reste à montrer la stabilité de la somme et de l'action. Traitons le cas de la somme. Soient donc w, w' deux vecteurs de ImT . Nous devons montrer que $w + w'$ aussi appartient à ImT .

On sait que $w, w' \in ImT$, donc il existe $v, v' \in V$ tel que $T(v) = w$ et $T(v') = w'$.

On choisit $v_2 = v + v'$ et on calcule par linéarité de T :

$$T(v_2) = T(v + v') = T(v) + T(v') = w + w'$$

Donc, $w + w' \in ImT$ (on a le droit de faire tout ça parce que T est une application linéaire.

Pour ce qui est de l'action, on peut juste faire le même procédé et grâce au fait que T est une application linéaire, ça marchera aussi.

Soit $T : V \rightarrow W$ une application linéaire. Alors $KerT$ est un sous-espace de V , mais ImT est un sous-espace de W . (Attention à où vit ces ensembles)

Exemple 16 Soit $D : \mathbb{P}_3 \rightarrow \mathbb{P}_3$ la dérivation, $D(p) = p'$.

- $KerD = \{p \in \mathbb{P}_3 \mid p' = 0\} = \{a \in \mathbb{P}_3 \mid a \in \mathbb{R}\}$ (le polynôme constants

$$= Vect\{1\}$$

- $ImD = \{q \in \mathbb{P}_3 \mid \exists p \in \mathbb{P}_3 \text{ avec } D(p) = q\}$

$$= Vect\{1, t, t^2\} \subset \mathbb{P}_3$$

Pour expliquer un peu, on sait que tout les polynômes qui ont que des constantes vont sur 0 donc on prend le vecteur des constantes qui lui nous ramène de toutes les constantes à 0.

De l'autre côté, l'image reprends tout ce qui arrive de l'autre côté, on voit qu'il y a pas t^3 dans l'image, quand on dérive un polynôme, il devient de degrés 2. Donc la base de l'image va, "avec le noyau" et t^2

Méthode de calcul Soit $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ une application linéaire, représentée par une matrice $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$.

- Pour calculer le **noyau** de T on échelonne et réduit la matrice A selon les **lignes**.
- Pour calculer l'**image** de T on ne garde que les **colonnes-pivotss**. Si nécessaire on échelonne et réduit A selon les **colonnes**.

espace-colonne On appelle parfois **espace-colonne** le sous-espace $ColA$ engendré par les colonnes de A . Il s'agit donc de ImA

explication de pourquoi ça marche Soit $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ et B la matrice échelonnée associée (B est juste la matrice échelonnée).

SI une colonne n'a pas de pivot, le système $A\vec{x} = \vec{0}$ a une infinité de solutions (les mêmes que $B\vec{x} = \vec{0}$), on peut écrire

$$x_1\vec{a}_1 + \dots + x_n\vec{a}_n = \vec{0}$$

Les colonnes sans pivot sont combinaison linéaire des autres colonnes.

Les colonnes de A vérifient les mêmes relations de dépendance linéaire que celles de B

On peut donc enlever une telle colonne pour engendrer $ColA = ImA$. Les k colonnes-pivot restantes de A sont libres puisque la matrice $m \times k$ formée de ces k colonnes a k pivots.

Exemple 17 On donne une application linéaire donnée par A tel que :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On voit qu'il y a une colonne sans pivot, donc le noyau a qu'une seule variable libre et donc comme on l'avait fait auparavant, on fixe le dernier élément, et on voit aussi que chaque x_1, x_2, x_3 sont égaux à 1 ($1 - 1 = 0 \rightarrow 1 = 1$) on trouve que :

$$KerA = Vect\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Rappel critère d'injectivité (encore) Le critère d'injectivité d'une application linéaire permet de ramener la démonstration de l'injectivité au calcul du noyau. Le noyau mesure donc le **défaut d'injectivité**.

Théorème 12 Une application linéaire $T : V \rightarrow W$ est injective si et seulement si $KerT = \{0\}$

Espaces-lignes : $LgnA$ Soit A et B deux matrices de taille $m \times n$ On note $A \sim B$ quand elles sont équivalentes selon les lignes.

Théorème 13 Si $A \sim B$ alors les lignes de A et B engendrent le même sous-espace de \mathbb{R}^n .

Pourquoi ? Les opérations élémentaires produisent de nouvelles lignes qui sont combinaison linéaire des précédentes.

Théorème 14 Les lignes d'une forme échelonnée de A forment une base du sous-espace engendré par les lignes de A .

Pourquoi ? Aucune ligne non nulle de la forme échelonnée ne peut être combinaison linéaire des autres (à cause de son pivot)

Espaces-colonnes : $ColA$ Soit A une matrice de taille $m \times n$.

Théorème 15 Les colonnes pivots de A forment une base de $ColA = ImA$.

Pourquoi ? Si une colonne de A est combinaison linéaire d'autres colonnes, alors la même combinaison linéaire se retrouve pour les colonnes d'une matrice $B \sim A$.

Si B est une forme échelonnée de A , alors les colonnes-pivots sont libres et les autres colonnes sont combinaisons linéaire des colonnes pivots.

Il en va donc de même pour les colonnes de A .

Mardi 5 novembre 2024 — Cours 15 : Théorème du rang

remarque
importante

Soit A une matrice de taille $m \times n$.

Théorème 16 $\dim ColA = \dim LgnA$

- Le nombre de lignes linéairement indépendantes est égal au nombre de lignes contenant un pivot.
- Le nombre de colonnes linéairement indépendantes est égal au nombre de colonnes contenant un pivot.
- En résumé, $\dim ColA = \dim LgnA$ car les deux dimensions coïncident avec le nombre de pivots.

exemple

Le cas d'une matrice 2×2 . Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, alors $\dim LgnA = 0 = \dim ColA$.

Supposons que $A \neq 0$, alors $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Si les deux colonnes sont proportionnelles, $\dim ColA = 1$ On peut supposer que $\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a \\ \lambda c \end{pmatrix}$ pour une $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$A = \begin{pmatrix} a & \lambda a \\ c & \lambda c \end{pmatrix}$$

Premier cas : $a = 0$, aussi $\lambda a = 0$ et comme $A \neq 0$, $\dim \text{Lgn}A = 1$ ça la 2^e ligne est non nulle.

deuxième cas $a \neq 0$ $\begin{pmatrix} a & \lambda a \\ c & \lambda c \end{pmatrix}$ a deux lignes proportionnelles car $(c \ \lambda c) = \frac{c}{a}(a \ \lambda a)$. Ici aussi $\dim \text{Lgn}A = 1$.

Le Théorème du rang

A faire plus tard parce que je sais pas On se ramène au cas d'une application linéaire $R^n \rightarrow R^m$, représentée par $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$.

1. On choisit une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de V
2. On considère la composition suivante
- 3.

Théorème 17 *théorème du rang*

$$\text{rang}T + \dim =$$

- Grâce aux coordonnées on identifie V avec \mathbb{R}^n et W avec \mathbb{R}^m .
- Ainsi on identifie T avec une application linéaire $S : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^m$.
- Celle-ci est donnée par la multiplication matricielle

$$\vec{x} \rightarrow A\vec{x} = S(\vec{x})$$

- $\dim \ker A =$ nombre de colonnes sans pivot
- $\dim \text{Im}A = \text{rang}A =$ nombre de colonnes-pivot
- nombre de colonnes-pivot + colonnes sans pivot = n .

Idée de la preuve

Si $\dim V = n$, $\dim \ker T = k \leq n$ car $\ker T \subset V$. On choisit une base (e_1, \dots, e_k) de $\ker T$. Grâce au Théorème de la base complétée, il existe (e_{k+1}, \dots, e_n) tel que $(e_1, \dots, e_k, e_{k+1}, \dots, e_n)$ est une base de V .

Alors $\{T(e_1), \dots, T(e_k), T(e_{k+1}), \dots, T(e_n)\}$ engendrent $\text{Im}T$. Donc $\{T(e_{k+1}), \dots, T(e_n)\}$ engendrent $\text{Im}T$.

Mais $T|_{\text{Vect}\{e_{k+1}, \dots, e_n\}}$ est injective car $\cap U = \{0\}$. Donc $T(e_{k+1}), \dots, T(e_n)$ sont libres, donc forment une base. Conclusion

$$\text{Rang}T = n - k$$

Définition 19 Soit $T : V \rightarrow W$ une application linéaire entre espaces vectoriels de dimension finies.

Le **rang** de T est la dimension de l'image de T :

$$\text{rang}T = \dim \text{Im}T$$

Définition 20 Soit A une matrice $m \times n$, représentant une application linéaire.

Le **rang** de A est la dimension de l'image de A : $\text{rang}A = \dim \text{Im}A$.

Théorème 18 *théorème du rang*

$$\text{rang}T + \dim \ker T = \dim V$$

Exemple Considérons l'application linéaire $T : \mathbb{P}_2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par :

$$T(p) = \begin{pmatrix} p(0) \\ p(1) \end{pmatrix}$$

Pour tout polynôme p de degrés ≤ 2 .

Nous allons

- Calculer le noyau
- en déduire la dimension de l'image grâce au théorème du rang, et
- interpréter ce résultat pour conclure que deux zéros d'une fonction polynomiale de degrés ≤ 2 déterminent le polynôme en question à un facteur près.

$$\begin{aligned} \ker T &= \{p \in \mathbb{P}_2 \mid p(0) = 0 = p(1)\} \\ &= \{p \in \mathbb{P}_2 \mid p(t) = a \cdot t \cdot (t - 1), \text{ pour un } a \in \mathbb{R}\} \\ &= \text{Vect}\{(t - 1)\} \text{ de dimension } 1. \end{aligned}$$

Par le théorème du rang, $\text{rang}T + \dim \ker T = 3$ donc $\text{rang}T = 2 = \dim \mathbb{R}^2$.

L'interprétation suit : si $p(t)$ s'annule en 0 et en 1, alors $p(t) = a \cdot t \cdot (t - 1)$ pour $a \in \mathbb{R}$.

Critère d'inversibilité

Soit A une matrice carrée de taille $n \times n$. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :

1. La matrice A est inversible
2. les colonnes de A forment une base de \mathbb{R}^n .
3. $\text{Im}A = \mathbb{R}^n$ A est surjective
4. $\dim \text{Im}A = n$.
5. $\text{rang} A = n$
6. $\ker A = \{0\}$ A est injective
7. $\dim \ker A = 0$.

Exemple Pour quelles valeurs du paramètre réel a la matrice A suivante est-elle inversible ?

$$\begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & a-1 & 0 & 1-a \\ 0 & 0 & a-1 & 1-a \\ 0 & 1-a & 1-a & 1-a \end{pmatrix}$$

(les opérations sont $L_1 - L - 4$, $L - 2 - L'_1$, $L_3 L'_1$, $L_4 - a \cdot L'_1$)
Si $a - 1 = 0$ alors $a = 1$ donc :

$\text{rang } A = 1, \dim \ker A = 3$

Si $a \neq 1$, on peut diviser chaque ligne par $a - 1$, on obtient alors :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & a-1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1+a \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & a+3 \end{pmatrix}$$

Les opération ici pour passer à la deuxième matrice sont $(L_3 - L_2 - L_3) + +$

Une application linéaire Soit W le sous-espace vectoriel de $M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ des matrices triangulaires supérieures.

En fait $W = \text{Vect}\{e_{11}, e_{12}, e_{22}\}$ et $\mathcal{B} = (e_{11}, e_{12}, e_{22})$ est une base de W .

On considère $T : \mathbb{P}_2 \rightarrow W$ l'application linéaire définie par

$$T(p) = \begin{pmatrix} p(1) & p(-1) \\ 0 & p(2) \end{pmatrix}$$

En choisissant la base canonique $\mathcal{C}an = (1, t, t^2)$, on identifie \mathbb{P}_2 avec \mathbb{R}^3 et en choisissant la base ci-dessus de W on identifie W avec \mathbb{R}^3 également. Ce qui nous donne :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{e}_1 = (1)_{\mathcal{C}an} \text{ et } 1 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = W_1 \text{ et } (W_1)_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{e}_2 = (t)_{\mathcal{C}an} \text{ et } t \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = W_2 \text{ et } (W_2)_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \vec{e}_3 = (t^2)_{\mathcal{C}an} \text{ et } t^2 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = W_3 \text{ et } (W_3)_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

remarque

En gros on n'a juste "skip" a_{21} parce qu'il valait tout le temps 0. Mais On aurait pu dire que l'ensemble W est un sous-ensemble de \mathbb{R}^4 tel que $W \subset \mathbb{R}^4$.

Résumé

Le théorème du rang peut nous permettre de faire de grand raccourci lors de choix multiple.

- Le rang d'une matrice A de taille $n \times m$ ne peut pas dépasser n .

$$\text{Rang } A + \dim \ker A = n$$

- Pour rappel, si on prend une application $A : V \rightarrow W$ on a que $\ker A$ est dans V et que $\text{Im } A$ est dans W .

Jeudi 7 novembre 2024 — **Cours 16 : Matrice d'application linéaire et changement de base**

La matrice d'une application linéaire

- V est un espace vectoriel muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$,
- W est un espace vectoriel muni d'une base $\mathcal{C} = (f_1, \dots, f_m)$,
- $T : V \rightarrow W$ est une application linéaire.

Définition 21 La matrice A de T (pour ce choix de bases) est la matrice $(T)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$ de taille $m \times n$ dont les colonnes sont $(Te_1)_{\mathcal{C}}, \dots, (Te_n)_{\mathcal{C}}$.

Slogan

On place dans les **colonnes** de $(T)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$ les images des vecteurs de la base \mathcal{B} exprimées en coordonnées dans la base \mathcal{C} .

Proposition :

$$(T)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(v)_{\mathcal{B}} = (Tv)_{\mathcal{C}}$$

Preuve

Soit $v \in V$ et $(v)_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$. On calcule :

$$= A \cdot (v)_{\mathcal{B}} (T)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} \cdot (v)_{\mathcal{B}} = (Te_1)_{\mathcal{C}} \dots (Te_n)_{\mathcal{C}} (v)_{\mathcal{B}}$$

Par la définition de \cdot :

$$= x_1 \cdot (Te_1)_{\mathcal{C}} + \dots + x_n \cdot (Te_n)_{\mathcal{C}}$$

Linéaire dans la base :

$$= (x_1 \cdot (Te_1)_{\mathcal{C}} + \dots + x_n \cdot (Te_n)_{\mathcal{C}})_{\mathcal{C}}$$

Grâce à la linéarité de T :

$$= (T(x_1 e_1 + \dots + x_n e_n))_{\mathcal{C}}$$

On sait que $(x_1 e_1 + \dots + x_n e_n) = v$ et donc :

$$= (T(v))_{\mathcal{C}}$$

Remarque

Lorsque $V = \mathbb{R}^n$, $W = \mathbb{R}^m$ et que les bases choisies sont les bases canoniques, la matrice d'une application linéaire $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ est la matrice de T au sens du chapitre 1.9.

Exemple

Soit $r : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ la rotation de centre $(0; 0)$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

On connaît $(r)_{\text{Can}}^{\text{Can}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ Mais, si on choisit la base canonique pour l'espace vectoriel de départ \mathbb{R}^2 , et à l'arrivée

la nouvelle base \mathcal{C} donnée par :

$$\vec{f}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{f}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$r(\vec{e}_1) = \vec{f}_1 \text{ et } r(\vec{e}_2) = \vec{f}_2$$

$${}^{\mathcal{C}}_{\mathcal{C}an} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

On voit ici qu'on perd trop d'information lorsqu'on permet de choisir des base arbitraires au départ et à l'arrivée.

La seule information qui reste est le **rang** de l'application linéaire : deux matrice de même taille et de même rang représentent la même application linéaire.

Définition 22 *c'est pas une définition* Pour étudier des applications linéaire $T : V \text{ to } V$ nous choisirons une seule base de V , la même pour l'espace vectoriel de départ et d'arrivée.

Changement de base

- V est un espace vectoriel,
- $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base V ,
- $\mathcal{C} = (f_1, \dots, f_n)$

Définition 23 La matrice de **Changement de base** de \mathcal{B} vers \mathcal{C} est la matrice $(Id_{\mathcal{B}})_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$ de taille $n \times n$ donc les colonnes sont $(e_1)_{\mathcal{C}}, \dots, (e_n)_{\mathcal{C}}$

La matrice de changement de base est don la matrice de l'application linéaire identité, mais pour des choix différent en général de base au départ et à l'arrivée. Ici $Id_V(e_i) = e_i$.

La matrice de changement de base permet de calculer les coordonnées dans la **nouvelle base** \mathcal{C} si on connaît celles dans l'**ancienne base** \mathcal{B} .

Théorème 19

$${}^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}(T)(v)_{\mathcal{B}} = (Tv)_{\mathcal{C}}$$

exemple

On fait juste quelque exemple de changement de base :

$${}^{\mathcal{C}an}_{\mathcal{B}} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \quad \mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$$

$$P = (Id)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}an} = \left((b_1)_{\mathcal{C}an}, (b_2)_{\mathcal{C}an} \right) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Plus dur : $Q = (Id)_{\mathcal{C}an}^B = ((\vec{e}_1)_B(\vec{e}_2)_B)$
 Or $\vec{e}_1 = \frac{1}{2}\vec{b}_1 + \frac{1}{2}\vec{b}_2$ et $\vec{e}_2 = \frac{1}{2}\vec{b}_1 - \frac{1}{2}\vec{b}_2$ Donc

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Ici $Q = P^{-1}$, $(Id)_{\mathcal{C}an}^B = ((Id)_B^{can})^{-1}$ Car la mult. mat. correspond à la composition $P \cdot Q$ etc..

La composition

1. Soit U un espace vectoriel munis d'une base B
2. Soit V un espace vectoriel munis d'une base C , et
3. soit W un espace vectoriel munis d'une base D
4. Soit $S : U \rightarrow V$ une application linéaire, et
5. Soit $T : V \rightarrow W$ une application linéaire.

Proposition

Les matrices $(T \circ S)_D^B$ et $(T)_D^C \cdot (S)_C^B$ sont égales.

Preuve

A faire plus tard même si pas voila

Exemple

Sois h une homothétie de rapport 3 dans \mathbb{R}^3 et p la projection orthogonale sur le plan π d'équation

$$x + y + z = 0$$

$$T = p \circ h$$

Dans la base canonique $\mathcal{C}an$ la matrice $H = (h)_{\mathcal{C}an}^{can}$ est diagonale avec des 3 dans la diagonale. Pour trouver la matrice P de p , dans $\mathcal{C}an$ on calcule les projections des vecteurs de cette base.

Il existe $\vec{u} \perp \pi$ tel que $p(\vec{e}_1) + \vec{u} = \vec{e}_1$

$$\vec{u} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ Pour tout } \alpha \in \mathbb{R}$$

$$\text{Donc } p(\vec{e}_1) = \vec{e}_1 - \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \alpha \\ -\alpha \\ -\alpha \end{pmatrix} \in \pi$$

Donc ce vecteur vérifie $x + y + z = 0$:

$$(1 - \alpha) - \alpha - \alpha = 0, \quad \alpha = \frac{1}{3}$$

$$\text{Et } p(\vec{e}_1) = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \text{ de même } p(\vec{e}_2) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}, \quad p(\vec{e}_3) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Et donc la matrice est donnée par :

$$(P)_{\mathcal{C}an}^{can} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

La matrice $A = (F)_{can}^{can} = P \cdot H = \dots = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

Peut être juste pour expliquer ce qui se passe, On a trouver la matrice de p qui est la projection orthogonale sur le plan π ET ENSUITE, fais grandir le vecteur d'un facteur trois, (c'est un peu du hasard que ça fait tout propre)

Le rang de A est 2 car $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \ker A$. Et on voit que $\text{rang } A > 1$

car les lignes ne sont pas proportionnelles (et par le théorème du rang) Si on prend la base de π donnée par

$$\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, (\text{affaire}) \right)$$

Changement de base, rappel

- V est un espace vectoriel
- $B = (e_1, \dots, e_n)$ est une base de V
- $C = (f_1, \dots, f_n)$ est une base de V

Définition 24 La matrice de changement de base de B vers C est la matrice $(Id_V)_B^C$ de taille $n \times n$ dont les colonnes sont

Inverse de
changement
de base

$$\left((Id_V)_B^C \right)^{-1} = (Id_V)_C^B$$

Exemple

On considère les base $\mathcal{B} = (\vec{b}_1, \vec{b}_2)$ et $\mathcal{C} = (\vec{c}_1, \vec{c}_2)$ de \mathbb{R}^2 où

$$\vec{b}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 8 \end{pmatrix} \vec{b}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -7 \end{pmatrix} \vec{c}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \vec{c}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On écrit la matrice comme ce qu'on faisait pour trouver l'inverse d'une matrice : A trouver comme faire mais en gros :

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 8 & -7 \end{array} \right)$$

Mardi 12 novembre 2024 — Cours 18 : Changement de base

Rappels : changement de base

Soit V un espace vectoriel de dimension n :

1. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base. On peut alors écrire un vecteur $x \in V$ en **coordonnées** $(x)_{\mathcal{B}}$, où $x = e_1x_1 + \dots + e_nx_n$.
2. Soit $\mathcal{C} = (f_1, \dots, f_n)$ une autre base. On peut alors écrire un vecteur $x \in V$ en **coordonnées** $(x)_{\mathcal{C}}$

3. Pour passer de $(x)_{\mathcal{B}}$ à $(x)_{\mathcal{C}}$, on utilise la matrice de changement de base $P = (Id)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$ donc les colonnes sont $(e_i)_{\mathcal{C}}$.

Alors

4. La matrice de changement de base inverse $Q = (id)_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} = P^{-1}$

Exemple On travaille dans l'espace vectoriel W des matrices symétriques de taille 22 (tel que $A = A^t$). Ainsi :

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$$

On considère deux bases $\mathcal{B} = (B_1, B_2, B_3)$ et $\mathcal{C} = (C_1, C_2, C_3)$:

$$\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

$$\mathcal{C} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right)$$

$$C_1 = B_1 + B_3, C_2 = -B_1 + B_3, C_3 = B_2$$

Si on exprime donc les colonnes de \mathcal{C} en fonction de \mathcal{B} on a :

$$((C_1)_B (C_2)_B (C_3)_B) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = (Id)_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} = P$$

On a aussi l'info que $(Id)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = P^{-1}$ qui se calcule avec la méthode de Gauss :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

Double changement de base Soient \mathcal{B}, \mathcal{C} et \mathcal{D} trois bases de V .

$$(Id)_{\mathcal{C}}^{\mathcal{D}} (Id)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = (Id)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{D}}$$

Preuve La composition $(V, \mathcal{B}) \rightarrow (V, \mathcal{C}) \rightarrow (V, \mathcal{D})$ est l'identité. La multiplication matricielle correspond à la composition.

Diagonalisation Soit $T : V \rightarrow V$ une application linéaire

Objectif Trouver une base \mathcal{B} de V telle que $(T)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ soit facilement compréhensible

exemple Soit $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ l'application linéaire donnée par :

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y + z \\ -3x - 2y + 3z \\ -2x - 2y + 3z \end{pmatrix}$$

Alors :

$$A = (f)_{\mathcal{C}_{can}}^{\mathcal{C}_{can}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -3 & -2 & 3 \\ -2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

On voit ici que certains vecteurs sont **fixés** par f alors que d'autres sont **renversés** (je dis on voit dans le sens on peut le voir, pas en mode c'est obvious).

Autrement dit :

1. Il existe des vecteurs $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ tel que $A\vec{x} = \vec{x}$
2. Il existe des vecteurs $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ tel que $A\vec{x} = -\vec{x}$
1. On choisit $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ tel que $f(\vec{x}) = \vec{x} \Leftrightarrow A\vec{x} = \vec{x} \Leftrightarrow A\vec{x} = I_b\vec{x}$

$$(A - I_b)\vec{x} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{x} \in \ker(A - I_b)$$

Calculons ce noyau :

$$(A - I_b) = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -3 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2. On cherche $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ tel que $f(\vec{x}) = -\vec{x} \Leftrightarrow A\vec{x} = -\vec{x} = -I_b \cdot \vec{x} \Leftrightarrow A\vec{x} + I_b\vec{x} = \vec{0} \Leftrightarrow (A + I_b)\vec{x} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{x} \in \ker(A + I_b)$

On cherche donc ce noyau :

$$A + I_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -3 & -1 & 3 \\ -2 & -2 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Donc, $\ker(A + I_3)$ est la droite

$$D = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} = \text{Vect}\{b_3\}$$

3. Au final on a trouvé trois vecteurs linéairement indépendants (à vérifier dans le prochain cours) on a 3 vecteurs qui forme une base ;

$$\mathcal{B} = (\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3) \text{ dans } \mathbb{R}^3$$

On a vu que $f(\vec{b}_1) = \vec{b}_1$, $f(\vec{b}_2) = \vec{b}_2$, $f(\vec{b}_3) = -\vec{b}_3$

$$(f)_{\mathcal{C}_{can}}^{\mathcal{C}_{can}} = A, (f)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

f est la symmétrie qui fixe W dans la direction D .

La matrice de f dans la base nouvelle \mathcal{B} est **diagonale**!

1. Elle est plus parlante géométriquement
2. Elle est plus facile à manipuler algébriquement, par exemple pour calculer ses puissances.

*Remarque
personnelle*

Juste pour que ce soit clair de comment on a trouver la droite on a juste "réécrit" en mode système et on arrive à trouver donc que un système d'équation qui est une droite.
On verra plus tard que ces vecteurs sont en fait les vecteurs propres.

Valeurs propres et vecteurs propres

Soit A une matrice carrée de taille $n \times n$

Définition 25 Un vecteur non nul \vec{x} de \mathbb{R}^n est un **vecteur propre** de A s'il existe un nombre λ tel que $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$. On appelle alors λ une **valeur propre** de A . L'**espace propre** E_λ est formé de TOUS les vecteurs \vec{x} tels que $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$

ATTENTION Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ on a $A\vec{0} = \lambda\vec{0}$. Il est crucial de demander que \vec{x} soit non nul! Une valeur propre est une denrée rare! Par contre $\vec{0} \in E_\lambda$.

Définition 26 Soit $T : V \rightarrow V$ une application linéaire. Un vecteur non nul $x \in V$ est un vecteur propre de T si $T(x) = \lambda x$

Comparaison Soit V un espace vectoriel et \mathcal{B} une base. Soit $T : V \rightarrow V$ une application linéaire.
Soit $A = (T)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ la matrice T dans la base \mathcal{B}

Chapitre 5

Valeurs propres et vecteurs propres

Proposition Un vecteur x est un vecteur propre de T pour la valeur propre λ si et seulement si $(x)_{\mathcal{B}}$ est un vecteur propre de A pour la même valeur propre λ .

Preuve

$$A(x)_{\mathcal{B}} = (T)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(x)_{\mathcal{B}} = (T(x))_{\mathcal{B}}$$

Ainsi $T(x) = \lambda x$ si et seulement si $A(x)_{\mathcal{B}} = \lambda(x)_{\mathcal{B}}$

Exemple

Soit $T : \mathbb{P}_1 \rightarrow \mathbb{P}_1$ l'application linéaire définie par :

$$T(a + bt) = -a + 3b + (2a + 4b)t$$

Si on prend comme base $\mathcal{C}an = \{1, t\}$, on a

$$T(1) = -1 + 2t$$

$$T(t) = 3 + 4t$$

Ce qui donne comme matrice :

$$(T)_{\mathcal{C}an}^{\mathcal{C}an} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = A$$

On observe, avec un peu de change que :

$$A + 2I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \text{ est de rang 1}$$

$A + 2I_2$ a un noyau non nul, de dim 1 (Théorème du rang)

donné par $Vect \left\{ \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

Ainsi, $\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de A

$$\left(A \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} = -2 \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

$-3 + t$ est bien un vecteur propre de T .

Essayons de voir ce qui se passe avec la nouvelle base :

$$\mathcal{B} = \{-3 + t, t\} = \{p_1, p_2\} \text{ de } \mathbb{P}_1$$

$$T(p_1) = -2p_1 \quad T(t) = 3 + 4t = -(-3 + t) + 5t = -1p_1 + 5p_2$$

$$(T)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = B$$

Pas encore diagonale, mais triangul

Cela nous aise à voir que 5 est aussi une valeur propre car

$$\text{Ker}(B - 5I_2) = \text{Ker} \begin{pmatrix} -7 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ +7 \end{pmatrix} \right\}$$

Ainsi, $\begin{pmatrix} -1 \\ 7 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de B , la matrice de T dans

la base \mathcal{B} , le det dans la base \mathcal{B} , donc $-1p_1 + 7 \cdot p_2 = 3 + 6t$ est un vecteur propre de T .

Mais alors $1 + 2t$ est aussi un vecteur propre de T .

On choisit $\mathcal{C} = (-3 + t, 1 + 2t) = (q_1, q_2)$ composée de vecteurs propres tel que $T(q_1) = -2q_1$ et $T(q_2) = 5 \cdot q_2$.

Si on écrit maintenant notre matrice dans la nouvelle base créée :

$$(T)_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$T(q_1) = -2 \cdot q_1$$

$$T(q_2) = 5 \cdot q_2$$

Ce qui implique que :

$$(T)_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}} \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Valeur propre et noyau

Proposition

proposition 1 *Un nombre λ est valeur propre de A si et seulement si le noyau de $A - \lambda I_n$ est non nul.*

Preuve

Si λ est valeur propre de A , il existe un vecteur non nul \vec{x} tel que $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$. Autrement dit :

$$\vec{0} = A\vec{x} - \lambda\vec{x} = A\vec{x} - \lambda I_n \vec{x} = (A - \lambda I_n) \vec{x}$$

Par distributivité de la multiplication matricielle. Ainsi un vecteur propre est une solution non nulle de l'équation homogène $(A - \lambda I_n) \vec{x} = \vec{0}$. En conclusion un vecteur propre existe pour λ si et seulement si $\text{Ker}(A - \lambda I_n)$ est non nul.

Mercredi 13 novembre 2024 — Cours 19 : Valeur propre

Rappels sur les espaces propres On traite le cas d'une application linéaire $T : V \rightarrow V$ (aussi appelé **endomorphisme** car la source et le but de T coïncident).

Définition 27 *Un vecteur **non nul** $x \in V$ est un **vecteur propre** de T s'il existe un nombre réel λ tel que $T(x) = \lambda x$. On appelle alors λ une **valeur propre***

Proposition Si λ est une valeur propre, l'**espace propre** E_λ est le sous-espace de $\text{ker}(T - \lambda Id)$.

Valeurs propres et noyaux

C

chercher une valeur propre λ de la matrice $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ revient à chercher un nombre λ tel que $\text{Ker}(A - \lambda I_n)$ est de dimension ≥ 1 .

Par le Théorème du rang, ceci revient à chercher λ avec $\text{rang}(A - \lambda I_n) < n$, ou encore **$A - \lambda I_n$ non inversible**.

Exemple

La matrice de rotation $R_\alpha = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$ le nombre λ est valeur propre de R_α si et seulement si : $R_\alpha - \lambda I_2 = \begin{pmatrix} \cos \alpha - \lambda & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha - \lambda \end{pmatrix}$ n'a pas d'inverse. On sait donc qu'une

matrice n'est pas inversible lorsque son déterminant est égal à 0 :

On a donc le déterminant qui est donnée par :

$$\begin{aligned} 0 &= (\cos \alpha - \lambda)^2 + \sin^2 \alpha \\ &= \cos^2 \alpha - 2\lambda \cos \alpha + \lambda^2 + \sin^2 \alpha = 0 \\ &= \lambda^2 - 2\cos \alpha \lambda + 1 \end{aligned}$$

On peut donc faire le delta ce qui nous donne trois cas de figure

- Cas 1 : si $\cos \alpha = \pm 1$, $\alpha = 0$ ou $\alpha = \pi$

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0 \rightarrow$$

La valeur propre nulle

Un vecteur propre doit être non nul, mais zéro peut être une valeur propre.

Exemple

La matrice $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ admet 0 comme valeur propre puisque :

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Proposition

Les valeurs propres d'une matrice triangulaire sont les coefficients diagonaux.

Exemple

Soit $A = \begin{pmatrix} -5 & -1 & 7 & 11 \\ 0 & -5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}$ Le rang de cette matrice nous donne une indication sur une valeur propre évidente :

1. $\text{rang} A = 3 < 4$, $\dim \ker A = 1$ par le théorème du rang, 0 est valeur propre et $E_0 = \ker A$.
2. 12 est valeur propre de A , car la 4^{ème} ligne de $A - 12I_4$, donc $\text{rang}(A - 12I_4) = 3$, ici :

$$\dim \ker(A - 12I_4) = 1 = \dim E_{12}$$

3. 5 est valeur propre,

$$A - (-5)I_4 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 7 & 11 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 17 \end{pmatrix} \text{ est de rang } 3$$

$E_5 = \ker(A - (-5)I_4)$ est de dim 1.

Attention! -5 apparaît deux fois dans la diagonale, c'est une valeur propre "double". Mais $\dim E_{-5} = 1$

**Vecteur
propres libres,
les cas $n = 1, 2$**

- Soit \vec{v}_1 un vecteur propre de la matrice carrée A . Alors la famille $\{\vec{v}_1\}$ est libre car un vecteur propre est non nul.
- Soit \vec{v}_1, \vec{v}_2 deux vecteurs propres de la matrice carrée A pour des valeurs propres λ_1 et λ_2 **différentes**. Alors la famille $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ est libre.

On a donc que $A \cdot \vec{v}_1 = \lambda_1 \vec{v}_1$ et $A \cdot \vec{v}_2 = \lambda_2 \vec{v}_2$.

Si $\vec{v}_1 = \alpha \vec{v}_2$ Alors :

$$\begin{aligned} A \cdot \vec{v}_1 &= A \cdot (\alpha \cdot \vec{v}_2) \\ \lambda_1 \vec{v}_1 &= \alpha \cdot A \cdot \vec{v}_2 = \alpha \cdot \lambda_2 \cdot \vec{v}_2 \\ \lambda_1 \alpha \vec{v}_2 &\Leftrightarrow \alpha \lambda_2 \vec{v}_2 = \alpha \cdot \lambda_2 \cdot \vec{v}_2 \\ &\Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 \end{aligned}$$

**Vecteurs
propres libres**

Théorème 20 Soit $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ des valeurs propres **distinctes** et $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k$ des vecteurs propres d'une matrice carrée A (pour chacune de ces valeurs propres). Alors la famille $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k\}$ est libre.

Preuve

Par récurrence sur k . Si $k = 1$ le résultat a déjà été prouvé juste au dessus.

Supposons que $k > 1$ et que le résultat est vrai pour moins de k vecteurs. Supposons que :

$$\alpha_1 \vec{v}_1 + \dots + \alpha_{k-1} \vec{v}_{k-1} + \alpha_k \vec{v}_k =$$

Nous devons montrer que tous les scalaires $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ soient nuls.

Reprenons : $\alpha_1 \vec{v}_1 + \dots + \alpha_{k-1} \vec{v}_{k-1} + \alpha_k \vec{v}_k = 0$ Alors :

$$\vec{0} = A(\alpha_1 \vec{v}_1 + \dots + \alpha_k \vec{v}_k) = \alpha_1 A \vec{v}_1 + \dots + \alpha_{k-1} A \vec{v}_{k-1} + \alpha_k A \vec{v}_k \Rightarrow$$

**Le polynôme
caractéristique**

Un nombre λ est une valeur propre de A si et seulement si la matrice $A - \lambda I$ n'est pas inversible. Or une matrice est inversible si et seulement si son déterminant est non nul.

Théorème 21 Un nombre λ est valeur propre de A si et seulement si $\det(A - \lambda I) = 0$.

Définition 28 Soit A une matrice $n \times n$. Le **polynôme caractéristique** de A est $c_A(t) = \det(A - tI_n)$.

Une valeur propre est une racine de $c_A(t)$. Sa multiplicité en tant que racine est appelée **multiplicité algébrique**

Exemple

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. quelles sont ses valeurs propres ?

A transforme \vec{e}_1 en \vec{e}_2 et \vec{e}_2 en \vec{e}_1 . On reconnaît ici la symétrie

axiale d'axe $x = y$ dans \mathbb{R}^2

Calculons algébriquement les valeurs propres.

Les valeurs propres sont les racines du polynôme caractéristique :

$$C_A(t) = |A - tI_2| = \begin{vmatrix} -t & 1 \\ 1 & -t \end{vmatrix} = t^2 - 1 = (t - 1)(t + 1)$$

Les racines sont 1 et -1 , de multiplicité algébrique de 1 chacune.

Cherchons dorénavant les espaces des valeurs propres :

- $E_1 = \ker(A - I_2) = \ker \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$
- $E_{-1} = \ker(A - (-1)I_2) = \ker \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

Ainsi on voit que E_1 est l'axe de symétrie ($x = y$) et que E_{-1} est perpendiculaire ($x = -y$)

On choisit maintenant $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = (\vec{b}_1, \vec{b}_2)$ comme base de \mathbb{R}^2 .

Alors si $S : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tel que $(S)_{\mathcal{C}an}^{\mathcal{C}an} = A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, Alors, puisque $s(\vec{b}_1) = \vec{b}_1$, $s(\vec{b}_2) = -\vec{b}_2$,

$$(S)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

On voit ici qu'il y a les valeurs propres dans la diagonale, on identifie immédiatement une droite fixée.

La multiplicité algébrique

La multiplicité algébrique d'une valeur propre est sa multiplicité en tant que racine du polynôme caractéristique.

Exemple

Soit $A \in M_{5 \times 5}(\mathbb{R})$ et supposons que

- $c_A(t) = t^3(t + 3)^2$. Alors on voit qu'il a une multiplicité algébrique de 5.
- $c_A(t) = (t^2 + 1)^2(t - 2)$. Alors

Dans tous les cas il y a autant de valeurs propres. **en comptant leur multiplicité algébrique**, que de colonnes dans la matrice, ici 5.

remarque personnelle

On le voit en faisant le déterminant avec les matrices 3×3 et la règle de Sarrus, on multiplie tout les polynômes $(a_{ii} - \lambda)$ ensemble ce qui crée le polynôme avec le degré le plus haut.

*multiplicité
géométrique*

Définition 29 La *multiplicité géométrique* d'une valeur propre λ est la dimension de l'espace propre E_λ .

Matrice semblables

Deux matrices A et B de taille $n \times n$ sont **semblables** si elles représentent la même application linéaire, mais pour des choix de bases différentes. Concrètement, si $T : V \rightarrow V$ et \mathcal{B}, \mathcal{C} sont deux bases de V , alors $(T)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ et $(T)_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}$ sont semblables. Or, si $P = (Id)_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}$ est la matrice inversible de changement de base, alors :

$$P^{-1}BP = (Id)_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(T)_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(Id)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = (T)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = A$$

Définition 30 Deux matrices carrées A et B de taille $n \times n$ sont **semblables** s'il existe une matrice inversible P de taille $n \times n$ telle que

$$A = P^{-1}BP$$

Exemple

La symétrie axiale S par rapport à la droite $x = y$. Nous avons vu que

$$A = (S)_{\mathcal{C}_{can}}^{\mathcal{C}_{can}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = (S)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = B$$

Les matrices de changement de base sont : $P = (Id)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}_{can}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $P^{-1} = (Id)_{\mathcal{C}_{can}}^{\mathcal{B}} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

Pour vérifier il suffit de recalculer $P^{-1} \cdot A \cdot P$ pour que se soit égal à B .

Similitude et valeurs propres

Théorème 22 Deux matrices semblables ont le même polynôme caractéristique. Elles ont donc en particulier les mêmes valeurs propres.

Preuve

Soit A et B deux matrices non semblables. C'est à dire, il existe une matrice inversible P , de taille $n \times n$ telles que $PAP^{-1} = B$.

$$\begin{aligned} C_B(t) &= C_{PAP^{-1}}(t) = \det(PAP^{-1} - t \cdot I_n) \\ &= \det(PAP^{-1} - t \cdot P \cdot P^{-1}) \\ &= \det(P) \cdot \det(A - t \cdot I_n) \cdot \det(P^{-1}) \\ &= \frac{\det(P) \cdot \det(A - t \cdot I_n)}{\det(P)} = \det(A - t \cdot I_n) \\ &= C_A(t) \end{aligned}$$

Remarque

Deux matrices ayant les mêmes valeurs propres ne sont pas semblables en général.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

La seule valeur propre de A et de B est 5, de multiplicité algébrique 2 car $c_A(t) = (t - 5)^2 = c_B(t)$. Mais :

$$A \not\approx B$$

Mardi 19 novembre 2024 — Cours 19 : Polynôme caractéristique

Polynôme caractéristique

Définition 31 Soit A une matrice $n \times n$. Le *polynôme caractéristique* de A est :

$$c_A(t) = \det(A - tI_n)$$

Théorème 23 Une nombre λ est valeur propre de A si et seulement si c'est une racine de $c_A(t)$, i.e $\det(A - \lambda I_n) = 0$.

Sa multiplicité en tant que racine est appelée **multiplicité algébrique**.

Définition 32 Soit λ une valeur propre de A . La *multiplicité géométrique* de λ est $\dim \ker(A - \lambda I_n)$.

Similitude

Définition 33 Deux matrices carrées A et B de taille $n \times n$ sont semblables s'il existe une matrice inversible P de taille $n \times n$ telle que :

$$A = P^{-1}BP$$

On note $A \approx B$.

Théorème 24 Deux matrices semblables ont le même polynôme caractéristique. Elles ont donc en particulier les mêmes valeurs propres.

Remarque personnelle

La réciproque est fautive, puisque la matrice nulle n'est semblable qu'à elle-même, mais la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ a également t^2 comme polynôme caractéristique.

Exemple

Deux matrices ayant les mêmes valeurs propres ne sont pas semblables en général. La matrice A est un **bloc de jordan** :

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

La seule valeur propre de A et de B est 5, de multiplicité algébrique 2 car $c_A(t) = (t - 5)^2 = c_B(t)$. Mais :

$$A \not\approx B$$

Si on développe tout ça on a

$$P \cdot B \cdot P^{-1} = P \cdot (5I_2) \cdot P^{-1} = 5P \cdot I_2 \cdot P^{-1} = 5I_2 = B$$

La multiplicité géométrique de 5 est 1 pour la matrice A , mais 2 pour B .

**Les relations \sim
et \approx**

1. Deux matrice A et B de $M_{n \times n}(\mathbb{R})$ sont équivalents selon les lignes et les colonnes s'il existe des opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes qui transforment A en B .
2. Or, effectuer des opérations sur les lignes de A revient à multiplier A à gauche par une matrice inversibles P ;
3. Et effectuer des opérations sur les colonnes de A revient à multiplier A à droite par une matrice inversible Q .

Définition 34 Les matrices A et B sont *équivalentes* s'il existe deux matrices inversibles P et Q telles que

$$PAQ = B$$

On le note :

$$A \sim B$$

Remarque

On voit ici que si deux matrices sont semblable, elles sont équivalents :

$$A \approx B \implies A \sim B$$

Calcul de polynôme caractéristique

Soit $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ on calcule avec la règle de Sarrus le polynôme caractéristique :

$$\begin{vmatrix} 4-t & 0 & -1 \\ -1 & -t & 4 \\ 0 & 2 & 3-t \end{vmatrix} = -t^3 + 7t^2 - 4t - 30$$

On nous calcule directement les racines qui sont : $5, 1 \pm \sqrt{7}$.

Diagonalisation

Définition 35 Une matrice est *diagonalisable* si elle est semblable à une matrice diagonale, i.e il existe P inversible telle que $P^{-1}AP$ est diagonale.

Théorème 25 Une matrice A de taille $n \times n$ est diagonalisable si et seulement si il existe une base \mathcal{B} de \mathbb{R}^n formée de vecteurs propres de A .

Observations

1. Les colonnes de la matrice de changement de base $P = (Id)_{\mathcal{B}}^{Can}$ sont les vecteurs propres de la base \mathcal{B} .
2. $A = PDP^{-1}$ et D est diagonale, les valeurs propre $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ de A se trouvent dans la diagonale, dans l'ordre choisi pour construire la base.
3. Le déterminant de A est le produit des valeurs propres (avec multiplicité).

En effet :

$$\begin{aligned}\det A &= \det(PDP^{-1}) = \det P \det D \det(P^{-1}) \\ &= \det D = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdots \lambda_n\end{aligned}$$

Exemple

Soit $T : M_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \rightarrow M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ l'application linéaire définie par :

$$T \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+d & b-c \\ c-b & a+d \end{pmatrix}$$

On commence par écrire la matrice T dans la base canonique (je vais pas faire la suite par flemme mais on connaît déjà)

Jeudi 21 novembre 2024 — Cours 20 : Diagonalisation

Quizz du début

Niveau 1

On considère \mathbb{P}_{\neq} la ban canonique $\mathcal{C}an = (1, t, t^2)$ et la base $\mathcal{B} = (1, 1+t, 1+t+t^2)$. Alors la matrice de changement de base $P = (Id)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}an}$ est :

- a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
- b) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
- c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
- d) Aucune, \mathcal{B} , n'est pas une base!

Ici la question au beaucoup plus triviale que ça en a l'air, la question est comme écrire la base \mathcal{B} dans la base canonique, on voit très bien que la base canonique, c'est la base canonique ce qui nous suffit donc juste d'écrire chaque vecteurs dans une colonne, ce qui donne (c) comme réponse.

Niveau 2

On considère dans $M_{2 \times 3}(\mathbb{R})$ le sous-espace W engendré par les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

On choisit deux base W . la base $\mathcal{B} = (A, B)$ et la base :

$$\mathcal{C} = \left(\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

Alors, la matrice de changement de base $P = (Id)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$ est :

- a) $\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

- b) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$
- c) $\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$
- d) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

On a ici deux moyen de faire le premier qui est brute force est de juste écrire les matrices de \mathcal{B} dans la base \mathcal{C} c'est à dire, $(Id)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = ((A)_{\mathcal{C}}(B)_{\mathcal{C}})$ Il faut donc écrire la matrice :

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 2/3 & -1/3 \\ 0 & 1 & 1/3 & 2/3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{array} \right)$$

La deuxième façon est de voir que la matrice de changement de \mathcal{C} à \mathcal{B} est juste $C = 2 \cdot A + B$ et $D = A + 2 \cdot B$ il suffit juste de faire l'inverse de cette matrice pour trouver la matrice qu'on chercher.

Diagonalisation

Définition 36 Une matrice est *diagonalisable* si elle est semblable à une matrice diagonale, i.e il existe P inversible telle que $P^{-1}AP$ est diagonale.

Théorème 26 Une matrice A de taille $n \times n$ est diagonalisable si et seulement si il existe une base \mathcal{B} de \mathbb{R}^n formée de vecteurs propres de A .

Observations Soit A la matrice d'une application linéaire T exprimée dans la base canonique, $A = (T)_{\mathcal{C}an}^{\mathcal{C}an}$. Soit D la matrice de T exprimée dans une base \mathcal{B} , de sorte que $D = (T)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ est diagonale.

1. Les colonnes de la matrice de changement de base

Exemple Soit $T : M_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \rightarrow M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ l'application linéaire définie par :

$$T \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + d & b - c \\ c - b & a + d \end{pmatrix}$$

On commence par écrire la matrice e T dans la base canonique. Cette matrice a donc une taille 4×4 car on a 4 vecteurs qui ont 4 composantes. Faisons l'application de chacun de ces 4 vecteurs.

•

$$T(e_{11}) = T\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_{Can} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

• Ce qui donne si on réécrit tout :

$$A = (T)_{Can}^{Can} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On va maintenant calculer le polynôme caractéristique :

$$\begin{aligned} c_A(t) &= \begin{vmatrix} 1-t & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1-t & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1-t & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1-t \end{vmatrix} \stackrel{=L_4+L_1}{=} \begin{vmatrix} 1-t & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1-t & -1 & 0 \\ 0 & -t & -t & 0 \\ 2-t & 0 & 0 & 2-t \end{vmatrix} \\ & \stackrel{=lin.de||}{=} t \cdot (2-t) \cdot \begin{vmatrix} 1-t & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1-t & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\ & \stackrel{=lin.de||}{=} t \cdot (2-t) \cdot t \cdot \begin{vmatrix} 2-t & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\ & = -t \cdot (2-t) \cdot t \cdot (2-t) \cdot (-1) \cdot 1 \\ & = t^2(2-t)^2 \end{aligned}$$

On voit ici qu'il y a deux solutions, 0, 2, $mult(0) = 2$, $mult(2) = 2$. On va donc chercher leur espaces propres :

•

$$E_0 = \ker(A - 0 \cdot I_4) = \ker A = Vect \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\bullet E_2 = \ker(A - 2I_4) = \ker \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ on}$$

voit que les deux dernière lignes s'enlève lorsqu'on

échelonne ce qui donne que le rang de cette matrice est 2 :

$$E_2 = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Nos 4 vecteurs propres de A forment une base de \mathbb{R}^4 qui permet de diagonaliser A . Pour diagonaliser T , on choisit une base de $M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ qui est donc nos 4 vecteurs retransformés en matrice :

$$\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

On a donc si on réécrit nos applications T dans la base \mathcal{B} :

$$(T)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

On met dans cet ordre parce qu'on a mis dans le même ordre dans la base \mathcal{B}

Premier critère de diagonalisation

Théorème 27 Soit A une matrice de taille $n \times n$ ayant n valeurs propres distinctes. Alors A est diagonalisable.

Preuve

Pour chaque valeur propre on a un vecteur propre. Ces n vecteurs sont libres et forment alors une base de \mathbb{R}^n .

Remarque

La réciproque est fautive, il existe bien comme dans l'exemple précédent on a que deux valeurs propres mais la matrice est quand même diagonalisable, il faudra vérifier si leur espace propre respectifs matche leur multiplicité géométrique.

Proposition

Soient λ et μ deux valeurs propres distinctes de A . Alors $E_{\lambda} \cap E_{\mu} = \{\vec{0}\}$

Preuve

Soit $\vec{x} \in E_{\lambda} \cap E_{\mu}$, Alors, $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$ et $A\vec{x} = \mu\vec{x}$. Comme $\lambda \neq \mu$, alors $\vec{x} = \vec{0}$

Remarque

Les espaces propres E_{λ} et E_{μ} forment une somme directe $E_{\lambda} \oplus E_{\mu}$

Multiplicité

Proposition

Théorème 28 Soit λ une valeur propre de A . Alors $1 \leq \dim E_{\lambda} \leq \text{mult}(\lambda)$

On le voit assez bien que la dimension de l'espace ne peut pas être plus grand que la multiplicité algébrique

Critère de diagonalisation

Pour pouvoir diagonaliser, il faut qu'il y ait assez de valeurs propres réelles et assez de vecteurs propres.

Théorème 29 Une matrice A est diagonalisable (sur \mathbb{R}) si et seulement si :

1. Le polynôme caractéristique est *scindé* : il se décompose en produit de facteur $(\lambda - t)$ avec des $\lambda \in \mathbb{R}$.
2. Pour tout λ , on a $\dim E_\lambda = \text{mult}(\lambda)$

Si A est diagonalisable, on forme une base de vecteurs propres en réunissant les vecteurs de base de chaque espace propre.

On voit ici que si on aurait que la dimension d'un espace propre était plus petit que le nombre de fois que la valeur propre soit solution, on aurait comme la base des vecteurs manque un ou plusieurs vecteurs pour pouvoir être de même taille que la matrice de base ce qui est absurde.

Petit exemple qui peut servir lors de petite question

1. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ on a donc son polynôme caractéristique qui est

$$c_A(t) = \begin{vmatrix} -t & 1 \\ -1 & -t \end{vmatrix} = t^2 + 1$$

On voit bien ici qu'on ne trouve pas de racine et que donc, elle est irréductible sur \mathbb{R} . Comme A n'a pas assez de valeurs propres réelles, A n'est pas diagonalisable sur \mathbb{R} .

Néanmoins, sur \mathbb{C} , on a $t^2 + 1 = (t - i)(t + i)$, A est diagonalisable.

2. $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, $c_B(t) = (t - 3)^2$. Il y a assez de valeurs propres $\lambda = 3$, $\text{mult}(3) = 2$.

On va donc chercher sont espace propres pour checker si ça matche :

$$E_3 = \ker(B - 3I_2) = \ker \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On voit bien ici que la dimension de cet espace est de 1, $\dim E_3 = 1$ (grâce au théorème du rang)

On voit donc qu'il n'y a pas assez de vecteurs propres, B n'est pas diagonalisable ni sur \mathbb{R} , ni sur \mathbb{C}

Chapitre 6

Les corps

Les corps

Jusqu'ici nous avons développé des méthodes qui permettent de travailler avec des matrices à coefficients dans \mathbb{R} et nous avons aussi constaté que cela fonctionne dans \mathbb{Q} . Il y a beaucoup d'autres *corps* de nombres ! Vous connaissez bien sûr les nombres complexes, \mathbb{C} , et on pourrait refaire la théorie de la diagonalisation sur les complexes, nous en verrons d'autres.

Définition 37 Un *corps* K est un ensemble muni d'une addition $+$ et d'une multiplication \cdot pour lesquelles les règles de calcul "usuelles" s'appliquent.

Plus précisément on demande que :

1. $(K, +)$ est un **groupe abélien** : il vérifie les axiomes d'associativité, de commutativité, il y a un élément neutre 0 et chaque nombre x admet un opposé $-x$.
2. Le produit est associatif, commutatif, il existe un élément neutre 1 et chaque nombre ($x \neq 0$) admet un inverse x^{-1} .
3. La multiplication est distributive par rapport à l'addition :

$$x(y + z) = xy + zy \forall x, y, z \in K$$

Exemple

Soit $\mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$. On définit somme et produit par les tables :

+	0	1
0	0	1
1	1	0
·	0	1
0	0	1
1	0	1

La symmétrie des tableaux montre la commutativité des opérations. Pour $+$ la ligne 0 montre que c'est un élément neutre et pour \cdot c'est celle de 1 qui le prouve.

Petit remarque vite fait, On voit que ce corps est le plus petit possible parce qu'il y a seulement 2 éléments.

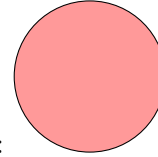
Application : Le code de Hamming

En 1946 l'ingénieur Hamming invente le premier code autocorrecteur pour ordinateurs à cartes perforées.

Son idée est d'ajouter à chaque mot de 4 bits $d_1d_2d_3d_4$ dans $(\mathbb{F}_2)^4$ un mot de 3 bits de contrôle formé par les sommes dans \mathbb{F}_2 :

- $d_1 + d_2 + d_4$
- $d_1 + d_3 + d_4$
- $d_2 + d_3 + d_4$

On utilise 16 signes comme alphabet de base : 0000, 0001, ..., 1110, 1111. On



visualise les bits de contrôles p_1, p_2, p_3 comme suit :
après

Le corps des nombre

Les matrice de taille 2×2

En gros les matrices de taille 2×2 ne forment pas un corps. Néanmoins il existe des sous-ensembles de $M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ qui sont des corps :

Sous-anneaux des matrice de taille 2×2

1. Soit $S = \{A \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \mid A \text{ est scalaire}\}$. Alors S est un corps pour la somme et le produit de matrices. En fait l'application $f : \mathbb{R} \rightarrow S$ définie par $f(a) = aI_2$ est un isomorphisme qui identifie S avec le corps des nombres réels.
2. Soit $M = \{A \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \mid a_{11} = a_{22} \text{ et } a_{12} = a_{21}\}$. Alors M forme un corps.

On a en premier lieu :

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

1. A part $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, élément neutre pour t , toutes les matrices ont une inverse : $\det \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} = a^2 + b^2 \geq 0$ et ce $\det = 0$ si et seulement si $a = b = 0$.
2. Dans M la multiplication est commutative,

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac - bd & ad + bc \\ -bc - ad & -bd + ac \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$$

Conclusion : $(M, +, \cdot)$ est un corps. En fait on a un isomorphisme $f : \mathbb{C} \rightarrow M$ tel que

$$a + bi \rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$$

Arithmétique modulaire Comme pour $\mathbb{F}_n = \{0, 1\}$ on peut considérer l'ensemble des nombres entiers $\{0, 1, 2, \dots, n-1\}$.

Mardi 26 novembre 2024 — Cours 21 : Corps et diagonalisation

Arithmétique modulaire Comme pour $\mathbb{F}_n = \{0, 1\}$ on peut considérer l'ensemble des nombres entiers $\{0, 1, 2, \dots, n\}$.
On regarde ces nombres comme tous les restes possible de la division par n , ce qui nous permet de définir une somme et un produit en calculant dans \mathbb{Z} , mais en gardant que le reste de la division. Ainsi :

1. Dans $\{0, 1, 2\}$ on calcule $2 + 2 = 1$
2. Dans $\{0, 1, 2\}$ on calcule $2^3 = 2$
3. Dans $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ on calcule $3 \cdot 4 = 2$
4. Dans $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ on calcule $1 - 4 = 2$
5. Dans $\{0, 1, 2, 3, \dots, 10, 11\}$ on calcule $10 \cdot 6 = 0$

Le corps \mathbb{F}_p

Proposition

Théorème 30 *Proposition* Lorsque n n'est pas un nombre premier les opérations définies ci-dessus ne forment pas un corps.

Preuve

Comme n n'est pas premier, $n = a \cdot b$ pour $1 < a, b < n$. Ainsi le nouveau produit $a \cdot b$ est nul. Alors a ne peut pas avoir d'inverse car sinon $b = 1 \cdot b = a^{-1} \cdot 0 = 0$.

Théorème 31 *lorsque p est un nombre premier les opérations définies ci-dessus forment un corps \mathbb{F}_p .*

Les seules propriétés qui ne découlent pas de celle de la somme et du produit dans \mathbb{Z} sont l'existence d'opposé et d'inverse.

Preuve

- **Opposé** : Si $0 \leq k < p$ alors son opposé est $p - k$ car $k + (p - k) = p = 0$.
Si $k = 0$, son opposé est 0.
- **Inverse** : Soit $0 < k < p$, on doit trouver $0 < a < p$ tel que $a \cdot k = 1$. On considère $\varphi : \{0, 1, \dots, p-1\} \rightarrow \{0, 1, \dots, p-1\} : x \rightarrow x \cdot k$
On montre que φ est injective, ce qui montrera en même temps que φ est aussi surjective : il existe un a tel que $\varphi(a) = 1$.

C'est le pigeonhole principe en AICC :

Si il y a 400 cadeaux avec des noms différents alors chacun a son cadeau si on a 400 élèves, donc si chaque éléments a un $\varphi(k)$ qui est différents on a alors chaque cadeau qui est différents, et si on a le même nombre de cadeau et d'élèves alors on a forcément un cadeau par élèves

- Pour cela si $0 < x, y < p$, supposons que $\varphi(x) = \varphi(y)$, on doit montrer que $x = y$. On sait : $x \cdot k = y \cdot k$ ce qui revient à dire $(x - y) \cdot k = 0$, dans \mathbb{Z} $(x - y) \cdot k$ est un multiple de p . mais k est un nombre $< p$, donc p divise $x - y$ mais comme à leur tour $0 < x, y < p$, $x = y$

En gros comme $x - y$ est plus petit que p lui même, la seule possibilité pour que se soit vrai, c'est que $x - y = 0$

Exemple

1. Dans \mathbb{F}_3 , $2^{-1} = 2$
2. Dans \mathbb{F}_5 , $2^{-1} = 3$ car $2 \cdot 3 = 6 = 1$
3. Dans \mathbb{F}_p , $(p - 1)^{-1} = (-1)^{-1} = -1 = p - 1$
Ou alors $(p - 1)(p - 1) = p^2 - 2p + 1 = 1$ car p^2 et $-2p$ sont divisibles par p .

Attention! par exemple

$$\mathbb{F}_6, 2^{-1}$$

n'existe pas car 6 n'est pas un nombre premier.

Remarque

On va pouvoir former des espaces vectoriels sur \mathbb{F}_p comme : $(\mathbb{F}_p)^n$, $\mathbb{F}_p[t]$ polynôme à coefficient dans \mathbb{F}_p ou alors, $M_{2 \times 3}(\mathbb{F}_p)$

Critère de diagonalisation

En général, pour diagonaliser une matrice sur \mathbb{R} , il faut qu'il y ait assez de valeurs propres réelles **et** assez de vecteurs propres.

Théorème 32 Une matrice A est diagonalisable sur \mathbb{R} si et seulement si

1. Le polynôme caractéristique est **scindé** sur \mathbb{R} : il se décompose en produit de facteurs $(\lambda - t)$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$
2. Pour tout λ , on a $\dim E_\lambda = \text{mult}(\lambda)$.

Si A est diagonalisable on forme une base de vecteurs propres en réunissant les vecteurs de base de chaque espace propres.

Exemple

Soit $A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 2 \\ 2 & -3 & 2 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}$. On constate sans faire de calculs :

1. Dans chaque ligne la somme des coefficients vaut $-3 + 2 + 2 = 1$ donc 1 est valeur propre et $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est vecteur propre.

2. $A + 5I_2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ est de rang 1 et $\ker(A + 5I_2) =$

$\text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ est de dim 2.

3. Donc $\dim E_1 = 1$, $\dim E_{-5} = 2$ et on trouve une base de vecteurs propres

$$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

4. $c_A(t) = -(t-1)(t+5)^2$

$$\text{Ainsi } A \approx \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

La matrice de changement de base est donc $(Id)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}_{an}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = P$ et $(Id)_{\mathcal{C}_{an}}^{\mathcal{B}} = P^{-1}$.

Suite, changement de base $D = \begin{cases} P \cdot A \cdot P^{-1} \\ P^{-1} \cdot A \cdot P \end{cases}$ et $A = P \cdot D \cdot P^{-1}$

Diagonalisabilité : méthode

Soit $T : V \rightarrow V$ une application linéaire.

1. Choisir une base \mathcal{C} de V (la base canonique si elle existe)
2. Ecrire la matrice $A = (T)_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}$ de T dans cette base
3. Calculer le polynôme caractéristique $c_A(t)$.
4. $c_A(t)$ n'est pas scindé, A n'est pas **diagonalisable**.
5. Si $c_A(t)$ est scindé, extraire les racines de λ de $c_A(t)$ et calculer les multiplicité algébrique.
6. Calculer les espaces propres E_λ et les multiplicités géométriques.
7. Si $\dim E_\lambda = \text{mult}(\lambda)$ pour une valeur propre λ , alors A n'est pas **diagonalisable**.
8. Si $\dim E_\lambda = \text{mult}(\lambda)$ pour tout λ , alors A est **diagonalisable**.

Dès lors

1. Soit $T : V \rightarrow V$ une application linéaire **diagonalisable**.
2. Choisir une base \mathcal{B}_λ de E_λ pour toute valeur propres λ .
3. Réunir les \mathcal{B}_λ pour former une base de \mathcal{B} de V .
4. $D = (T)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ est diagonale. Les valeurs propres apparaissent dans la diagonale dans l'ordre choisi pour construire la base \mathcal{B} .
5. Les colonnes de la matrice de changement de base $P = (Id)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$ sont les vecteurs de \mathcal{B} exprimés en coordonnées dans \mathcal{C} .

6. $D = P^{-1}AP$ et $A = PDP^{-1}$.

Exemple

Soit W le plan de \mathbb{R}^3 donné par l'équation $x + y + z = 0$. On considère l'application linéaire $T : W \rightarrow W$ donnée par la formule :

$$T \begin{pmatrix} -y - z \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 9y + z \\ 3y - 8z \\ -12y + 7z \end{pmatrix}$$

1. On vérifie d'abord que $T\vec{w} \in W$ pour tout $\vec{w} \in W$.
2. On choisit ensuite une base \mathcal{C} de W , par exemple

$$\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

On peut maintenant calculer la matrice A de T , par rapport à la base \mathcal{C} . Il faut toutefois calculer les images des vecteurs de base :

$$T(c_1) = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ -12 \end{pmatrix} = \frac{3}{5} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{12}{5} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{3}{5}c_1 - \frac{12}{5}c_2$$

$$T(c_2) = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 \\ -8 \\ 7 \end{pmatrix} = -\frac{8}{5}c_1 + \frac{7}{5}c_2$$

On a donc $A = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & -8 \\ -12 & 7 \end{pmatrix}$ On va donc chercher les valeurs propres :

$$c_A(t) = \begin{vmatrix} \frac{3}{5} - t & -\frac{8}{5} \\ -\frac{12}{5} & \frac{7}{5} - t \end{vmatrix} = t^2 - 2t - 3 = (t - 3)(t + 1)$$

On calcule ensuite les espaces propres :

$$E_{-1} = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$E_3 = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$$

ON a donc que la base est donnée par :

$$\mathcal{B}' = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} \right)$$

Qui est une base de \mathbb{R}^2 formé de vecteurs propres de A . On arrive donc à $A \approx \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = D$.

On doit revenir à notre problème de départ $T : W \rightarrow W$
Ces vecteurs sont donnés en coordonnées dans la base \mathcal{C} puisque A est la matrice de T par rapport à \mathcal{C} :

$$(T)_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(x)_{\mathcal{C}} = (T(x))_{\mathcal{C}}$$

Par exemple $b_1 = c_1 + c_2$. Ainsi

$$\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \right)$$

La signification géométrique de T est maintenant transparente.

La trace

Soit A une matrice $n \times n$. La **trace** $TrA = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}$.

Exemple

Soit $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$. Alors $TrA = a + d$ Or

$$c_A(t) = (a-t)(d-t) - bc = t^2 - (a+d)t + (ad-bc) = t^2 - TrA \cdot t + \det A$$

Soit :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad TrA = a_{11} + a_{22} + a_{33}.$$

$$c_A(t) = (a_{11}-t)(a_{22}-t)(a_{33}-t) + \text{polynôme de degré 1} = -t^3 + (a_{11}+a_{22}+a_{33})t^2$$

Proposition

Théorème 33 Soit A une matrice de taille $n \times n$. Alors $(-1)^{n-1} TrA$ est le coefficient de t^{n-1} de $c_A(t)$ et $\det A$ est le coefficient constant

Théorème 34 Lemme Soit $A, B, \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ Alors $Tr(AB) = Tr(BA)$

Théorème 35 Si A est diagonalisable, alors la trace de A est égal à la somme des valeurs propres.

Preuve

1.

$$\begin{aligned} Tr(A \cdot B) &= \sum_{i=1}^n (A \cdot B)_{ii} = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot b_{ji} \right) \\ &= \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n b_{ji} \cdot a_{ij} \right) \\ &= \sum_{j=1}^n (B \cdot A)_{jj} = Tr(BA) \end{aligned}$$

2. Si $A \approx B$, il existe P inversible tel que $A = PBP^{-1}$ et donc

$$Tr(A) = Tr(PBP^{-1}) = Tr(P^{-1}PB) = Tr(B)$$

Si $A \approx D$ où D est la diagonale de A alors :

$$\text{Tr}A = \text{Tr}D = \lambda_1 + \dots + \lambda_n$$

Rappel : $\det A = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdots \lambda_n$

Deux compléments

Théorème 36 Soit A une matrice carrée telle que $c_A(t)$ est scindé. Alors A est *triangularisable* (A est semblable à une matrice triangulaire).

Le théorème suivant affirme que le polynôme caractéristique "annule" la matrice A .

Théorème 37 Théorème de Cayley-Hamilton Soit $c_A(t) = t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \dots + a_1t + a_0$ le polynôme caractéristique de A alors :

$$A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \dots + a_1A + a_0I_n = 0$$

Exemple

$$c_B(t) = t^2 - 5t + 2$$

$$\text{Alors } B^2 - 5B + 2I_2 = 0$$

Jeudi 28 novembre 2024 — Cours 22 : Orthogonalité

Soit A une matrice diagonalisable. Il existe une matrice inversible P et une matrice diagonale D telles que :

$$A = PDP^{-1}$$

Mais alors on a aussi

$$A^2 = PDP^{-1}PDP^{-1} = PD^2P^{-1} \text{ et } A^k = PD^kP^{-1}$$

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} \Rightarrow D^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n^k \end{pmatrix}$$

Évolution de populations

On étudie les populations de Lausanne et du Gros de Vaud. La situation (sans lien avec la réalité du canton) est représenté par la situation suivante :

Algèbre linéaire/Screenshot 2024-11-28 081103.png

Appelons u_k la population urbaine l'année k (en pourcents) et r_k la population rurale.

On cherche ici à écrire une formule pour décrire tout ça.

$$u_{k+1} = \frac{3}{4}u_k + \frac{1}{2}r_k$$

$$r_{k+1} = \frac{1}{4}u_k + \frac{1}{2}r_k$$

On a donc :

$$\begin{cases} u_{k+1} = \frac{3}{4}u_k + \frac{1}{2}r_k \\ r_{k+1} = \frac{1}{4}u_k + \frac{1}{2}r_k \end{cases}$$

Nous avons modélisé matriciellement cette situation et posons :

$$A = \begin{pmatrix} 3/4 & 1/2 \\ 1/4 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Ainsi :

$$\begin{pmatrix} 3/4 & 1/2 \\ 1/4 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_k \\ r_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{k+1} \\ r_{k+1} \end{pmatrix}$$

si bien que :

$$\begin{pmatrix} 3/4 & 1/2 \\ 1/4 & 1/2 \end{pmatrix}^k \begin{pmatrix} u_0 \\ r_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_k \\ r_k \end{pmatrix}$$

Pour comprendre ce qui se passe dans le futur (lointain), il faut donc calculer $\lim_{k \rightarrow \infty} A^k$.

Nous calculons :

1. $c_A(t) = (t - 1)(t - \frac{1}{4})$
2. $E_1 = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ et $E_{1/4} = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$
3. $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$ est une base de \mathbb{R}^2 formée de vecteurs propres de A

$$4. P = (Id)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}_{an}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, P^{-1} = (Id)_{\mathcal{C}_{an}}^{\mathcal{B}} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$5. \text{ On a donc pour la diagonale : } D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$$

$$6. \text{ Formule de changement de base : } A^k = PD^kP^{-1}.$$

On va donc chercher maintenant à partir de la diagonale avec notre formuel énoncé au point 5 :

$$A^k = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1^k & 0 \\ 0 & \frac{1}{4}^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 + \frac{1}{4}^k & 2 - \frac{1}{4}^{k-1} \\ 1 - \frac{1}{4}^k & 1 + \frac{1}{4}^{k-1} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} u_k \\ r_k \end{pmatrix} = A^k \begin{pmatrix} u_0 \\ r_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3(2 + \frac{1}{4}^k)u_0 + \frac{1}{3}(2 - \frac{1}{4}^{k-1})r_0 \\ 1/3(1 - \frac{1}{4}^k)u_0 + \frac{1}{3}(1 + \frac{1}{4}^{k-1})r_0 \end{pmatrix}$$

Comme $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{4}^k = 0$ on peut facilement trouver que $u_{\infty} = \frac{1}{3} \cdot 2u_0 = \frac{2}{3}P_0$ où $P_0 = u_0 + r_0$ qui est la population totale

Chapitre 7

Orthogonalité

non

1. \mathbb{R}^n est non seulement un espace vectoriel, c'est un espace **euclidien**.
2. Nous avons une notion de distance et d'angle
3. La base canonique est composée de vecteurs **orthogonaux** deux à deux et **unitaires** (de longueur 1).

Le produit scalaire

Définition 38 Soit \vec{u}, \vec{v} deux vecteur de \mathbb{R}^n . Le **produit scalaire** est

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u}^t \vec{v} = u_1 v_1 + \dots + u_n v_n$$

Propriétés

1. **Commutativité** $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$
2. **Distributivité** $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$
3. **Compatibilité avec l'action scalaire** $\alpha(\vec{u} \cdot \vec{v}) = \vec{u} \cdot (\alpha\vec{v}) = (\alpha\vec{u}) \cdot \vec{v}$
4. **Positivité** $\vec{u} \cdot \vec{u} \geq 0$ et $\vec{u} \cdot \vec{u} = 0 \iff \vec{u} = \vec{0}$

Preuve

Les propriétés 1 – 3 sont celles de la multiplication de matrice. Pour 4, $\vec{u} \cdot \vec{u} = u_1^2 + \dots + u_n^2 \geq 0$. On a l'égalité si et seulement si tous les $u_i = 0$.

La norme

Définition 39 La **longueur** ou **norme** d'une vecteur \vec{u} de \mathbb{R}^n est :

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}} = \sqrt{u_1^2 + \dots + u_n^2}$$

Un vecteur de norme 1 est dit **unitaire**. Pour normaliser un vecteur non nul, il suffit de le diviser par sa norme :

$$\frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} = \begin{pmatrix} \frac{u_1}{\|\vec{u}\|} \\ \vdots \\ \frac{u_n}{\|\vec{u}\|} \end{pmatrix} \text{ est unitaire}$$

La distance

Définition 40 La *distance* entre deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} de \mathbb{R}^n est :

$$d(\vec{u}, \vec{v}) = \|\vec{u} - \vec{v}\|$$

On voit aussi que cette formule marche dans l'autre sens.

Des vecteurs sont orthogonaux si et seulement si la distance entre \vec{u} et \vec{v} est la même que la distance entre \vec{u} et $-\vec{v}$.

Remarque

Quelles sont les conséquences de l'égalité $d(\vec{u}, \vec{v}) = d(\vec{u}, -\vec{v})$?
Si $\|\vec{u} - \vec{v}\| = \|\vec{u} - (-\vec{v})\| = \|\vec{u} + \vec{v}\|$ alors, $\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = \|\vec{u} + \vec{v}\|^2$
on a le droit de dire ça car une distance est toujours positive.
Par la définition de la norme : $(\vec{u} - \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v})$.
Par la distributivité :

Définition 41 Deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} de \mathbb{R}^n sont *orthogonaux* si

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$$

Théorème de pythagore

Théorème 38 Deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} sont orthogonaux si et seulement si

$$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2$$

Notation

Soit W un sous-espace de \mathbb{R}^n . On note W^\perp l'ensemble de tous les vecteurs orthogonaux à W . Ainsi ;

$$W^\perp = \{\vec{u} \in \mathbb{R}^n \mid \vec{u} \cdot \vec{w} = 0 \text{ pour tout } \vec{w} \in W\}$$

C'est un sous-espace de \mathbb{R}^n (série 11)

Exemple

Soit W le sous espace de \mathbb{R}^3 donné par l'équation $2x - y + 3z = 0$.
On veut décrire ce plan et W^\perp .
On choisit une base de W :

$$\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$$

On a donc par sa définition :

$$\begin{aligned} W^\perp &= \{\vec{u} \in \mathbb{R}^3 \mid \vec{u} \cdot \vec{w} = 0 \quad \forall \vec{w} \in W\} \\ &= \{\vec{u} \in \mathbb{R}^3 \mid \vec{u} \cdot (\alpha \vec{b}_1 + \beta \vec{b}_2) = 0 \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} \\ &= \{\vec{u} \in \mathbb{R}^3 \mid \vec{u} \cdot \vec{b}_1 = 0 = \vec{u} \cdot \vec{b}_2\} \end{aligned}$$

Si $\vec{u} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ on a alors : $\vec{u} \cdot \vec{b}_1 = a + 2b$ et $\vec{u} \cdot \vec{b}_2 = -3a + 2c$

On cherche donc à résoudre :

$$\begin{cases} a + 2b = 0 \\ -3a + 2c = 0 \end{cases}, W^\perp = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$$

On observe que $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \perp$ le plan d'éq. $2x - y + 3z = 0$

Lien entre perpendicularité et image et noyau

Proposition La droite perpendiculaire au plan d'équation $ax + by + cz = 0$, et passant par l'origine \mathbb{R}^3 , est engendrée par $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

Théorème 39 Soit A une matrice de taille $m \times n$

1. $\ker A = (\text{Lign}A)^\perp$
2. $(\text{Im}A)^\perp = \ker(A^T)$

Preuve

1. $A \cdot \vec{c} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{x} \perp$ chaque ligne de A .
2. $\text{Im}A = \text{Col}A = \text{Lign}(A^T)$ et $[\text{Lign}(A^T)]^\perp = \ker(A^T)$

Calcul d'angle Le produit scalaire permet aussi de calculer l'angle entre deux vecteurs :

Théorème 40 Loi du cosinus :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cos \alpha$$

Le produit scalaire de deux vecteurs est :

1. Nul quand $\cos \alpha = 0$ les vecteurs sont perpendiculaire
2. maximal quand $\cos \alpha = 1$ les vecteurs sont colinéaire et de même sens
3. minimal quand $\cos \alpha = -1$. Les vecteurs sont colinéaires et de sens opposé.

Famille orthogonales

Définition 42 Une famille $\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k\}$ des vecteurs de \mathbb{R}^n est **orthogonale** si $\vec{u}_i \perp \vec{u}_j$ pour tout $i \neq j$. Cette famille est **orthonormée** si de plus $\|\vec{u}_i\| = 1$ pour tout i .

Exemple La base canonique $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ est orthonormée. En général on appelle Base orthogonale de W une famille orthogonale ordonnée qui forme une base de W . de même pour une base orthonormée.

Théorème 41 Une famille orthogonale de vecteurs non nuls est libres.

Preuve

Soit une famille orthogonale de \mathbb{R}^n avec $u_i \neq 0 \forall 1 \leq i \leq k$. Soit $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}$ et supposons $\alpha_1 \vec{u}_1 + \dots + \alpha_k \vec{u}_k = \vec{0}$.

On doit montrer que $\alpha_1 = \dots = \alpha_k = 0$.

On calcule $0 = (\alpha_1 \vec{u}_1 + \dots + \alpha_k \vec{u}_k) \cdot \vec{u}_i$

Par la distributivité on a que c'est égal à $\alpha_1 \vec{u}_1 \cdot \vec{u}_i + \dots + \alpha_k \vec{u}_k \cdot \vec{u}_i$

Mais comme $\vec{u}_i \perp \vec{u}_j$ alors la seule possibilité est que tout les $\alpha_i = 0$

Coordonnées dans une base orthogonale

Théorème 42 Pour tout vecteur $\vec{w} \in W$, on a $\vec{w} = \alpha_1 \vec{u}_1 + \dots + \alpha_k \vec{u}_k$ et

$$\alpha_j = \frac{\vec{w} \cdot \vec{u}_j}{\|\vec{u}_j\|^2}$$

On voit ici que la preuve sera du même principe que d'autre déjà faite

Exemple

On construit une base orthogonale de \mathbb{R}^3 en commençant avec le plan d'équation $2x - 3y + z = 0$ On choisit une base :

$$\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 13 \end{pmatrix} \right) \text{ qui est une base orthogonale de } W$$

$$\mathcal{C} = \left(\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 13 \end{pmatrix} \right)$$

Lundi 23 décembre 2024 — Cours 23 : Famille Orthogonales

Familles orthogonales

Définition 43 Une famille $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k)$ de vecteurs \mathbb{R}^n est **orthogonale** si $\vec{u}_i \perp \vec{u}_j$ pour tout $i \neq j$. Cette famille est **orthonormée** si de plus $\|\vec{u}_i\| = 1$ pour tout i .

Rappel

1. Deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} de \mathbb{R}^n sont **orthogonaux** si leur produit scalaire est nul

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$$

2. Par distributivité du produit scalaire, $\vec{u} \perp \vec{a}$ et $\vec{u} \perp \vec{b}$ implique que $\vec{u} \perp \text{Vect}\{\vec{a}, \vec{b}\}$

Théorème 43 Une famille orthogonale de vecteurs non nuls est libres

Coordonnées dans une base orthogonale

Soit W un sous-espace de \mathbb{R}^n et $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k)$ une base **orthogonale** de W .

Théorème 44 Pour tout vecteurs $\vec{w} \in W$, on a $\vec{w} = \alpha_1 \vec{u}_1 + \dots + \alpha_k \vec{u}_k$
et

$$\alpha_j = \frac{\vec{w} \cdot \vec{u}_j}{\|\vec{u}_j\|^2}$$

Exemple

On construit une base orthogonale de \mathbb{R}^3 en commençant avec le plan d'équation $2x - 3y + z = 0$.

La méthode de Gausse nous fournit une base, par exemple, quitte à amplifier pour éviter des fractions, $\vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et

$$\vec{b}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Or, ces deux vecteurs ne sont pas orthogonaux. Pour trouver un vecteurs de W orthogonal à \vec{b}_1 , je peux par exemple le

choisir de la forme $\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ c \end{pmatrix}$, le produit scalaire avec \vec{b}_1 vaut bien

zéro, mais il faut encore que $c = 13$ pour que l'équation du plan W soit satisfaite. Ainsi on obtient une base orthogonale de W avec

$$\vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{b}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 13 \end{pmatrix}$$

On y ajoute encore $\vec{b}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \in W^\perp$ pour avoir une famille orthogonale de \mathbb{R}^3

On a donc la famille ordonnée $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 13 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$

est une famille orthogonale de vecteurs non nuls de \mathbb{R}^3 , elle en forme donc une base.

Ce qu'on fait ici c'est qu'on a un plan dans un espace et on y rajouter un vecteurs qui y est orthogonale pour pouvoir avoir accès à tout l'espace, c'est comme si on pouvait "translater" le plan dans l'espace.

On cherche maintenant $(\vec{u})_{\mathcal{B}}$ qui est donné par :

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

On calcule maintenant $\vec{u} \cdot \vec{b}_1 = 5$, $\vec{u} \cdot \vec{b}_2 = -12$ et finalement $\vec{u} \cdot \vec{b}_3 = -2$.

C'est la même principe qu'en physique lorsqu'un fait des projection du genre $\vec{v} \cdot \hat{e}_x$, on prend la composant sur l'axe du vecteurs.

Ensuite afin de pouvoir le récrire dans la base il faut aussi gerer la longueur par rapport au vecteurs $\vec{b}_1 \dots$ qui ont leur propre longueur, il font donc faire le ratio ce qui nous force à calculer les normes. $\|\vec{b}_1\|^2 = 13$, $\|\vec{b}_2\|^2 = 182$, $\|\vec{b}_3\|^2 = 14$
On a qu'utiliser le théorème vu au dessus :

$$(\vec{u})_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 5/13 \\ -12/182 \\ -2/14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/13 \\ -6/91 \\ -1/7 \end{pmatrix}$$

schéma du
prof

Algèbre linéaire/Screenshot 2024-12-04 101913.png

Ce qu'on fait ici c'est prendre le plan \mathbb{R}^3 à partir d'une base et donc on prend trois vecteurs pour couvrir tout l'espace. Mais attention à la consigne qui pourrait seulement demander le plan dans une famille de vecteurs orthogonale

Matrice orthogonales

Théorème 45 Les colonnes d'une matrice U de taille $m \times n$ sont orthonormées si et seulement si $U^T U = I_n$

ATTENTION, la réciproque ne marche pas $U U^T \neq I_n$ ça ne marche pas du tout

Preuve Si $U = (\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n)$, alors le coefficient (i, j) de la matrice $U^T U$ est exactement $\vec{u}_i^T \vec{u}_j = \vec{u}_i \cdot \vec{u}_j$.

Définition 44 Une matrice *carrée* U est *orthogonale* si $U^T U = I_n$. Autrement dit $U^{-1} = U^T \Leftrightarrow$ colonnes (et lignes !) de U sont orthonormées.

Une matrice orthogonale représente un transformation linéaire qui préserve les distances et l'orthogonalité (c'est donc une **isométrie** de \mathbb{R}^n , par exemple une rotation ou une symétrie)

Préservation des longueurs

Théorème 46 Soit U une matrice orthogonale. Alors

- $\|U\vec{x}\| = \|\vec{x}\|$ pour tout $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$
- $U\vec{x} \cdot U\vec{y} = \vec{x} \cdot \vec{y}$
- $U\vec{x} \perp U\vec{y} \Leftrightarrow \vec{x} \perp \vec{y}$

Problème technique J'ai eu un problème avec overleaf donc j'ai pas pu écrire pendant le cours donc j'ai écrit un peu que les théorèmes et moins les exemples

ATTENTION Si U est orthogonale, alors aussi $UU^T = I_n$ Mais

- si A est carrée avec $A^T A$ diagonale, AA^T n'est pas diagonale en général
- Si A n'est pas carrée avec $AA^T = I_n$, alors $A^T A \neq I_m$ en général

Projection orthogonale Soit W un sous-espace de \mathbb{R}^n dont on dispose d'une base orthogonale $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k)$

Pour $\vec{y} \in \mathbb{R}^n$ on cherche :

- Le vecteurs $\hat{y} \in W$ tel que
- le vecteur $\vec{z} = \vec{y} - \hat{y}$ est perpendiculaire à W .

Théorème 47 Tout vecteurs \vec{y} de \mathbb{R}^n s'écrit de manière unique $\vec{y} = \hat{y} + \vec{z}$ où $\hat{y} \in W$ et $\vec{z} \in W^\perp$

Remarque personnelle Ce qu'on voit ici c'est qu'il suffit de prendre un vecteurs qui se trouve dans le plan et de le "monter" à la hauteur du vecteurs avec \vec{z} qui lui est $\perp W$

Méthode

1. Vérifier que la base de W est orthogonale ! tester toute les pairs $\vec{u}_i \cdot \vec{u}_j = 0$ pour tout les $i \neq j$
2. Calculer les normes au carré des vecteurs de base \vec{u}_i
3. Calculer les produits scalaires $\vec{y} \cdot \vec{u}_i$
4. Calculer la projection

$$\hat{y} = \frac{\vec{y} \cdot \vec{u}_1}{\|\vec{u}_1\|^2} \vec{u}_1 + \dots + \frac{\vec{y} \cdot \vec{u}_k}{\|\vec{u}_k\|^2} \vec{u}_k$$

5. Calculer $\vec{z} = \vec{y} - \hat{y}$ et **vérifier** que $\vec{z} \perp W$.
6. **Remarque** Si $\vec{y} \in W$, alors $\hat{y} = \vec{y}$ et $\vec{z} = \vec{0}$

Projection, cas d'une base orthonormée

Soit $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k)$ une base **orthonormée** de W , alors tous les \vec{u}_i sont unitaires et :

$$\begin{aligned} \text{proj}_W \vec{y} &= (\vec{y} \cdot \vec{u}_1) \vec{u}_1 + \dots + (\vec{y} \cdot \vec{u}_k) \vec{u}_k \\ &= (\vec{u}_1^T \vec{y}) \vec{u}_1 + \dots + (\vec{u}_k^T \vec{y}) \vec{u}_k \\ &= U \begin{pmatrix} \vec{u}_1^T \vec{y} \\ \vdots \\ \vec{u}_k^T \vec{y} \end{pmatrix} = UU^T \vec{y} \end{aligned}$$

Théorème 48 Soit U la matrice dont les colonnes sont les vecteurs $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k$ d'une base *orthonormée* de W . Alors :

$$\text{proj}_W \vec{y} = UU^T \vec{y}$$

Approximation quadratique

La distance minimale entre un vecteurs \vec{y} et un sous-espace W de \mathbb{R}^n est réalisée par $\vec{z} = \vec{y} - \text{proj}_W \vec{y}$

Théorème 49 Pour tout $\vec{w} \in W$ on a $\|\vec{y} - \vec{w}\| \geq \|\vec{y} - \text{proj}_W \vec{y}\|$

On appelle ce vecteurs \hat{y} la meilleure approximation quadratique de \vec{y} dans W dans le sens où elle minimise le carré de la distance qui est calculée par la somme des carrés des coordonnées.

Idée de la preuve L'idée est d'écrire un vecteurs \vec{w} de W de manière compliquée $\vec{w} = \hat{y} + (\vec{w} - \hat{y})$ afin de diviser en deux parti le vecteurs une qui est dans W^\perp et l'autre dans W .

Le procédé de Gram Schmidt

- **But** Trouver une base orthogonale ou rthonormée d'un sous-espace W de \mathbb{R}^n
- **Idée** Utiliser de manière inductive les projections orthogonales. On considère dans \mathbb{R}^4 l'hyperplan W donnée par l'équation

$$x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 0$$

1. On cherche d'abord une base, par exemple celle faite avec la méthode de gausse :

$$\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

on note les vecteurs $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3$

2. On garde le premier vecteurs intacte et on va construire les autres vecteurs en fonction de celui la et donc

$$\vec{c}_1 = \vec{b}_1$$

On projette \vec{b}_2 sur $\text{Vect}\{\vec{c}_1\}$ et on choisira $\vec{c}_2 = \vec{b}_2 - \hat{b}_2$.

$$3. \text{proj}_{\text{Vect}\{\vec{b}_1\}} \vec{b}_2 = \frac{\vec{b}_1 \cdot \vec{b}_2}{\|\vec{b}_1\|^2} \vec{b}_1 = \frac{2}{5} \vec{b}_1 = \begin{pmatrix} -4/5 \\ 2/5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

On change \vec{b}_2 pour le rendre orthogonal à \vec{c}_1 :

$$\text{Et donc } \vec{c}_2 = \vec{b}_2 - \hat{b}_2 = \begin{pmatrix} -1/5 \\ -2/5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Maintenant que nous avons une base orthogonale du plan $V = \text{Vect}\{\vec{b}_1, \vec{b}_2\}$, à savoir (\vec{c}_1, \vec{c}_2) , les formules de projection sont à notre disposition pour calculer

$$\hat{b}_3 = \text{proj}_V \vec{b}_3 \text{ et } \vec{c}_3 = \vec{b}_3 - \hat{b}_3, \text{ où } \vec{b}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{On cherche maintenant } \hat{b}_3 = \frac{\vec{b}_3 \cdot \vec{c}_1}{\|\vec{c}_1\|^2} \vec{c}_1 + \frac{\vec{b}_3 \cdot \vec{c}_2}{\|\vec{c}_2\|^2} \cdot \vec{c}_2 = \dots = \begin{pmatrix} -5/6 \\ 1/3 \\ 1/6 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Et donc :

$$\vec{c}_3 = \vec{b}_3 - \hat{b}_3 = \begin{pmatrix} -1/6 \\ -1/3 \\ -1/6 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Nous avons ainsi construit une base orthogonale $\mathcal{C} = (\vec{c}_1, \vec{c}_2, \vec{c}_3)$ de W . elle a les propriétés suivantes :

- Le vecteur $\vec{c}_1 = \vec{b}_1$
- Le vecteurs \vec{c}_k est combinaison linéaire des vecteurs $\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_k$, en particulier c'est un vecteurs de W .

— Jeudi 5 décembre 2024 — **Cours 24 : moindre carré équation normale et les corps**

Suite de l'exemple

Rappels

Soit A une matrice de taille $n \times m$. Alors A^T est de taille $m \times n$.

1. Les lignes de A^T sont les **colonnes** \vec{a}_i de A
2. $A^T \vec{x} = \vec{0}$ si et seulement si $\vec{x} \perp \text{Im} A$
3. Les coefficients $(A^T A)_{ij}$ sont les produits scalaires $\vec{a}_i \cdot \vec{a}_j$
4. Les colonnes de A sont orthogonales si et seulement si $A^T A$ est diagonale
5. Les coefficients de AA^T sont les produits scalaires des **lignes** de A
6. Les lignes de A sont orthogonales si et seulement si AA^T est diagonale

Le procédé de Gram-Schmidt : Théorie

But trouver une base orthogonale ou orthonormée d'un sous-espace W de \mathbb{R}^n .

Idée utilise de manière inductive les projection orthogonales.

Théorème 50 Soit $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k)$ une base de W , sous-espace de \mathbb{R}^n
Les vecteurs suivant forment une base orthogonale de W

1. $\vec{v}_1 = \vec{u}_1$
2. $\vec{v}_2 = \vec{u}_2 - \frac{\vec{u}_2 \cdot \vec{v}_1}{\|\vec{v}_1\|^2} \vec{v}_1$
3. $\vec{v}_k = \vec{u}_k - \frac{\vec{u}_k \cdot \vec{v}_1}{\|\vec{v}_1\|^2} \vec{v}_1 - \dots - \frac{\vec{u}_k \cdot \vec{v}_{k-1}}{\|\vec{v}_{k-1}\|^2} \vec{v}_{k-1}$

Factorisation QR

Définition 45 Soit A une matrice $m \times n$ dont les colonnes sont libres. Alors il existe une factorisation $A = QR$ où les colonnes de $Q \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ sont **orthonormées** et $R \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ est triangulaire supérieure et inversible avec des coefficients diagonaux strictement positifs.

Preuve

L'idée de la preuve est d'appliquer la méthode de Gram-Schmidt pour obtenir une base orthogonale Q de $\text{Im}A$ à partir des colonnes de A (sans en changer l'ordre), puis on normalise les vecteurs. On forme Q avec ces vecteurs (colonnes).

La k -ème colonne de A est combinaison linéaire des k premières colonnes de Q et le dernier coefficient est toujours positif. On constate cela en utilisant les formules de Gram-Schmidt, ou alternativement on se souvient que la base orthogonale construite consiste à soustraire à \vec{a}_k sa projection orthogonale sur l'espace engendré par les colonnes précédentes. Après normalisation le k -ème coefficient reste positif.

La matrice R a pour colonnes ces coefficients $\vec{r}_k = (\vec{a}_k)_Q$

Exemple

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. On cherche sa factorisation QR .

$$1. \vec{c}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{c}_2 = \vec{a}_2 - \hat{a}_2$$

$$\hat{a}_2 = \frac{\vec{a}_2 \cdot \vec{c}_1}{\|\vec{c}_1\|^2} \cdot \vec{c}_1 = \frac{2}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{c}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$2. \text{Normalisation : } \vec{q}_1 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ ensuite } \vec{q}_2 = \frac{\vec{c}_2}{\|\vec{c}_2\|} = \frac{\vec{c}_2'}{\|\vec{c}_2'\|}$$

$$= \begin{pmatrix} -2/\sqrt{15} \\ 1/\sqrt{15} \\ 1/\sqrt{15} \\ 3/\sqrt{15} \end{pmatrix}$$

3.

$$Q = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & -2/\sqrt{15} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{15} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{15} \\ 0 & 3/\sqrt{15} \end{pmatrix}$$

4. écrire \vec{a}_1, \vec{a}_2 comme combinaison linéaire de \vec{q}_1, \vec{q}_2 .

- $\vec{a}_1 = \vec{c}_1 = \sqrt{3}\vec{q}_1$, par la suite $\vec{a}_2 = \vec{c}_2 + \hat{a}_2 =$

$$\frac{\sqrt{15}}{3} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{2}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\bullet \vec{c}_2 = \frac{\sqrt{15}}{3} \cdot \begin{pmatrix} -2/\sqrt{15} \\ 1/\sqrt{15} \\ 1/\sqrt{15} \\ 3/\sqrt{15} \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{15}}{3} \vec{q}_2 + \frac{2\sqrt{3}}{3} \vec{q}_1$$

On a donc

$$R = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & \frac{2\sqrt{3}}{3} \\ 0 & \frac{\sqrt{15}}{3} \end{pmatrix}$$

R est la matrice qui a dans ses coefficients de \vec{a}_1 et dans sa deuxième colonnes les coefficients de \vec{a}_2

C'est une méthode qui peut s'utiliser dans la pratique, on l'utilise dans la méthode des moindres carrés

Méthode des moindres carrés

On cherche la "meilleure solution possible" d'un système incompatible $A\vec{x} = \vec{b}$, où A est une matrice $m \times n$.

Définition 46 Un vecteurs $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$ est une *solution au sens des moindres carrés* pour le système $A\vec{x} = \vec{b}$ si, pour tout $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$

$$\|\vec{b} - A\hat{x}\| \leq \|\vec{b} - A\vec{x}\|$$

Comme $A\vec{x} \in \text{Im}A$, le système est incompatible si $\vec{b} \notin \text{Im}A$. Le vecteur le plus proche de \vec{b} dans $\text{Im}A$ est sa projection orthogonale

$$\hat{b} = \text{proj}_{\text{Im}A} \vec{b}$$

Problème équivalent

pour trouver les solutions du système incompatible

$$A\vec{x} = \vec{b}$$

Au sens des moindres carrés, il faut résoudre le système

$$A\hat{x} = \hat{b}$$

Il y a en général une infinité de solution au sens des moindres carrés, à moins que l'application linéaire représentée par A ne soit injective.

Supposons que \hat{x} soit solution au sens des moindres carrés si bien que $A\hat{x} = \hat{b} = \text{proj}_{\text{Im}A} \vec{b}$

Alors $\vec{b} - \hat{b} \perp \text{Im}A$ et $\vec{b} - \hat{b} = \vec{b} - A\hat{x}$ donc $\vec{b} - A\hat{x} \perp \vec{a}_i \quad \forall i$

Autrement dit :

$$\vec{a}_i(\vec{b} - A\hat{x}) = 0 \quad \forall i$$

Et que donc on peut le réécrire

$$\vec{a}_i^T(\vec{b} - A\hat{x}) = \vec{a}_i^T \vec{b} - \vec{a}_i^T A\hat{x}$$

Ainsi

$$A^T \cdot \vec{b} = A^T A\hat{x} \quad (7.1)$$

\hat{x} est solution de l'équation (1)

Equation normale

Théorème 51 *l'ensemble des solutions $A\vec{x} = \vec{b}$ au sens des moindres carrés est égal à l'ensemble non-vide des solutions de l'équation normale :*

$$A^T A \hat{x} = A^T \vec{b}$$

Preuve

Soit \hat{x} une solution de l'équation normale. Nous devons montrer que $A\hat{x} = \hat{b}$. Nous savons que $A^T(\vec{b} - A\hat{x}) = \vec{0}$. Le vecteurs $\vec{z} = \vec{b} - A\hat{x}$ est donc orthogonal à ImA . Mais alors

$$\vec{b} = A\hat{x} + \vec{z}$$

Avec $A\hat{x} \in ImA$ et $Z \in (ImA)^\perp$. Cette écriture est **unique** ainsi ;

$$A\hat{x} = \hat{b}$$

Question de l'unicité

Soit \hat{x} une solution au sens des moindres carrés du systèmes $A\vec{x} = \vec{b}$

Définition 47 *La norme du vecteurs $\vec{b} - A\hat{x}$ est appelée écart quadratique*

Théorème 52 *La solution \hat{x} au sens des moindres carrés est unique si et seulement si les colonnes de A sont libres, ce qui est équivalent à exiger que la matrice $A^T A$ est inversible*

Si $A^T A$ est inversible, alors on tire de $A^T A \hat{x} = A^T \vec{b}$ que

$$\hat{x} = (A^T A)^{-1} A^T \vec{b}$$

Preuve

Supposons d'abord que les colonnes de A sont libres, si bien que le noyau de A est nul. On va montrer que la matrice carrée $A^T A$ est inversible en prouvant que son noyau est nul.

Supposons que $A^T A \vec{x} = \vec{0}$, alors $A\vec{x} \perp ImA$ or $A\vec{x} \in ImA$ et aussi $(ImA)^\perp$. Donc $A\vec{x} = \vec{0}$. Comme $\ker A = \{\vec{0}\}$, $\vec{x} = \vec{0}$.

Réciproquement, si $A^T A$ est inversible, $A^T A$ est injective. Pour montrer que les colonnes de A sont libres calculons le noyau de A . Si $A\vec{x} = \vec{0}$, Alors $A^T A \vec{x} = A^T \vec{0} = \vec{0}$. Par hypothèse $\vec{x} = \vec{0}$

Le corps \mathbb{F}_4

Nous avons rencontré les corps \mathbb{F}_p qui ont un nombre p , premier, d'éléments. Il s'agit des nombres entiers **modulo p** que l'on considère comme le restes possibles de la division par p .

Les entiers modulo 4 ne forment pas un corps car $2 \cdot 2 = 0$. Le produit $\mathbb{F}_2 \times \mathbb{F}_2$ non plus car $(1, 0) \cdot (0, 1) = (0, 0)$.

Nous allons maintenant remplacer les entiers par les polynômes $\mathbb{F}_2[t]$ et la division euclidienne par la division polynomiale.

1. les restes de la division par un polynôme de degré plus petit, on travaille donc dans l'ensemble

$$\{0, 1, t, t + 1\}$$

Nous connaissons tous les polynômes de degré 2, il s'agit de $t^2 = t \cdot t$, $t^2 + t = t(t + 1)$, $t^2 + 1 = (t + 1)^2$ et $t^2 + t + 1$

Si on choisit un polynôme non irréductible, le résultats peut être divisé et donc le produit est nul.

L'addition dans \mathbb{F}_4

Le produit est donnée par le produit des polynôme. Nous avons calculé le produit $t \cdot t$ par division euclidienne, on peut aussi simplement utiliser le fait que $t^2 + t + 1 = 0$ dans \mathbb{F}_4

$$t \cdot t = t^2 = t^2 + t + 1 + t + 1 = t + 1 \text{ et } t(t + 1) = t^2 + t + 1 + 1 = 1$$

\cdot	0	1	t	$t + 1$
0	0	1	t	$t + 1$
1	0	1	t	$t + 1$
t	0	t	$t + 1$	1
$t + 1$	0	$t + 1$	1	t

Les autres produits manquants s'effectuent de la même manière.

Mardi 10 décembre 2024 — Cours 25 : corps \mathbb{F}_4

La multiplication dans \mathbb{F}_4

Pour ne pas confondre l'indéterminée t des polynômes et l'élément t donné comme reste de division, on choisit d'appeler α le reste t ou plus précisément la classe $[t]$ de t dans "l'anneau des polynôme $\mathbb{F}_2[t]$ modulo $t^2 + t + 1$ "

1. Comme **ensemble** $\mathbb{F}_4 = \{0, 1, \alpha, \alpha + 1\}$
2. **l'addition** est celle des polynômes, chaque éléments est son propre opposé.
3. la **multiplication** est celle des polynôme, modulo $t^2 + t + 1$, en particulier $\alpha^2 = \alpha + 1$. On a donc aussi $\mathbb{F}_4 = \{0, 1, \alpha, \alpha^2\}$

On peut par exemple prendre $\alpha \cdot \alpha^2 = \alpha^3 = 1$

Ici on a choisi $t^2 + t + 1$ pour pouvoir construire nos calcul, mais le critère pour choisir est que c'est un polynôme dans \mathbb{F}_2 avec des coefficient irréductible

Le polynôme $t^2 + t + 1 \in \mathbb{F}_4[t]$

Le polynôme $p(t) = t^2 + t + 1 \in \mathbb{F}_2[t]$ est irréductible, mais on peut aussi le voir comme un polynôme de $\mathbb{F}_4[t]$, car ses coefficients sont dans $\mathbb{F}_2 \subset \mathbb{F}_4$.

Calculons $p(\alpha)$

$$p(\alpha) = \alpha^2 + \alpha + 1 = \begin{cases} \alpha + 1 + \alpha + 1 = 2\alpha + 2 = 0 \\ [t]^2 + [t] + 1 = [t^2 + t + 1] = 0 \end{cases}$$

le deuxième cas est juste par la définition de $+$ et \cdot dans \mathbb{F}_4
Donc, $t - \alpha = t + \alpha$ divise $t^2 + t + 1$ dans \mathbb{F}_4 . Effectuons la divisions euclidienne.

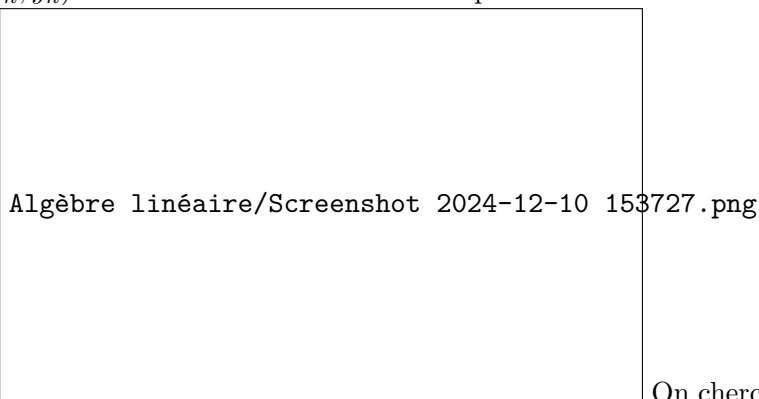
$$\begin{array}{r|l} t^2 + t + 1 & t + \alpha \\ \underline{t^2 + \alpha t} & \underline{t + (\alpha + 1)} \\ (\alpha + 1)t + 1 & \\ \underline{(\alpha + 1)t + \alpha(\alpha + 1)} & \\ 0 & \end{array}$$

PS. (j'ai galéré à faire ça sur latex donc profitez un peu)

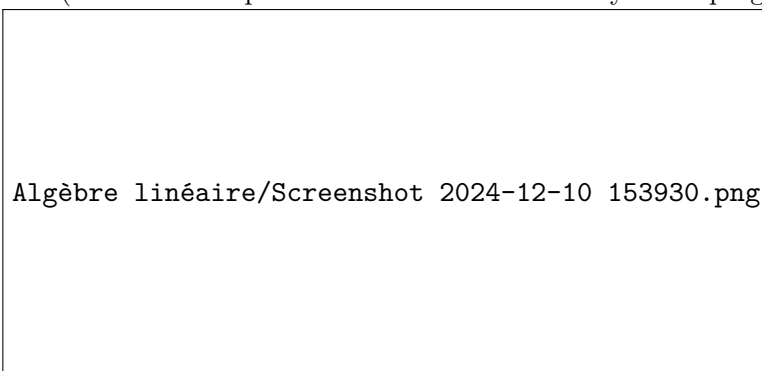
On obtient $t^2 + t + 1 = (t + \alpha)(t + \alpha + 1)$

Régression linéaire : Objectif

On se donne un "nuage" de points dans le plan, donnés par leurs ordonnées $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ et on aimerait trouver la droite qui donne la meilleures ap-



proximation : On cherche la droite d'équation $y = at + b$ la plus proche des points $(x_1, y_1) \dots (x_n, y_n)$ dans le sens où les distances verticales entre les point et la droite sont minimisées (voici un exemple tiré de UC Buisness Analytics R programming Guide)



Forme Matricielle

On écrit le système ci-dessus sous forme matricielle

$$\begin{pmatrix} x_1 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ x_n & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

et on utilise l'équation normale pour résoudre

$$\begin{pmatrix} \sum x_i^2 & \sum x_i \\ \sum x_i & n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{a} \\ \hat{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum x_i y_i \\ \sum y_i \end{pmatrix}$$

exemple

On cherche la droite de régression linéaire pour les points $(-2, -1), (0, 1), (2, -2), (4, 1)$

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 1 \\ 2 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad A^T A = \begin{pmatrix} 24 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A^T \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

On doit résoudre le système $A^T A \cdot \hat{a} = \hat{b}$ Ce qui nous donne

$$\left(\begin{array}{cc|c} 24 & 4 & 2 \\ 4 & 4 & -1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 3/20 \\ 0 & 1 & -2/5 \end{array} \right) \text{ et donc, } y = \frac{3}{20}t - \frac{2}{5}$$

la droite qu'on trouve est toujours unique, à part dans le cas où le noyau de la matrice n'est pas nulle, et le seul moyen d'y arriver et que

la matrice soit $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ce qui ferait que tous les points se trouvent au

même endroits.

Debriefing sur le produit scalaire

Nous avons utilisé jusqu'ici le produit scalaire standard dans \mathbb{R}^n . Les propriétés du produit scalaire font que d'associer à une paire de vecteurs \vec{u} et \vec{v} le produit $\vec{u} \cdot \vec{v}$ est une opération linéaire en chaque variable.

1. $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$
2. $\vec{u} \cdot (\alpha \vec{v}) = \alpha (\vec{u} \cdot \vec{v})$
3. $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w}$
4. $(\alpha \vec{u}) \cdot \vec{v} = \alpha (\vec{u} \cdot \vec{v})$

Formes bilinéaires

Ceci nous motive à introduire un nom à d'autre application de deux variable, définies en général sur un espace vectoriel arbitraire. Soit V un espace vectoriel. Une **forme bilinéaire symétrique** est une application $V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ qui associe à tout couple de vecteurs (u, v) un nombre réel $\langle u, v \rangle$ tel que

1. commutativité $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$
2. distributivité $\langle u + u', v \rangle = \langle u, v \rangle + \langle u', v \rangle$
3. linéarité $\langle \alpha u, v \rangle = \alpha \langle u, v \rangle$

Une forme linéaire est une application linéaire $V \rightarrow \mathbb{R}$

Exemple Le produit scalaire standard de \mathbb{R}^2 est une forme bilinéaire symétrique.
Il y a de nombreuses autres formes bilinéaires symétriques. Par exemple $\left\langle \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \right\rangle = 7u_1v_1 + 2u_1v_2 + 2u_2v_1 + 4u_2v_2$

Matrices symétriques

Proposition

Théorème 53 On représente une forme bilinéaire symétrique sur \mathbb{R}^n par une matrice symétrique A carrée de taille $n \times n$.

Preuve

On pose $a_{ij} = \langle e_i, e_j \rangle = \langle e_j, e_i \rangle = a_{ji}$ si bien que

$$\langle u, v \rangle = u^T A v$$

En effet, $u = u_1e_1 + \dots + u_n e_n$ et $v = v_1e_1 + \dots + v_n e_n$. Alors :

$$\begin{aligned} \langle u, v \rangle &= \sum_i \sum_j u_i v_j \langle e_i, e_j \rangle = \sum_i \sum_j u_i v_j a_{ij} = \sum_i u_i \left(\sum_j a_{ij} v_j \right) \\ &= \sum_i u_i (Av)_i = u^T Av \end{aligned}$$

Exemple

Le produit scalaire standard de \mathbb{R}^2 est une forme bilinéaire symétrique représentée par la matrice I_2

En effet $\langle \vec{e}_i, \vec{e}_j \rangle = \delta_{ij} \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases}$ La forme bilinéaire symétrique

$$\left\langle \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \right\rangle = 7u_1v_1 + 2u_1v_2 + 2u_2v_1 + 4u_2v_2$$

$$\langle \vec{e}_1, \vec{e}_1 \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = 7 \dots A = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\left\langle \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \right\rangle = (u_1, u_2) \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

Espace préhilbertiens

Le produit scalaire euclidien définit aussi une norme :

$$\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2 \geq 0$$

On arrive ici à la notion de produit scalaire dans le sens large.

Définition 48 Soit V un espace vectoriel. Un **produit scalaire** est une forme bilinéaire symétrique $V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

1. commutativité $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$ pour tous $u, v \in V$
2. distributivité $\langle u + u', v \rangle = \langle u, v \rangle + \langle u', v \rangle$ pour tout $u, u', v \in V$
3. linéarité $\langle \alpha u, v \rangle = \alpha \langle u, v \rangle$ pour tous $u, v \in V$ et $\alpha \in \mathbb{R}$
4. $\langle u, u \rangle \geq 0$ et on a l'égalité si et seulement si $u = 0$.

Produits
scalaires,
exemple

Le produit scalaire standard de \mathbb{R}^2 est un produit scalaire : c'est une forme bilinéaire symétrique et $\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle = \vec{u}^T I_2 \vec{u} = u_1^2 + u_2^2 \geq 0$.

La forme bilinéaire symétrique :

$$\left\langle \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \right\rangle = 7u_1v_1 + 2u_1v_2 + 4u_2v_2$$

Ici

$$\begin{aligned} \left\langle \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \right\rangle &= 7u_1^2 + 4u_1u_2 + 4u_2^2 \\ &= 2(u_1^2 + 2u_1u_2 + u_2^2) + 5u_1^2 + 2u_2^2 \\ &\geq 0 \\ &= 0 \Leftrightarrow u_1 = u_2 = 0 \end{aligned}$$

Exemple à avoir, $u_1v_1 - u_2v_2$ n'est pas un produit scalaire

Exemples :
polynômes et
fonctions

Une espace vectoriel muni d'un produit scalaire est appelé **espace préhilbertien**

1. **Polynômes** dans \mathbb{P}_n on pose (par exemple)

$$\langle p, q \rangle = \int_{-1}^1 p(t)q(t)dt$$

Ainsi \mathbb{P}^n est un espace préhilbertien

2. **Fonction réelles.** Dans $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ on pose (par exemple)

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(x)g(x)dx$$

Ainsi $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ est un espace préhilbertien.

Exemple

Dans \mathbb{P}_2 on pose

$$\langle p, q \rangle = \int_{-1}^1 p(t)q(t)dt$$

1. $\langle 1, 1 \rangle = \int_{-1}^1 1dt = 2$

2. $\langle 1, t \rangle = \int_{-1}^1 t dt = 0$, ainsi les polynômes 1 et t sont orthogonaux
3. $\langle t, t \rangle = \int_{-1}^1 t^2 = 2/3$

Dans \mathbb{P}_1 , ce produit scalaire est représenté par la matrice

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2/3 \end{pmatrix}$$

On peut continuer avec toutes les autres paires possible jusqu'à pouvoir construire la matrice de \mathbb{P}_2 tel que

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2/3 \\ 0 & 2/3 & 0 \\ 2/3 & 0 & 2/5 \end{pmatrix}$$

Cela signifie que le produit scalaire $\langle p(t), q(t) \rangle$ se calcule en effectuant le produit matriciel

$$(p(t))_{Can}^T A (q(t))_{Can}$$

La base canonique n'est pas orthogonale. Le procédé de Gram Schmidt permet de la rendre orthogonale : $(1, t, t^2 - 1/3)$, ici $1/3$ est la projection orthogonale de t^2 sur $Vect\{1, t\}$

Algèbre linéaire/Screenshot 2024-12-10 163537.png

Matrice symétriques

Définition 49 Une matrice carrée A est *symétrique* si $A^T = A$

Exemple La matrices diagonales sont symétrique, mais aussi les matrices de la forme $B^T B$ puisque le coefficient (i, j) est $\vec{b}_1 \cdot \vec{b}_j = \vec{b}_j \cdot \vec{b}_i$

Théorème 54 Soit A une matrice symétrique soient \vec{u} un vecteurs propre de A pour la valeurs propre λ et \vec{v} un vecteurs propre de A pour une autre valeurs propre μ . Alors \vec{u} et \vec{v} sont orthogonaux

Preuve On doit montrer que $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.
L'astuce est de calculer $\lambda \cdot (\vec{u} \cdot \vec{v}) \stackrel{A\vec{u}=\lambda\vec{u}}{=} \lambda \vec{u} \cdot \vec{v} = A\vec{u} \cdot \vec{v} = (A\vec{u})^T \vec{v} = (\vec{u}^T A^T) \vec{v} = \vec{u}^T \cdot (A\vec{v}) \stackrel{df.}{=} \vec{u} \cdot A\vec{v} = \vec{u} \cdot \mu \vec{v} = \mu (\vec{u} \cdot \vec{v})$
Conclusion, comme $\lambda \neq \mu$, $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

Attention Si $\lambda = \mu$, ce raisonnement ne fonctionne pas, le résultat est faux en général

Exemple La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ est symétrique. On calcule $c_A(t) = (t-3)(t+1)$ et $E_3 = Vect\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ et $E_{-1} = Vect\left\{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$

On sait alors par la preuve faite au dessus. que $E_3 \perp E_{-1}$. En normalisant les vecteurs propres on obtient une base orthonormée $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}\right)$ la matrice $(Id)_{\mathcal{B}}^{can} = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix} = U$ est orthogonale.

Et donc $(Id)_{\mathcal{B}}^{can} = U^T$ et $U^T A U = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

Orthodiagonalisation

Définition 50 Une matrice carrée A est *diagonalisable par un changement de base orthonormée* ou *orthodiagonalisable* s'il existe une matrice P orthogonale telle que $P^T A P$ est diagonale.

Théorème 55 Une matrice A est orthodiagonalisable si et seulement si elle est symétrique

Théorème spectral

Théorème 56 Soit A une matrice symétrique. Alors

1. A admet n valeurs propres réelles, compte tenu de leur multiplicité
2. Pour toute valeurs propres λ on a $\text{mult}(\lambda) = \dim E_\lambda$
3. Si $\lambda \neq \mu$ alors $E_\lambda \perp E_\mu$
4. A est orthodiagonalisable

Suite

Si λ est une valeurs propre de multiplicité ≥ 2 , alors la base de vecteurs propres de E_λ fournie par la méthode de Gauss n'est pas orthogonale en général, il faut **Gram-Schmidter** pour obtenir une base orthonormée de vecteurs propres.

Exemple

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

On cherche $c_A(t)$:

$$\begin{aligned} (1-t)^2 \begin{vmatrix} 4-t & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 4-t & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} &= (1-t)^2 \cdot 1 \begin{vmatrix} 7-t & 2 & 1 \\ 2 & 7-t & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\ &= (1-t)^2 \begin{vmatrix} 7-t & 2 \\ 2 & 7-t \end{vmatrix} \\ &= (1-t)^2 (t^2 - 14t + 45) \\ &= (1-t)^2 (t-5)(t-9) \end{aligned}$$

On a donc trois valeurs propres 5, 9 et 1. avec $\text{mult}(1) = 2$.

On peut maintenant trouver les espaces propres :

$$E_5 = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1/2 \\ -1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} \right\} \quad E_9 = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} \right\}$$

On vérifie ensuite $E_5 \perp E_9$.

On doit encore calculer E_1 et trouver une base orthonormée de E_1 pour orthodiagonaliser A .

$$\begin{aligned} E_1 &= \ker(A - I_4) = \ker \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 3 \end{pmatrix} \\ &= \ker \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \ker \begin{pmatrix} 0 & -8 & 0 & -8 \\ 1 & 3 & 1 & 3 \\ \text{que} & \text{des} & 0 & \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ce qui nous donne que base :

$$\text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} -\sqrt{2}/2 \\ 0 \\ \sqrt{2}/2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -\sqrt{2}/2 \\ 0 \\ \sqrt{2}/2 \end{pmatrix} \right\}$$

On obtient une base orthonormée de vecteurs propres :

$$\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} -\sqrt{2}/2 \\ 0 \\ \sqrt{2}/2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -\sqrt{2}/2 \\ 0 \\ \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1/2 \\ -1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} \right)$$

$$U = \begin{pmatrix} -\sqrt{2}/2 & 0 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & -\sqrt{2}/2 & 1/2 & 1/2 \\ \sqrt{2}/2 & 0 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & \sqrt{2}/2 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

On trouve donc :

$$U^{-1} = U^T \text{ et } U^T A U = \text{diag}(1, 1, 5, 9)$$

Le but ici c'est de trouver une base qui est orthonormée et donc lorsqu'on trouve la base qui est U on peut faire un changement de base et c'est la formule de base $P^{-1}AP = B$ où B est la matrice dans la base changée qui est donc une diagonale.

Méthode

1. Vérifie que A est symétrique
2. Calculer $c_A(t)$ et en extraire les racines (valeurs propres)
3. Calculer les espaces propres pour chacun, le procédé de Gram-Schmidt donne une base orthonormée.
4. En assemblant les base des espaces propres on obtient une base orthonormée \mathcal{U} de \mathbb{R}^n
5. La matrice P dont les colonnes sont les vecteurs \vec{u}_i de \mathcal{U} est orthogonale et $P^T A P$ est diagonale

L'avantage ici c'est que l'inverse de la matrice de changement de base est juste sa transposée

Matrice de projection Soit \vec{u} un vecteurs unitaire et $A = \vec{u}\vec{u}^T$. Alors

$$A\vec{x} = \vec{u}(\vec{u}^T \vec{x}) = (\vec{u} \cdot \vec{x})\vec{u}$$

1. \vec{u} est un vecteur propre de A pour la valeur propre 1 car $(\vec{u} \cdot \vec{u})\vec{u} = \vec{u}$
2. Posons $W = \text{Vect}(\vec{u})$. Alors W^\perp est le noyau de A
3. Ainsi $E_1 = W$ et $E_0 = W^\perp$

Proposition La matrice $A = \vec{u}\vec{u}^T$ est la matrice de la projection orthogonale sur $W = \text{Vect}(\vec{u})$. On a $A\vec{x} = \text{proj}_{\vec{u}}\vec{x}$

C'est un cas particulier que nous avons vu pour UU^T , matrice de projection orthogonale quand les colonnes de U sont orthonormées.

Exemple

1. $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ Alors $\vec{u}\vec{u}^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ qui est une projection orthogonale sur Ox .
2. $\vec{u} = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}$ Alors $\vec{u}\vec{u}^T = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$ qui est une projection orthogonale sur l'axe $x = y$
3. $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ Alors $\vec{u}\vec{u}^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ qui n'est pas une matrice de projection

C'est en fait même la projection de (2) suivie d'une homothétie de rapport 2.

Décomposition spectrale

Définition 51 Soit A symétrique, U orthogonale et $U^T A U = D$ diagonale. L'ensemble des valeurs propres de A est appelé **spectre** de A

On prends $A = U D U^T = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n) \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{u}_1^T \\ \vec{u}_2^T \\ \vdots \\ \vec{u}_n^T \end{pmatrix}$

$= (\lambda_1 \vec{u}_1 \dots \lambda_n \vec{u}_n) \begin{pmatrix} \vec{u}_1^T \\ \vec{u}_2^T \\ \vdots \\ \vec{u}_n^T \end{pmatrix} = \lambda_1 \vec{u}_1 \vec{u}_1^T + \dots + \lambda_n \vec{u}_n \vec{u}_n^T = A$ et qui est la décomposition spectrale.

exemple

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ la matrice symétrique que nous avons ortho-diagonalisée mardi. Nous avons trouvé une base orthonormée de vecteurs propres (pour les valeurs propres -1 et 3) :

$$\mathcal{U} = (\vec{u}_1, \vec{u}_2) = \left(\begin{pmatrix} -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \end{pmatrix} \right)$$

La décomposition spectrale de A est donc

$$A = -1 \cdot \vec{u}_1 \vec{u}_1^T + 3 \cdot \vec{u}_2 \vec{u}_2^T$$

La caractéristique d'un corps fini

Soit K un corps fini (ayant un nombre fini d'éléments). Considérons l'ensemble de tous les multiples entiers de 1_K dans K , c'est à dire les éléments de la forme $n \cdot 1 = 1_K + \dots + 1_K$.

Comme K est fini, $\{n \cdot 1_K | n \in \mathbb{Z}\}$ aussi est fini. Autrement dit, il existe des entiers n tels que $n \cdot 1_K = 0$ (si $m \cdot 1_K = m' \cdot 1_K$, alors $(m - m') \cdot 1_K = 0_K$)

Définition 52 *Le plus petit entier non nul n tel que $n \cdot 1_K = 0$ s'appelle la **caractéristique** de K et on le not $\text{car}K$.*

Théorème 57 *La caractéristique d'un corps fini K est un nombre premier.*

La caractéristique d'un corps est un nombre entiers, ce n'est **pas** un élément du corps.

Exemple

1. $\text{car}\mathbb{F}_2 = 2$ et $\mathbb{F}_p = p$, premier
2. $\text{car}\mathbb{F}_4 = 2$
3. $\text{car}\mathbb{R} = 0$ $n \cdot 1 \neq 0$

lemme 1 *Dans un corps K , si $x, y \neq 0$, alors $x \cdot y \neq 0$*

Preuve On montre que si $x \cdot y = 0$, alors x ou y est nul. Supposons que l'un des deux est non nul, disons que c'est x . On doit prouver que $y = 0$. Comme $x \neq 0$, x^{-1} existe Alors

$$0 = x^{-1} \cdot 0 = x^{-1}(x \cdot y) = (x^{-1}x)y = 1_K \cdot y = y = 0$$

Soit K un corps fini et $n = \text{car}(K) \in \mathbb{N}^*$. On montre que si $n = a \cdot b$, alors a ou $b = 1$.

Comme $n \neq 1$ car $1 \cdot 1_K = 1_K \neq 0$, n sera donc premier.

Ce qu'on sait dès le début c'est $0 = n \cdot 1_K = a \cdot b \cdot 1_K = 1_K + \dots + 1_K = \text{par distributivité} = (1_K + \dots + 1_K) \cdot (1_K + \dots + 1_K)$ où la premier parenthèse est a et la deuxième est b on a alors $= (a \cdot 1_K) \cdot (b \cdot 1_K)$

Par le lemme, soit $a \cdot 1_K = 0$, soit $b \cdot 1_K = 0$. Or n est le plus petit entier non nul tel que $n \cdot 1_K = 0$.

Donc soit $a = n$ et $b = 1$, soit $b = n$ et $a = 1$.

La cardinalité d'un corps fini

Soit $p = \text{car}K$. Alors le corps \mathbb{F}_p agit sur K par multiplication

Définition 53 *Soit $k \in \mathbb{F}_p$ et $x \in K$. On pose $k \cdot x = (k \cdot 1_K) \cdot x$*

Cette action est bien défini puisque $p \cdot 1_K = 0$. Les propriétés de l'action sont toutes conséquence du fait que K est un corps.

proposition 2 *Soit K un corps fini et $p = \text{car}K$. Alors K est un \mathbb{F}_p -espace vectoriel.*

Théorème 58 *Soit K un corps fini et $p = \text{car}K$. Alors il existe n tel que K a p^n éléments. On appelle ce nombre la **cardinalité** de K .*

preuve

Si K est fini, $\dim_{\mathbb{F}_p} K < \infty$ et on peut choisir une base \mathcal{B} qui a n éléments. Le passage en coordonnées $(\)_{\mathcal{B}} : K \rightarrow (\mathbb{F}_p)^n$ tel que $x \rightarrow (x)_{\mathcal{B}}$

Ce passage est une application bijective. Et donc comme vu en AICC, Le nombre d'élément de le domaine et le codomaine est le même. La cardinalité de K est la même que celle de $(\mathbb{F}_p)^n$ et sa cardinalité vaut p^n .

Exemple

- $Card(\mathbb{F}_p) = p$
- $Card(\mathbb{F}_4) = 2^2$
- $Card(K) = 6$ est impossible

Construction de corps finis

La construction de \mathbb{F}_4 n'est pas isolé, la méthode générale fonctionne de la même manière. Soit p un nombre premier.

- Trouver un polynôme $p(t)$ unitaire irréductible de degré n dans $\mathbb{F}_p[t]$
- Considérer l'ensemble K de tous les restes de division par $p(t)$. il y en a p^n
- Définir la somme dans K comme dans $\mathbb{F}_p[t]$
- Défini le produit dans K par celui de $\mathbb{F}_p[t]$, **modulo** $p(t)$
- Alors K est un corps de cardinalité p^n

Exemple : le corps \mathbb{F}_{49}

Nous cherchons un polynôme irréductible de degré 2

proposition 3 Soit K un corps et $p(t) = t^2 - a$ si a n'est pas un carré (dans K), alors $p(t)$ est irréductible.

Preuve En effet $p(t)$ est irréductible si et seulement si il n'a pas de racine (car il est de degré 2), si et seulement si $p(x) \neq 0$ pour tout $x \in K$.

Or, $p(x) = x^2 - a = 0$ si et seulement si $a = x^2$ est un carré

Pour trouver un polynôme irréductible de degré 2 à coefficients dans \mathbb{F}_7 , nous cherchons à comprendre quels éléments sont des carrés.

x	0	1	2	3	4	5	6
x^2	0	1	4	2	2	4	1

Par exemple 3 n'est pas un carré dans \mathbb{F}_7 , donc $t^2 - 3$ est irréductible.

\mathbb{F}_{49} est l'ensemble des restes de la division par $t^2 - 3$ tel que

$$= \{a \cdot t + b | a, b \in \mathbb{F}_7\}$$

- Somme : $(3t + 2) + (3t + 5) = 6t + 7 = 6t = -t$
- Produit $(t + 1)(t + 4) = t^2 + 5t + 4 = 3 + 5t + 4 = 5t$ car on peut simplifier par $t^2 - 3$ on fait la division euclidienne par $t^2 - 3$ et on trouve 1 et le reste $5t$.

On pose $\alpha = [t]$ et comme $[t^2 - 3] = 0$ dans \mathbb{F}_{49}

$$\mathbb{F}_{49} = \{a \cdot \alpha + b | a, b \in \mathbb{F}_7\}$$

le produit est déterminé par $\alpha^2 = 3$

 Mardi 2 janvier 2024 — Cours 28 : Trucs à savoir pour l'examen

Objectifs du cours	Voici ici une liste du gros des choses à savoir pour les examens d'hiver 2025
Méthode de Gauss : échelonner	<ul style="list-style-type: none"> • Système incompatible • Aucune, une ou une infinité de solutions • Déterminer la dimension de la solution générale • Calculer le rang d'une application linéaire • Calculer la dimension du noyau • Inverser une matrice
Opération sur lignes/colonnes	<ul style="list-style-type: none"> • Calculer le déterminant • Calculer l'aire/volume d'une forme en se basant sur le déterminant • (Factorisation LU) • Extraire une base • Compléter une base
Application linéaire	<ul style="list-style-type: none"> • Matrice de changement de base • théorème du rang • injectivité / surjectivité • Reconnaître des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n, \mathbb{P}_n, M_{m \times n}(\mathbb{R})$ • Travailler avec les sous-espaces, noyau, etc...
Diagonalisation	<ul style="list-style-type: none"> • Calculer le polynôme caractéristique • Calculer les valeurs propres (réelles ou complexes) et les espaces propres (pas pour les valeurs complexes) • Trouver une base \mathcal{B} de vecteur propres • Ecrire la matrice de changement de base
Gram-Schmidt	<ul style="list-style-type: none"> • Produit scalaire standard, norme et orthogonalité • Formule pour la projection orthogonale (pour une base orthogonale ou orthonormée) • Formule pour Gram schmidt • Méthode des moindres carrées • Factorisation QR • Droite de régression linéaire
Orthodiagonalisation	<ul style="list-style-type: none"> • Matrice orthogonales • Matrice symétrique • Critère d'orthodiagonalisation • Théorème spectrale
Propre aux cours	<ul style="list-style-type: none"> • (Formule de Cramer) • (produit scalaire non standard) • (Décomposition en valeur singulière) • (Interprétation du théorème spectrale)

- Corps finis :
 - Les corps \mathbb{F}_p des entiers modulo p
 - Construction de \mathbb{F}_{p^2} et \mathbb{F}_{p^3}
 - Calcul de produit et d'inverse dans \mathbb{F}_{p^2} et \mathbb{F}_{p^3}
 - Algèbre linéaire sur \mathbb{F}_p et \mathbb{F}_{p^2}

Note pour l'examen

L'examen est fixé à 80 points et 180 minutes ce qui donne ≈ 2 minutes par point. Donc si pour un vrai ou faux on commence à faire une page entière de justification, c'est souvent qu'il y a plus simple.

Résumé court

Lundi 1^{er} janvier 2024 — **Cours 27 : Résumé du cours** On voit juste mettre les formule et les trucs à savoir vite fait.

Déterminant

<i>Opération élémentaire</i>	<p>Application des opération élémentaire sur le déterminant :</p> <ul style="list-style-type: none"> • Type I : Interchanger des lignes entre elle ne change pas le determinant • Type II : changer le signe de la matrice change le signe du déterminant • Type III : En mutlipliant une ligne par un scalaire $\alpha \in \mathbb{R}$, le déterminant est aussi multiplier par ce scalaire.
------------------------------	---

Soit une matrice A ,

Truc 1 Si une ligne de A est combinaison linéaire des autres lignes, alors $\det A = 0$

Théorème 59

- $\det(A^t) = \det A$
- $\det(AB) = \det A \cdot \det B$
- Si A est inversible, alors $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$

Famille génératrice

Soit W un sous espace vectoriel de V .

- Le sous espace $W = \text{Vec}(v_1, \dots, v_k)$ est le sous espace engendré par les vecteurs v_1, \dots, v_k
- Les vecteurs v_1, \dots, v_k sont les générateurs de W
- L'ensemble $\{v_1, \dots, v_k\}$ forme une **partie génératrice** de W

Extraire des bases etc...

Théorème 60 Si l'un des vecteurs v_i est combinaison linéaire des autres, alors la famille obtenue en supprimant v_i engendre encore V . si $V \neq \{0\}$, il existe une sous famille de $\{v_1, \dots, v_k\}$ qui forme une base de V .

Cardinalité d'une base

Soit :

- V un espace vectoriel
- $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ une base de V

- $\mathcal{C} = (c_1, \dots, c_n)$ une famille ordonnée de vecteurs de V

Théorème 61 *La famille ordonnée de \mathcal{C} est une base de V si et seulement si la matrice $A = ((c_1)_{\mathcal{B}}, \dots, (c_n)_{\mathcal{B}})$ a un pivot dans chaque ligne et chaque colonne.*

Cela ce "marie" très bien avec une matrice carré et inversible qui rejoint tout ensemble

Théorème 62 de la base incomplète Soit V un espace vectoriel de dimension n et $\{e_1, \dots, e_k\}$ une famille libre de vecteurs de V . Il existe alors des vecteurs e_{k+1}, \dots, e_n tels que (e_1, \dots, e_n) forme une base de V .

Truc 2 *On utilise les parenthèse pour une base et des accolades pour les familles de vecteurs§*

Décomposition LU

Le but est d'avoir une matrice triangulaire inférieure (L) et une supérieure :

- U est juste la matrice échelonnée (on s'arrête en bas)
- L est la matrice qui comment à I_n et on fait l'opposé des opération faite sur la matrice (si on ajoute $1/2$ a une ligne, on enlève $1/2$ sur la colonne du même indice)
- $A = LU$

Inverse de matrices et déterminants

L'inverse d'une matrice est donné par :

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} (\text{Com}A)^t$$

Indépendance linéaire

Truc 3 *Des vecteurs sont linéairement indépendants lorsque la seule solution de l'équation :*

$$\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n = 0$$

Est :

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$$

On voit que c'est le même principe que lorsqu'on cherche le noyau, on prend la matrice dans une base (canonique c'est souvent plus simple) et on échelonne. et s'il y a moins de colonnes pivots que de colonnes, alors les vecteurs sont dépendants.

Truc 4 *Si la matrice des vecteurs est carrée, on peut faire le déterminant et voir si il est égal à 0.*

Injectivité

Il y a plein de propriétés lorsqu'une matrice est injective :

Truc 5 • Une seule solution et elle est triviale pour $A\vec{x} = \vec{0}$

- $\ker A = \{0\}$
- Les colonnes sont linéairement indépendantes

Si la matrice est carrée et de taille $n \times n$:

- La matrice A est inversible
- $\det A \neq 0$
- Les colonnes de A forment une base de \mathbb{R}^n
- $\text{Im } A = \mathbb{R}^n$
- $\ker A = \{0\}$
- $\dim \text{Ker } A = 0$

On voit que si une application est injective, a vraiment beaucoup de propriétés qui en ressort.

Surjectivité

Truc 6 Une application $f : V \rightarrow W$ entre deux espaces vectoriels V et W est dite surjective si pour chaque vecteur $w \in W$, il existe au moins un vecteur $v \in V$ tel que $f(v) = w$.

En d'autres termes, l'image de f couvre tout l'espace W .
Si f est surjective, alors :

Truc 7

$$\dim \text{Im } f = \dim W$$

Donc, pour qu'une application soit surjective, le rang de f doit être égal à la dimension de l'espace **d'arrivée** W .

- Cas où $\dim V < \dim W$:
Dans ce cas il est impossible pour f d'être surjective
- Cas où $\dim V = \dim W$ Dans ce cas, la dimension du noyau de f doit être égal à 0.
- Cas où $\dim V > \dim W$
Dans ce cas, il est impossible que f soit surjective.

Truc 8 Si une application est surjective Alors :

$$A^T \vec{y} = \vec{0} \text{ Possède une solution unique}$$

Bijektivité

Une bijection est une application qui est injective et surjective en même temps.

Définition 54 Une application linéaire bijective est appelée *isomorphisme*

Application linéaire

Truc 9 Soit T une application linéaire. Alors :

$$T(\alpha u + \beta v) = \alpha T(u) + \beta T(v)$$

$$T(0) = 0$$

Espace vectoriel

C'est le même principe que l'application linéaire :

- **L'addition**, si on prend deux vecteur de V et qu'on les additions, ils doivent rester dans V .
- Si on multiplie par un réel un vecteur de V , il doit rester dans V .

Noyau

Truc 10 Le noyau est la solution générale du système homogène.

$$A\vec{x} = \vec{0}$$

Truc 11 Le noyau appartient à l'espace de départ

Image

L'image est tout ce qui peut être comme résultats de l'application. Elle généralise la notion de sous-espace $ColA$ engendré par les colonnes d'une matrice A .

Truc 12 L'image appartient à l'espace d'arrivée.

Truc 13 L'image d'une application linéaire $T : v \rightarrow W$ est le sous-ensemble $ImT = \{w \in W \mid \text{il existe } v \in V \text{ tel que } Tv = w\}$.

Espace-colonne, Espaces-lignes

Truc 14 L'espace colonne est l'espace engendré par les colonnes de A , donc ce sont les vecteurs où il y a des colonnes pivots.

Truc 15 L'espace ligne est l'espace engendré par les lignes de A qui ont un pivot. Pour donner l'espace ligne, on met les lignes où il y a un pivot et on les réécrit en vecteur (en colonne).

Truc 16

$$\dim ColA = \dim LgnA$$

Pourquoi ça marche :

- Le nombre de lignes linéairement indépendantes est égal au nombre de lignes contenant un pivot
- Le nombre de colonnes linéairement indépendantes est égal au nombre de colonnes contenant un pivot.

Théorème du rang

Soit $T : V \rightarrow W$ Une application linéaire en espaces vectoriels de dimensions finies.

Truc 17 le rang est la dimension de l'image

Truc 18

$$\text{rang } T + \dim \ker T = \dim V$$

que la dimension de l'image et la dimension du noyau ensemble sont égales à la dimension de l'ensemble de départ.

C'est fort parce que l'image de base réside donc l'espace d'arrivée donc on arrive grâce à ce théorème à relier l'image à l'espace de départ.

Grâce à ce théorème on peut vraiment vraiment rapidement trouver plusieurs dimensions avec la matrice d'application de taille $n \times m$.

- $\dim \text{Ker } A =$ nombre de colonnes sans pivot
- $\dim \text{Im } A = \text{rang } A =$ nombre de colonnes-pivot
- nombre de colonnes-pivot + colonnes sans pivot = n .

Ici, la "largeur" de la matrice est la dimension de l'espace de départ, $\dim V$.
Donc, on peut déjà dire plusieurs choses pour l'injectivité et la surjectivité :

Cas	Injectivité (A injective)	Surjectivité (A surjective)	Bijektivité (A bijective)
$\text{Rang}(A) = n$ et $n \leq m$	Si $n = \text{Rang}(A)$	non Si $n < m$, Si $n = m$	Si $m = n = \text{Rang}(A)$
$\text{Rang}(A) = m$ et $m \leq n$	non Si $m < n$, oui Si $m = n$	Si $m = \text{Rang}(A)$	Si $m = n = \text{Rang}(A)$
$\text{Rang}(A) < \min(m, n)$	Pas injective	Pas surjective	Pas bijective

Changement de base Si on veut passer de la base \mathcal{B} à la base \mathcal{C} on a le théorème :

Truc 19

$$(Id_V)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(v)_{\mathcal{B}} = (v)_{\mathcal{C}}$$

Théorème 63

$$(T)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(v)_{\mathcal{B}} = (Tv)_{\mathcal{C}}$$

Donc ici Id_V est la matrice de changement de base. En gros, on a le vecteur v exprimé dans la base \mathcal{B} et ensuite le vecteur v exprimé dans la base \mathcal{C} .

Truc 20 La matrice de changement de base $(Id_V)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$ est construite en écrivant les vecteurs de la base \mathcal{B} en fonction de la base \mathcal{C} .
En exprimant chaque b_i en fonction de c_j on obtient la matrice $(Id_V)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$.

Truc 21 Soit \mathcal{B} et \mathcal{C} deux bases de l'espace vectoriel de \mathbb{R}^n .
Soit $P = (Id)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$ la matrice de changement de base de \mathcal{B} vers \mathcal{C} .

- La matrice P est inversible
- la matrice inverse p^{-1} est une matrice de changement de base de \mathcal{C} vers \mathcal{B} .
- Toute matrice inversible de taille $n \times n$ est une matrice de changement de base,

Définition 55 Deux matrices carrées A et B de taille $n \times n$ sont *semblables* s'il existe une matrice inversible P de taille $n \times n$ telle que

$$A = P^{-1}BP$$

Truc 22 Deux matrices semblables ont le même polynôme caractéristique

les relations
 \sim et \approx

Définition 56 Les matrices A et B sont équivalentes selon les lignes et les colonnes s'il existe des opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes qui transforment A en B . Il existe donc deux matrices inversibles P et Q telle que :

$$PAQ = B$$

On le note

$$A \sim B$$

Truc 23

$$A \approx B \implies A \sim B$$

Diagonalisation

Truc 24 la transposée d'un produit de matrices est le produit dans l'autre sens des transposées :

$$(AB)^T = (B^T A^T)$$

Théorème 64 Une matrice A de taille $n \times n$ est diagonalisable si et seulement s'il existe une base \mathcal{B} de \mathbb{R}^n formée de vecteurs propres de A

Truc 25 Si la somme des coefficients de chaque ligne est égal à φ alors φ est une valeur propre et $\begin{pmatrix} \varphi \\ \varphi \\ \varphi \end{pmatrix}$ est un vecteur propre

Truc 26 Si $A - \varphi I_n = \begin{pmatrix} \varphi & \varphi & \varphi \\ \varphi & \varphi & \varphi \\ \varphi & \varphi & \varphi \end{pmatrix}$ alors par exemple ici le rang est 1 et la $\dim \ker = 2$ est donc on sait que l'espace propre est 2 et que φ est valeur propre

Théorème 65 Soit A une matrice de taille $n \times n$ ayant n valeurs propres distinctes. Alors A est diagonalisable

Truc 27 Soit λ une valeur propre de A , alors $1 \leq \dim E_\lambda \leq \text{mult}(\lambda)$

Truc 28 Soit A pas inversible alors $\ker A \neq \{\vec{0}\}$ et donc 0 est valeur propre de A et donc

- $c_A(0) = 0$
- $c_A(t)$ a coefficient constant nul
- t divise $c_A(t)$

Critère de diagonalisation

Une matrice A est diagonalisable (sur \mathbb{R}) si et seulement si :

1. Le polynôme caractéristique est **scindé** : il se décompose en produit de facteur $(\lambda - t)$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$
2. Pour tout λ , on a $\dim E_\lambda = \text{mult}(\lambda)$

Si A est diagonalisable, on forme une base de vecteurs propres en réunissant les vecteurs de base de chaque espace propre.

Méthode de diagonalisation

Soit $T : V \rightarrow V$ une application linéaire

1. Choisir une base \mathcal{C} de V (la base canonique si elle existe)
2. Ecrire la matrice $A = (T)_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}$ de T dans cette base
3. Calculer le polynôme caractéristique $c_A(t)$
4. Si $c_A(t)$ n'est pas scindé, A n'est pas **diagonalisable**.
5. $c_A(t)$ est scindé, extraire les racines de λ de $c_A(t)$ et calculer les multiplicité algébrique
6. Calculer les espaces propres E_λ et les multiplicités géométriques
7. Si $\dim E_\lambda = \text{mult}(\lambda)$ pour une valeur propre λ , alors A n'est pas **diagonalisable**
8. Si $\dim E_\lambda = \text{mult}(\lambda)$ pour tout λ , alors A est **diagonalisable**

Dès lors

1. Soit $T : V \rightarrow V$ une application linéaire **diagonalisable**
Choisir une base \mathcal{B}_λ de E_λ pour toute valeurs de λ
2. Réunir les \mathcal{B}_λ pour former une base \mathcal{B} de V
3. $D = (T)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ est diagonale. Les valeurs propres apparaissent dans la diagonale dans l'ordre choisi pour contruire la base \mathcal{B}
4. Les colonnes de la matrice de changement de base $P = (Id)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$ sont les vecteurs de \mathcal{B} exprimés en coordonnées dans \mathcal{C}
5. Les colonnes de la matrice de changement de base $P = (Id)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$ sont les vecteurs de \mathcal{B} exprimés en coordonnées dans \mathcal{C} :

Truc 29 Soit A une matrice de taille $n \times n$. Alors $(-1)^{n-1} \text{Tr} A$ est le coefficient de t^{n-1} de $c_A(t)$ et $\det A$ est le coefficient constant

Truc 30 Si A est diagonalisable, alors la trace de A est égal à la somme des valeurs propres

Orthogonalisation

Produit scalaire

Définition 57 *Produit scalaire* Soit \vec{u}, \vec{v} deux vecteurs de \mathbb{R}^n . Le produit scalaire est :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u}^T \vec{v} = u_1 v_1 + \cdots + u_n v_n$$

Propriétés

- Commutativité
- Distributivité
- Compatibilité avec l'action scalaire
- Positivité $\vec{u} \cdot \vec{u} \geq 0$ et $\vec{u} \cdot \vec{u} = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0}$

Définition 58 Une famille $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k)$ de vecteurs \mathbb{R}^n est *orthogonale* si $\vec{u}_i \perp \vec{u}_j$ pour tout $i \neq j$. Cette famille est *orthonormée* si de plus $\|\vec{u}_i\| = 1$ pour tout i .

Théorème 66 Les colonnes d'une matrice U de taille $m \times n$ sont orthogonales si et seulement si $U^T U = I_n$

Théorème 67 Soit U la matrice dont les colonnes sont les vecteurs $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k$ d'une base *orthonormée* de W . Alors

$$\text{proj}_W \vec{y} = U U^T \vec{y}$$

Approximation quadratique

La distance minimale entre un vecteur \vec{y} et un sous espace W de \mathbb{R}^n est réalisée par $\vec{z} = \vec{y} - \text{proj}_W \vec{y}$

Théorème 68 Pour tout $\vec{w} \in W$ on a $\|\vec{y} - \vec{w}\| \geq \|\vec{y} - \text{proj}_W \vec{y}\|$

On note \hat{y} la meilleure approximation quadratique de \vec{y} dans W .

Truc 31 Une famille orthogonale de vecteurs non nuls est libre

Truc 32 Soit $\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k\}$ une famille orthogonale de vecteurs non nuls de \mathbb{R}^n et $U = (\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k)$ la matrice de taille $n \times k$ associée. Alors :

- $U^T U$ est une matrice diagonale

Si la famille est orthonormée :

- $U^T U = I_k$
- $U U^T$ est une projection orthogonale sur $Im A$

1. Vérifie que A est symétrique
2. Calculer $c_A(t)$ et en extraire les racines (valeurs propres)
3. Calculer les espaces propres pour chacun, le procédé de Gram-Schmidt donne une base orthonormée.
4. En rassemblant les bases des espaces propres on obtient une base orthonormée \mathcal{U} de \mathbb{R}^n
5. La matrice P dont les colonnes sont les vecteurs \vec{u}_i de \mathcal{U} est orthogonale et $P^T A P$ est diagonale

L'avantage ici c'est que l'inverse de la matrice de changement de base est juste sa transposée

Méthode des moindres carrés

La meilleure solution possible d'un système incompatible tel que $A\vec{x} = \vec{b}$ où A est une matrice $m \times n$.

Définition 59 Une vecteur $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$ est une **solution au sens des moindres carrés** pour le système $A\vec{x} = \vec{b}$ si, pour tout $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$

$$\|\vec{b} - A\hat{x}\| \leq \|\vec{b} - A\vec{x}\|$$

Truc 33 Comme $A\vec{x} \in Im A$, le système est incompatible si $\vec{b} \notin Im A$. Le vecteur le plus proche de \vec{b} dans $Im A$ est sa projection orthogonale.

$$\hat{b} = proj_{Im A} \vec{b}$$

Equation normale

Théorème 69 L'ensemble des solutions $A\vec{x} = \vec{b}$ au sens des moindres carrés est égal à l'ensemble non-vidé des solutions de l'équation normale :

$$A^T A \hat{x} = A^T \vec{b}$$

Truc 34 La norme du vecteurs $\vec{b} - A\hat{x}$ est appelée **écart quadratique**

Théorème 70 *La solution \hat{x} au sens des moindres carrés est unique si et seulement si les colonnes de A sont libres, ce qui est équivalent à exiger que la matrice $A^T A$ est inversible*

Régression linéaire

1. On représente les point (x_i, y_i) à l'aide de deux matrices :
 - A contient les coordonnées x_i et une colonne de 1 pour représenter b ,
 - Y contient les ordonnées y_i

Ainsi

$$A = \begin{pmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 2 \\ \vdots & \vdots \\ x_n & 1 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

2. On cherche un vecteur $p = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ tel que

$$Ap \approx Y$$

3. Equation normales :

$$A^T A p = A^T Y$$

4. Résoudre le système ce qui donne la droite de régression $y = ax + b$

Théorème et décomposition spectrale