Лабораторная работа 7

Системы дифференциальных уравнений

Слуцкий Никита, 053506 (ФКСиС, ИиТП)

Вариант 1 (номер в журнале 21)

примечание: все задания, как всегда, решены в тетради перед решением в Maple. Фото решений в конце отчёта

restart;

 # Задание 1

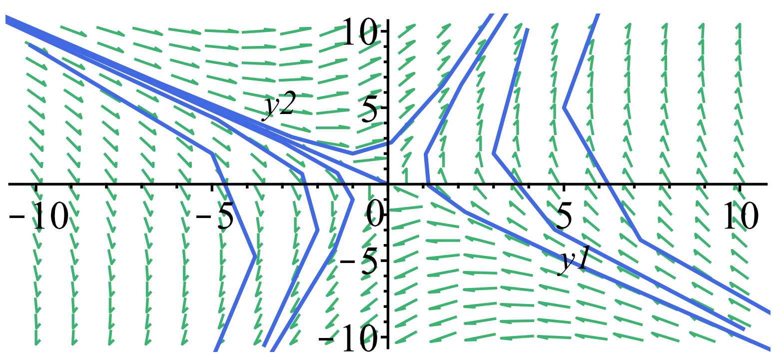
Исследовать поведение фазовых кривых системы уравнений вблизи точки покоя.
Сделать чертёж
Определить тип точки покоя по фазовому портрету и собственным значениям матрицы системы
Найти общее решение системы

equation1 := *diff*(*y1*(*x*), *x*) = -2·*y1*(*x*) + 2·*y2*(*x*), *diff*(*y2*(*x*), *x*) = 7·*y1*(*x*) + 3·*y2*(*x*) :
solution2 := *dsolve*({*equation1*}, {*y1*(*x*), *y2*(*x*)});

$$\left\{y1(x) = \_C1\, e^{-4x} + \_C2\, e^{5x},\ y2(x) = -\_C1\, e^{-4x} + \frac{7}{2}\,\_C2\, e^{5x}\right\} \qquad \textbf{(1)}$$

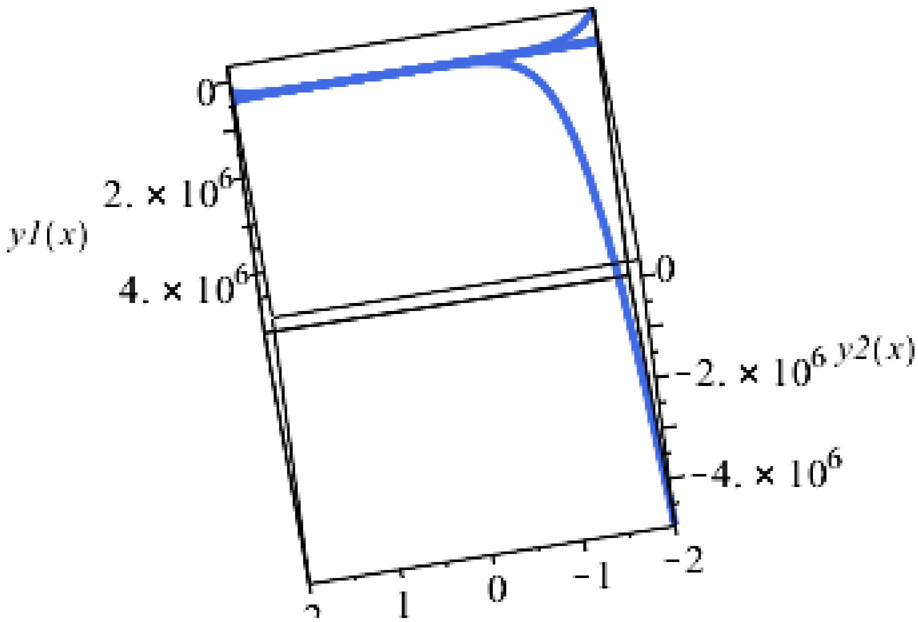
Фазовые траектории и поле направлений для линейной автономной системы ОДУ первого порядка с заданными начальными условиями (с помощью команды phaseportrait)

DEtools[*phaseportrait*]([*equation1*], [*y1*(*x*), *y2*(*x*)], *x* = -5 ..5, [[2, 1, 1], [1, -2, 2], [0, -1, -1], [0, -1, 2], [0, -5, 2], [0, 5, 5], [0, 0, 0], [0, -2, -3], [0, 3, 2]], *y1* = -10 ..10, *y2* = -10 ..10, *linecolor* = "RoyalBlue", *color* = "MediumSeaGreen", *thickness* = 1);



действительно седло (было установлено путём решения характеристического уравнения в тетради)

DEtools[*DEplot3d*]([*equation1*], [*y1*(*x*), *y2*(*x*)], *x* = -2 ..2, [[2, 1, 1], [1, -2, 2], [0, -1, -1], [0, -1, 2], [0, -5, 2], [0, 5, 5], [0, 0, 0], [0, -2, -3], [0, 3, 2]], *color* = "RoyalBlue", *linecolor* = "RoyalBlue");



однородное дифференциальное уравнение 2-го порядка относительно функции y1(x)

equation1_OLDU := *diff*(*y*(*x*), *x*, *x*) − 3·*diff*(*y*(*x*), *x*) − 18·*y*(*x*) = 0 :

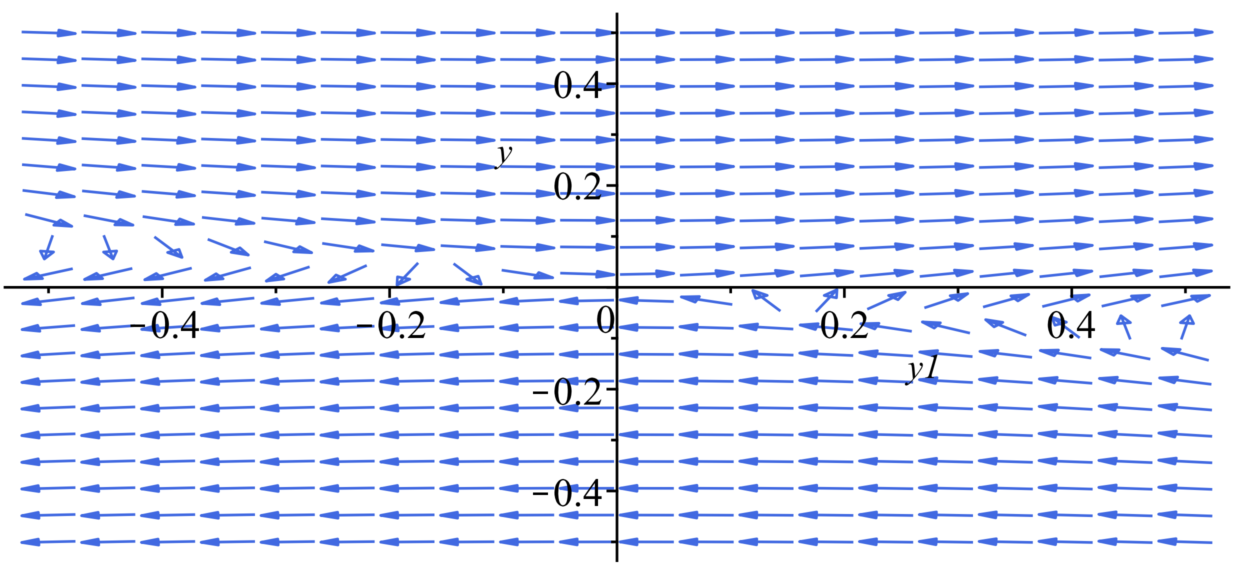
solution1_OLDU := *dsolve*(*equation1_OLDU*); # такой же ответ и в тетради

$$y(x) = \_C1\, \mathrm{e}^{6x} + \_C2\, \mathrm{e}^{-3x} \quad \textbf{(2)}$$

эквивалентная этому ОЛДУ система уравнений:

equation1_OLDU_system := *y1*(*x*) = *diff*(*y*(*x*), *x*), *diff*(*y1*(*x*), *x*) = 3·*y1*(*x*) + 18·*y*(*x*) :

DEtools[*dfieldplot*]([*equation1_OLDU_system*], [*y1*(*x*), *y*(*x*)], *x* = -2 ..2, *y* = -0.5 ..0.5, *y1* = -0.5 ..0.5, *arrows* = *medium*, *color* = "RoyalBlue")



restart;

____

Задание 2

Решить систему уравнений.

$equation2 := \{diff(y1(x), x) = 5 \cdot y1(x) + 3 \cdot y2(x), diff(y2(x), x) = 4 \cdot y1(x) + 9 \cdot y2(x)\}:$
$solution2 := dsolve(equation2, \{y1(x), y2(x)\});$

$$\left\{y1(x) = \_C1\, e^{3x} + \_C2\, e^{11x}, y2(x) = -\frac{2}{3}\,\_C1\, e^{3x} + 2\,\_C2\, e^{11x}\right\} \quad (3)$$

в тетради уравнение было сведено к однородному линейному относительно y_1 следующего вида :

$equation2\_OLDU := diff(y1(x), x, x) - 14 \cdot diff(y1(x), x) + 33 \cdot y1(x) = 0:$
$dsolve(equation2\_OLDU, y1(x));$

$$y1(x) = \_C1\, e^{3x} + \_C2\, e^{11x} \quad (4)$$

Этим я лишь показал, что подстановка в тетради получилась верная и функция $y_1(x)$ найдена правильно

restart;

____

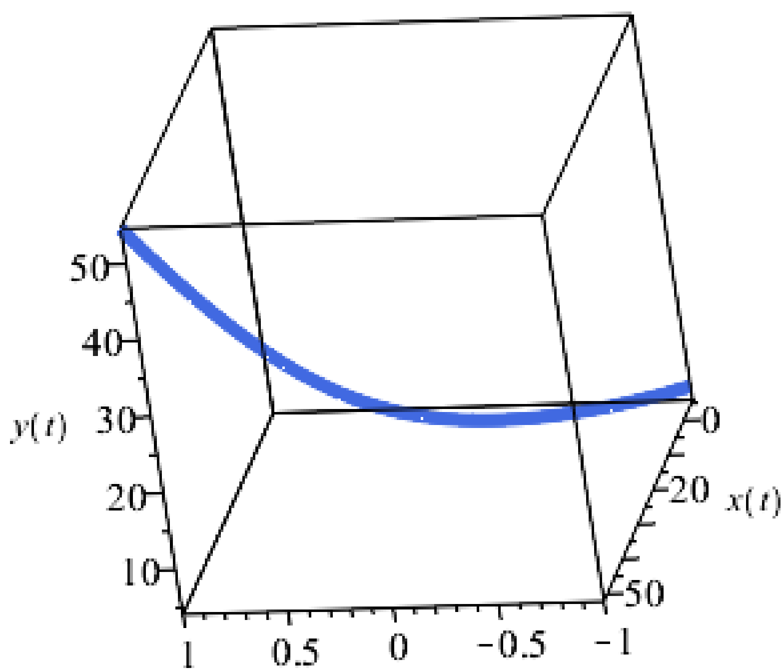
Задание 3

Решить задачу Коши. Сделать чертеж.

$equation3 := diff(x(t), t) = x(t) + 2 \cdot y(t), diff(y(t), t) = 2 \cdot x(t) + y(t) + 1:$
$solution3 := dsolve([equation3, x(0) = 0, y(0) = 5], \{x(t), y(t)\});$

$$\left\{x(t) = -2\, e^{-t} + \frac{8}{3}\, e^{3t} - \frac{2}{3}, y(t) = 2\, e^{-t} + \frac{8}{3}\, e^{3t} + \frac{1}{3}\right\} \quad (5)$$

$DEtools[DEplot3d]([equation3], [x(t), y(t)], t = -1 ..1, [[x(0) = 0, y(0) = 5]], thickness = 5,$
$\quad linecolor = "RoyalBlue");$



Слуцкий Никита | гр. 053506

Лабораторная работа №7

22.12.2021

Система дифференциальных уравнений

номер в журнале - 21

вариант 1.

$\boxed{\text{Задание}}$ $\begin{cases} y_1' = -2y_1 + 2y_2 \\ y_2' = 7y_1 + 3y_2 \end{cases}$ $\begin{cases} y_1'' = -2y_1' + 2y_2' \\ y_2' = 7y_1 + 3y_2 \end{cases}$ $\left(y_2 = \dfrac{y_1' + 2y_1}{2}\right)$

$y_1'' = -2y_1 + 14y_1 + 6y_2$ $\qquad y_1 = y'$

$y_1'' = -2y_1 + 14y_1 + 3y_1' + 6y_1$ $\qquad y_1' = y''$

$y_1'' = 18y_1 + 3y_1'$ $\qquad y'' = 3y' + 18y$ $\qquad \begin{cases} y_1 = y' \\ y_1' = 3y_1 + 18y \end{cases}$

$y_1'' - 3y_1' - 18y_1 = 0.$

Однородное дифференциальное уравнение II порядка.

Замена $y_1 = e^{\lambda x}$ $\quad \lambda^2 - 3\lambda - 18 = 0.$

$D = 9 + 72 = 81 > 0$, 2 корня!

$\lambda = \dfrac{3 \pm 9}{2} = \{-3; 6\}.$

Итог $y_1 = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{6x}$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

$y_2 = \dfrac{-3C_1 e^{-3x} + 6C_2 e^{6x} + 2C_1 e^{-3x} + 2C_2 e^{6x}}{2} =$

$= \dfrac{8C_2 e^{6x} - C_1 e^{-3x}}{2} = 4C_2 e^{6x} - 0.5C_1 e^{-3x}$

Итог решение: $\{C_1 e^{-3x} + C_2 e^{6x};\ 4C_2 e^{6x} - 0.5C_1 e^{-3x}\}.$

$$Y' = AY$$

$$Y' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

$$\lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0$$

$$\lambda^2 - (1)\lambda + (-6 - 14) = 0$$

$$Y' = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 7 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

$$\lambda^2 + \lambda - 20 = 0$$

$$D = 121. \quad \lambda = \frac{-1 \pm 11}{2} = \{-6; 5\}.$$

седло, т.к. λ_1, λ_2 – действительные числа разного знака.

точка равновесия = седло.

$\boxed{\text{Задание 2}}$ $\begin{cases} y_1' = 5y_1 + 3y_2 \\ y_2' = 4y_1 + 9y_2 \end{cases}$

- дифференцирую $y_1' = 5y_1 + 3y_2$

$y_1'' = 5y_1' + 3y_2'$, выражаю $y_2' = \frac{y_1'' - 5y_1'}{3}$

- выражаю y_2 из 1-го: $y_2 = \frac{y_1' - 5y_1}{3}$

- подставлю предыдущие выражения в (2).

$\frac{y_1'' - 5y_1'}{3} = 4y_1 + 3y_1' - 15y_1 \;/ \cdot 3$

$y_1'' - 5y_1' = 12y_1 + 9y_1' - 45y_1$

- $y_1'' - 14y_1' + 33y_1 = 0$ // ОЛДУ II порядка

$\lambda^2 - 14\lambda + 33 = 0$

$D = 196 - 120 - 12 = 76 - 12 = 64$

$\lambda = \frac{14 \pm 8}{2} = 7 \pm 4 = \{3; 11\}$.

Итого решение ОЛДУ для y_1: $C_1 e^{3x} + C_2 e^{11x}$.

$y_2 = \frac{3C_1 e^{3x} + 11C_2 e^{11x} - 5C_1 e^{3x} - 5C_2 e^{11x}}{3} =$

$= \frac{6C_2 e^{11x} - 2C_1 e^{3x}}{3} = 2C_2 e^{11x} - \frac{2}{3} C_1 e^{3x}$

Итого: $\{C_1 e^{3x} + C_2 e^{11x};\ 2C_2 e^{11x} - \frac{2}{3} C_1 e^{3x}\}$.

$\boxed{\text{Задание 3}}$ $\begin{cases} \dot{x} = x + 2y \\ \dot{y} = 2x + y + 1 \end{cases}$ $(x(0) = 0,\ y(0) = 5)$

$x = x(t)$
$y = y(t)$

~~Но это~~ Найду решение системы ОЛДУ.

Матрица системы:

$$\begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{bmatrix}.$$

$$\det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{pmatrix} = 0$$

$$(1-\lambda)^2 - 4 = 0$$

$$\lambda = \{-1; 3\}.$$

$$\lambda_1: \begin{cases} 2\alpha + 2\beta = 0 \\ 2\alpha + 2\beta = 0 \end{cases} \quad \alpha = -\beta. \quad (1; -1).$$

$$\lambda_2: \begin{cases} -2\alpha + 2\beta = 0 \\ 2\alpha - 2\beta = 0 \end{cases} \quad \alpha = \beta \quad (1; 1)$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3t}$$

$$\begin{cases} x = C_1 e^{-t} + C_2 e^{3t} \\ y = -C_1 e^{-t} + C_2 e^{3t} \end{cases}$$ — общее решение однородной системы.

① Лагранж.

В соответствии с методом Лагранжа ищем решение неоднородной системы в виде:

$$\begin{cases} x = C_1(t)\, e^{-t} + C_2(t)\, e^{3t} \\ y = -C_1(t) e^{-t} + C_2(t) e^{3t} \end{cases}$$

продифференцирую:

$$\begin{cases} \dot{x} = C_1'(t) e^{-t} - C_1(t) e^{-t} + C_2'(t) e^{3t} + 3C_2(t) e^{3t} \\ \dot{y} = -C_1'(t) e^{-t} + C_1(t) e^{-t} + C_2'(t) e^{3t} + 3C_2(t) e^{3t} \end{cases}$$

подставлю в исходное

$$\begin{cases} C_1' e^{-t} - \cancel{C_1 e^{-t}} + C_2' e^{3t} + \cancel{3C_2 e^{3t}} = \cancel{C_1 e^{-t}} + \cancel{C_2 e^{3t}} - \cancel{2C_1 e^{-t}} + \cancel{2C_2 e^{3t}} \\ -C_1' e^{-t} + \cancel{C_1 e^{-t}} + C_2' e^{3t} + \cancel{3C_2 e^{3t}} = \cancel{2C_1 e^{-t}} + \cancel{2C_2 e^{3t}} - \cancel{C_1 e^{-t}} + \cancel{C_2 e^{3t}} + 1. \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1' e^{-t} + C_2' e^{3t} = 0 \\ -C_1' e^{-t} + C_2' e^{3t} = 1 \end{cases} + \qquad C_1' e^{-t} = -\frac{1}{2} \quad C_1' = -\frac{1}{2} e^{t}, \quad C_1 = -\frac{1}{2} e^{t} + \tilde{C}_1 \in \mathbb{R}.$$

$$2C_2' e^{3t} = 1$$

$$C_2(t):\ C_2' = \frac{1}{2} e^{-3t} \qquad \frac{dC_2}{dt} = \frac{1}{2} e^{-3t}$$

$$C_2 = \frac{1}{2}\int e^{-3t}\, dt = -\frac{1}{6} e^{-3t} + \tilde{C}_2 \in \mathbb{R}.$$

Итого, $C_1(t)$ и $C_2(t)$ нашли:

$$x = C_1(t)e^{-t} + C_2(t)e^{3t} =$$
$$= \left(-\frac{1}{2}e^{t} + \tilde{C}_1\right)e^{-t} + \left(-\frac{1}{6}e^{-3t} + \tilde{C}_2\right)e^{3t} =$$
$$= -\frac{1}{2} + \tilde{C}_1 e^{-t} - \frac{1}{6} + \tilde{C}_2 e^{3t}$$

$$y = -C_1(t)e^{-t} + C_2(t)e^{+3t} =$$
$$= \left(\frac{1}{2}e^{t} - \tilde{C}_1\right)e^{-t} + \left(-\frac{1}{6}e^{-3t} + \tilde{C}_2\right)e^{3t} =$$
$$= \frac{1}{2} - \tilde{C}_1 e^{-t} - \frac{1}{6} + \tilde{C}_2 e^{3t}$$

Общее решение

$$\begin{cases} -\frac{1}{2} + \tilde{C}_1 - \frac{1}{6} + \tilde{C}_2 = 0 \\ \frac{1}{2} - \tilde{C}_1 - \frac{1}{6} + \tilde{C}_2 = 5 \end{cases}$$

коэффициенты для задачи Коши $\begin{cases} C_1 = -2 \\ C_2 = 8/3 \end{cases}$

общий вид: $\begin{cases} x = -\frac{2}{3} + \tilde{C}_1 e^{-t} + C_2 e^{3t} \\ y = \frac{1}{3} - \tilde{C}_1 e^{-t} + \tilde{C}_2 e^{3t} \end{cases}$

2 сентября

$$\begin{cases} \dot{x} = x + 2y \\ \dot{y} = 2x + y + 1 \quad \Big| \cdot k. \end{cases}$$

// Домножил на какое-то k.

$$\frac{dy}{dt} \to \frac{dy}{dt} \cdot k \to \frac{d(yk)}{dt}$$

$$\begin{cases} \dot{x} = x + 2y \\ + \\ \dot{y} \cdot k = 2xk + yk + k \end{cases}$$

// сложим почленно

$$\frac{d(x+yk)}{dt} = (1+2k)x + \overbrace{(2+k)y}^{(1+2k)} + k$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{d(x+yk)}{dt} = (1+2k)\left(x + \frac{(2+k)}{1+2k}y\right) + k$$

подберу k так, чтобы $\frac{2+k}{1+2k} = k$

$$\{k = \pm 1\}.$$

Тогда, так как такое k я нашёл, можно переписать в виде

$$\frac{d(x+ky)}{dt} = (1+2k)(x+ky) + k.$$

И это линейное уравнение первого порядка относительно функции ~~y+~~ $x+ky$.

$x+ky$ $[x + ky = z]$.

$$\frac{dz}{dt} = (1+2k)z + k.$$

$$z' - (1+2k)z = k.$$

Решу методом Бернулли : $z = uv$.

$$u'v + uv' - (1+2k)uv = k$$

$$u'v + u\left(v' - (1+2k)v\right) = k.$$

$$\frac{dv}{dt} = (1+2k)v$$

$$\frac{1}{v}dv = (1+2k)\,dt$$

$$\ln v = (1+2k)t + C \longleftarrow \text{возьму } C=0$$

$$v = e^{(1+2k)t}$$

$$u' \cdot e^{(1+2k)t} = k$$

$$\frac{du}{dt} = k \cdot e^{-(1+2k)t}$$

$$u = -k \cdot \frac{e^{-t(1+2k)}}{1+2k} + C_1, \; C \in \mathbb{R}.$$

$$x + ky = \left(\frac{-k \cdot e^{-t(1+2k)}}{1+2k} + C_1\right) e^{(1+2k)t} =$$

$$= -\frac{k}{1+2k} + C_1 \cdot e^{(1+2k)t}$$

Было найдено 2 значения k: $\{1; -1\}$.

$$\cancel{(1)\; k_1:\quad x + y = \left(-\frac{e^{-t(1+2)}}{3} + C_1\right) e^{3t}}$$

$\cancel{(-1)}$

$$k_1 = 1: \begin{cases} x + \cancel{k}y = -\dfrac{1}{3} + C_1 e^{3t} \\ x - y = -1 + C_2 e^{-t} \end{cases}$$

Разрешая систему относительно $\{x, y\}$
получаю общее решение этой системы ДУ

$$\begin{cases} x+y = -\frac{1}{3} + C_1 e^{3t} \\ x-y = -1 + C_2 e^{-t} \end{cases} \quad > y = -\frac{1}{3} + C_1 e^{3t} - x$$

$$2x = -\frac{4}{3} + C_1 e^{3t} + C_2 e^{-t}$$

$$\begin{cases} x = -\frac{2}{3} + \frac{C_1}{2} e^{3t} + \frac{C_2 e^{-t}}{2} \\ y = \frac{1}{3} + \frac{C_1 e^{3t}}{2} - \frac{C_2 e^{-t}}{2}. \end{cases}$$

! Коэффициенты перед константами C_1 и C_2 в ответах после методов Лагранжа и Бернулли не совпадают, но важно, что свободные члены и соотношения C_1 и C_2 одинаковы. Таким образом общие решения одинаковы и => ответ должен быть верен.