Лабораторная работа №6 18.12.2021

„ ОДУ высших порядков"

{ № в журнале – 21; Вариант 1 }.

$\boxed{\text{Задача 1}}$ пример 1: $x = y'' + e^{-y''}$ 1.1

замену $\left[y'' = t \Rightarrow \frac{dy'}{dx} = t \Rightarrow dx = \frac{dy'}{t} \right]$.

$x = t + e^{-t}$ / продифференцирую (точнее, возьму дифференциал)

$dx = dt - e^{-t}dt$

$(dx = dy'/t)$

$\frac{dy'}{t} = dt - e^{-t}dt$

$dy' = t\,dt - te^{-t}dt \; /\int$

$y' = \frac{t^2}{2} + \frac{t+1}{e^t} + C_1 \; /\int$

интегрирую

$y = \frac{t^3}{6} - \frac{t+2}{e^t} + C_1 t + C_2$

итого: $\begin{cases} x = t + e^{-t} \\ y = \frac{t^3}{6} - \frac{t+2}{e^t} + C_1 t + C_2 \end{cases}$

1.2 <u>пример 2</u>: $yy'' - y'^2 - yy' ctg x = 0.$

[пусть $y' = yt$] $\Rightarrow y'' = y't + yt' = yt^2 + yt'$

подставляю:

$$y \cdot (yt^2 + yt') - y^2 t^2 - y \cdot y \cdot t \cdot ctg x = 0 \; / : y^2$$

$$t^2 + t' - t^2 - t ctg x = 0$$

$$\frac{dt}{dx} = t ctg x \iff \frac{1}{t} dt = ctg x \, dx \; / \int$$

$$\ln|t| = \ln|\sin x| + \tilde{C_1} = \ln|C_1 \cdot \sin x|$$

$$t = C_1 \sin x$$

$$\frac{y'}{y} = C_1 \sin x$$

$$\frac{dy}{y dx} = C_1 \sin x$$

$$\frac{1}{y} dy = C_1 \sin x \, dx$$

$$\ln y = -C_1 \cos x + C_2$$

$$y = e^{-C_1 \cos x + C_2}, \quad C_1 \in \mathbb{R} \Rightarrow$$ C_1 проходит по $\mathbb{R}$ и $-C_1$ также.

Поэтому заменяю $(-C_1)$ на C_1

$$\underline{y = e^{C_1 \cos x + C_2}.}$$

пример 3: $y''(1+y^2)+y'^3=0.$

[введу замену $y'=p$, $p=p(y)$. Тогда

$y''=y'\cdot p'=p\cdot p'$].

$$p\cdot p'(1+y^2)+p^3=0 \quad /:p$$

$$p'(1+y^2)=-p^2$$

$$\frac{dp}{dy}(1+y^2)=-p^2$$

$$-\frac{1}{p^2}dp=\frac{1}{1+y^2}dy.$$

$$\frac{1}{p}=\operatorname{arctg} y+C_1.$$

$$\frac{dx}{dy}=\operatorname{arctg} x+C_1.$$

$$\frac{1}{\operatorname{arctg} x+C_1}=dy.$$

$$y=\int\frac{1}{\operatorname{arctg} x+C_1}dx+C_2$$

1.4 <u>пример 4</u>: $y'' = 3\left(\frac{y'}{x} - \frac{y}{x^2}\right) + \frac{2}{x^3}\sin\frac{1}{x^2}$ $/\cdot x^2$

$$x^2\cdot y'' = 3(x\cdot y' - y) + \frac{2}{x}\sin\frac{1}{x^2}.$$

$$[y' = p,\ p = p(x)].$$

$x^2\cdot p' = 3(xp - y) + \frac{2}{x}\sin\frac{1}{x^2}$ / продифференцирую.

$$2x\cdot p' + x^2\cdot p'' = 3(p + xp' - p) + - \frac{4\cos\frac{1}{x^2} + 2x^2\sin\frac{1}{x^2}}{x^4}$$

$$2xp' + x^2p'' = 3xp' - \frac{4\cos\frac{1}{x^2}\ldots\ldots}{x^4}.$$

$$x^2p'' - x\cdot p' + \frac{4\cos\frac{1}{x^2} + 2x^2\sin\frac{1}{x^2}}{x^4} = 0.$$

$[p' = z,\ z = z(x)]$, [пусть эта дробь $= f(x)$]

$x^2\cdot z' - x\cdot z + f(x) = 0$ $| : x^2$

$$z' - \frac{z}{x} + \frac{f(x)}{x^2} = 0 \iff z' - \frac{z}{x} = -\frac{f(x)}{x^2}$$

эта линейное ду 1-го порядка.

Решу методом Бернулли.

$$u'v + uv' - \frac{uv}{x} = 0$$

$$u\left(v' - \frac{v}{x}\right) = 0 \quad \frac{dv}{dx} = \frac{v}{x} \quad \frac{1}{v}dv = \frac{1}{x}dx$$

$\ln|v| = \ln|x| + C$ (C беру $= 0$).

$$\frac{du}{dx}\cdot x = -\frac{f(x)}{x^2}$$

$$\frac{du}{dx} = -\frac{f(x)}{x^3}$$

$$du = -\frac{f(x)}{x^3}dx$$

$$u = -\int \frac{f(x)}{x^3}dx + C$$

$$\Rightarrow z = \left(-x\left(-\int \frac{f(x)}{x^3}dx + C\right)\right).$$

$$\Downarrow$$

$$z = x\left(\int \frac{4\cos\frac{1}{x^2} + 2x^2\sin\frac{1}{x^2}}{x^7}dx + C\right).$$

тогда $p = \int x\left(\int \frac{4\cos\frac{1}{x^2} + 2x^2\sin\frac{1}{x^2}}{x^7}dx + C\right)dx$

и тогда решение уравнения в квадратурах:

$$y = \int\left(\int x\left(\int \frac{4\cos\frac{1}{x^2} + 2x^2\sin\frac{1}{x^2}}{x^7}dx + C\right)dx\right)dx$$

Maple выдаёт ответ на это:

$$y = \frac{1}{2}x^3\sin\left(\frac{1}{x^2}\right) - x$$

// ну и там константы где-то затерялись.

$\boxed{\text{Задание 2}}$ $y''' x\ln x = y''$

$[y'' = z,\ z = z(x)].$

$z' \cdot x\ln x = z.$

$$\frac{dz}{dx}\cdot x\cdot \ln x = z$$

$$\frac{1}{z}dz = \frac{1}{x\cdot \ln x}\cdot dx$$

$$\ln|z| = \ln\ln x + C_1 = \ln(C_1\cdot \ln x)$$

$$z = C_1\cdot \ln x$$

$y'' = C_1 \ln x$

$y' = C_1(x\ln x - x) + C_2$

$y = \frac{1}{2} C_1 x^2 \ln x - \frac{3}{4} C_1 x^2 + C_2 x + C_3$

$\boxed{\text{Задание 3}}$

$$y'' + 2y' = 4e^x(\sin x + \cos x)$$

характеристическое уравнение

$\lambda^2 + 2\lambda = 0$

$\lambda(\lambda + 2) = 0$

$\lambda = \{0; -2\}$.

Вид: $e^{\alpha x}(P_n(x)\cos\beta x + Q_m(x)\sin\beta x)$.

Решение в виде $e^x(4\cos x + 4\sin x)$.

$\alpha = 1$.

$P_n(x) = 4,\ n = 0$.

$Q_m(x) = 4 \Rightarrow m = 0$.

$\beta = 1$.

$\lambda = 1 \pm i\beta$ – не корень

характеристического уравнения $\Rightarrow$

решение в виде $y = e^{\alpha x}\left(U_s(x)\cos\beta x + V_s(x)\sin\beta x\right)$

$s = \max\{n, m\}$.

для моего примера это вид:

$$y = e^x\left(A\cos x + \tilde{A}\sin x\right).$$

$$y' = e^x\left((A+\tilde{A})\cos x - (A-\tilde{A})\sin(x)\right)$$

[$\tilde{A} = B$ – для удобства].

$$y'' = -2e^x\left(A\sin x - B\cos x\right)$$

левая часть после подстановки:

$$e^x\left((2A+4B)\cos x - (4A-2B)\sin x\right) =$$

$$= \cancel{4e^x\left(\left(\frac{A}{2}+B\right)\cos x + \left(A - \frac{B}{2}\right.\right.}$$

$$4e^x\left(\left(\frac{A}{2}+B\right)\cos x - \sin x\left(A-\frac{B}{2}\right)\right).$$

$$\begin{cases} \frac{A}{2} + B = 1 \\ -\left(A - \frac{B}{2}\right) = 1 \end{cases}$$

$\{A = -0.4;\ \overset{\tilde{A}}{B} = 1.2\}$

// решено в СКА Maple для быстроты.

~~Итого ответ~~ $y = e^x(-0.4\cos x + 1.2\sin x)$.

↑ это только частное решение исходного ОДУ

А общее решение: $y = C_1 + C_2e^{-2x} + e^x(-0.4\cos x + 1.2\sin x)$