Лабораторная работа 8

Элементы операционного исчисления

Слуцкий Никита, гр. 053506 (ФКСиС, ИиТП)
#Вариант 1 (номер в журнале 21)

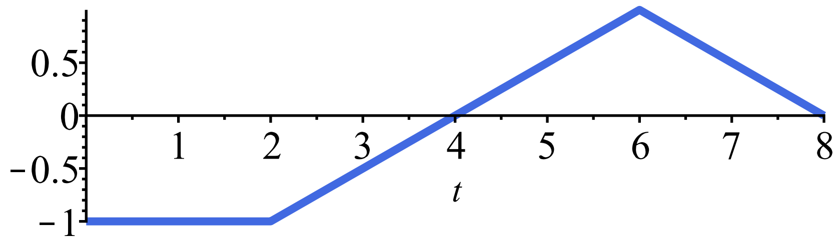
restart;

Задание 1

По данному графику функции-оригинала найти ее изображение Лапласа.
#Получить ответ в системе Maple и сравнить результаты

$$func := piecewise\left(t \geq 0 \textbf{ and } t \leq a, -1, t > a \textbf{ and } t \leq 3 \cdot a, \frac{t - 2\cdot a}{a}, t > 3\cdot a \textbf{ and } t \leq 4\cdot a, \frac{-t + 4\cdot a}{a}\right):$$

$$chart := plot(subs(a = 2, func), t = 0..8, color = \text{"RoyalBlue"}, thickness = 3);$$



$$laplace := inttrans[laplace](subs(a = 2,\ func), t, p);$$

функция subs делает подстановку (ниже будет активно использоваться)

$$-\frac{1}{p} + \frac{1}{2}\,\frac{-2\,e^{-6\,p} + e^{-8\,p} + e^{-2\,p}}{p^2} \tag{1}$$

restart;

Задание 2

Найти оригинал по заданному изображению

$$image := \frac{4\cdot p + 5}{(p-2)\cdot(p^2 + 4\cdot p + 5)}:$$

$fraction\_simple := convert(image, parfrac);$ # для того, чтобы показать, что в тетради верное разложение

$$\frac{1}{17}\,\frac{-13\,p - 10}{p^2 + 4\,p + 5} + \frac{13}{17\,(p-2)} \tag{2}$$

$$original := inttrans[invlaplace](fraction\_simple, p, t);$$

$$\frac{13}{17}\,e^{2\,t} + \frac{1}{17}\,(-13\cos(t) + 16\sin(t))\,e^{-2\,t} \tag{3}$$

restart;

Задание 3

Найти решение дифференциального уравнения, удовлетворяюшее условиям y(0) = 0 и y'(0) = 0

$differential\_equation := diff(y(x), x, x) - 2 \cdot diff(y(x), x) + y(x) = \frac{e^x}{1 + x^2}$:

$solution := dsolve(\{differential\_equation, y(0) = 0, D(y)(0) = 0\});$

$$y(x) = -\frac{1}{2} e^x \left(-2 \arctan(x)\, x + \ln(x^2 + 1)\right) \quad (4)$$

restart;

Задание 4

Операторным методом решить задачу Коши

Исходные данные в массиве [уравнение, 1—е условие, 2—е условие]. Поэтому можно менять лишь условие (элементы массива), перевыполнять строчки ниже - и будет получаться *решение*

$differential\_equation := [diff(y(t), t, t) + y(t) = 6 \cdot e^{-t}, y(0) = 3, D(y)(0) = 1]$:

Получу разложение в виде переменных, а в следующей строчке подставлю, куда нужно, значения для задачи Коши

$laplace\_base := inttrans[laplace](differential\_equation[1], t, p);$

$$p^2\, laplace(y(t), t, p) - D(y)(0) - p\, y(0) + laplace(y(t), t, p) = \frac{6}{p + 1} \quad (5)$$

Подставляю начальные условия, чтобы получить изображение в конечном виде

$laplace\_result := subs(differential\_equation[3], subs(differential\_equation[2], subs(y(0) = 3, laplace\_base)));$

$$p^2\, laplace(y(t), t, p) - 1 - 3p + laplace(y(t), t, p) = \frac{6}{p + 1} \quad (6)$$

На данном этапе получил полностью преобразованное уравнение уже в виде изображения (воздействовав преобразованием Лапласа и подставив начальные условия)

Теперь "избавлюсь" от строчки laplace(..), которую в тетради обычно обозначаем Y(p), например, или просто Y. Обозначу здесь, как у себя в тетради, Y.

$laplace\_equation := subs(laplace(y(t), t, p) = Y, laplace\_result);$

$$Y p^2 + Y - 3p - 1 = \frac{6}{p + 1} \quad (7)$$

Выражаю Y и сразу же раскладываю на простейшие дроби для последующего воздействия обратным преобразованием:

$fraction\_simple := convert(solve(laplace\_equation, Y), parfrac);$

$$\frac{3}{p + 1} + \frac{4}{p^2 + 1} \quad (8)$$

$solution := inttrans[invlaplace](fraction\_simple, p, t);$

$$3 e^{-t} + 4 \sin(t) \quad (9)$$

restart;

Задание 5

Решить систему дифференциальных уравнений операторным методом

Входные данные опять в виде массива. Два уравнения системы + начальные условия

$differential\_equation := [diff(x(t), t) = x(t) + 3 \cdot y(t) + 2, diff(y(t), t) = x(t) - y(t) + 1, x(0) = -1, y(0) = 2]$:

Преобразую (преобразованием Лапласа) в общий вид, а потом сразу же уже в вид с нужными значениями (в ту же переменную)

.И так для двух уравнений системы

$laplace1 := inttrans[laplace](differential\_equation[1], t, p);$

$$p\,laplace(x(t), t, p) - x(0) = laplace(x(t), t, p) + 3\,laplace(y(t), t, p) + \frac{2}{p} \tag{10}$$

$laplace1 := subs(laplace(y(t), t, p) = Y, subs(laplace(x(t), t, p) = X, subs(differential\_equation[3], laplace1)));$

$$Xp + 1 = X + 3\,Y + \frac{2}{p} \tag{11}$$

$laplace2 := inttrans[laplace](differential\_equation[2], t, p);$

$$p\,laplace(y(t), t, p) - y(0) = laplace(x(t), t, p) - laplace(y(t), t, p) + \frac{1}{p} \tag{12}$$

$laplace2 := subs(laplace(y(t), t, p) = Y, subs(laplace(x(t), t, p) = X, subs(differential\_equation[4], laplace2)))$

$$Y\,p - 2 = X - Y + \frac{1}{p} \tag{13}$$

$solution\_laplace := solve(\{laplace1, laplace2\}, \{X, Y\}) :$
$laplace\_X := convert(solution\_laplace[1], parfrac);$
$laplace\_Y := convert(solution\_laplace[2], parfrac);$

$$X = \frac{15}{8\,(p-2)} - \frac{5}{4\,p} - \frac{13}{8\,(p+2)}$$
$$Y = \frac{5}{8\,(p-2)} - \frac{1}{4\,p} + \frac{13}{8\,(p+2)} \tag{14}$$

$solution\_x := inttrans[invlaplace]\left(-\frac{5}{4\,p}, p, t\right) + inttrans[invlaplace]\left(-\frac{13}{8\,(p+2)}, p, t\right) + inttrans[invlaplace]\left(\frac{15}{8\,(p-2)}, p, t\right);$

$$-\frac{5}{4} - \frac{13}{8}\,e^{-2\,t} + \frac{15}{8}\,e^{2\,t} \tag{15}$$

$solution\_y := inttrans[invlaplace]\left(\frac{5}{8\,(p-2)}, p, t\right) - inttrans[invlaplace]\left(\frac{1}{4\,p}, p, t\right) + inttrans[invlaplace]\left(\frac{13}{8\,(p+2)}, p, t\right);$

$$\frac{5}{8}\,e^{2\,t} - \frac{1}{4} + \frac{13}{8}\,e^{-2\,t} \tag{16}$$

$restart;$

Слуцкий Никита | гр. 053506