Слуцкий Никита, гр. 053506.

ЛР №2. Полные решения.

Лабораторная работа № 2

23.09.2021

„Числовые ряды"

Цель: „научиться исследовать числовые ряды на сходимость и контролировать результаты с помощью средств системы MAPLE"

Задание 1.

Пример 1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{6}{9n^2+12n-5}$

1. Разложу $a_n = \frac{6}{9n^2+12n-5}$ на простые дроби:

$$9n^2+12n-5=0$$

$$D = 144+5\cdot4\cdot9 = 324>0.\ \sqrt{D}=18$$

$$\cancel{9}\ n = \frac{-12\pm18}{18} = \left\{-\frac{30}{18} = -\frac{15}{9} = -\frac{5}{3};\ \frac{1}{3}\right\}.$$

$$9n^2+12n-5 = 9\left(n+\frac{5}{3}\right)\left(n-\frac{1}{3}\right) = (3n+5)(3n-1)$$

$$\frac{6}{\cancel{9}\,9n^2+12n-5} = \frac{6}{(3n+5)(3n-1)} = \frac{A}{3n+5}+\frac{B}{3n-1} = \frac{A(3n-1)+B(3n+5)}{(3n+5)(3n-1)}$$

Решу уравнение: $A(3n-1)+B(3n+5)=6.$

$$3An-A+3Bn+5B=6.$$

$$\begin{cases} 3An+3Bn=0 & A=-B. \\ 5B-A=6 & 6B=6 \quad B=1,\ A=-1. \end{cases}$$

2. Распишу и сокращу суммы:

$$\frac{6}{(3n+5)(3n-1)} = \frac{-1}{3n+5}+\frac{1}{3n-1}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{6}{(9n^2+12n-5)}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{-1}{3n+5}+\frac{1}{3n-1}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3n-1}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3n+5}=$$

$$=\underbrace{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{8}+\frac{1}{11}+\ldots+\frac{1}{-1+3n}\right)}-\left(\underbrace{\frac{1}{8}+\frac{1}{11}+\ldots+\frac{1}{5+3n}}\right)=$$

вот эта „смещена" на 2 позиции относительно этой

$$=\sum_{n=1}^{2}\frac{1}{-1+3k}+\sum_{k=3}^{n}\frac{1}{-1+3k}-\left(\sum_{k=3}^{n}\frac{1}{-1+3k}+\sum_{k=n+1}^{n+2}\frac{1}{-1+3k}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{5}-\underbrace{\left(\frac{1}{3(n+1)-1}+\frac{1}{3(n+2)-1}\right)}_{\text{при } n\to\infty \text{ эти 2 слагаемых } \to 0}\Bigg\}\; S_n$$ // общ. формула частичной суммы

Итого: $S=\frac{1}{2}+\frac{1}{5}=\frac{7}{10}$. — сумма ряда

уже посчитано.

А теперь, чтобы найти порядок n частичной суммы S_n, при котором S_n будет отличаться от ~~ε~~ S не более чем на ε (заданного в условии), составим и решим неравенство:

$$|S_n-S|<\varepsilon$$

$$\left|\frac{1}{2}+\frac{1}{5}-\left(\frac{1}{3(n+1)-1}+\frac{1}{3(n+2)-1}\right)-\frac{1}{7}\right|<\varepsilon \qquad \frac{1}{3n+2}+\frac{1}{3n+5}-\frac{1}{10}<0$$

$$\frac{30\cancel{n}+50+30\cancel{n}+20-9\cancel{n}^2-21\cancel{n}+10}{10(3\cancel{n}+2)\cdot(3\cancel{n}+3)}<0$$

$$\frac{39n+60-9n^2}{10(3n+2)\cdot(3n+5)}<0.$$

$$n>0 \Rightarrow n \in \left(\frac{13+\sqrt{409}}{6}\right). \quad N=\left\lfloor\frac{13+\sqrt{409}}{6}\right\rfloor+1=6$$

Ответ: $S=7/10$. $N=6$

Пример 2: $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\frac{4-5n}{n(n-1)(n-2)}$; схема та же. разложу на простейшие дроби, разложу на отдельные суммы.

$$\frac{4-5n}{n(n-1)(n-2)}=\frac{A}{n}+\frac{B}{n-1}+\frac{C}{n-2}.$$

$$A(n-2)(n-1)+B(n)(n-2)+C(n)(n-1)=4-5n$$

$$A(n^2-2n-n+2)+B(n^2-2n)+C(n^2-n)=4-5n$$

$$A(n^2-3n+2)+B(n^2-2n)+C(n^2-n)=4-5n$$

$$An^2-3An+2A+Bn^2-2Bn+Cn^2-Cn=4-5n$$

$$(A+B+C)n^2-(3A+2B+C)n+(2A)=4-5n$$

$$\begin{cases}2A=4\\-(3A+2B+C)=-5\\A+B+C=0.\end{cases} \Leftrightarrow (A,B,C)=(2,1,-3)$$

$$\sum_{n=3}^{\infty}\frac{4-5n}{n(n-1)(n-2)}=2\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n}+\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n-1}+-3\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n-2}=$$

$$=2\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\dots+\frac{1}{n}\right)+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\dots+\frac{1}{-1+n}\right)-3\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots\frac{1}{-2}\right.$$

=

$$2\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n}+\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n-1}-3\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n-2}.$$

перейдём к отсчёту с 1.

$$2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}-3\sum_{n=1}\frac{1}{n}=$$

$$=2\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\dots+\frac{1}{2+n}\right)+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\dots+\frac{1}{1+n}\right)-3\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots\right.$$

нет, перейдём к таким суммам, чтобы $a_1' = a_1' = a_1'$ ... не разные „пределы" суммирования.

$$2\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n}+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n}-3\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=$$

$$=2\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n}+\left(\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n}+\frac{1}{2}\right)-3\left(\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n}+\underbrace{1+\frac{1}{2}}_{1.5}\right)=$$

$$=3\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n}+\frac{1}{2}-3\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n}-4.5=0.5-4.5=-4.$$

(-4) – сумма исходного ряда.

Тут правильнее было расписать так:

$$2\sum^{n}\frac{1}{k}=\quad\frac{2}{3}+\frac{2}{4}+\frac{2}{5}+\frac{2}{6}+\dots+\frac{2}{n-1}+\frac{2}{n}$$

$$\sum\frac{1}{k-1}=\quad\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\dots+\frac{1}{n-1}$$

$$-3\sum\frac{1}{k-2}=-3-\frac{3}{2}-\frac{3}{3}-\frac{3}{4}-\frac{3}{5}-\frac{3}{6}-\frac{3}{n-1}$$

— нейтрализуется

осталось $S=-3-\frac{3}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{n-1}+\frac{2}{n}+\frac{2}{n-1}$; при $n\to\infty$ $S=-4$.

итого $S=-4+\frac{3}{n-1}+\frac{2}{n}$

$$\left|\frac{3}{n-1}+\frac{2}{n}\right|<0.1$$

$\boxed{\text{Задание 2}}$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{3n^2}$; $\alpha = 0.01$

Это знакочередующийся ряд вида $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$, где $a_n > 0\ \forall n$, т.к. $a_n = \frac{1}{3n^2}$.

$$\begin{cases} \{a_n\} = \left\{\frac{1}{3}; \frac{1}{12}; \frac{1}{27}; \dots; \frac{1}{3n^2}\right\} \Rightarrow a_n \geq a_{n+1}\ \forall n \geq 1. \\ \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0 \end{cases}$$

$\rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ сходится.

Составлю ряд из абсолютных величин ряда ~~нет, здесь э~~ :

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3n^2} = 3^{-1}\sum\frac{1}{n^2}$. Это является рядом Дирихле, в котором $\alpha > 1 \Rightarrow$ он сходится.

$\Rightarrow$ исходный ряд является абсолютно сходящимся.

Теперь найду сумму с точностью α (точнее, минимальный порядок этой частичной суммы).

По признаку Лейбница: $|r_n| \leq a_{n+1}$.

$|r_n| \leq a_{n+1} = \frac{1}{3n^2}$, где $n = n+1$.

$|r_n| \leq a_{n+1} = \frac{1}{3(n+1)^2} \leq \alpha = 0.01 = \frac{1}{100}$

$\frac{1}{3(n+1)^2} \leq \frac{1}{100}$

$100 \leq 3(n+1)^2$

$3n^2+3+6n \geq 100$

$3n^2+6n-97 \geq 0$

$n > \frac{-3+10\sqrt{3}}{3}$. $n_F \left\lfloor\frac{-3+10\sqrt{3}}{3}\right\rfloor + 1 = 5$ //

Задание 3 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0$ – доказать.

Можно рассмотреть ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$.

Если он сходится, то обязательно выполняется необходимое условие сходимости, которое как раз и значит, что $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Используем признак Даламбера.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} : \frac{n!}{n^n}\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n!\cdot(n+1)\cdot n^n}{(n+1)^n\cdot(n+1)\cdot n!}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^n}{(n+1)^n}\right)$$

пусть $[t = n+1]$. Тогда $n = t-1$.

$n\to\infty \Rightarrow t-1\to\infty \Rightarrow t\to\infty$

$$\lim_{t\to\infty}\left(\left(\frac{t-1}{t}\right)^{t-1}\right) = \lim\left(\cancel{1}+\right.$$

$$= \lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{-1}{t}\right)^{\frac{(t-1)\cdot t}{t}} = \lim_{t\to\infty}\left(\left(1+\frac{(-1)}{t}\right)^t\right)^{\frac{t-1}{t}} =$$

$$= \frac{1}{e}^{\lim\frac{t-1}{t}} = \frac{1}{e} < 1$$

$$\left(1+\frac{-1}{t}\right)^t = \left(\left(1+\frac{1}{-t}\right)^{-t}\right)^{-1}$$

ряд сходится. необходимый признак соблюдается.