Лабораторная работа 6

Обыкновенные дифференциальные уравнения высших порядков
Слуцкий Никита, гр. 053506 (ФКСиС, ИиТП)
Вариант 1 (номер в журнале - 21)

restart;

Задание 1
Решить уравнения.
Построить в одной системе координат несколько интегральных кривых.

Задание 1.1

$equation1\_1 := x = diff(y(x), x, x) + e^{-diff(y(x), x, x)}$:

 # В этом уравнении в решении в тетради ответ ищется в параметрическом виде
 # вводится замена [y'' = t] => x = t + e^{-t}. Осталось найти выражение y через параметр t (ход решения в тетради)

$y\_expression1\_1 := dsolve\left(diff(y(t), t, t) = t - t \cdot e^{-t}\right);$

$$y(t) = -t\,e^{-t} - 2\,e^{-t} + \frac{1}{6}\,t^3 + \_C1\,t + \_C2 \quad (1)$$

$integral\_curves1\_1 := array(1..9)$:

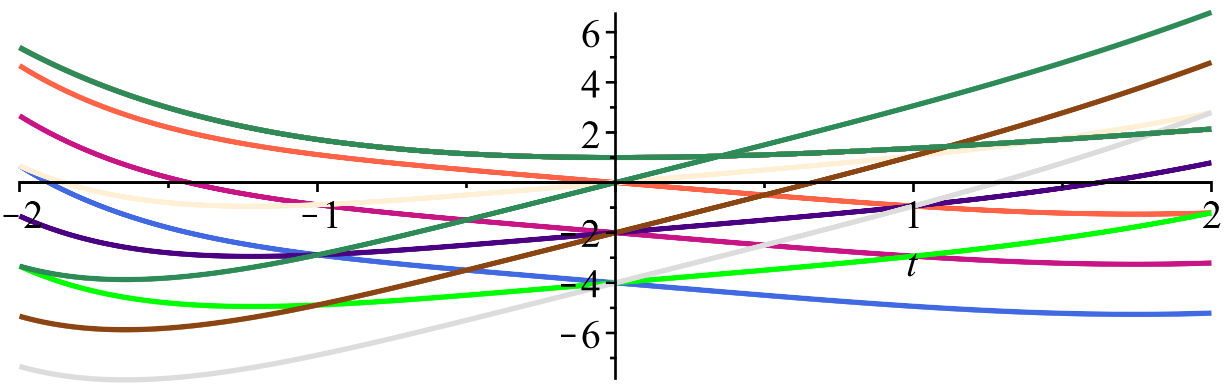
 # Расширенная палитра цветов: https://www.maplesoft.com/support/help/maple/view.aspx?path=plot%2Fcolornames

colours1 := *Array*(["RoyalBlue", "MediumVioletRed", "Tomato", "Lime", "Indigo", "PapayaWhip", "Gainsboro", "SaddleBrown", "SeaGreen"]) :

 # вложенным циклом необходимо пройтись и получить все компбинации постоянных (в диапазоне -2..2 с шагом 2, например)

$counter1\_1 := 1$:
for *c1* **from** −2 **by** 2 **to** 2 **do**
for *c2* **from** −2 **by** 2 **to** 2 **do**
$integral\_curves1\_1[counter1\_1] := plot\left(\left[t + \exp(-t), -t\,e^{-t} - 2\,e^{-t} + \frac{1}{6}\,t^3 + c1 \cdot t + c2\right], t = -2..2, thickness = 2, color = colours1[counter1\_1]\right)$:
$counter1\_1 := counter1\_1 + 1$:
end do:
end do:

$plots[display](integral\_curves1\_1[1], integral\_curves1\_1[2], integral\_curves1\_1[3], integral\_curves1\_1[4], integral\_curves1\_1[5], integral\_curves1\_1[6], integral\_curves1\_1[7], integral\_curves1\_1[8], integral\_curves1\_1[9]);$



Задание 1.2

$equation1\_2 := y(x)\cdot diff(y(x), x, x) - diff(y(x), x)^2 - \frac{y(x)\cdot diff(y(x), x)\cdot 1}{\tan(x)} = 0:$

$solution1\_2 := dsolve(equation1\_2);$

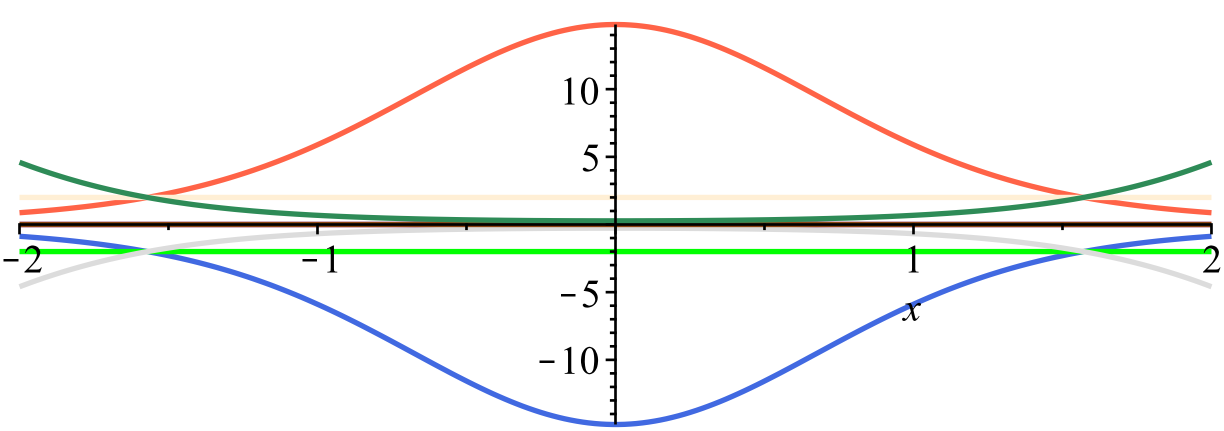
$$y(x) = \frac{\_C2}{e^{-\_C1\cos(x)}} \qquad (2)$$

$integral\_curves1\_2 := array(1..9):$

 # То же самое - вложенным циклом необходимо пройтись и получить все компбинации постоянных (в диапазоне -2..2 с шагом 2, например)

```
counter1_2 := 1 :
for c1 from -2 by 2 to 2 do
 for c2 from -2 by 2 to 2 do
 integral_curves1_2[counter1_2] := plot(c2/exp(c1·cos(x)), x=-2..2, thickness=2, color
     =colours1[counter1_2]) :
 counter1_2 := counter1_2 + 1 :
 end do:
 end do:
```

$plots[display](integral\_curves1\_2[1], integral\_curves1\_2[2], integral\_curves1\_2[3], integral\_curves1\_2[4], integral\_curves1\_2[5], integral\_curves1\_2[6], integral\_curves1\_2[7], integral\_curves1\_2[8], integral\_curves1\_2[9]);$



Задание 1.3

$equation1\_3 := diff(y(x), x, x) \cdot (1 + y(x)^2) + diff(y(x), x)^3 = 0:$
$solution1\_3 := dsolve(equation1\_3);$

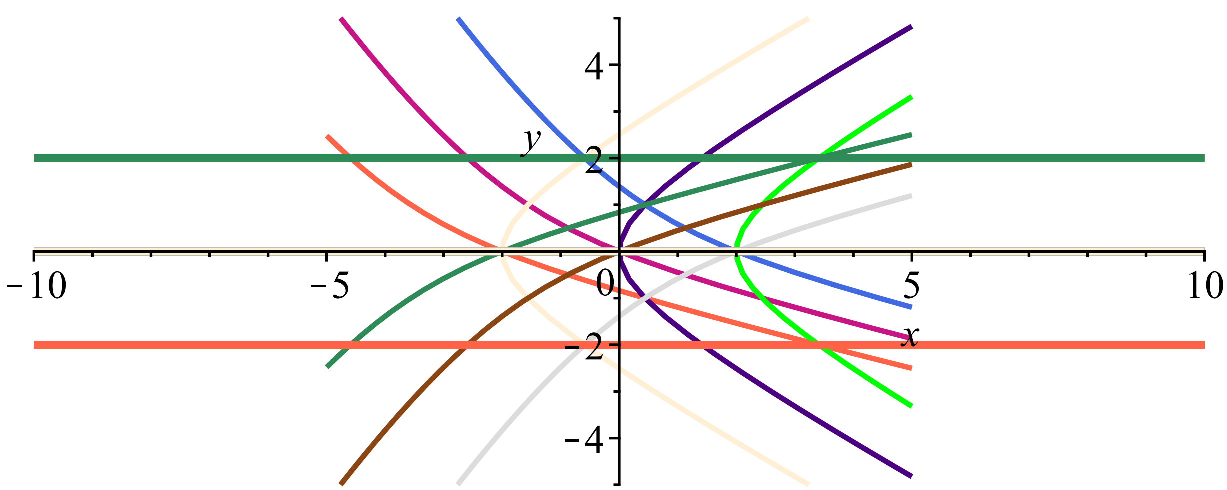
$$y(x) = \_C1, y(x) \arctan(y(x)) - \frac{1}{2} \ln(1 + y(x)^2) + \_C1\, y(x) - x - \_C2 = 0 \quad (3)$$

$integral\_curves1\_3 := array(1..9):$
$integral\_curves1\_3\_direct\_lines := array(1..9):$ # для прямых (которые выскочили в решении y = c1)

То же самое, что и в предыдущих 2-х пунктах

```
counter1_3 := 1 :
for c1 from -2 by 2 to 2 do
 for c2 from -2 by 2 to 2 do
 integral_curves1_3[counter1_3] := plots[implicitplot](y·arctan(y) - 1/2 ln(1 + y^2) + c1·y - x - c2
     = 0, x = -5..5, y = -5..5, thickness = 2, color = colours1[counter1_3]) :
 integral_curves1_3_direct_lines[counter1_3] := plot(c1, color = colours1[counter1_3], thickness
     = 3) :
 counter1_3 := counter1_3 + 1 :
 end do:
 end do:
```

```
plots[display](integral_curves1_3[1], integral_curves1_3[2], integral_curves1_3[3],
    integral_curves1_3[4], integral_curves1_3[5], integral_curves1_3[6], integral_curves1_3[7],
    integral_curves1_3[8], integral_curves1_3[9], integral_curves1_3_direct_lines[1],
    integral_curves1_3_direct_lines[2], integral_curves1_3_direct_lines[3],
    integral_curves1_3_direct_lines[4], integral_curves1_3_direct_lines[5],
    integral_curves1_3_direct_lines[6], integral_curves1_3_direct_lines[7],
    integral_curves1_3_direct_lines[8], integral_curves1_3_direct_lines[9]);
```



Задание 1.4

$$equation1\_4 := diff(y(x), x, x) = 3 \cdot \left(\frac{diff(y(x), x)}{x} - \frac{y(x)}{x^2} \right) + \frac{2}{x^3} \cdot \sin\left(\frac{1}{x^2} \right):$$

$solution1\_4 := simplify(dsolve(equation1\_4))$

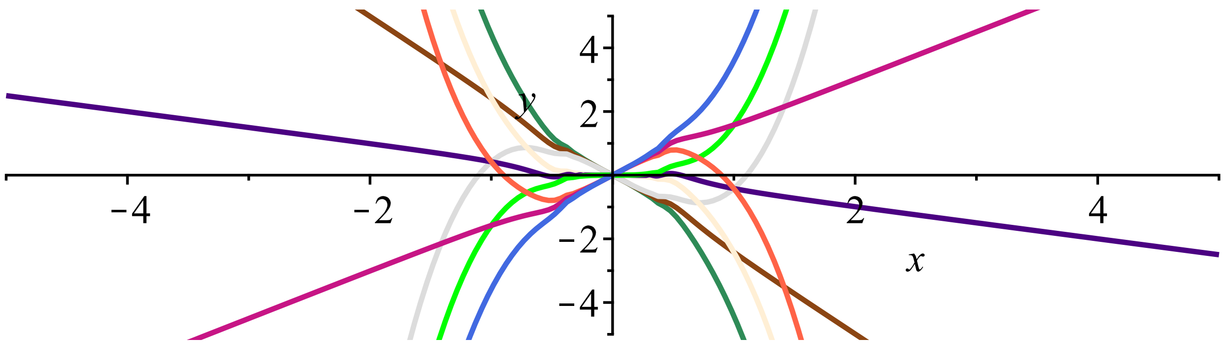
$$y(x) = x^3 \_C2 + x \_C1 - \frac{1}{2} x^3 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) \tag{4}$$

$integral\_curves1\_4 := array(1..9):$

 # То же самое, что и в предыдущих 2-х пунктах

$counter1\_4 := 1:$
for $c1$ **from** -2 **by** 2 **to** 2 **do**
for $c2$ **from** -2 **by** 2 **to** 2 **do**
$integral\_curves1\_4[counter1\_4] := plot\left(c2 \cdot x^3 + c1 \cdot x - \frac{1}{2} \cdot x^3 \cdot \sin\left(\frac{1}{x^2}\right), x = -5..5, y = -5..5, thickness = 2, color = colours1[9 - counter1\_4 + 1]\right):$
$counter1\_4 := counter1\_4 + 1:$
end do:
end do:

$plots[display](integral\_curves1\_4[1], integral\_curves1\_4[2], integral\_curves1\_4[3], integral\_curves1\_4[4], integral\_curves1\_4[5], integral\_curves1\_4[6], integral\_curves1\_4[7], integral\_curves1\_4[8], integral\_curves1\_4[9]);$



$restart;$
____

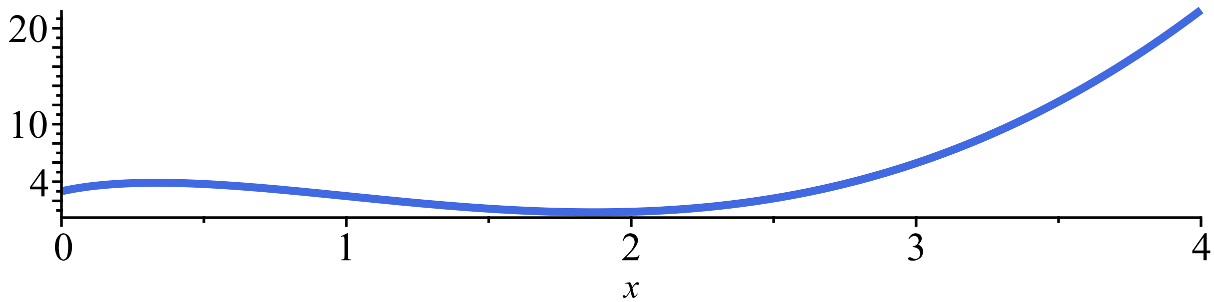
Задание 2
Найти общее решение уравнения

$equation2 := diff(y(x), x, x, x) \cdot x \cdot \ln(x) = diff(y(x), x, x):$
$solution2 := simplify(dsolve(equation2));$

$$y(x) = \frac{1}{2} \_C1 \ln(x) x^2 - \frac{3}{4} \_C1 x^2 + \_C2 x + \_C3 \tag{5}$$

 # интегральная кривая при наборе констант {5 , 7, 3}

$plot\left(\frac{1}{2} \cdot 10 \cdot \ln(x) \cdot x^2 - \frac{3}{4} \cdot 10 \cdot x^2 + 7 \cdot x + 3, x = 0..4, color = \text{"RoyalBlue"}, thickness = 3\right);$



restart;
____

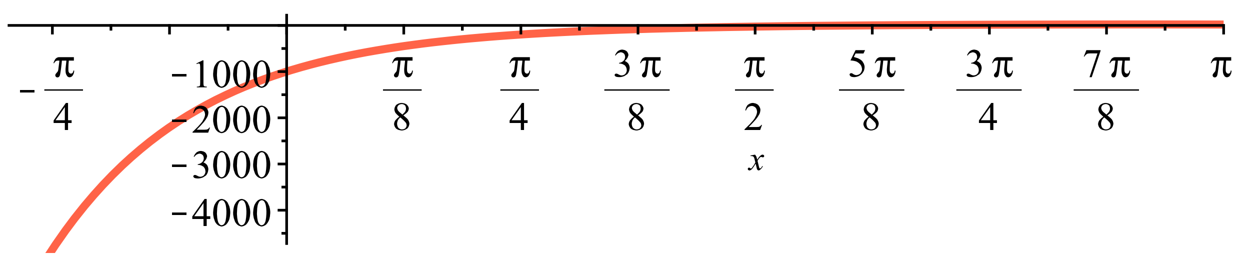
Задание 3
Найти общее решение дифференциального уравнения

$equation3 := diff\,(y(x), x, x) + 2 \cdot diff\,(y(x), x) = 4 \cdot \mathrm{e}^{x} \cdot (\sin(x) + \cos(x)) :$
$solution3 := dsolve(equation3);$

$$y(x) = -\frac{2}{5}\,\mathrm{e}^{x}\cos(x) + \frac{6}{5}\,\mathrm{e}^{x}\sin(x) - \frac{1}{2}\,\frac{\_C1}{(\mathrm{e}^{x})^{2}} + \_C2 \qquad \mathbf{(6)}$$

 # Какая-то интегральная кривая при наборе постоянных {2021, 12}

$plot\left(-\frac{2}{5}\mathrm{e}^{x}\cdot\cos(x) + \frac{6}{5}\mathrm{e}^{x}\cdot\sin(x) - \frac{1}{2}\cdot\frac{2021}{(\mathrm{e}^{x})^{2}} + 12, x = -\mathrm{Pi}\,..\mathrm{Pi}, color = \text{"Tomato"}, thickness = 3\right)$



restart;

Slutski Nikita | group 053506

Лабораторная работа №6

18.12.2021

„ОДУ высших порядков"

{№ в журнале – 21; Вариант 1}.

$\boxed{\text{Задача 1}}$ **пример 1:** $x = y'' + e^{-y''}$ 1.1

Замену $\left[y'' = t \Rightarrow \dfrac{dy'}{dx} = t \Rightarrow dx = \dfrac{dy'}{t} \right]$.

$x = t + e^{-t}$ / продифференцирую (точнее, возьму дифференциал)

$$dx = dt - e^{-t}dt$$

$$(dx = dy'/t)$$

$$\frac{dy'}{t} = dt - e^{-t}dt$$

$$\left.\begin{aligned} dy' &= t\,dt - te^{-t}dt \quad \Big/\int \\ y' &= \frac{t^2}{2} + \frac{t+1}{e^t} + C_1 \quad \Big/\int \end{aligned}\right\} \text{интегрирую}$$

$$y = \frac{t^3}{6} - \frac{t+2}{e^t} + C_1 t + C_2$$

итого: $\begin{cases} x = t + e^{-t} \\ y = \dfrac{t^3}{6} - \dfrac{t+2}{e^t} + C_1 t + C_2 \end{cases}$

1.2 <u>пример 2</u>: $yy'' - y'^2 - yy'\operatorname{ctg}x = 0.$

[пусть $y' = yt$] $\Rightarrow y'' = y't + yt' = yt^2 + yt'$

подставляю:

$$y \cdot (yt^2 + yt') - y^2t^2 - y \cdot y \cdot t \cdot \operatorname{ctg}x = 0 \;/ : y^2$$

$$t^2 + t' - t^2 - t\operatorname{ctg}x = 0$$

$$\frac{dt}{dx} = t\operatorname{ctg}x \iff \frac{1}{t}dt = \operatorname{ctg}x\,dx \;/\int$$

$$\ln|t| = \ln|\sin x| + \tilde{C}_1 = \ln|C_1 \cdot \sin x|$$

$$t = C_1 \sin x$$

$$\frac{y'}{y} = C_1 \sin x$$

$$\frac{dy}{y\,dx} = C_1 \sin x$$

$$\frac{1}{y}dy = C_1 \sin x\,dx$$

$$\ln y = -C_1 \cos x + C_2$$

$$y = e^{-C_1\cos x + C_2},$$ $C_1 \in \mathbb{R} \Rightarrow C_1$ проходит по $\mathbb{R}$ и $-C_1$ также.

Поэтому заменяю $(-C_1)$ на C_1

$$\underline{y = e^{C_1\cos x + C_2}.}$$

пример 3: $y''(1+y^2)+y'^3=0$.

[введу замену $y'=p$, $p=p(y)$. Тогда

$y''=y'\cdot p'=p\cdot p'$].

$p\cdot p'(1+y^2)+p^3=0 \quad /:p$

$p'(1+y^2)=-p^2$

$\frac{dp}{dy}(1+y^2)=-p^2$

$-\frac{1}{p^2}dp=\frac{1}{1+y^2}dy.$

$\frac{1}{p}=\operatorname{arctg}y+C_1.$

$\frac{dx}{dy}=\operatorname{arctg}x+C_1.$

$\frac{1}{\operatorname{arctg}x+C_1}=dy.$

$y=\int\frac{1}{\operatorname{arctg}x+C_1}dx+C_2$

1.4 <u>пример 4</u>: $y'' = 3\left(\frac{y'}{x} - \frac{y}{x^2}\right) + \frac{2}{x^3}\sin\frac{1}{x^2}$ $/\cdot x^2$

$$x^2\cdot y'' = 3(x\cdot y' - y) + \frac{2}{x}\sin\frac{1}{x^2}.$$

$$[y' = p,\ p = p(x)].$$

$$x^2\cdot p' = 3(xp - y) + \frac{2}{x}\sin\frac{1}{x^2}$$ / продифференцирую.

$$2x\cdot p' + x^2\cdot p'' = 3(p + xp' - p) - \frac{4\cos\frac{1}{x^2} + 2x^2\sin\frac{1}{x^2}}{x^4}$$

$$2xp' + x^2p'' = 3xp' - \frac{4\cos\frac{1}{x^2}\ldots\ldots}{x^4}.$$

$$x^2p'' - x\cdot p' + \frac{4\cos\frac{1}{x^2} + 2x^2\sin\frac{1}{x^2}}{x^4} = 0.$$

$[p' = z,\ z = z(x)]$, [пусть эта дробь $= f(x)$]

$$x^2\cdot z' - x\cdot z + f(x) = 0 \quad | : x^2$$

$$z' - \frac{z}{x} + \frac{f(x)}{x^2} = 0 \iff z' - \frac{z}{x} = -\frac{f(x)}{x^2}$$

эта линейное ду 1-го порядка.

Решу методом бернулли.

$$u'v + uv' - \frac{uv}{x} = 0$$

$$u\left(v' - \frac{v}{x}\right) = 0 \quad \frac{dv}{dx} = \frac{v}{x} \quad \frac{1}{v}dv = \frac{1}{x}dx$$

$$\ln|v| = \ln|x| + C \quad (C \text{ беру} = 0).$$

$$\frac{du}{dx}\cdot x = -\frac{f(x)}{x^2}$$

$$\frac{du}{dx} = -\frac{f(x)}{x^3}$$

$$du = -\frac{f(x)}{x^3}dx$$

$$u = -\int \frac{f(x)}{x^3}dx + C$$

$$\Rightarrow z = \left(+x\left(-\int \frac{f(x)}{x^3}dx + C\right)\right).$$

$$\Downarrow$$

$$z = x\left(\int \frac{4\cos\frac{1}{x^2} + 2x^2\sin\frac{1}{x^2}}{x^7}dx + C\right).$$

тогда $p = \int x\left(\int \frac{4\cos\frac{1}{x^2} + 2x^2\sin\frac{1}{x^2}}{x^7}dx + C\right)dx$

И тогда решение уравнения в квадратурах:

$$y = \int\left(\int x\left(\int \frac{4\cos\frac{1}{x^2} + 2x^2\sin\frac{1}{x^2}}{x^7}dx + C\right)dx\right)dx$$

Maple выдаёт ответ на это:

$$y = \frac{1}{2}x^3\sin\left(\frac{1}{x^2}\right) - x$$

// ну и там константы где-то затерялись.

$\boxed{\text{Задание 2}}$ $y''' x\ln x = y''$

$[y'' = z, \quad z = z(x)].$

$z' \cdot x\ln x = z.$

$$\frac{dz}{dx}\cdot x\cdot \ln x = z$$

$$\frac{1}{z}dz = \frac{1}{x\cdot \ln x}\cdot dx$$

$$\ln|z| = \ln\ln x + C_1 = \ln(C_1\cdot \ln x)$$

$$z = C_1\cdot \ln x$$

$y'' = C_1 \ln x$

$y' = C_1(x\ln x - x) + C_2$

$y = \frac{1}{2} C_1 x^2 \ln x - \frac{3}{4} C_1 x^2 + C_2 x + C_3$

$\boxed{\text{Задание 3}}$

$$y'' + 2y' = 4e^x(\sin x + \cos x)$$

характеристическое уравнение

$\lambda^2 + 2\lambda = 0$

$\lambda(\lambda + 2) = 0$

$\lambda = \{0; -2\}.$

Вид: $e^{\alpha x}(P_n(x)\cos\beta x + Q_m(x)\sin\beta x).$

Решение в виде

$e^x(4\cos x + 4\sin x).$

$\alpha = 1.$

$P_n(x) = 4,\ n = 0.$

$Q_m(x) = 4 \Rightarrow m = 0.$

$\beta = 1.$

$\lambda = 1 \pm i\beta$ — не корень

характеристического уравнения $\Rightarrow$

решение в виде $y = e^{\alpha x}(U_s(x)\cos\beta x + V_s(x)\sin\beta x)$

$s = \max\{n, m\}$.

для моего примера это вид:

$$y = e^x(A\cos x + \tilde{A}\sin x).$$

$$y' = e^x((A+\tilde{A})\cos x - (A-\tilde{A})\sin(x))$$

$$y'' = -2e^x(A\sin x - B\cos x)$$

$[\tilde{A} = B$ - для удобства$]$.

левая часть после подстановки:

$$e^x((2A+4B)\cos x - (4A-2B)\sin x) =$$

$$= \cancel{4e^x((\tfrac{A}{2}+B)\cos x) - (A - \tfrac{B}{2}}$$

$$4e^x((\tfrac{A}{2}+B)\cos x - \sin x(A - \tfrac{B}{2})).$$

$$\begin{cases} \frac{A}{2} + B = 1 \\ -(A - \frac{B}{2}) = 1 \end{cases}$$

$\{A = -0.4;\ B = 1.2\}$ — B: $\tilde{A}$

// решено в СКА Maple для быстроты.

~~Итого ответ~~ $y = e^x(-0.4\cos x + 1.2\sin x)$.

это только частное решение исходного ОДУ

А общее решение: $y = C_1 + C_2e^{-2x} + e^x(-0.4\cos x + 1.2\sin x)$