Лабораторная работа №3 17.10.2021

„Функциональные ряды. Степенные ряды"

номер в журнале – 21

вариант – 1

Задание 1

пример 1 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{n+1}\left(\frac{1}{(3x^2+4x+2)^n}\right)$;

Для нахождения области сходимости данного функционального ряда применю признак Коши, а именно – радикальный.

По признаку Коши: $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|U_n(x)|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{2n}{n+1}\left|\frac{1}{3x^2+4x+2}\right|^n} =$

$= \left|\frac{1}{3x^2+4x+2}\right|$. Ряд сходится абсолютно для x, таких, что $L(x)<1$.

$\left|\frac{1}{3x^2+4x+2}\right| < 1$.

$$\begin{cases} \frac{1}{3x^2+4x+2} < 1 \\ \frac{1}{3x^2+4x+2} > -1 \end{cases}$$

Решив данную систему, например, в СКА Maple, получаю ответ –

область сходимости ряда:

$x \in (-\infty; -1) \cup (-\frac{1}{3}; +\infty)$.

(пример 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{2n} \frac{1}{(x^2-4x+5)^n}$

{ой, это случайно} 1.2.

Тот же способ. Признак Коши (радикальный).
При $|L(x)| < 1$ ряд сходится для этих x абсолютно.

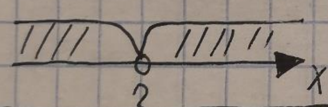
$$L(x) = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n+1}{2n}\right) \frac{1}{(x^2-4x+5)^n}} = \frac{1}{|x^2-4x+5|}$$

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x^2-4x+5} < 1 \\[2mm] \dfrac{1}{x^2-4x+5} > -1 \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{1-x^2+4x-5}{x^2-4x+5} < 0 \\[2mm] \dfrac{1+x^2-4x+5}{x^2-4x+5} > 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\overbrace{x^2-4x+4}^{(x-2)^2}}{x^2-4x+5} < 0 \\[2mm] \dfrac{x^2-4x+6}{x^2-4x+5} > 0. \end{cases}$$

$D = 16 - 16 = 0$ $\quad D = 16 - 20 < 0.$

$D = 16 - 24 < 0.$



$\underline{x \in (-\infty \ldots 2) \cup (2 \ldots +\infty).}$

$\boxed{\text{Задание 2}}$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{7n-11}$ // Карпук стр. 199

$[0 \ldots 1]$. $\varepsilon = 0.01$

Ряд сходится как ряд Лейбница:
1. знакопеременный
2. $\lim\limits_{n\to\infty} \{a_n\} = 0$
3. $a_{n+1} < a_n$.

(для промежутка $[0 \ldots 1]$)

т.к. $x^n \leq 1$ $\forall x \in [0 \ldots 1]$
$\forall n \in \mathbb{N}$.

Оценю модуль остатка: для знакочередующегося ряда мы знаем, что остаток $\forall n$ не превосходит по модулю $(n+1)$-го элемента (Равно как и сумма (следствие) не превосходит a_1).

В итоге

$$|r_n(x)| \le \frac{x^{n+1}}{7n-11}$$

А т.к. $x \in [0 \dots 1]$, $n \in \mathbb{N}$, то

$$\frac{x^{n+1}}{7n-11} \le \frac{1^{n+1}}{7n-11} = \frac{1}{7n-11}$$

x_{max}

$$|r_n(x)| \le \frac{1}{7n-11}$$

Отсюда: $|r_n(x)| \le \dfrac{1}{7n-11} < \varepsilon$ заданная точность

если $|r_n(x)| < \varepsilon$, то сумма посчитана (первых N-сумма) с заданной точностью

Решу неравенство и найду номер N.

$$\frac{1}{7n-11} < \varepsilon \Rightarrow \boxed{n > \frac{1+11\varepsilon}{7\varepsilon}}$$

$$\boxed{7n-11>0 \ \forall n > 2 \in \mathbb{N}}$$

$$\Downarrow$$

$$N_{min} = \left\lfloor \frac{1+11\varepsilon}{7\varepsilon} \right\rfloor + 1.$$

При $\varepsilon = 0.01$ $\quad N_{min} = \left\lfloor \dfrac{1+0.11}{0.07} \right\rfloor + 1 = 16$

$\boxed{\text{Задание 3}}$ $\int_0^{0.1} e^{-6x^2}dx$ $\varepsilon = 0.001$ Карпук стр. 232

Такка

Т.е

Степенные ряды можно использовать в приближенных вычислениях.

По формуле Тейлора $f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$.

$\cancel{(e^{-6x^2})' = e^{-6x^2} \cdot (-12x)}$

$\cancel{(e^{-6x^2} \cdot (-12x))' =}$

В СКА Maple разложу до 5-го порядка:

$\cancel{e^{-6x^2} \sim e^{-6} - 12e^{-6}(x-1) + 66e^{-6}(x-1)^2 - 216e^{-6}(x-1)^3 + 450e^{-6}(x-1)^4}$

Поменял СКА на Wolfram Mathematica

$e^{-6x^2} \sim 1 - 6x^2 + 18x^4 - 36x^6 + 54x^8 + \ldots + (-1)^{2n-1} \cdot$

0 1 2 3 4

$e^{-6x^2} \sim 1 - 6x^2 + 18x^4 - 36x^6 + 54x^8 - \frac{324x^{10}}{5} + \frac{324x^{12}}{5} - \frac{1944x^{14}}{35} + O(x^{16})$

$\int_0^{0.1} e^{-6x^2}dx = \int_0^{0.1}\left(1 - 6x^2 + 18x^4 - 36x^6 + 54x^8 - \frac{324x^{10}}{5} + \frac{324x^{12}}{5} \ldots\right)dx =$

$= \cancel{(x - 2x^3 + 3.6x^5 - 18}\ 6x \quad \left(x - 2x^3 + 3.6x^5 - \frac{36}{7}x^7 + 6x^9 - \frac{324}{55}x^{11}\ldots\right)\Big|_0^{0.1} =$

$= 0.1 - 2 \cdot 0.1^3 + 3.6 \cdot 0.1^5 - \frac{36}{7} \cdot 0.1^7 \ldots$

Получили знакочередующийся ряд Лейбница.
удовлетворяет 3-м условиям.

Так как $(3.6 \cdot 10^{-5}) < \varepsilon$ $(\varepsilon = 0.001)$, то

для приближенного значения интеграла достаточно

взять первые 2 члена разложения.

Т.е. $\int_0^{0.1} e^{-6x^2} dx \approx 0.1 - 0.1^3 \cdot 2 = \underline{\underline{0.098}}$

Посчитав более точно (вычислив) этот интеграл

в СКА WOLFRAM MATHEMATICA, можно

увидеть, что СКА Wolfram выдаёт

ответ 0.0980355.

То есть мой ответ

действительно не превышает погрешность.