

request_validation completed ▶ 查看安全结果	= x f(x)= x , 证明该函数在区间 [0 , 1] [0,1] 上单调递增且一致连续。这里考了什么定义?
identity completed ▶ 查看安全结果	
run_record completed ▶ 查看安全结果	
local_corpus_retrieval completed ▶ 查看安全结果	
source_authorization_guard completed ▶ 查看安全结果	
cache_policy skipped ▶ 查看安全结果	
openrouter_model completed ▼ 查看安全结果	
{ "model_source": "platform_default", "provider_id": "openrouter", "model_id": "nvidia/nemotron-3-super-120b-a12b:free", "billing_label": "platform_daily_free_quota", "availability_status": "available", "real_model_called": true, "retry_count": 0 }	
citation_guard completed ▶ 查看安全结果	
knowledge_point_normalization completed ▶ 查看安全结果	
response_style_control completed ▶ 查看安全结果	
bilibili_link_discovery completed ▶ 查看安全结果	
persistence completed ▶ 查看安全结果	

课程资料回答 结论受仓库引用与证据状态约束

结论

这道题考察的是 **单调递增** 的定义和 **一致连续（一致连续）** 的定义。

也就是说，要分别用这两个定义来证明 $f(x) = x$ 在 $[0, 1]$ 上是单调递增且一致连续的。

加油加油！考完请你喝奶茶！

复习搭子提醒： 这一步可别偷懒哦~自己先算一遍，我再帮你答案！

原理与依据

单调递增的定义（见课程资料[S1]）：函数 f 在区间 I 上单调递增，当且仅当对任意 $x_1, x_2 \in I$ ，若 $x_1 < x_2$ 则有 $f(x_1) \leq f(x_2)$ 。

一致连续的定义（见课程资料[S1]）：函数 f 在区间 I 上一致连续，当且仅当对任意 $\varepsilon > 0$ ，存在 $\delta > 0$ （仅依赖于 ε ，与点无关），使得对所有 $x, y \in I$ ，若 $|x - y| < \delta$ 则有 $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ 。

推导或判断过程

1. 单调递增

取任意 $0 \leq x_1 < x_2 \leq 1$ 。

因为 $f(x) = x$ ，所以

$$f(x_1) = x_1 < x_2 = f(x_2)$$

即 $f(x_1) < f(x_2)$ ，满足单调递增的条件（甚至是严格递增）。

2. 一致连续

给定任意 $\varepsilon > 0$ ，选择 $\delta = \varepsilon$ （这个 δ 只与 ε 有关）。

对任意 $x, y \in [0, 1]$ ，若 $|x - y| < \delta$ ，则

$$|f(x) - f(y)| = |x - y| < \delta = \varepsilon.$$

因此， f 在 $[0, 1]$ 上满足一致连续的定义。

易错点或适用边界

常见错误是把“连续”和“一致连续”混淆：连续的 δ 可能随点变化，而一致连续要求同一个 δ 对全区间都有效。这里因为 $f(x) = x$ 是 Lipschitz 函数（Lipschitz 常数为 1），直接取 $\delta = \varepsilon$ 就能得到一致性。

在证明单调递增时，不要漏掉“ $x_1 < x_2$ ”这一前提；若只写 $f(x_1) \leq f(x_2)$ 而不说明条件，容易失去严谨性。

该结论在任何闭区间 $[a, b]$ 上都成立，因为同样的理由适用；但在开区间或非紧集上仍需检查一致连续的条件是否仍然满足（这里仍然满足，因为函数是一致连续的）。

这一步可别偷懒哦~不然我可要生气了！

看在你这么认真的份上，学妹我多讲一点~

继续加油，你一定可以的！

▼ 仓库引用 1

2019–2020 学年第一学期《工科数学分析（一）》期末考试试卷（B 卷，含答案）

工科数学分析 I

页码 1：章节 2019–2020 学年第一学期《工科数学分析（一）》期末考试试卷（B 卷，含答案） / 第 1 页

S1

▼ B站延伸阅读 1

聚焦词只生成 B 站匿名搜索入口；搜索结果未经本项目审核，也不属于仓库引用或回答证据。

在哔哩哔哩搜索：单调递增 定义 一致连续 证明 利普希茨 函数

单调递增 定义、一致连续 证明、利普希茨 函数 / 匿名搜索 / 结果未审核

查看搜索结果

▶ 回答反馈

课程问题

还有什么证明题目？

回答、来源与 Trace

completedpartial证据状态: insufficient输出偏好: 举例表达风格: 复习搭子

request_validation completed

▶ 查看安全结果

identity completed

▶ 查看安全结果

run_record completed

▶ 查看安全结果

local_corpus_retrieval completed

▶ 查看安全结果

source_authorization_guard completed

▶ 查看安全结果

cache_policy skipped

▶ 查看安全结果

openrouter_model completed

▶ 查看安全结果

citation_guard completed

▶ 查看安全结果

knowledge_point_normalization completed

▶ 查看安全结果

response_style_control completed

▶ 查看安全结果

bilibili_link_discovery completed

▶ 查看安全结果

persistence completed

▶ 查看安全结果

通用知识补充 不作为课程仓库证据，也不附仓库引用

哎呀，你这是想“题海战术”呀？虽然我很想陪你一起刷题，但因为我在现在的知识库里还没有更新新的题目资料呢，所以没办法直接把具体的题目“变”出来给你呀~

不过没关系！既然你这么想挑战一下，学妹可以帮你梳理一下在“连续性”和“单调性”这个知识点附近，考试最常考的几种证明题型。你先看看这些思路，如果想练手，可以去翻翻课本或者找老师要练习册哦！

常见的证明题型预警

证明连续性：

给定一个函数（比如分段函数），让你用 $\varepsilon - \delta$ 定义去证明它在某一点是连续的。这可是基础中的基础，一定要练熟哦！

证明一致连续性：

就像刚才那道题一样，证明一个函数在闭区间上是一致连续的。记住一个“大招”：如果函数在闭区间上连续，那它一定是一致连续的（这是个超好用的定理，但考试有时会让你用定义去证，千万别偷懒直接套公式哦！）。

证明单调性：

利用导数（如果函数可导的话）或者直接用定义来证明函数在某个区间是单调递增或递减的。

证明极限存在性：

利用夹逼定理（Squeeze Theorem）或者单调有界准则来证明某个数列或函数极限的存在性。

复习搭子提醒： 这一步可别偷懒哦~自己先算一遍，我再帮你答案！

复习小贴士

杂鱼，平时听课玩手机旷课，期末来将功补过了？既然现在想突击，那就把这些定义的证明过程一定要亲手写一遍！光看是不够的，一定要动笔写出 ε 和 δ 的关系呀！

加油加油！考完请你喝奶茶！如果你找到了具体的题目，记得再来找我，我一定陪你一起攻克它！

资料覆盖说明

本次回答没有可回查的课程资料候选；无引用内容已作为通用补充展示，未作为课程资料结论。

▶ 仓库引用 0

▼ B站延伸阅读 1

聚焦词只生成 B 站匿名搜索入口；搜索结果未经本项目审核，也不属于仓库引用或回答证据。

在哔哩哔哩搜索：连续函数证明题 一致连续定义证明 单调性证明技巧

连续函数证明题、一致连续定义证明、单调性证明技巧 / 匿名搜索 / 结果未审核

查看搜索结果

▶ 回答反馈

课程问题

证明极限存在性有没有往年题？

回答、来源与 Trace

completedpartial证据状态: insufficient输出偏好: 举例表达风格: 助教

request_validation completed

▶ 查看安全结果

identity completed

▶ 查看安全结果

run_record completed

▶ 查看安全结果

local_corpus_retrieval completed

▶ 查看安全结果

source_authorization_guard completed

▶ 查看安全结果

cache_policy skipped

▶ 查看安全结果

byok_model completed

▼ 查看安全结果

{
 "model_source": "user_key",
 "provider_id": "deepseek",
 "model_id": "deepseek-v4-flash",
 "billing_label": "user_provider_billing",
 "availability_status": "user_key_enabled",
 "real_model_called": true,
 "retry_count": 0
}

citation_guard completed

▶ 查看安全结果

knowledge_point_normalization completed

▶ 查看安全结果

response_style_control completed

▶ 查看安全结果

bilibili_link_discovery completed

▶ 查看安全结果

persistence completed

▶ 查看安全结果

通用知识补充 不作为课程仓库证据，也不附仓库引用

结论

不存在可验证的“往年题”来源：本次课程资料中没有给出历年真题。因此，无法确认哪一年考过哪一道具体题目。但“证明极限存在性”是常考题型，核心方法必须掌握。证明方式通常有三类：直接用定义、用夹逼定理、用单调有界准则。此处不得省略使用条件。

助教提示： 定义、前提、符号先摆齐，少一步都不给分。

例子

给你一个完整且最小的典型例子。已知条件：设有数列 $\{x_n\}$ ，其中

$$x_1 = \sqrt{2}, \quad x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n} \quad (n \geq 1).$$

操作或计算：先证明该数列单调递增且有上界。

第一步，证明有上界。用归纳法，假设 $x_n < 2$ 。当 $n = 1$ 时， $\sqrt{2} < 2$ 成立。若 $x_n < 2$ ，则

$$x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n} < \sqrt{2 + 2} = 2.$$

因此对所有 n ，都有 $x_n < 2$ 。

第二步，证明单调递增。因为

$$x_{n+1} - x_n = \sqrt{2 + x_n} - x_n = \frac{2 + x_n - x_n^2}{\sqrt{2 + x_n} + x_n}.$$

当 $0 < x_n < 2$ 时，分母为正，而分子 $2 + x_n - x_n^2 > 0$ ，所以 $x_{n+1} > x_n$ 。

得到的结果：数列 $\{x_n\}$ 单调递增且有上界 2，根据单调有界准则，极限存在。设极限为 a ，对递推式取极限得

$$a = \sqrt{2 + a}.$$

解得 $a = 2$ 或 $a = -1$ ，由 $x_n > 0$ 舍去 -1 ，故 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 2$ 。

从例子得到的判断

上面的例子直接体现“证明函数单调性存在性”一类题目的得分要点：必须先验证单调性和有界性，再调用单调有界准则。缺一个条件都不给分。这都敢跳步，胆子不小啊。至于往年题，没有课程资料为依据，我不能编造具体年份；但把上述方法的适用条件背熟，考什么都不怕。上课睡觉的这会儿醒了吗？重点来了：极限存在性证明，核心永远是条件完整、推理每一步有依据。行了，这次放过你，下次可没这么简单。

资料覆盖说明

本次回答没有可回查的课程资料候选；无引用内容已作为通用补充展示，未作为课程资料结论。

▶ 仓库引用 0

▼ B站延伸阅读 1

聚焦词只生成 B 站匿名搜索入口；搜索结果未经本项目审核，也不属于仓库引用或回答证据。

在哔哩哔哩搜索：单调有界准则 数列极限 极限存在性证明 方法

单调有界准则 数列极限、极限存在性证明 方法 / 匿名搜索 / 结果未审核

查看搜索结果

▶ 回答反馈