Лабораторная работа №5 | 28.11.2021

„Обыкновенные дифференциальные уравнения"

{№ в журнале – 21; Вариант – 1}.

$M = (1, 2)$.

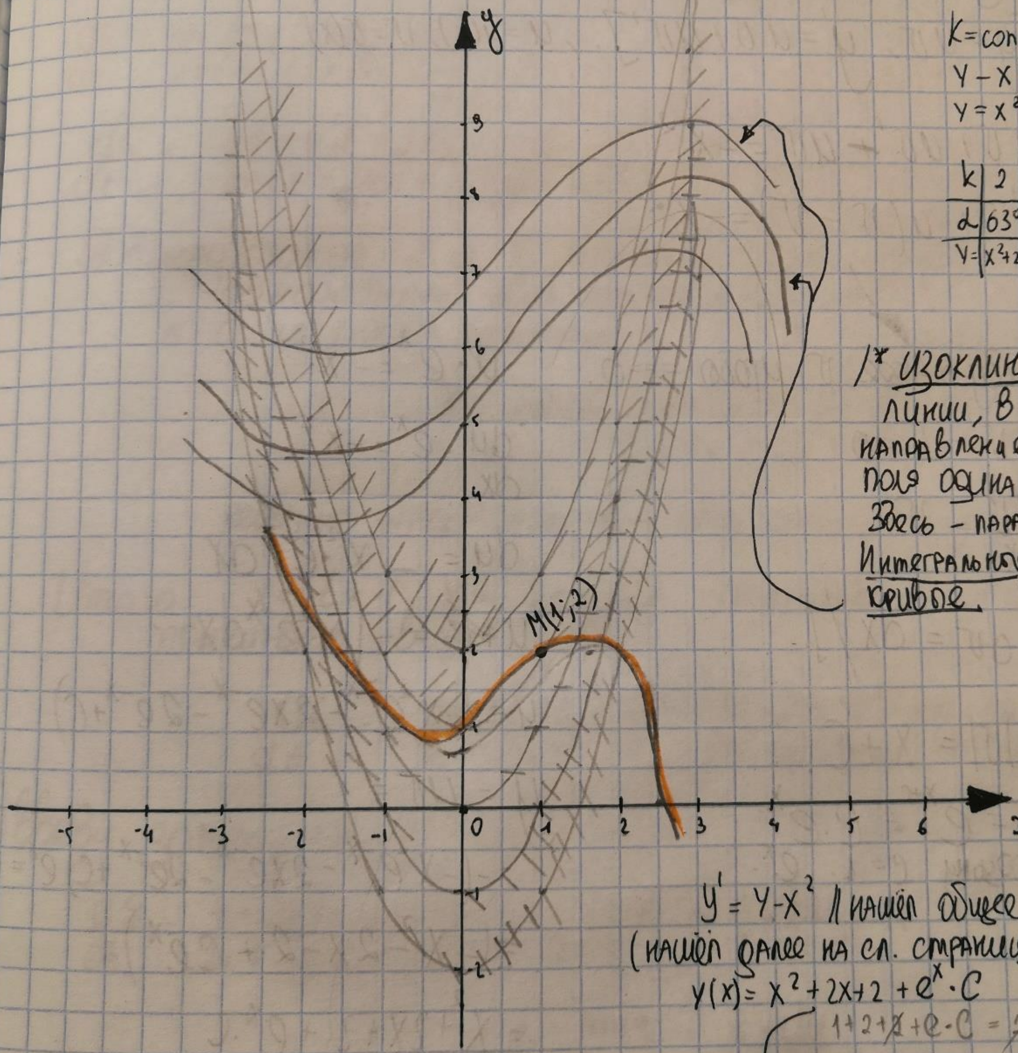
$\boxed{\text{Задание 1}}$ $y' = y - x^2$. $y' = tg\,\alpha$ – тангенс угла наклона касательной.

$k = const$

$y - x^2 = k$

$y = x^2 + k$

k	2	1	0	-1	-2
α	63°	45°	0°	-45°	-63°
y=	x^2+2	x^2+1	x^2	x^2-1	x^2-2



/* Изоклины – линии, в которых направление дифф. поля одинаково. Здесь – параболы. Интегральные кривые. */

$y' = y - x^2$ // нашёл общее решение (нашёл далее на сл. странице)

$y(x) = x^2 + 2x + 2 + e^x \cdot C$

$1 + 2 + \cancel{2} + e \cdot C = \cancel{2}$

$3 + e \cdot C = 0$

$e \cdot C = -3$

$C = -\frac{3}{e}$

$y' = y - x^2$ $\frac{dy}{dx} = y - x^2$. // нашёл частное решение

$y = x^2 + 2x + 2 - \frac{3}{e} e^x$

$y' = y - x^2$

$\underbrace{y'}_{y'} - \underbrace{y}_{P(x)} = \underbrace{-x^2}_{f(x)}$

это линейное ДУ I-го порядка.

Решу методом Бернулли.

$[y = uv;\ y' = u'v + uv'].\ ,\ u = u(x),\ v = v(x)$

$u'v + uv' - uv = -x^2.$

$u'v + u(v' - v) = -x^2$

найду такое v, чтобы $= = 0$.

$v' - v = 0$

$\frac{dv}{dx} = v.$

$\frac{1}{v}dv = dx \,/\int$

$\ln|v| = x + C.$

$v = e^{x+c} = C \cdot e^x.$

возьму $C = 1.$ $e^x.$

$u' \cdot e^x = -x^2$

$\frac{du}{dx} \cdot e^x = -x^2$

$du = -x^2 e^{-x} dx$

$u \cancel{+C} = -\int x^2 e^{-x} dx$

$u = -(-x^2 e^{-x} - 2xe^{-x} - 2e^{-x} + C)$

$y = uv =$

$= -(-x^2 e^{-x} - 2xe^{-x} - 2e^{-x} + c)e^{x} =$

$= (-x^2 - 2x - 2 + Ce^x) =$

$= \underbrace{x^2 + 2x + 2 + e^x \cdot C}_{\text{общее решение}}$

$\boxed{\text{Задание 2}}$ подзадача 1: $M_0(15, 1)$, $a = 25$.

уравнение касательной к функции f в точке x_0:

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Пусть есть точка M_z $(z, f(z))$ на этой линии (ещё не найденной).
Там у нас касательная: $y = f(z) + f'(z)(x - z)$
нормаль в точке M_z: $y(x) = f(z) - \frac{1}{f'(z)}(x - z)$

(просто подставил $x=0$ в уравнение).

эта прямая пересекает Oy в точке $N_z = \left(0, f(z) + \frac{z}{f'(z)}\right)$
Всё, есть точка M_z, есть точка N_z. А M_zN_z — это перпендикуляр к неизвестной кривой. И дана длина отрезка — a.

То есть $$\sqrt{z^2 + \left(f(z) + \frac{z}{f'(z)} - f(z)\right)^2} = a. \quad \uparrow^2$$

$$z^2 + \frac{z^2}{(f'(z))^2} = a^2.$$

$$\frac{a^2 - z^2}{1} = \frac{z^2}{f'(z)^2} \Longleftrightarrow (f'(z))^2 = \frac{z^2}{a^2 - z^2}.$$

$$f'(z) = \pm\frac{z}{\sqrt{a^2 - z^2}}$$ // т.к. интересует острый угол с направлением Oy.

$\Downarrow$

$$f(z) = \pm\sqrt{a^2 - z^2} + C, \ C \in \mathbb{R}.$$ То берём с плюсом.

$f(z) = \sqrt{a^2 - z^2} + C$ и эта кривая проходит через M_0

$\Rightarrow$ $1 = \sqrt{625 - 225} + C$ $\quad 1 = 20 + C$, $\underline{\underline{C = -19}}$

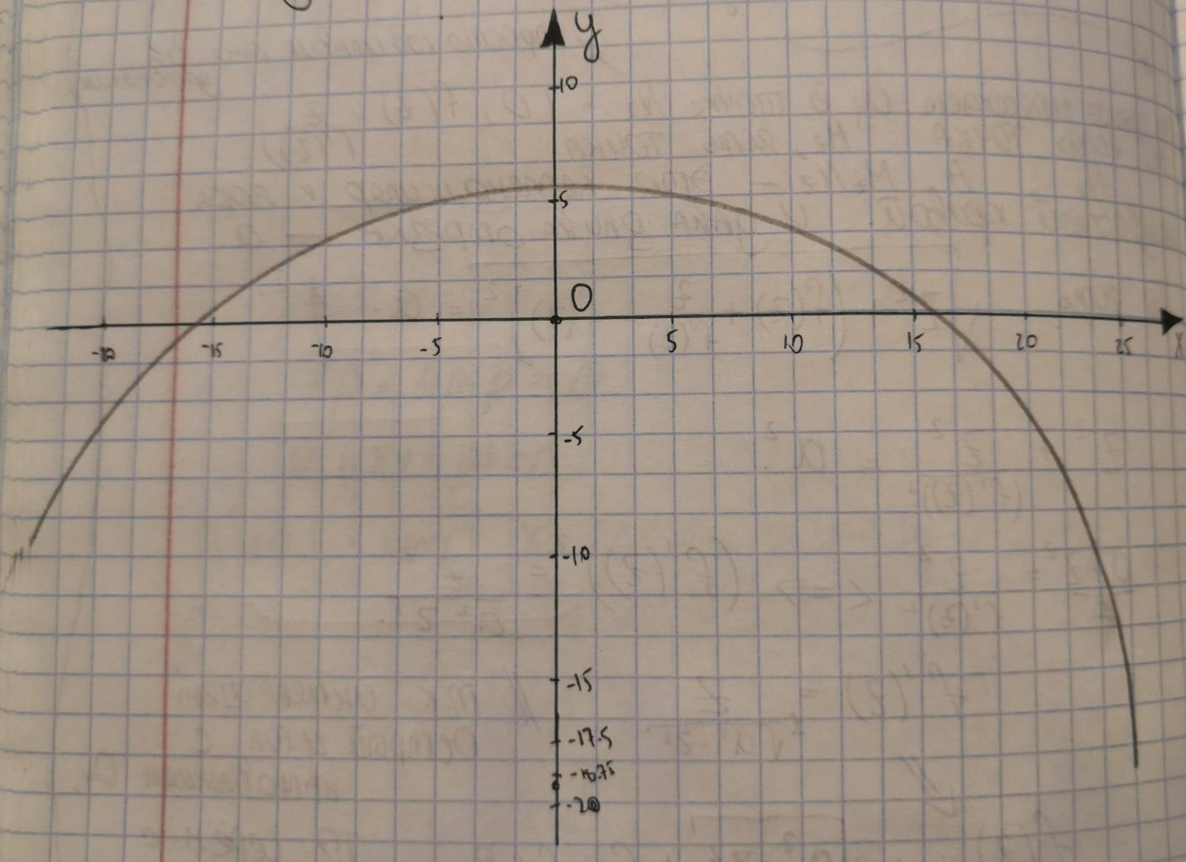
То есть $f(x) = \sqrt{625 - x^2} - 19$

// перешёл к обычн. переменной x

$y = \sqrt{625 - x^2} - 19$

$y + 19 = \sqrt{625 - x^2}$

$y^2 + 19^2 -$



2-я подзадача: $M_0(1, e)$, $a = -0.5$

уравнение касательной к функции f в точке x_0:

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

или же $y = y_0 + f'(x_0)(x - x_0)$

а в произв. точке $y = y_0 + y'(x - x_0)$

Касательная пересекает Ox в точке:

$$0 = y_0 + f'(x_0)(x - x_0)$$

$$0 = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

$$-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = x - x_0.$$

$$x = x_0 + \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

$$M = (x_0, f(x_0))$$

Итого N имеет координаты

$$N = \left(x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}, 0\right).$$

Проекция M_0N на Ox – это:

$$x_0 - \left(x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}\right) = \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}. \qquad \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = \frac{1}{x_0} \cdot a$$

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0) \cdot x_0}{a}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y \cdot x}{a} \qquad \frac{1}{y} dy = \frac{1}{a} x\,dx \Big/ \int$$

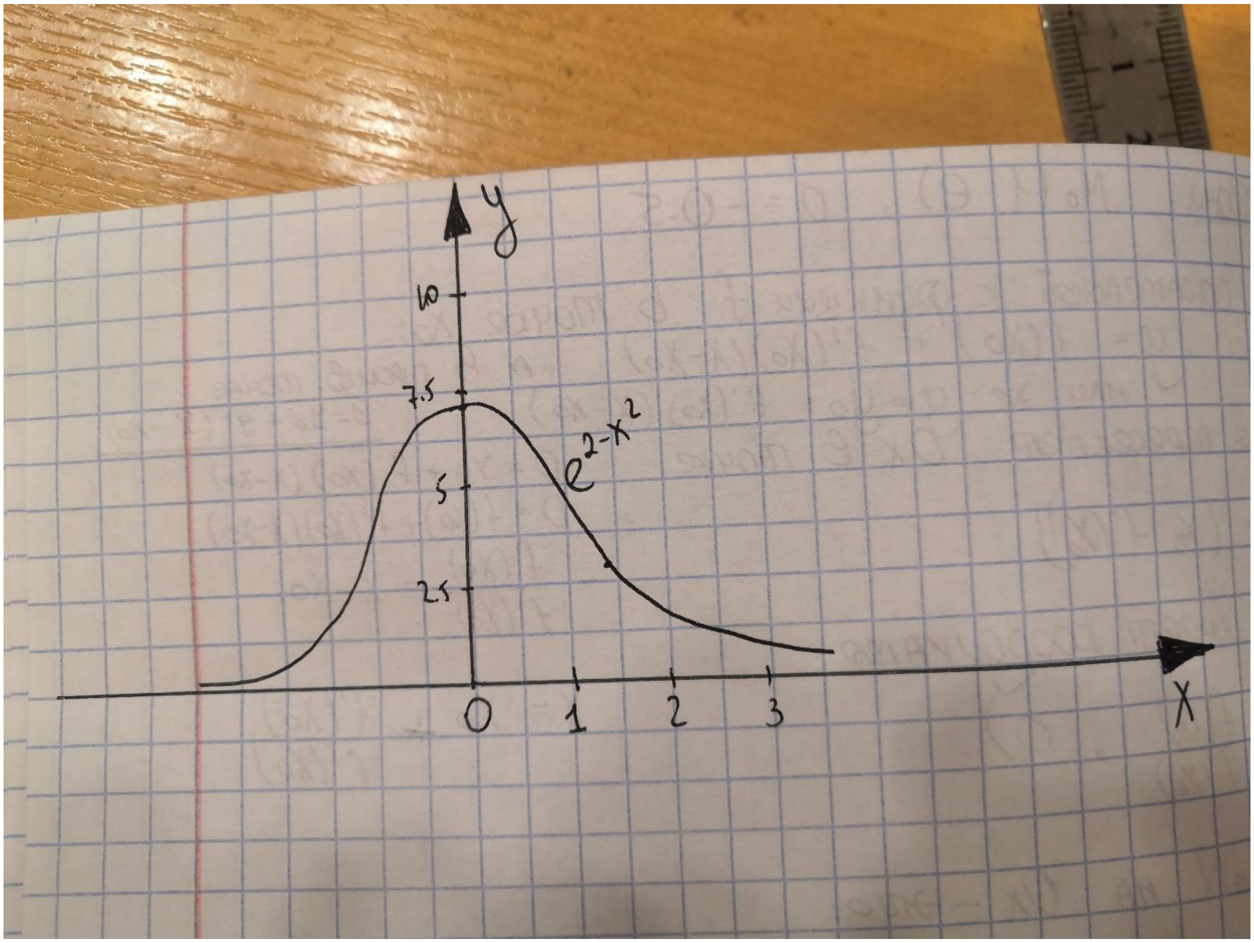
$$\ln|y| = \frac{1}{a} \cdot \frac{x^2}{2} + C_1$$

$$y = e^{\frac{x^2}{2a} + C_1} = C \cdot e^{x^2/2a}$$

найду C с M_0: $e = C \cdot e^{\frac{1}{-1}} \Rightarrow C = e^2$

итого $y = e^2 \cdot e^{x^2/(-1)} = e^{2 - x^2}$

$$f(x) = e^{2 - x^2}$$


y
10
7.5
5
2.5
e^{2-x^2}
0
1
2
3
X

$\boxed{\text{Задание 3}}$ $y' = \dfrac{4x+21y-25}{24x+y-25}$.

$t = t(x)$, $s = s(x)$

$t = x - \alpha$

$s = y - \beta$.

Замена: $\begin{cases} x = t + \alpha; \\ y = s + \beta; \end{cases}$ тут α и β пока неизвестны.

Из замены: $dx = dt$

$dy = ds$

$y' = \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{ds}{dt}$

$$\frac{ds}{dt} = \frac{4(t+\alpha) + 21(s+\beta) - 25}{24(t+\alpha) + (s+\beta) - 25}.$$

$$\frac{ds}{dt} = \frac{4t + 4\alpha + 21s + 21\beta - 25}{24t + 24\alpha + s + \beta - 25}.$$

Подберу такие α и β, чтобы уравнение стало однородным. Для этого приравняю к 0 и решу систему:

$$\begin{cases} 4\alpha + 21\beta - 25 = 0 \\ 24\alpha + \beta - 25 = 0. \end{cases}$$

Решение этой системы — пара чисел: $(\alpha; \beta) = (1; 1)$.

Итого $x = t + 1$, $y = s + 1$, а уравнение с учётом принимает вид:

$$\frac{ds}{dt} = \frac{4t + 21s}{24t + s} \Big| :t$$ это однородное уравнение для переменных s и t.

Введу замену $u = \dfrac{s}{t}$ $\Rightarrow$ $s = ut$. $\Rightarrow$ $\dfrac{ds}{dt} = t \cdot \dfrac{du}{dt} + u$

$$\frac{ds}{dt} = \frac{4 + 21\frac{s}{t}}{24 + \frac{s}{t}} \qquad \frac{4 + 21u}{24 + u} = t \cdot \frac{du}{dt} + u$$

$$\frac{-u^2 - 3u + 4}{24 + u} = t \cdot \frac{du}{dt}$$

$$\frac{1}{t}dt = \frac{24 + u}{-u^2 - 3u + 4}du. \qquad \ln|t| = -5\ln|u-1| + 4\ln|u+4| + C$$

$$\ln|x-1| = -5\ln\left|\frac{s}{t}-1\right| + 4\ln\left|\frac{s}{t}+4\right| + C$$

$$\ln|x-1| = -5\ln\left|\frac{y-1}{x-1}-1\right| + 4\ln\left|\frac{y-1}{x-1}+4\right| + \ln C.$$

$$\ln|x-1| = \ln\left|\left(\frac{y-1}{x-1}-1\right)^{-5}\right| + \ln\left|\left(\frac{y-1}{x-1}+4\right)^{4}\right| + \ln C.$$

$$\underbrace{|x-1| = \left(\frac{y-1}{x-1}-1\right)^{-5}\cdot\left(\frac{y-1}{x-1}+4\right)^{4}\cdot C}_{\text{неявное решение.}}$$

$\boxed{\text{Задание 4}}$ $y' + xy = (1+x)e^{-x}y^2; \quad y(0) = 1.$

Это уравнение Бернулли. Отличается от линейного ДУ 1-го порядка y^2 справа.

$$y' + \underbrace{x}_{P(x)}y = \underbrace{(1+x)e^{-x}}_{f(x)}\underbrace{y^2}_{y^{\alpha}}, \quad \alpha = 2.$$

$$y' + xy = (1+x)e^{-x}y^2 \quad \Big| : y^2$$

$$\frac{y'}{y^2} + x\cdot\frac{1}{y} = (1+x)e^{-x}.$$

Введу замену: $\frac{1}{y} = z$. $\underline{z = z(x)}$ // т.к. рассматривается $y = y(x)$.

тогда $z' = -\frac{1}{y^2}\cdot y' \Rightarrow \frac{y'}{y^2} = -z'$.

пусть $u = -\frac{1}{y}$.

подставляю.

$$-z' + x\cdot z = (1+x)e^{-x} \quad /\cdot -1.$$

$$z' - \underbrace{x}_{P(x)} z = \underbrace{(-1-x)e^{-x}}_{f(x)}$$

Это линейное ДУ 1-го порядка

Решу его методом подстановки Бернулли. Искомое решение ищется в виде $z = uv$, где $u = u(x)$, $v = v(x)$

$$z = uv \Rightarrow z' = u'v + uv'$$

$$u'v + uv' - uvx = (-1-x)e^{-x}$$

$$u'v + u(v' - vx) = (-1-x)e^{-x}$$

найду такое v, чтобы $= = = 0$.

$$\frac{dv}{dx} = vx$$

$$\frac{1}{v}dv = xdx \quad \Big/\int$$

$$\ln|v| = \frac{x^2}{2} + C$$

$v = Ce^{\frac{x^2}{2}}$, возьму $C = 1$.

$$v = e^{x^2/2}.$$

$$u' \cdot e^{x^2/2} = (-1-x)e^{-x}$$

$$\frac{du}{dx} = (-1-x)\cdot e^{-x-\frac{x^2}{2}}$$

$$du = (-1-x)e^{-x-\frac{x^2}{2}}dx$$

$$u = e^{-x-\frac{1}{2}x^2} + C$$

$$z = uv = e^{\frac{x^2}{2}}\cdot\left(e^{-x-\frac{x^2}{2}} + C\right) = \underbrace{e^{-x} + C\cdot e^{\frac{x^2}{2}}}$$ общее решение это для z

общее решение

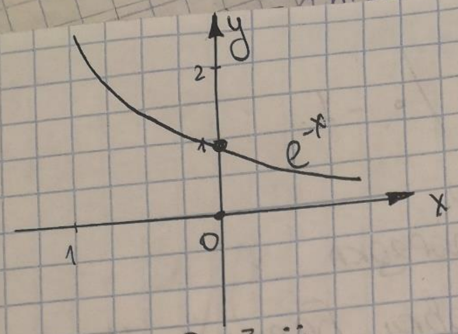
$$z = e^{-x} + C\cdot e^{x^2/2}$$

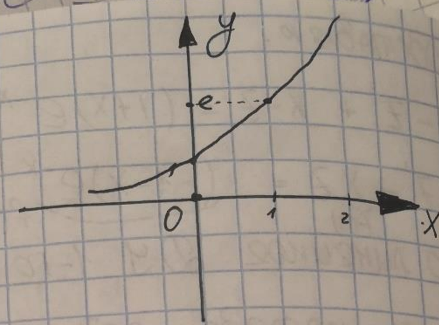
$$y = \frac{1}{e^{-x} + C\cdot e^{x^2/2}}$$

~~$y(0)$~~ $= 1$.

$y(0) = 1$.

$\frac{1}{1} = \frac{1}{1+C} \Rightarrow C = 0 \Rightarrow y = e^{x}$ — решение задачи Коши





// это для z ☺

$\boxed{\text{Задание 5}}$: <u>1-й пример</u>: $x = y'\arcsin y' + \sqrt{1-y'^2}$

вводжу замену: $[y' = z]$.

$x = z\arcsin z + \sqrt{1-z^2}$. — продифференцирую.

~~ещё одна замена:~~

~~$\arcsin z = t$.~~

~~$(\arcsin z)' = \frac{t'}{1} = \frac{1}{\sqrt{1-z^2}}$~~

$\frac{dy}{dx} = \frac{z}{1} \Rightarrow dx = \frac{dy}{z}$

это пригодится.

~~xz~~ d

параметрический ответ

- $x = z\arcsin z + \sqrt{1-z^2}$

$dx = (z\arcsin z + \sqrt{1-z^2})'\,dz$

$\frac{dy}{z} = {}'\arcsin z\,dz$

$dy = z\arcsin z\,dz$

это уравнение, разрешённое относительно производной

- $y = \frac{\arcsin z \cdot z^2}{2} + \frac{-\arcsin z + z\sqrt{1-z^2}}{4} + C$
- $y' = z$

2-й пример: $y = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+y'}{1-y'}\right| - y'$

это похоже на уравнение Лагранжа вида $y = x\cdot\varphi(y') + \psi(y')$,
где $\varphi(y') \equiv 0$.

Введу замену $[y' = p]$, $p = p(x)$

$$y = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+p}{1-p}\right| - p \quad / \text{ продифференцирую по } x$$

$$p = \frac{1\cdot p'}{1-p^2} - p'$$

$$p = p'\left(\frac{1}{1-p^2} - 1\right) = \left(\frac{1-1+p^2}{1-p^2}\right)p'$$

$$p = p'\left(\frac{p^2}{1-p^2}\right)$$

$$p = \frac{dp}{dx}\left(\frac{p^2}{1-p^2}\right) \quad / \cdot dx \quad / : p$$

$$dx = \frac{p}{1-p^2}dp$$

$$x + C_1 = -\frac{1}{2}\ln|1-p^2| \quad / e$$

$$e^{x+C_1} = e^{-\frac{1}{2}\ln|1-p^2|}$$

$$e^{x+C_1} = \frac{1}{\sqrt{1-p^2}} \quad \uparrow^2$$

$$e^{x+C_1} = \cancel{\ }$$

$$\frac{e^{2x+2C_1}}{1} = \frac{1}{1-p^2}$$

$$= e^{2x}\cdot e^{2C_1} = \underline{C_1 e^{2x}}$$

$$1 - p^2 = \frac{1}{C_1 e^{2x}} = C\cdot e^{-2x}$$

$$p^2 = 1 - e^{-2x}\cdot C$$

$$|p| = \sqrt{1 - C\cdot e^{-2x}}$$

$$|y'| = \sqrt{1 - C\cdot e^{-2x}}$$

$$\underline{y = \int(1 - C\cdot e^{-2x})dx}$$

$\boxed{\text{Задание 6}}$: $y = xy' + 2y'^2 - 1$

Это уравнение Клеро ~~у~~ вида: $y = xy' + \psi(y')$.

$$y = xy' + \underbrace{2y'^2 - 1}_{\psi(y')}$$

Введу замену: $[y' = p]$.

тогда: $y = xp + 2p^2 - 1$.

продифференцирую по x:

$$y' = (xp)' + (2p^2 - 1)'_x$$

$$p = x \cdot p' + x' \cdot p + 4p \cdot p'$$

$$p = x \cdot p' + p + 4p \cdot p'$$

$$xp' + 4p \cdot p' = 0$$

$$p'(x + 4p) = 0.$$

$p' = 0$ или $x + 4p = 0$

$\frac{dp}{dx} = 0$	$x + 4y' = 0$
$\Downarrow$	$4y' = -x$
$p = C_1$	$4\frac{dy}{dx} = -x$
$\Downarrow$	
$y' = C_1$	$4dy = -x\,dx \;/\int$
$\Downarrow$	$4y = -\frac{x^2}{2} + C$
$y = C_1 x + C_2$	$y = -\frac{x^2}{8} + C$

семейство прямых