> # Лабораторная работа 5

> # Обыкновенные дифференциальные уравнения

> # Слуцкий Никита | гр. 053506 (ФКСиС, ИиТП)

> # Вариант 1 (номер в журнале - 21)

>

>

> *restart*;

> **# Задание 1**

> #` `Для данного дифференциального уравнения методом изоклин построить интегральную кривую, проходящую через точку M .

>

> *with*(*DEtools*) : # пакет DEtools - для работы с дифференциальными уравнениями

> *M1_x* ≔ 1 :

> *M1_y* ≔ 2 :

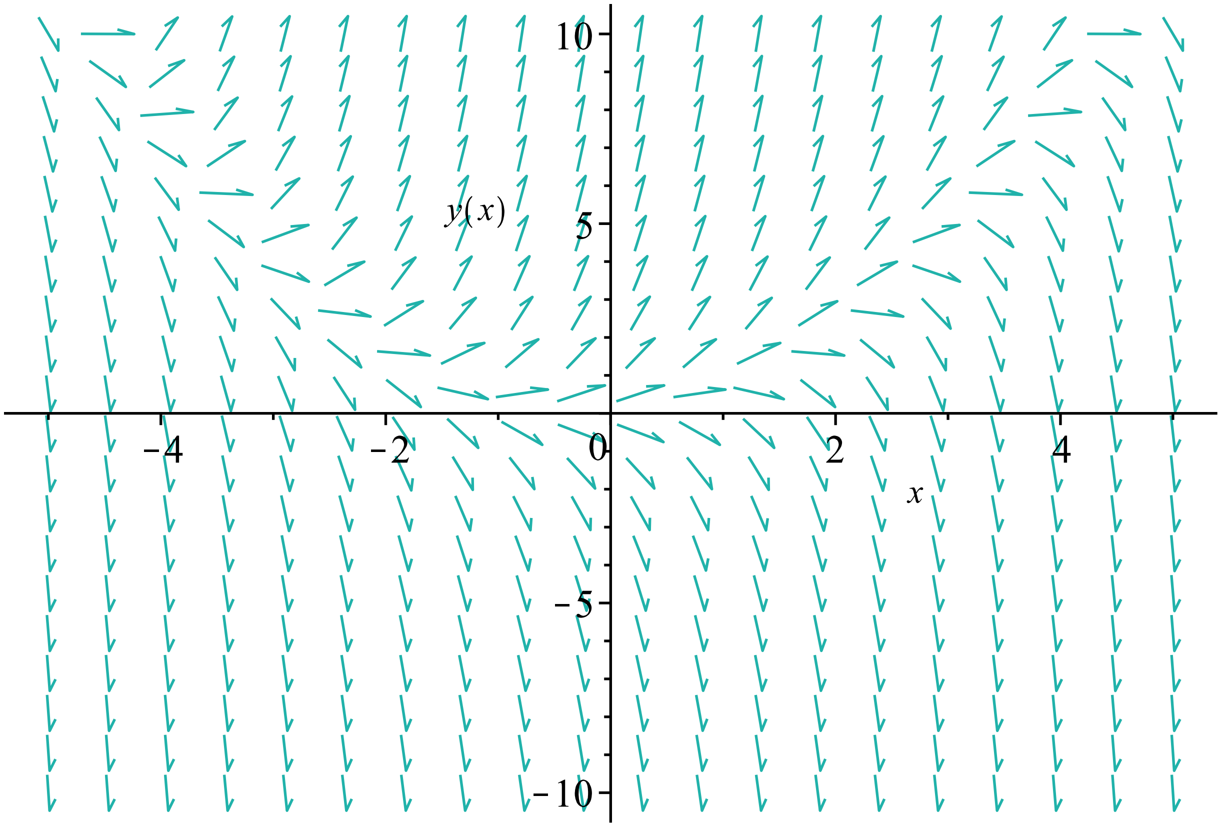
> *equation1* ≔ *diff* (*y*(*x*), *x*) = 2·*y*(*x*) − *x*²;

$$equation1 := \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\, y(x) = 2\, y(x) - x^2 \tag{1}$$

> *solution1* ≔ *dsolve*({*equation1*, *y*(*M1_x*) = *M1_y*});
частное решение (решение задачи Коши с заданной точкой)

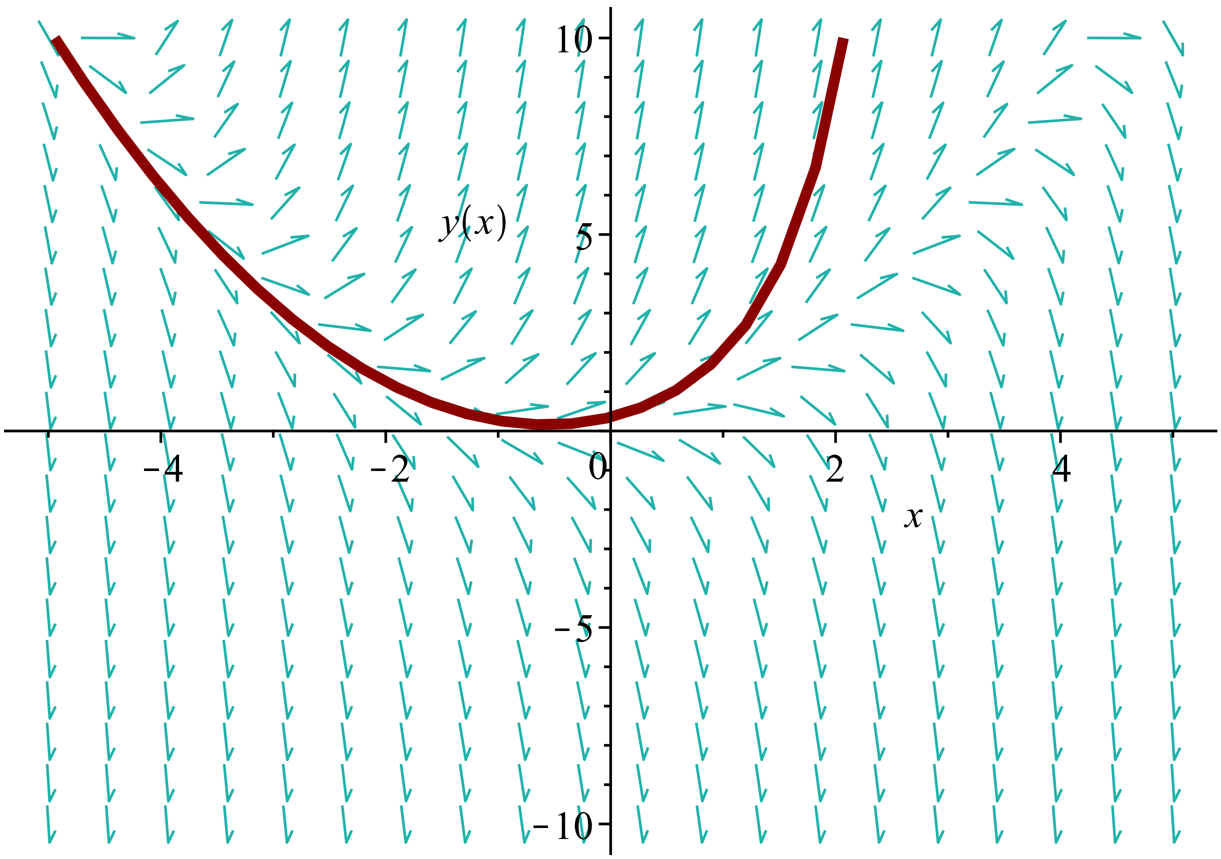
$$solution1 := y(x) = \frac{1}{2}\, x^2 + \frac{1}{2}\, x + \frac{1}{4} + \frac{3}{4}\, \frac{e^{2x}}{e^2} \tag{2}$$

> *field1* ≔ *dfieldplot*(*equation1*, *y*(*x*), *x* = −5 ..5, *y* = −10 ..10, *color* = "LightSeaGreen");



> $chart1 := plots[implicitplot](solution1, x = -5..5, y = -10..10, thickness = 4, color$
> $= \text{"DarkRed"}) :$

> $plots[display](field1, chart1);$



>

>

> *restart*;

> **# Задание 2**

> *# Найти линию, проходящую через M_0 и обладающую свойством, что в любой ее точке M нормальный вектор MN с концом на Oy имеет длину a, и образует острый угол с положительным направлением Oy.*

> *# Сделать чертеж*

>

> $with(DEtools)$:

> $a2\_1 := 25$:

> $M2\_1\_x := 15$:

> $M2\_1\_y := 1$:

> $equation2\_1 := diff(y(x), x) = \frac{x}{-\mathrm{sqrt}(625 - x^2)}$:

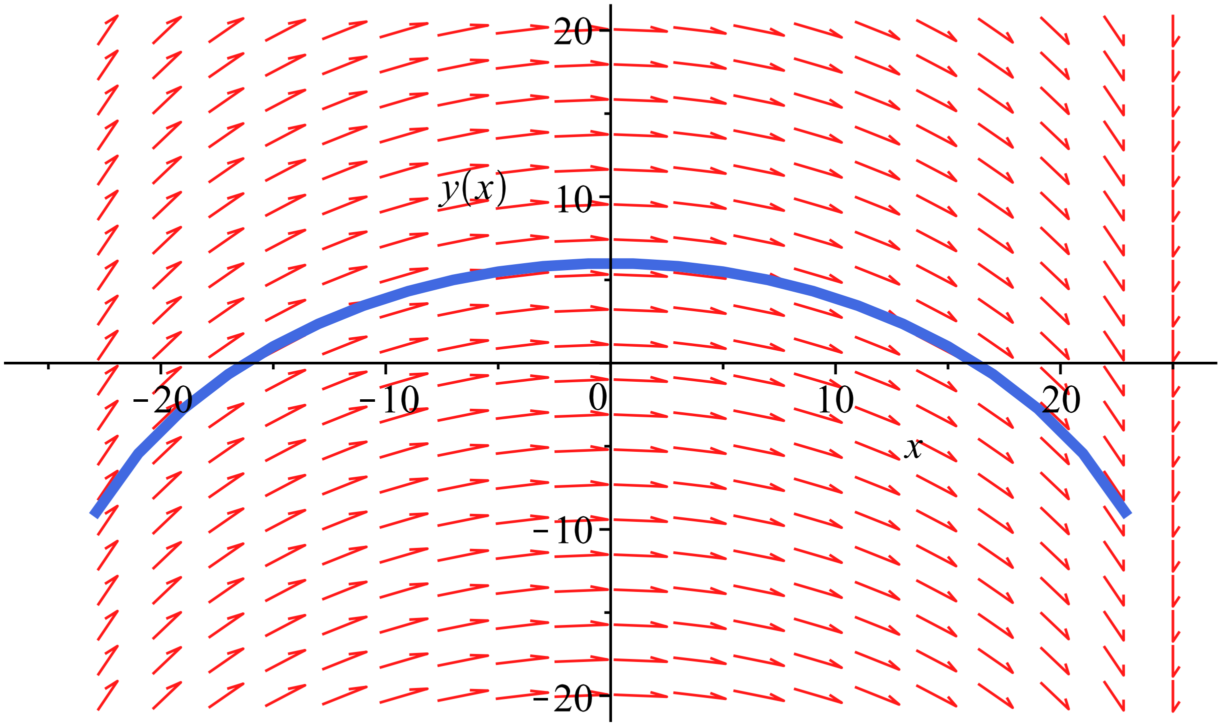
> $solution2\_1 := dsolve(\{equation2\_1, y(M2\_1\_x) = M2\_1\_y\})$;

$$solution2\_1 := y(x) = -\frac{(x-25)\,(x+25)}{\sqrt{-x^2+625}} - 19 \qquad (3)$$

> $chart2\_1 := plots[implicitplot](solution2\_1, x = -25..25, y = -20..20, thickness = 4, color = \text{"RoyalBlue"})$:

> $field2\_1 := dfieldplot(equation2\_1, y(x), x = -25..25, y = -20..20)$:

> $plots[display](field2\_1, chart2\_1);$



>

>

> $restart;$

>

> $with(DEtools):$

> $M2\_2\_x := 1:$

> $M2\_2\_y := \mathrm{e}:$

> $a2\_2 := -\frac{1}{2}:$

> $equation2\_2 := diff(y(x), x) = \frac{y(x) \cdot x}{a2\_2}:$

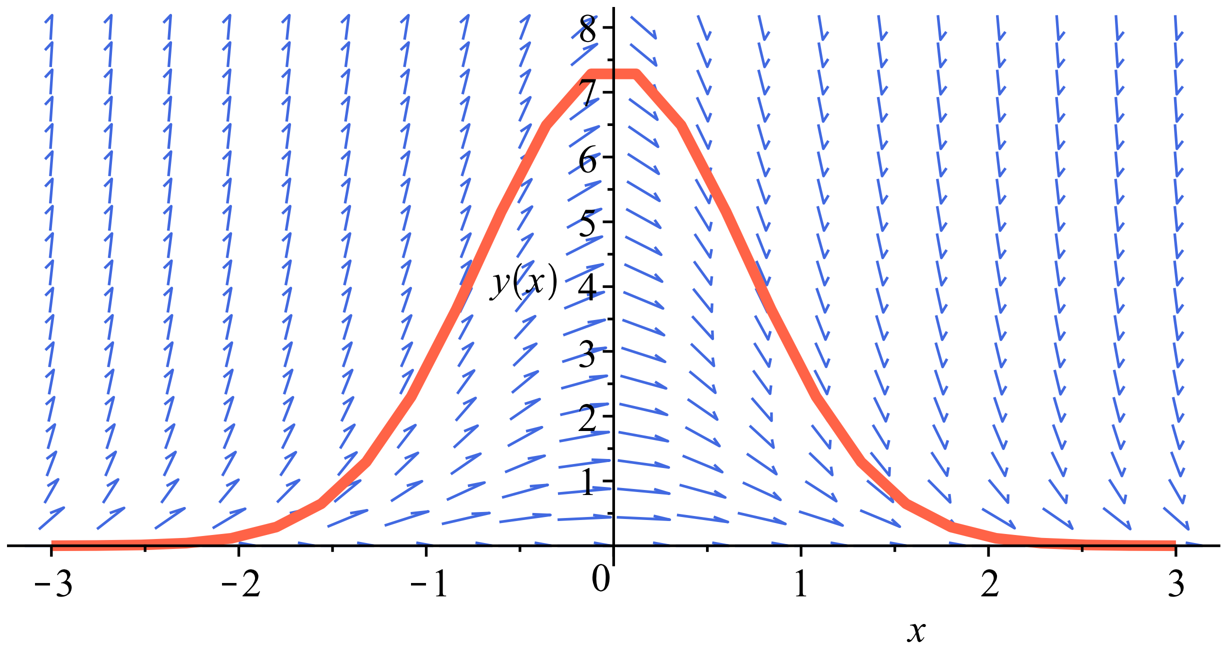
> $solution2\_2 := simplify(dsolve(\{equation2\_2, y(M2\_2\_x) = M2\_2\_y\}));$

$$solution2\_2 := y(x) = \mathrm{e}^{-x^2 + 2} \tag{4}$$

> $chart2\_2 := plots[implicitplot](solution2\_2, x = -3 ..3, y = 0 ..8, thickness = 4, color = \text{"Tomato"}):$

> $field2\_2 := dfieldplot(equation2\_2, y(x), x = -3 ..3, y = 0 ..8, color = \text{"RoyalBlue"}):$

> $plots[display](field2\_2, chart2\_2);$



\>

\>

\> *restart*;

\> **# Задание 3**

\> # Найти общий интеграл уравнения

\> # Построить на одном чертеже вблизи особой точки уравнения поле направлений и какую-либо интегральную кривую

\>

\> $with(DETools):$

\> $equation3 := diff(y(x), x) = \dfrac{4\cdot x + 21\cdot y(x) - 25}{24\cdot x + y(x) - 25}:$

\> $solution3 := dsolve(equation3);$

$$solution3 := 4\ln\left(-\frac{y(x) - 5 + 4x}{x - 1}\right) - 5\ln\left(\frac{-y(x) + x}{x - 1}\right) - \ln(x - 1) - \_C1 = 0 \qquad \textbf{(5)}$$

\> $system\_equations\_3 := \{4\cdot x + 21\cdot y - 25 = 0, 24\cdot x + y - 25 = 0\}:$

\> $solve(system\_equations\_3, \{x, y\});$

$$\{x = 1, y = 1\} \qquad \textbf{(6)}$$

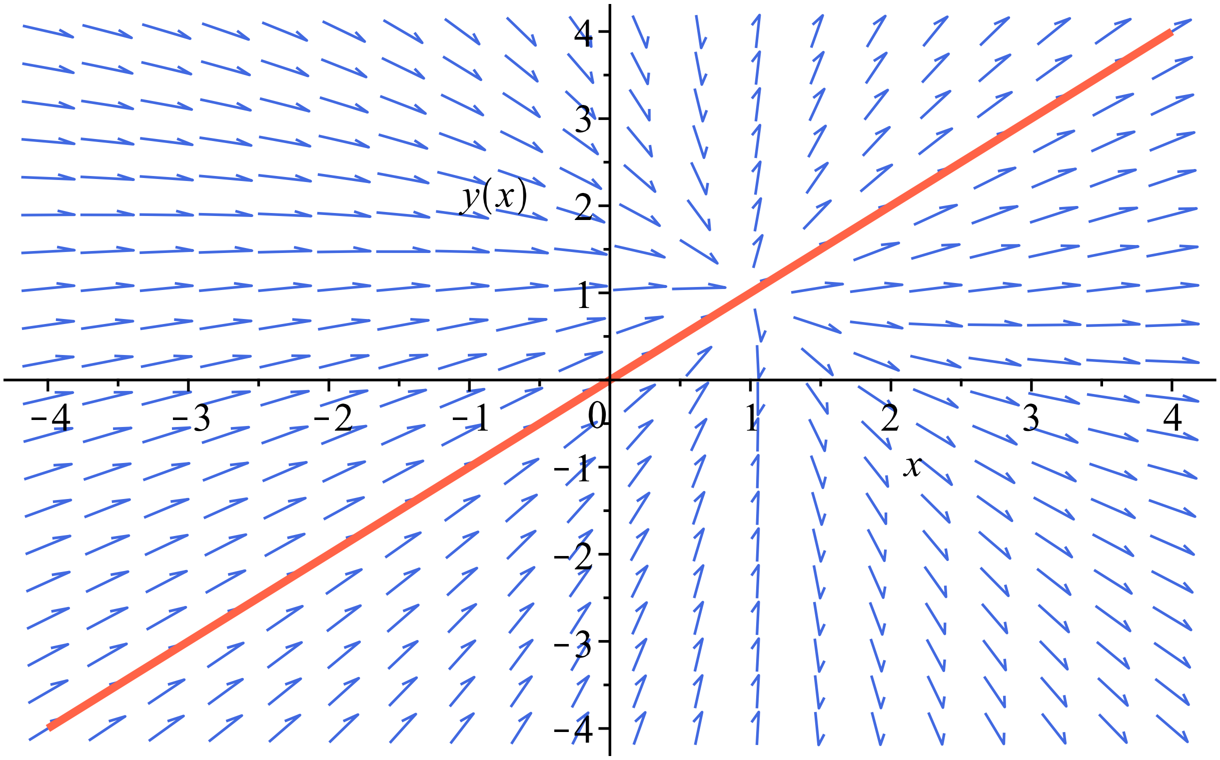
\> $solution3\_special\_point := dsolve(\{equation3, y(1) = 1\});$

$$solution3\_special\_point := y(x) = x, y(x) = 5 - 4x \qquad \textbf{(7)}$$

\> $field3 := dfieldplot(equation3, y(x), x = -4..4, y = -4..4, color = \text{"RoyalBlue"}):$

\> $chart\_3\_1 := plots[implicitplot](solution3\_special\_point[1], x = -4..4, y = -4..4, thickness = 3, color = \text{"Tomato"}):$

\> $plots[display](field3, chart\_3\_1);$



>

> $solve\left(linalg[det]\left(\begin{bmatrix} 24-\lambda & 1 \\ 4 & 21-\lambda \end{bmatrix}\right)=0\right);$

 # нашёл корни характеристического уравнения для определения типа особой точки

$$25, 20 \tag{8}$$

> *# корни действительны и оба корня > 0. Следовательно, это* ***неустойчивый узел***

>

>

> $restart;$

> ***# Задание 4***

> *# Найти решение задачи Коши*

> *# Сделать чертеж интегральной кривой.*

>

> $with(DEtools):$

> $equation4 := diff(y(x), x) + x \cdot y(x) = (1+x) \cdot \mathrm{e}^{-x} \cdot (y(x))^2:$

> $dsolve(equation4);$

$$y(x) = \frac{1}{\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2}\_C1 + \mathrm{e}^{-x}} \tag{9}$$

> $M4\_x := 0:$

> $M4\_y := 1:$

> $solution4 := dsolve(\{equation4, y(M4\_x) = M4\_y\});$

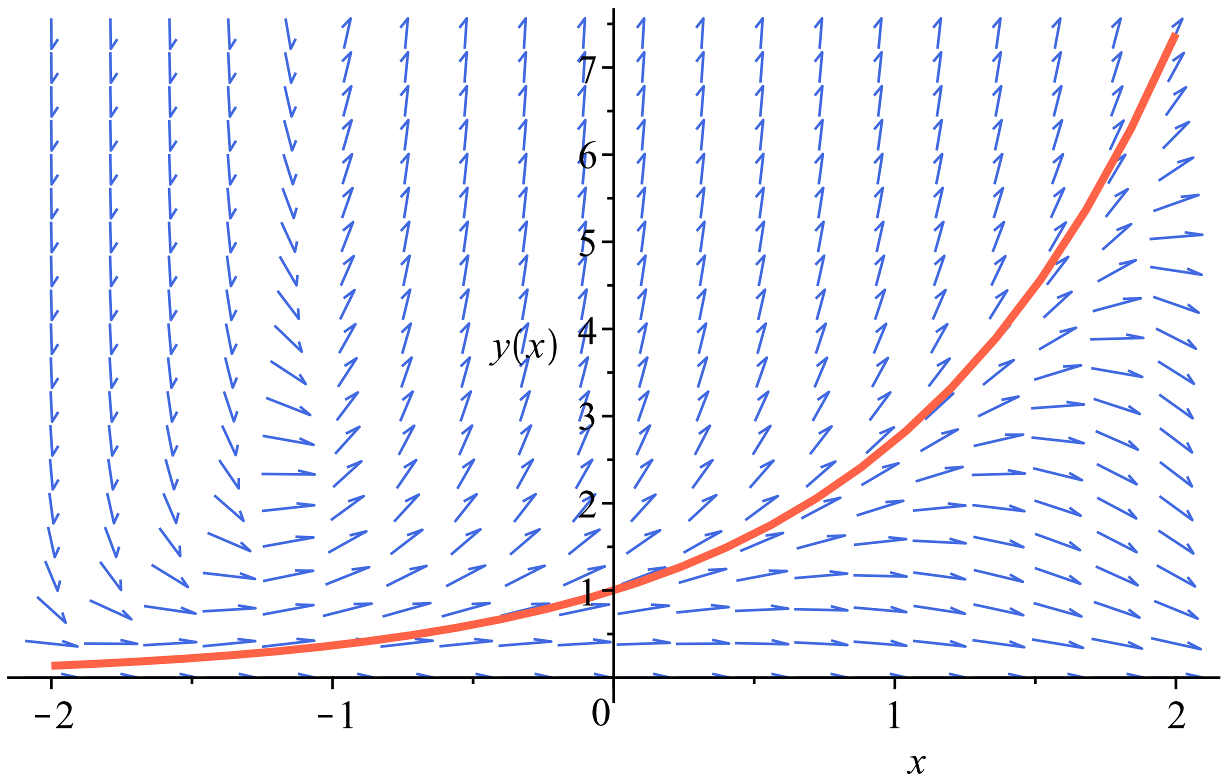
(10)

$$solution4 := y(x) = \frac{1}{e^{-x}} \tag{10}$$

> $field4 := dfieldplot\left(equation4, y(x), x=-2..2, y=0..e^2, color = \text{"RoyalBlue"}\right):$

> $chart4 := plots[implicitplot]\left(solution4, x=-2..2, y=0..e^2, color = \text{"Tomato"}, thickness = 3\right):$

> $plots[display](field4, chart4);$



>

>

> $restart;$

> **# *Задание 5***

> *# Решить ДУ*

> *# Построить в одной системе координат интегральные кривые при целых значениях произвольной постоянной от −1 до 1.*

> $with(DEtools):$

> $equation5\_1 := diff(y(z), z) = z\cdot\arcsin(z);$

$$equation5\_1 := \frac{d}{dz} y(z) = z \arcsin(z) \tag{11}$$

> $solution5\_1 := dsolve(equation5\_1);$

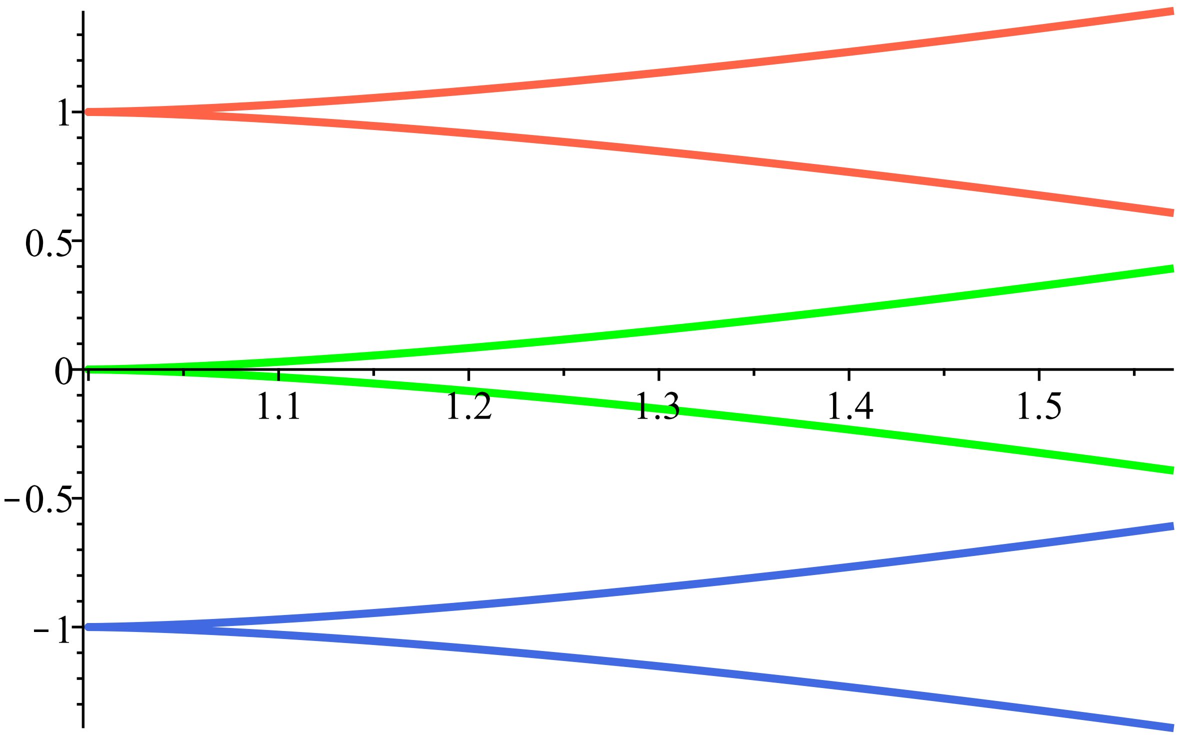
$$solution5\_1 := y(z) = \frac{1}{2} z^2 \arcsin(z) + \frac{1}{4} z \sqrt{-z^2+1} - \frac{1}{4} \arcsin(z) + \_C1 \tag{12}$$

> $chart5\_1\_0 := plot\left(\left[z\cdot\arcsin(z) + \mathrm{sqrt}\left(1 - z^2\right), \frac{1}{2} z^2 \arcsin(z) + \frac{1}{4} z \sqrt{-z^2+1} - \frac{1}{4} \arcsin(z), z=-1..1\right], thickness = 3, color = green\right):$

> $chart5\_1\_1 := plot\left(\left[z \cdot \arcsin(z) + \mathrm{sqrt}(1-z^2),\ \frac{1}{2} z^2 \arcsin(z) + \frac{1}{4} z\sqrt{-z^2+1} - \frac{1}{4}\arcsin(z) + 1, z=-1..1\right], thickness=3, color="Tomato"\right):$

> $chart5\_1\_minus1 := plot\left(\left[z \cdot \arcsin(z) + \mathrm{sqrt}(1-z^2),\ \frac{1}{2} z^2 \arcsin(z) + \frac{1}{4} z\sqrt{-z^2+1} - \frac{1}{4}\arcsin(z) - 1, z=-1..1\right], thickness=3, color="RoyalBlue"\right):$

> $plots[display](chart5\_1\_minus1, chart5\_1\_0, chart5\_1\_1);$



>

> $equation5\_2 := diff(x(p), p) = \frac{p}{1-p^2}:$

> $dsolve(equation5\_2);$

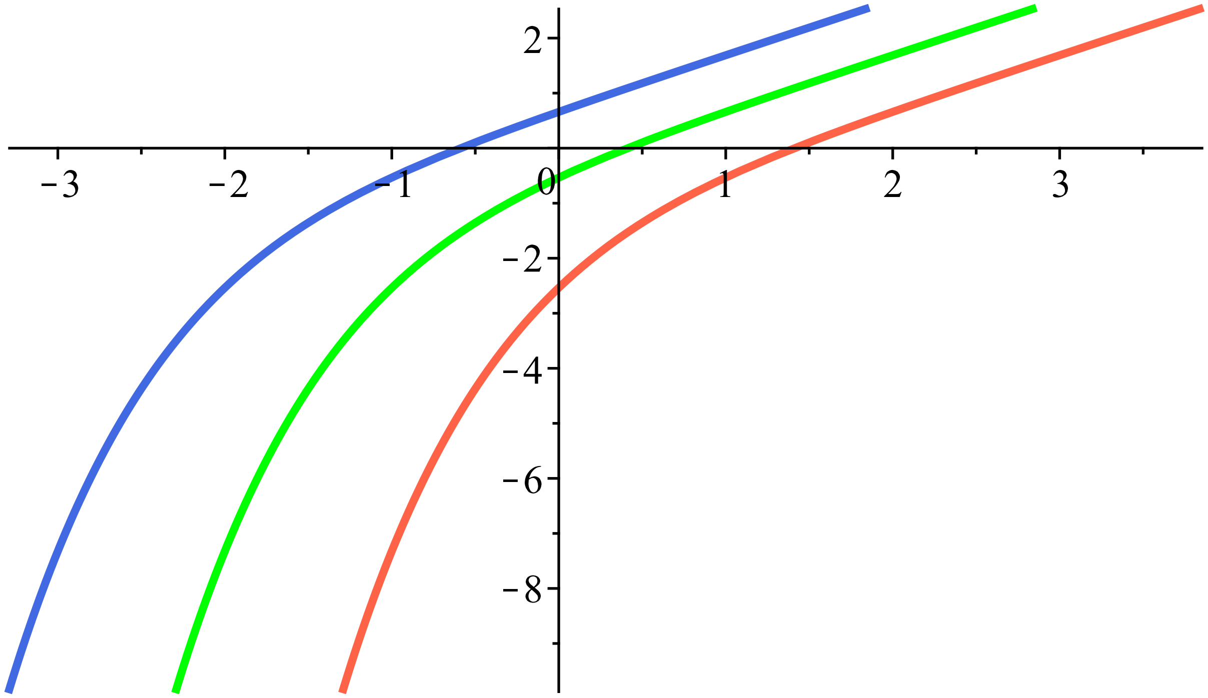
$$x(p) = -\frac{1}{2}\ln(p-1) - \frac{1}{2}\ln(p+1) + \_C1 \qquad (13)$$

> $chart5\_2\_0 := plot\left(\left[-\frac{1}{2}\ln(p-1) - \frac{1}{2}\ln(1+p),\ \frac{1}{2}\ln\left(\left|\frac{1+p}{1-p}\right|\right) - p, p=-10..10\right], thickness=3, color=green\right):$

> $chart5\_2\_1 := plot\left(\left[-\frac{1}{2}\ln(p-1) - \frac{1}{2}\ln(1+p) + 1,\ \frac{1}{2}\ln\left(\left|\frac{1+p}{1-p}\right|\right) - p, p=-10..10\right], thickness=3, color="Tomato"\right):$

> $chart5\_2\_minus1 := plot\left(\left[-\frac{1}{2}\ln(p-1) - \frac{1}{2}\ln(1+p) - 1,\ \frac{1}{2}\ln\left(\left|\frac{1+p}{1-p}\right|\right) - p, p=-10..10\right], thickness=3, color="RoyalBlue"\right):$

> plots[display](chart5_2_minus1, chart5_2_0, chart5_2_1);



>

>

> restart;

> **# Задание 6**

> # Найти все решения уравнения

> # Построить в одной системе график особого решения и интегральных кривых при целых значениях постоянной от −3 до 3.

> with(DEtools) :

> $equation6 := y(x) = x \cdot diff(y(x), x) + 2 \cdot (diff(y(x), x))^2 - 1$:

> solution6 := dsolve(equation6);

$$solution6 := y(x) = -\frac{1}{8}x^2 - 1, y(x) = 2\_C1^2 + \_C1\,x - 1 \tag{14}$$

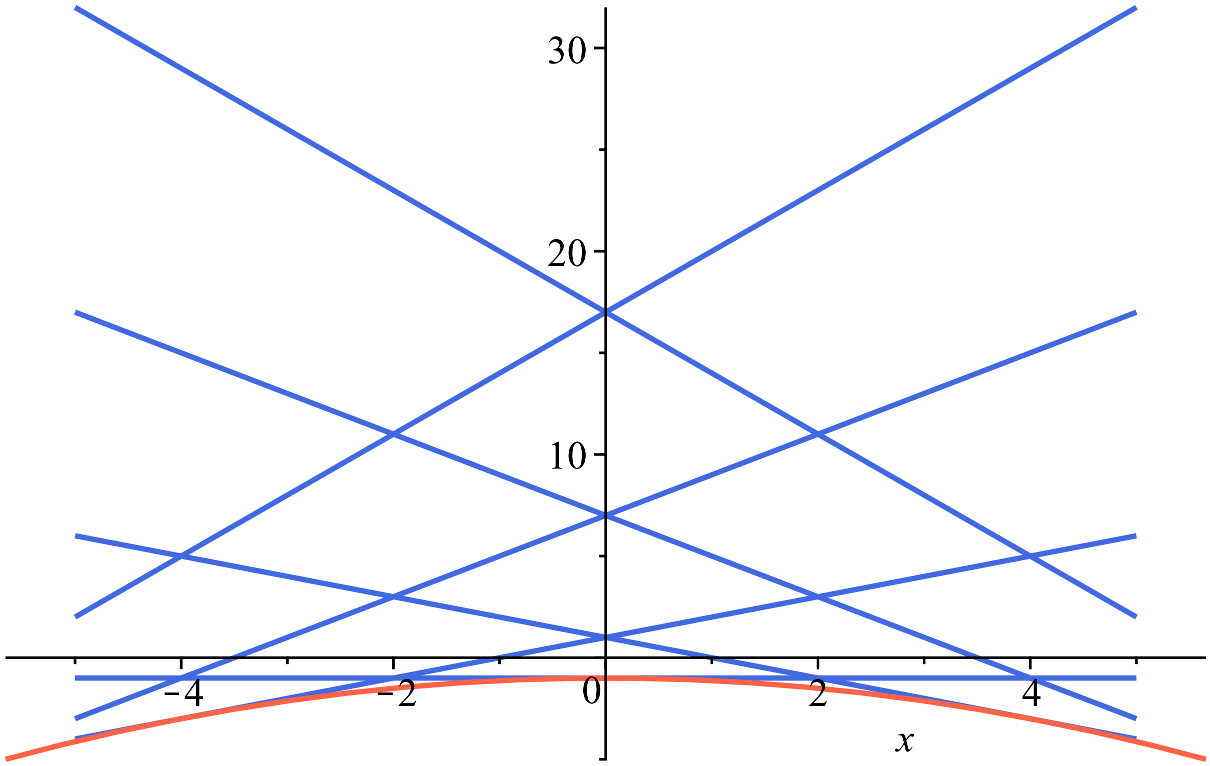
> lines6 := Array([1, 2, 3, 4, 5, 6, 7]) :

> index6 := 1 :

> **for** counter **from** −3 **by** 1 **to** 3 **do**
lines6[index6] := plot(2·counter^2 + counter·x − 1, x = −5 ..5, thickness = 2, color = "RoyalBlue") : # графики семейства прямых
index6 := index6 + 1 :
end do:

> chart6 := plots[implicitplot](solution6[1], x = −10 ..10, y = −5 ..5, thickness = 2, color = "Tomato") :

> plots[display](lines6[1], lines6[2], lines6[3], lines6[4], lines6[5], lines6[6], lines6[7], chart6);



>

>

>

> *restart*;

>

> # Слуцкий Никита | гр. 053506

>

>

>