

> # Лабораторная работа 4

> # `Ряды Фурье

> # Слуцкий Никита | гр. 053506 (ФКСиС, ИиТП)

> # Вариант 1 (номер в журнале — 21)

> restart;

> # Задание 1

> # Получить разложение в тригонометрический ряд Фурье.

> # Создать пользовательскую процедуру для построения тригонометрического ряда Фурье произвольной функции, удовлетворяющей теореме Дирихле.

> # Построить в одной системе координат на промежутке $[-3\pi, 3\pi]$ графики частичных сумм $S_1(x)$, $S_3(x)$,

$S_7(x)$ ряда и его суммы $S(x)$.

> # Анимировать процесс построения графиков сумм ряда, взяв в качестве параметра порядковый номер частичной суммы.

> GetA0 := **proc**(functionExpression, halfPeriod, leftIntBorder, rightIntBorder)

$$\text{simplify}\left(\frac{1}{\text{halfPeriod}} \cdot \text{int}(\text{functionExpression}, x = \text{leftIntBorder} .. \text{rightIntBorder})\right)$$

end proc:

> GetAn := **proc**(functionExpression, halfPeriod, leftIntBorder, rightIntBorder)

$$\text{simplify}\left(\frac{1}{\text{halfPeriod}} \cdot \text{int}\left(\text{functionExpression} \cdot \cos\left(\frac{n \cdot \pi \cdot x}{\text{halfPeriod}}\right), x = \text{leftIntBorder} .. \text{rightIntBorder}\right)\right) \text{ assuming } n$$

:: posint

end proc:

> GetBn := **proc**(functionExpression, halfPeriod, leftIntBorder, rightIntBorder)

$$\text{simplify}\left(\frac{1}{\text{halfPeriod}} \cdot \text{int}\left(\text{functionExpression} \cdot \sin\left(\frac{n \cdot \pi \cdot x}{\text{halfPeriod}}\right), x = \text{leftIntBorder} .. \text{rightIntBorder}\right)\right) \text{ assuming } n$$

:: posint

end proc:

> GetFourierSumValue := **proc**(expression, m, halfPeriod, leftIntBorder, rightIntBorder)

(напоминаю, теорема Дирихле: ф-я кусочно-гладкая => её ряд Фурье для каждого X сходится к f(X))

$$\frac{\text{GetA0}(\text{expression}, \text{halfPeriod}, \text{leftIntBorder}, \text{rightIntBorder})}{2} + \sum_{n=1}^m \left(\text{GetAn}(\text{expression}, \text{halfPeriod}, \text{leftIntBorder}, \right.$$

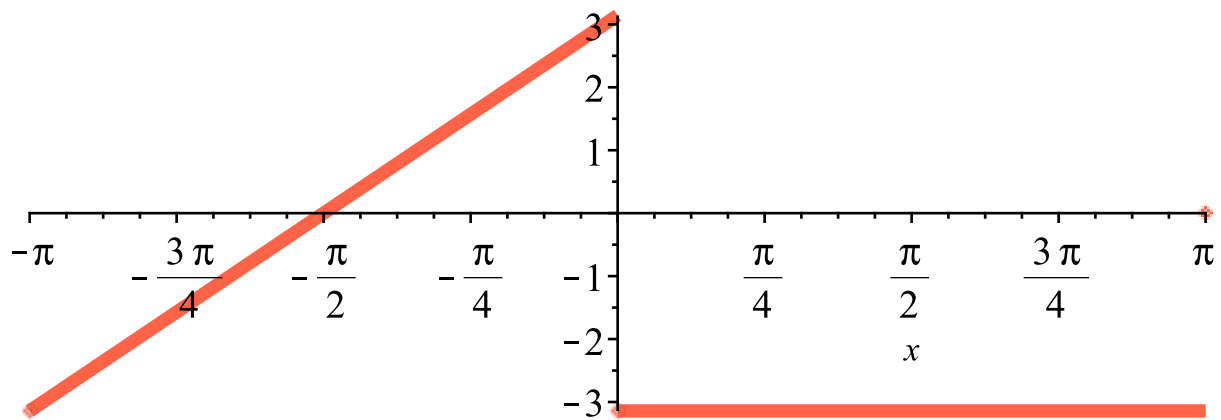
$$\left. \text{rightIntBorder}) \cdot \cos\left(\frac{n \cdot \pi \cdot x}{\text{halfPeriod}}\right) + \text{GetBn}(\text{expression}, \text{halfPeriod}, \text{leftIntBorder}, \text{rightIntBorder})$$

$$\cdot \sin\left(\frac{n \cdot \pi \cdot x}{\text{halfPeriod}}\right) \Bigg)$$

end proc:

> expression1 := piecewise($x < 0$ and $x \geq -\pi$, $\pi + 2 \cdot x$, $x \geq 0$ and $x < \pi$, $-\pi$) :

> expressionChart1 := plot(expression1, x = $-\pi .. \pi$, color = "Tomato", thickness = 5, discount = true);



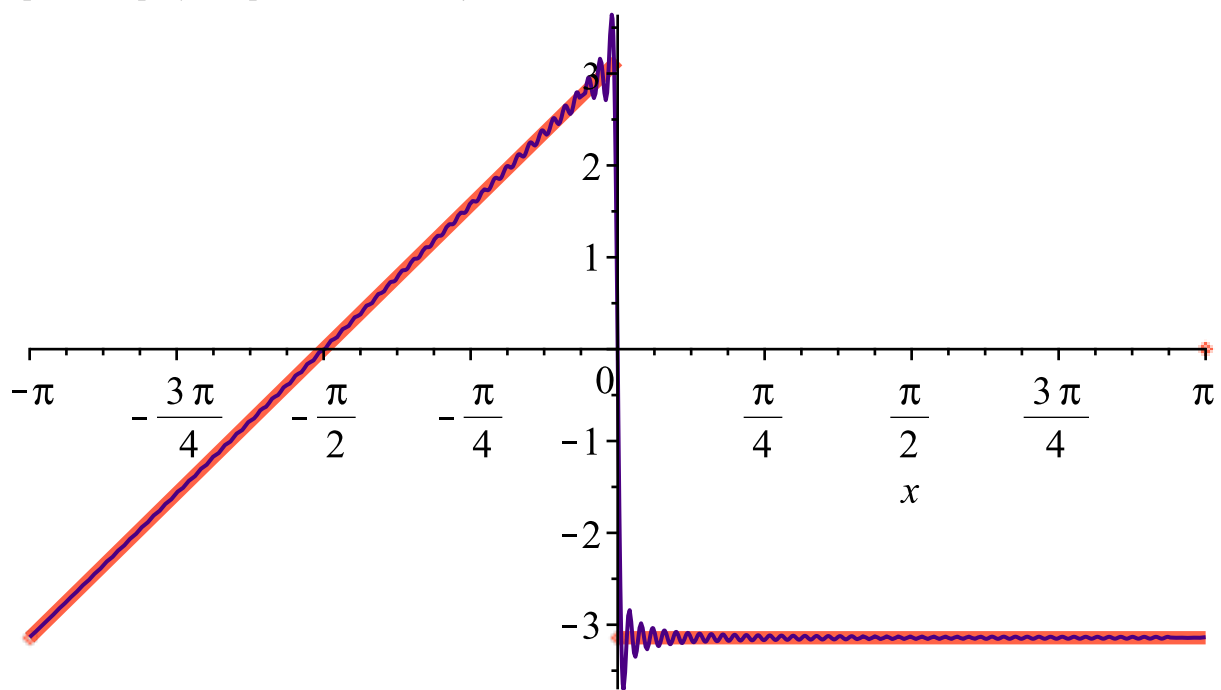
```
> a0_1 := GetA0(expression1, pi, -pi, pi); # коэффициент A0, который вернулся из функции
a0_1 := -pi (1)
```

```
> an_1 := GetAn(expression1, pi, -pi, pi); # коэффициенты An из функции
an_1 := (2 * (-1)^(1+n) + 2) / (pi * n^2) (2)
```

```
> bn_1 := GetBn(expression1, pi, -pi, pi); # коэффициенты Bn из функции
bn_1 := -2/n (3)
```

```
> fourierChart1 := plot(GetFourierSumValue(expression1, 100, pi, -pi, pi), x=-pi..pi, discount
= true, color="Indigo", thickness=1); # График частичной суммы S[100]
```

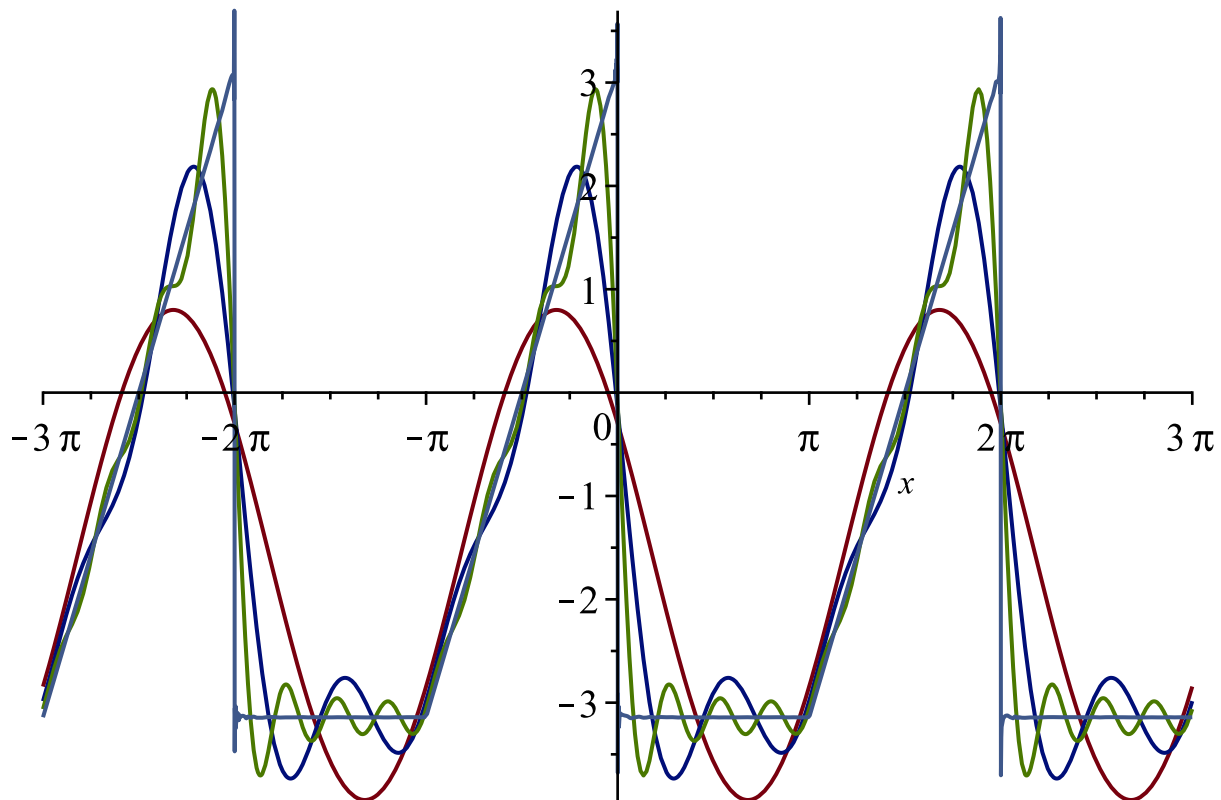
```
> plots[display](expressionChart1, fourierChart1);
```



```
>
> plot([GetFourierSumValue(expression1, 1, pi, -pi, pi), GetFourierSumValue(expression1, 3, pi,
-pi, pi), GetFourierSumValue(expression1, 7, pi, -pi, pi), GetFourierSumValue(expression1,
```

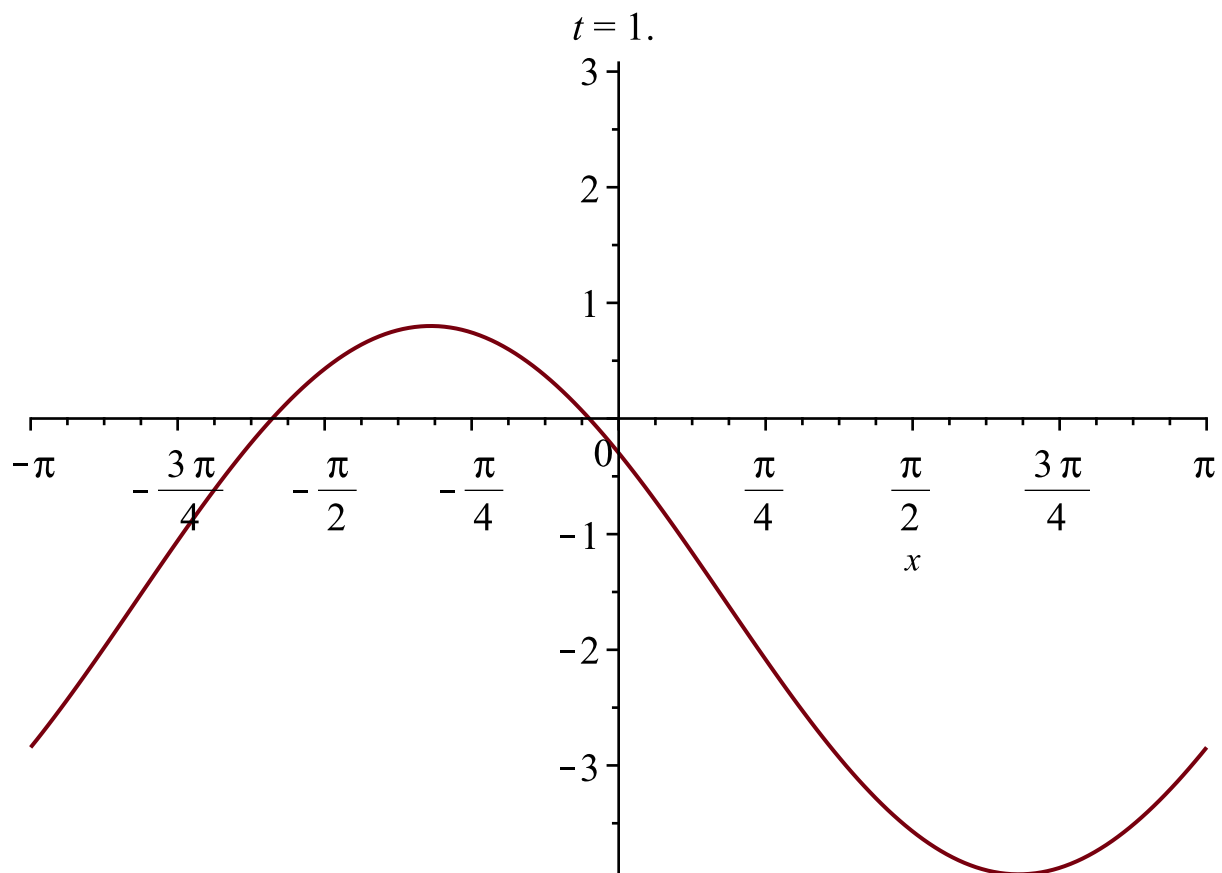
```
1000,  $\pi, -\pi, \pi$  ],  $x = -3 \cdot \pi .. 3 \cdot \pi$ , discont = true, legend = [ " $S_1(x)$ ", " $S_3(x)$ ", " $S_7(x)$ ", " $S(x)$ " ], legendstyle = [ font = [ "Segoe UI", 20 ], location = bottom ] );
```

кастомизация функции plot: <https://www.maplesoft.com/support/help/maple/view.aspx?path=plot/options>



— $S[1](x)$ — $S[3](x)$ — $S[7](x)$ — $S(x)$

```
> plots[animate]( plot, [ GetFourierSumValue( expression1, t,  $\pi, -\pi, \pi$  ),  $x = -\text{Pi} .. \text{Pi}$  ],  $t = [ 1, 3, 5, 7, 9 ]$  ); # долго компилируется (нужно ждать около минуты)
```



Задание 2

Разложить в ряд Фурье x_2 -периодическую функцию $y = f(x)$, заданную на промежутке $(0, x_1)$ формулой $y = ax + b$ ана $[x_2, x_2]$
 $-y = c$

Построить в одной системе координат графики частичных сумм $S_1(x)$, $S_3(x)$, $S_7(x)$ ряда и его суммы $S(x)$ на промежутке $[-2x_2, 2x_2]$

Анимировать процесс построения графиков сумм ряда, взяв в качестве параметра порядковый номер частичной суммы.

Коэффициенты из условия: `

$a2 := 1 :$

$b2 := 2 :$

$c2 := -1 :$

$x1 := 2 :$

$x2 := 5 :$

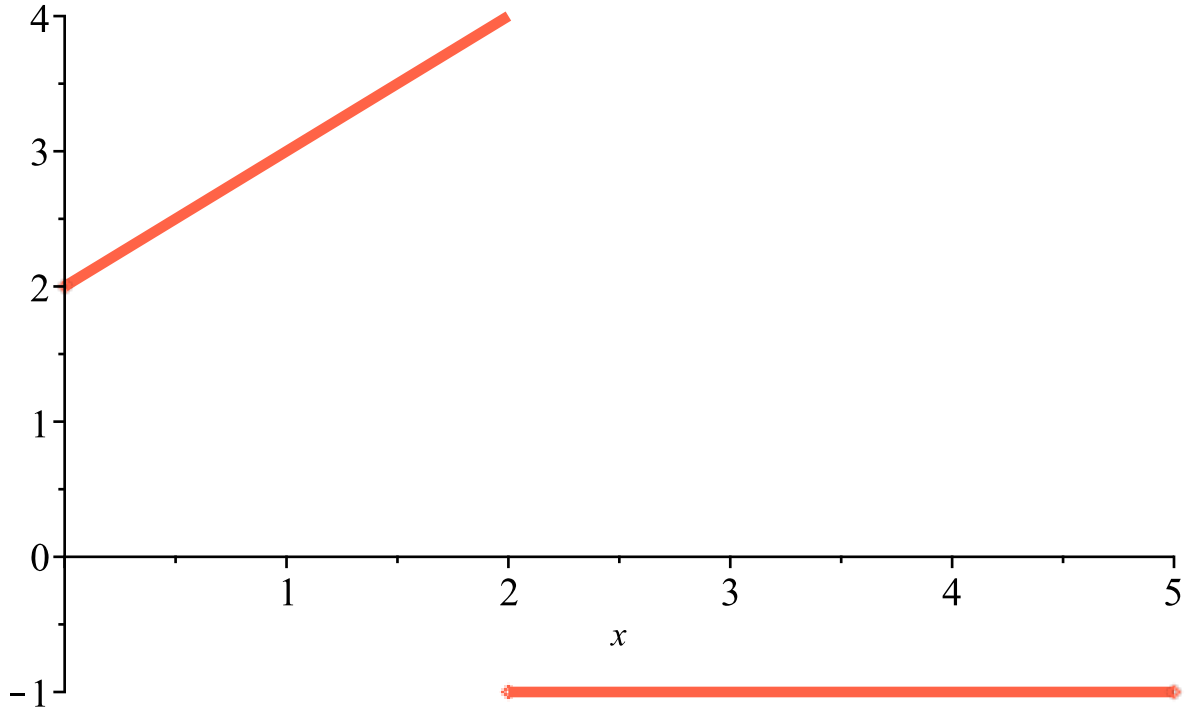
$expression2 := \text{piecewise}(x \geq 0 \text{ and } x < x1, a2 \cdot x + b2, x \geq x1 \text{ and } x \leq x2, c2);$

$$expression2 := \begin{cases} x + 2 & 0 \leq x \text{ and } x < 2 \\ -1 & 2 \leq x \text{ and } x \leq 5 \end{cases}$$

$chartExpression2 := \text{plot}(expression2, x = 0 .. x2, \text{discont} = \text{true}, \text{thickness} = 4, \text{color}$

(4)

```
= "Tomato");
```



```
> a0_2 := GetA0(expression2,  $\frac{x2}{2}$ , 0, x2);
```

$$a0_2 := \frac{6}{5}$$

(5)

```
> an_2 := GetAn(expression2,  $\frac{x2}{2}$ , 0, x2);
```

$$an_2 := \frac{5}{2} \frac{2 n \pi \sin\left(\frac{4}{5} n \pi\right) + \cos\left(\frac{4}{5} n \pi\right) - 1}{n^2 \pi^2}$$

(7)

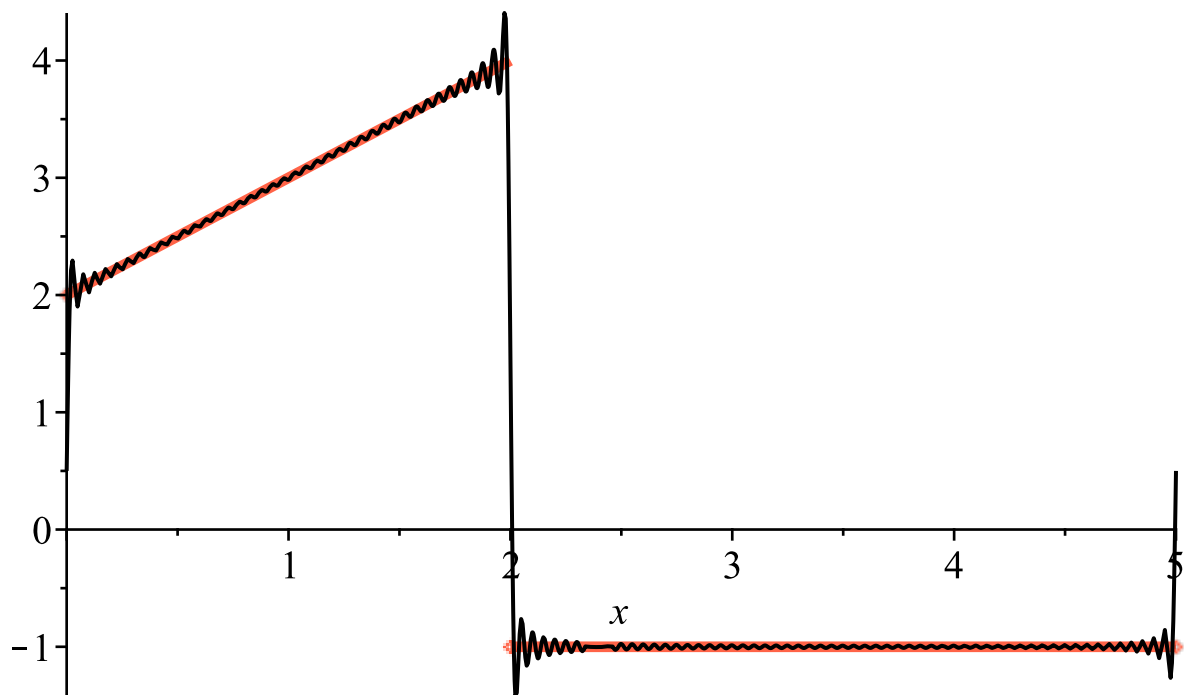
```
> bn_2 := GetBn(expression2,  $\frac{x2}{2}$ , 0, x2);
```

$$bn_2 := -\frac{1}{2} \frac{10 n \pi \cos\left(\frac{4}{5} n \pi\right) - 6 n \pi - 5 \sin\left(\frac{4}{5} n \pi\right)}{n^2 \pi^2}$$

(8)

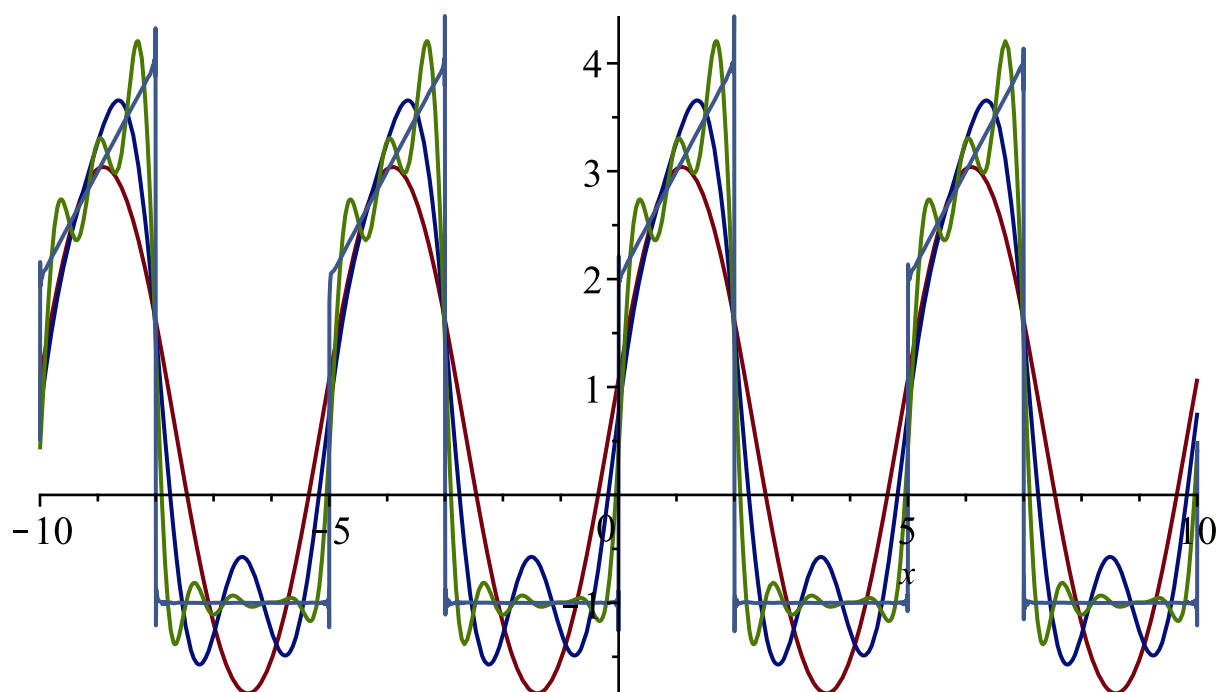
```
> chartFourier2 := plot(GetFourierSumValue(expression2, 100,  $\frac{x2}{2}$ , 0, x2), x = 0 .. x2, discount  
= true, color = black);
```

```
> plots[display](chartExpression2, chartFourier2);
```



```
> plot([ GetFourierSumValue(expression2, 1,  $\frac{x2}{2}$ , 0, x2), GetFourierSumValue(expression2,
3,  $\frac{x2}{2}$ , 0, x2), GetFourierSumValue(expression2, 7,  $\frac{x2}{2}$ , 0, x2),
GetFourierSumValue(expression2, 1000,  $\frac{x2}{2}$ , 0, x2) ], x=-2..2, discount = true,
legend = [ "S1(x)", "S3(x)", "S7(x)", "S(x)" ], legendstyle = [ font = ["Segoe UI", 20],
location = bottom ] );
```

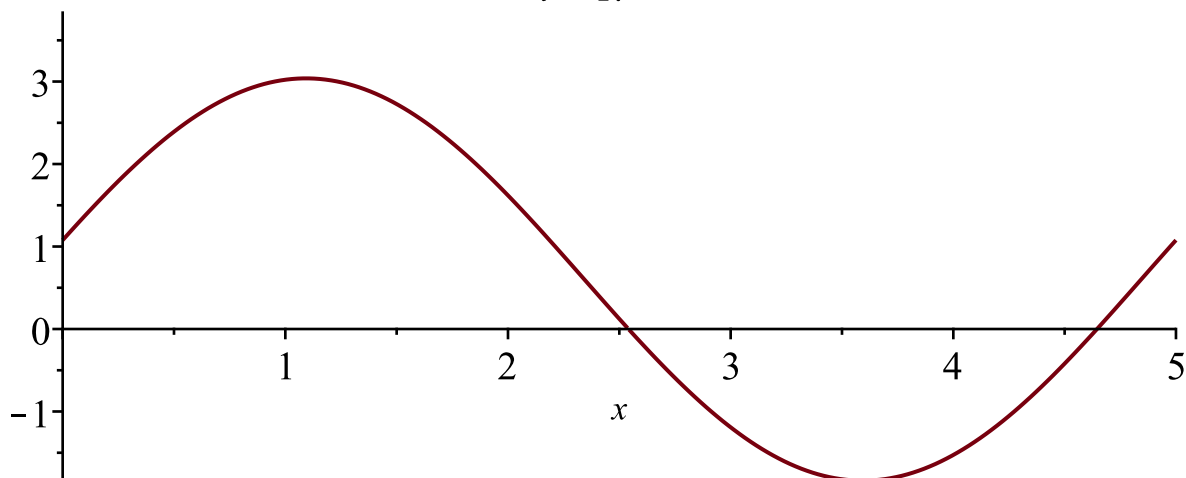
кастомизация функции plot: <https://www.maplesoft.com/support/help/maple/view.aspx?path=plot/options>



— $S[1](x)$ — $S[3](x)$ — $S[7](x)$ — $S(x)$

```
>
> plots[animate](plot, [GetFourierSumValue(expression2, t,  $\frac{x^2}{2}$ , 0, x2), x = 0 .. x2], t = [1,
2]); # очень долго ждать (даже для двух значений)
```

$t = 1.$



```
>
```

```
>
```

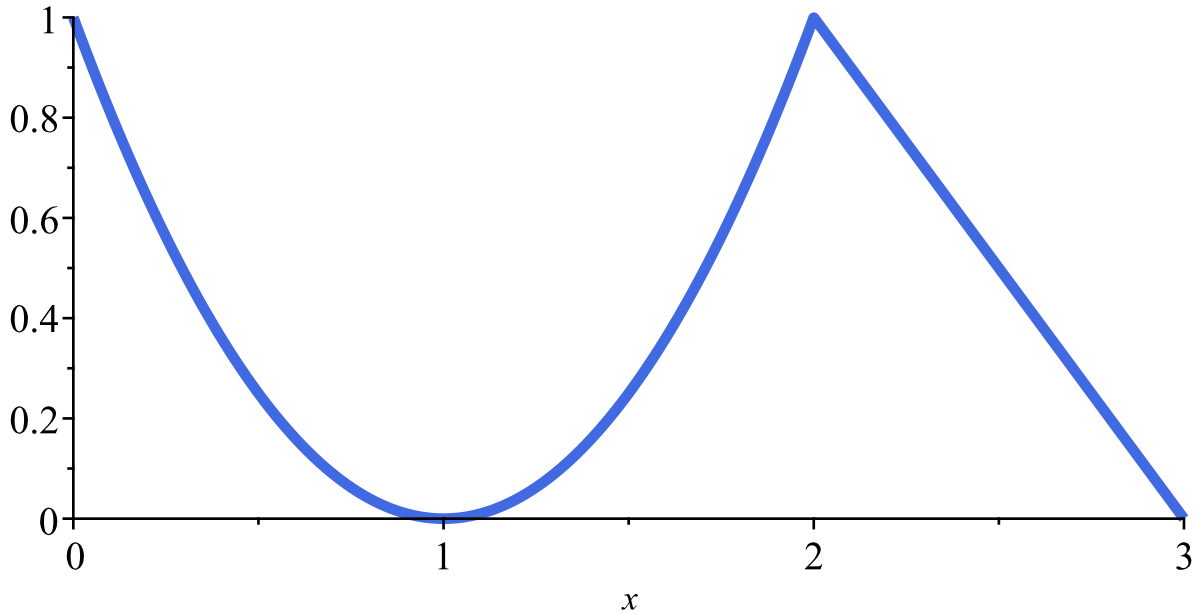
```
> # Задание 3
```

```
> # Построить три разложения (на полном периоде и на полупериоде (чётн. и нечётн))
```

```
> expression3 := piecewise( $x \geq 0$  and  $x < 2$ ,  $x^2 - 2x + 1$ ,  $x \geq 2$  and  $x \leq 3$ ,  $-x + 3$ );
```

$$\text{expression3} := \begin{cases} x^2 - 2x + 1 & 0 \leq x \text{ and } x < 2 \\ -x + 3 & 2 \leq x \text{ and } x \leq 3 \end{cases} \quad (9)$$

> chartExpression3 := plot(expression3, x=0..3, color="RoyalBlue", thickness=4);



>

> # На полном периоде: $T = 3, l = \frac{T}{2} = \frac{3}{2}$

>

> a0_3_1 := GetA0(expression3, $\frac{3}{2}$, 0, 3);

$$a0_3_1 := \frac{7}{9}$$

(10)

> an_3_1 := GetAn(expression3, $\frac{3}{2}$, 0, 3);

$$an_3_1 := \frac{3}{2} \frac{3n\pi \cos\left(\frac{4}{3}n\pi\right) + n\pi - 3 \sin\left(\frac{4}{3}n\pi\right)}{n^3 \pi^3}$$

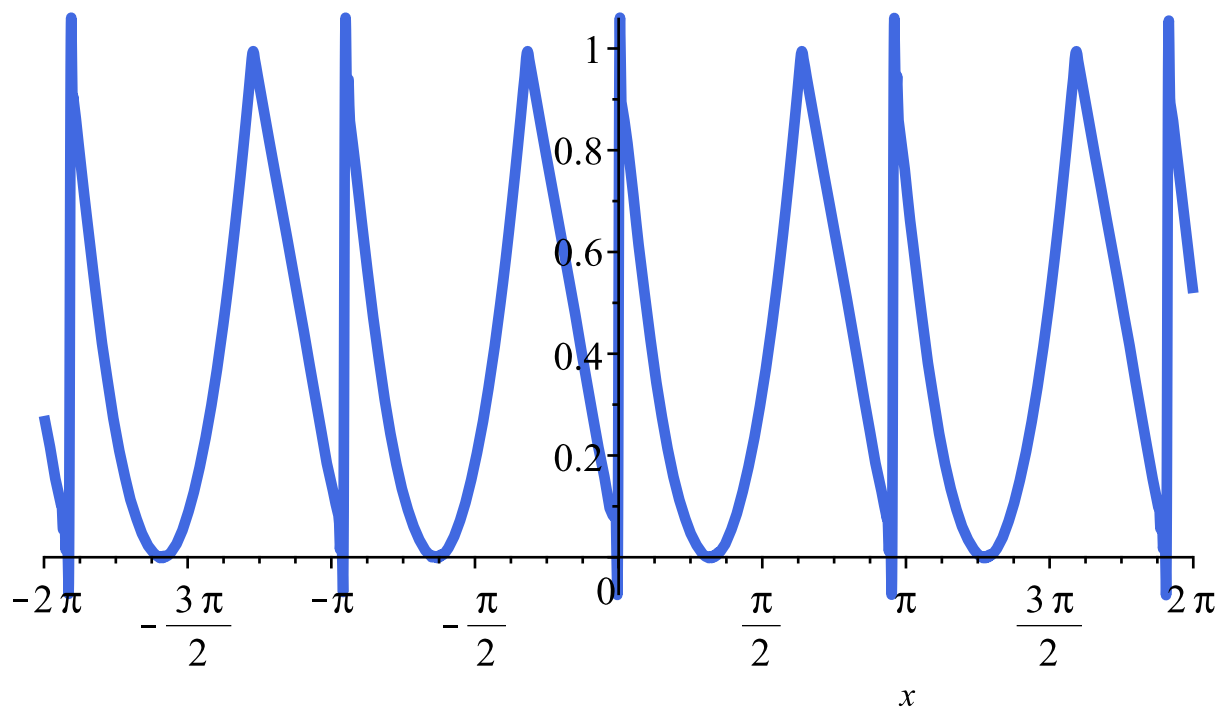
(11)

> bn_3_1 := GetBn(expression3, $\frac{3}{2}$, 0, 3);

$$bn_3_1 := \frac{1}{2} \frac{2n^2 \pi^2 + 9n\pi \sin\left(\frac{4}{3}n\pi\right) + 9 \cos\left(\frac{4}{3}n\pi\right) - 9}{n^3 \pi^3}$$

(12)

> plot(GetFourierSumValue(expression3, 100, $\frac{3}{2}$, 0, 3), color="RoyalBlue", thickness=4);



```
>
>
> # На полупериоде с чётным доопределением:  $T = 6, l = 3$ 
```

```
# Тут  $f(x) \cdot \cos$  --- чётная, а  $f(x) \cdot \sin$  --- нечётная ( $\Rightarrow b_n = 0$  по св-вам интеграла от нечётных ф-ий)
```

```
> a0_3_2 := 2 * GetA0(expression3, 3, 0, 3);
```

$$a0_3_2 := \frac{7}{9}$$

(13)

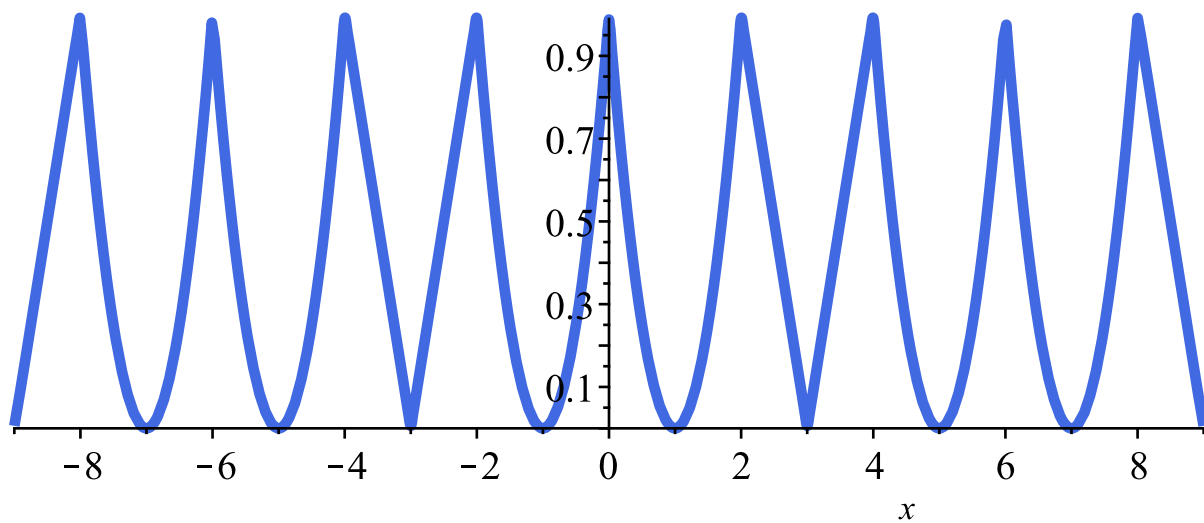
```
> an_3_2 := 2 * GetAn(expression3, 3, 0, 3);
```

$$an_3_2 := \frac{2 \left(3\pi (-1)^{1+n} n + 9n\pi \cos\left(\frac{2}{3}n\pi\right) + 6n\pi - 18 \sin\left(\frac{2}{3}n\pi\right) \right)}{n^3 \pi^3}$$

(14)

```
> odd3 := \frac{a0_3_2}{2} + \sum_{n=1}^{100} \left( an_3_2 \cdot \cos\left(\frac{n \cdot x \cdot \pi}{3}\right) \right) :
```

```
> plot(odd3, x=-9..9, color="RoyalBlue", thickness=4);
```



> # На полупериоде с нечётным доопределением: $T = 6, l = 3$ # Тут $f(x) \cdot \cos$ --
 -- нечётная, а $f(x) \cdot \sin$ --- чётная ($\Rightarrow a_n = 0$ по св
 -- вам интеграла от нечётных ϕ -- ий)

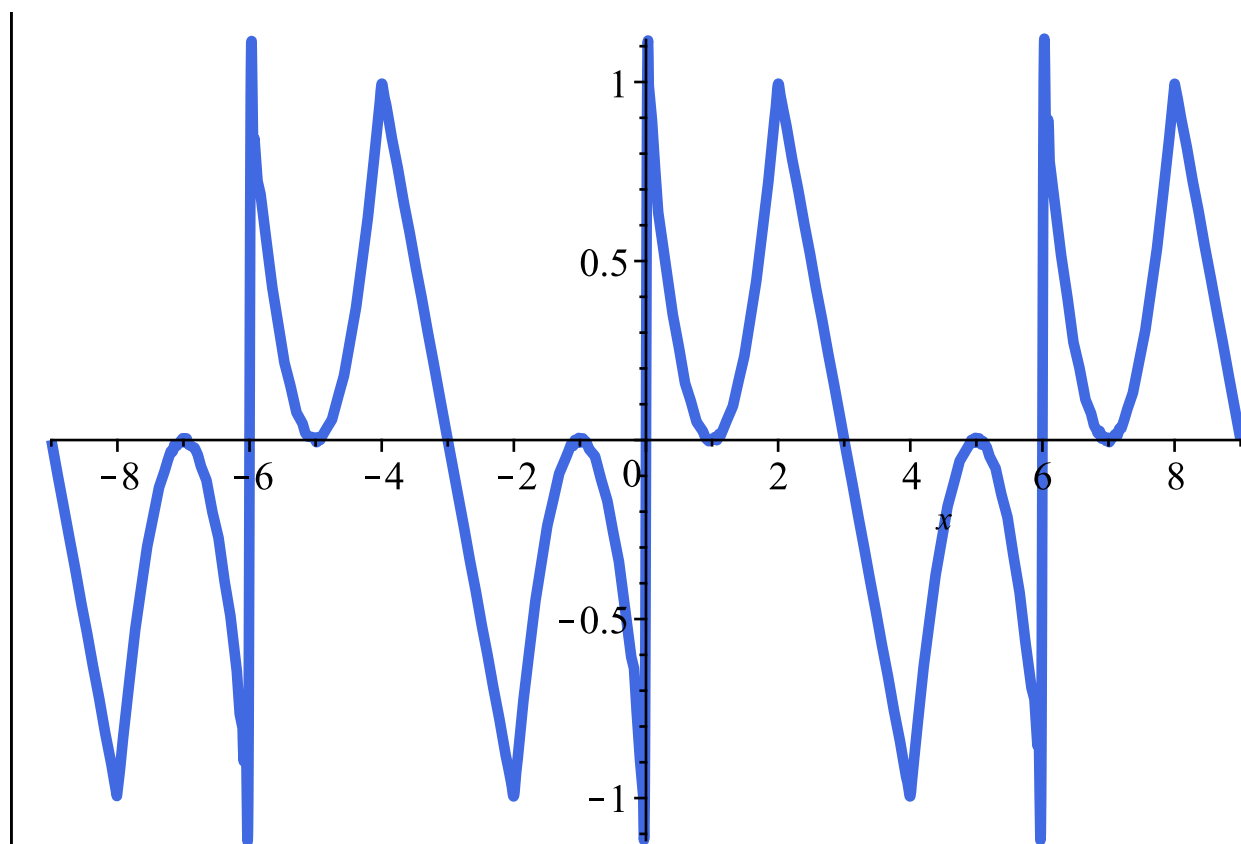
> $bn_3 := 2 \cdot \text{GetBn}(\text{expression3}, 3, 0, 3);$

$$bn_3 := \frac{2 \left(n^2 \pi^2 + 9 n \pi \sin \left(\frac{2}{3} n \pi \right) + 18 \cos \left(\frac{2}{3} n \pi \right) - 18 \right)}{n^3 \pi^3}$$

(15)

> $even3 := \sum_{n=1}^{100} \left(bn_3 \cdot \sin \left(\frac{n \cdot x \cdot \pi}{3} \right) \right) :$

> $\text{plot}(\text{even3}, x=-9..9, \text{color}="RoyalBlue", \text{thickness}=4);$



```
>  
>  
>  
>  
> restart;  
> # Слуцкий Никита, гр. 053506
```