

```
> # Лабораторная работа 2
```

```
> # Числовые ряды
```

```
> # Слуцкий Никита | гр. 053506 (ФКСиС, ИиТП)
```

```
> # Вариант 1 (номер в журнале - 21)
```

```
>
```

```
> restart :
```

```
> # Задание 1
```

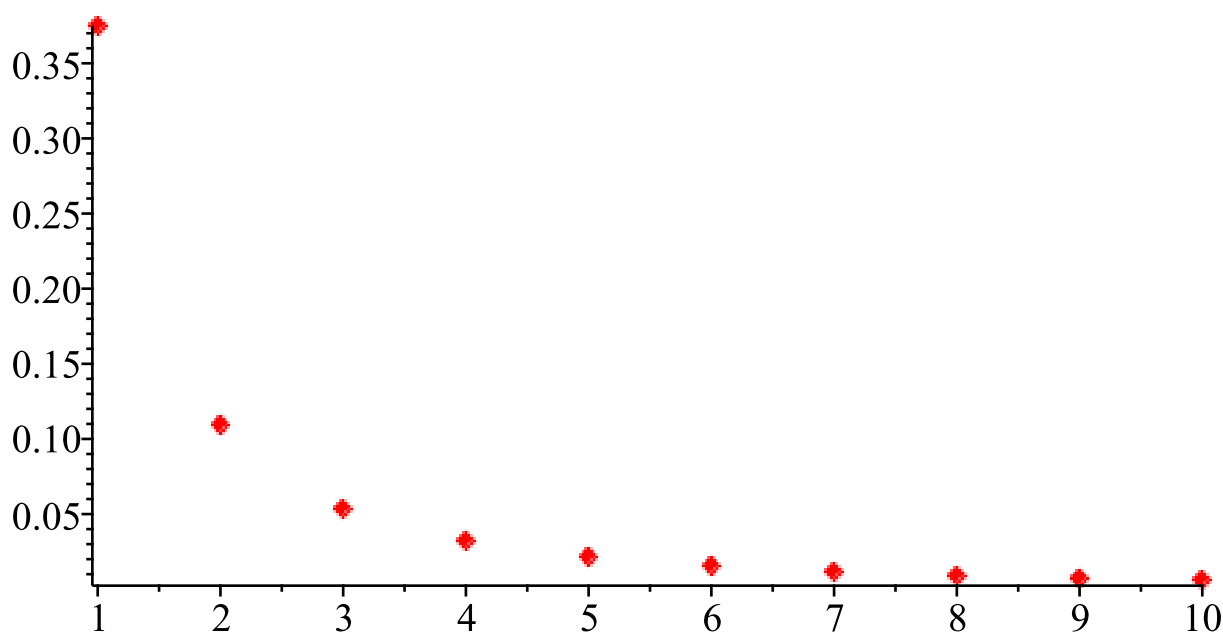
```
> epsilon1_1 := 0.1 :
```

```
> # Задание 1.1
```

```
> sequence1_1 :=  $\frac{6}{9 \cdot n^2 + 12 \cdot n - 5}$  :
```

```
> with(plots) :
```

```
> pointplot( {seq( [n, sequence1_1], n = 1 ..10) }, color = red, symbol = soliddiamond, symbolsize  
= 15);
```



```
> sequence1_1n[n] :=  $\frac{6}{9 \cdot n^2 + 12 \cdot n - 5}$  :
```

```
> partSum1_1[N] := sum(sequence1_1n[n], n = 1 ..N); # нашёл общий вид частичной суммы
```

$$partSum1_1_N := -\frac{1}{3 \left(N + \frac{2}{3} \right)} - \frac{1}{3 \left(N + \frac{5}{3} \right)} + \frac{7}{10} \quad (1)$$

```
> sum1_1 := sum(sequence1_1, n = 1 ..infinity); # нашёл общий вид конечную сумму
```

$$sum1_1 := \frac{7}{10} \quad (2)$$

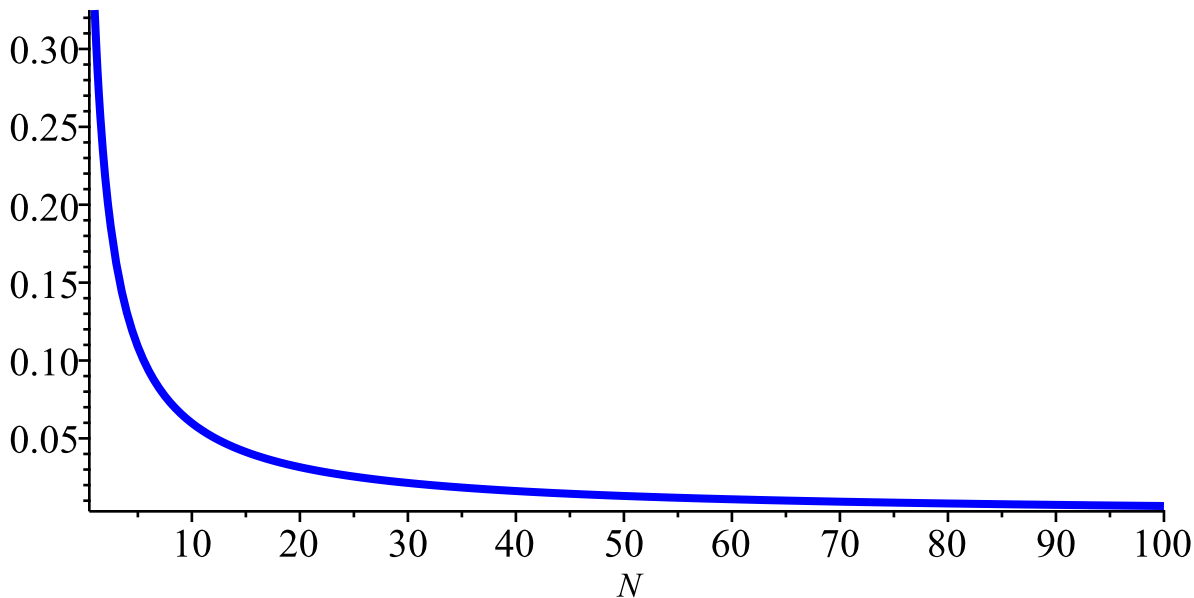
```
> solve(|sum1_1 - (partSum1_1[N])| < epsilon1_1);
```

```
RealRange( Open( -1.203958069), Open( -1.129375264) ), RealRange( Open(5.537291403),  
∞), RealRange( -∞, Open( -7.870624736) ) \quad (3)
```

```
> # Начиная с N = 6 сумма считается с не менее, чем заданной посчитается с заданной точностью
```

```
> # Покажу, что последовательность остатков стремится к нулю
```

```
> plot(sum1_1 - partSum1_1[N], N = 1 ..100, thickness = 3, color = blue);
```



```
> restart;
```

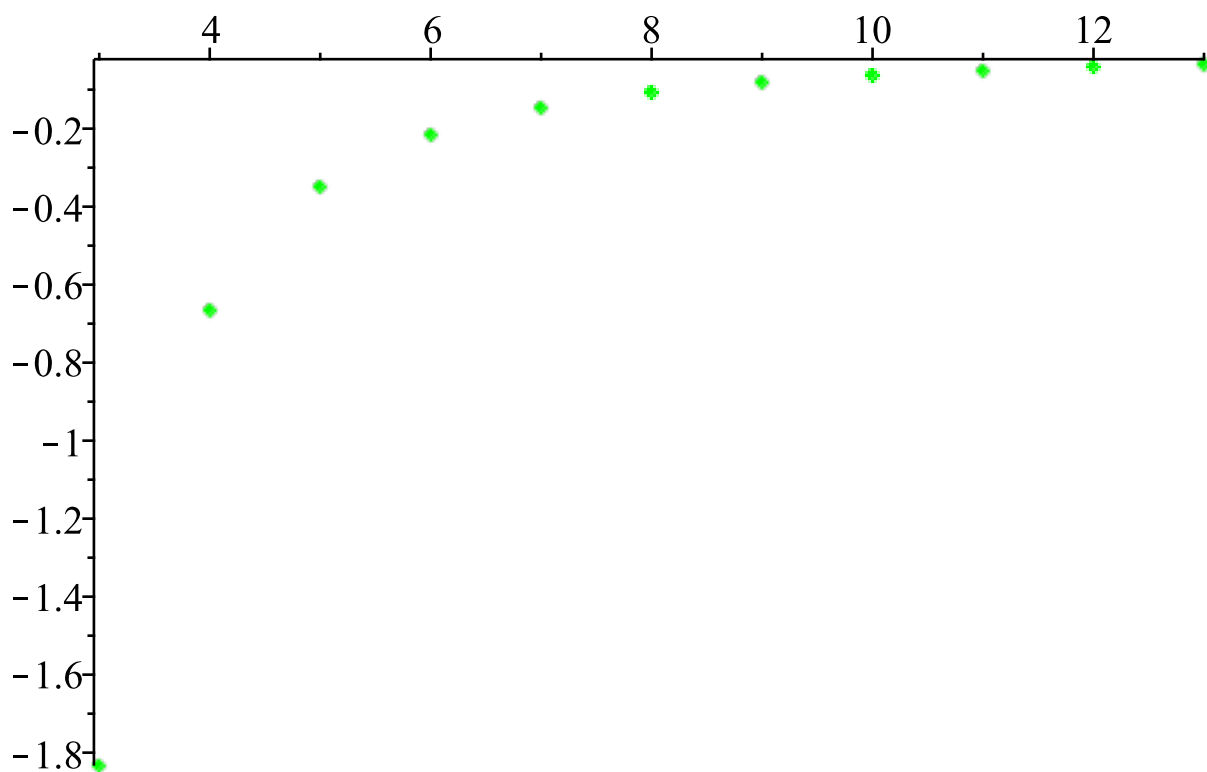
```
> # Задание 1.2
```

```
> epsilon1_2 := 0.1 ;
```

```
> sequence1_2 :=  $\frac{4 - 5n}{(n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2))}$  ;
```

```
> with(plots) :
```

```
> pointplot( {seq( [n, sequence1_2], n = 3 ..13) }, color = green, symbol = soliddiamond, symbolsize = 10);
```



```
> sequence1_2[n] :=  $\frac{4 - 5n}{(n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2))}$  ;
```

```
> partSum1_2[N] := sum(sequence1_2[n], n = 3 .. N); # нашёл общий вид частичной суммы
```

$$partSum1_2_N := \frac{3}{N-1} + \frac{2}{N} - 4 \quad (4)$$

```
> sum1_2 := sum(sequence1_2, n = 3 .. infinity); # нашёл общий вид конечную сумму
```

$$sum1_2 := -4 \quad (5)$$

```
> solve(|(sum1_2) - (partSum1_2[N])| < epsilon1_2);
```

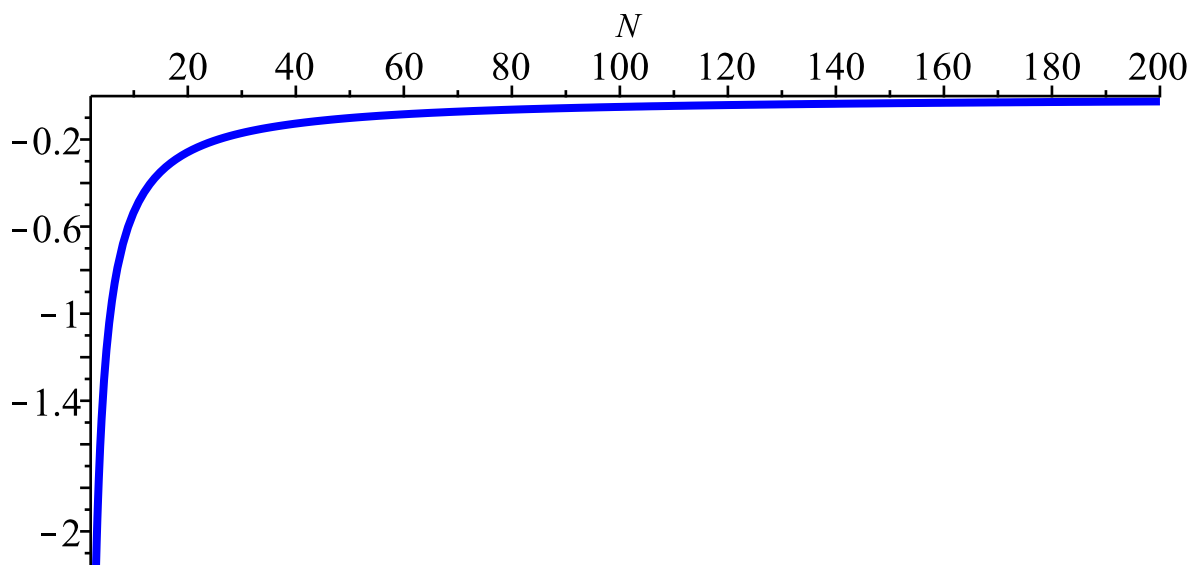
$$RealRange(-\infty, Open(-49.40481881)), RealRange(Open(0.3952195787),$$

$$Open(0.4048188108)), RealRange(Open(50.60478042), \infty) \quad (6)$$

```
> # Начиная с N = 51 сумма считается с не менее, чем заданной посчитается с заданной точностью
```

```
> # Покажу, что последовательность остатков стремится к нулю
```

```
> plot(sum1_2 - partSum1_2[N], N = 3 .. 200, thickness = 3, color = blue);
```



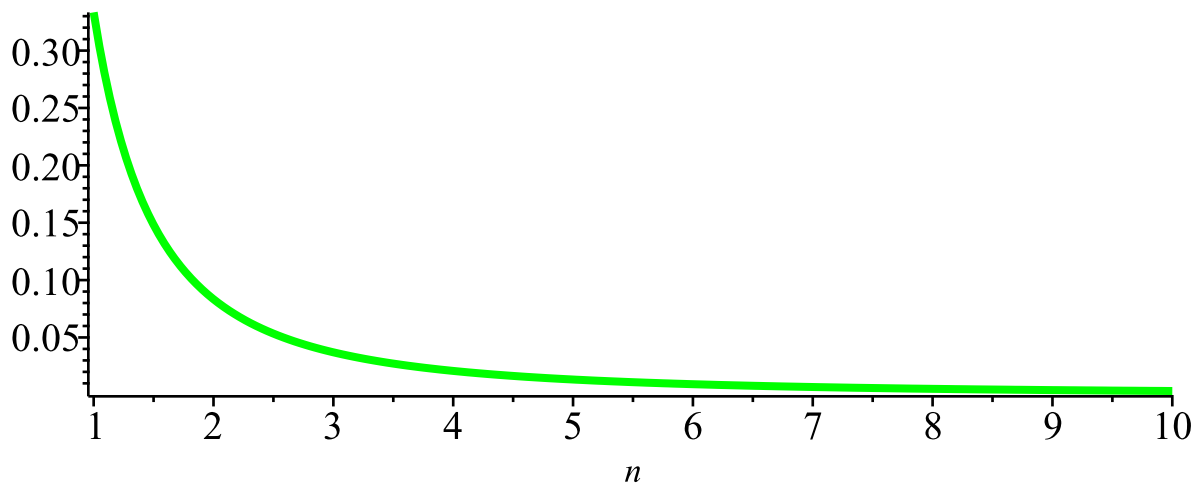
```
> restart;
```

```
> # Задание 2
```

```
> sequence2 :=  $\frac{(-1)^{n+1}}{3 \cdot n^2}$  ;
```

```
> sequence2abs :=  $\frac{1}{3 \cdot n^2}$  ;
```

```
> plot(sequence2abs, n = 1 .. 10, thickness = 3, color = green);
```



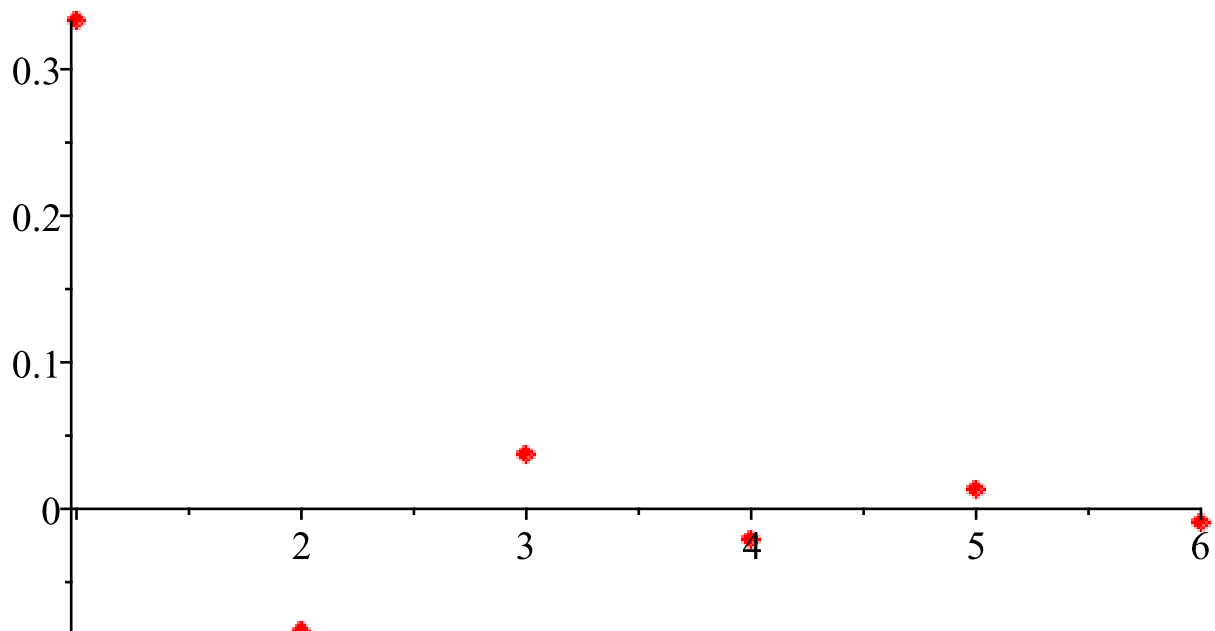
```
> sequence2n[n] :=  $\frac{(-1)^{n+1}}{3 \cdot n^2}$  :
> solve( $\frac{1}{3 \cdot (n+1)^2} - \frac{1}{3 \cdot n^2} < 0$ );
      RealRange( $Open(-\frac{1}{2})$ , Open(0)), RealRange(Open(0),  $\infty$ ) (7)
```

```
> # Для всех N > 1 выполняется первое из двух условий для сходимости ряда знакочередующегося ряда
>  $\lim_{n \rightarrow \infty} sequence2;$ 
      0 (8)
```

```
> # Для абсолютных величин последовательности предел равен нулю (при n -> бесконечность)
> # По признаку Лейбница ряд сходится
> epsilon2 := 0.01 :
> # По признаку Лейбница также можно посчитать порядок частичной суммы, приближающий сумму с заданной точностью
```

```
> solve( $\frac{1}{3 \cdot (n+1)^2} < epsilon2$ );
      RealRange( $-\infty$ , Open(-6.773502692)), RealRange(Open(4.773502692),  $\infty$ ) (9)
```

```
> # Минимальный порядок равен N = 5. То есть сумма первых пяти элементов последовательности не
    отличается от конечной суммы ряда более, чем на заданную точность 0.01
> with(plots) :
    pointplot( {seq([n, sequence2], n = 1 ..6)}, color = red, symbol = soliddiamond, symbolsize
               = 15);
```



```
> partSums2[N] := sum(sequence2n[n], n = 1 ..N);
```

$$partSums2_N := \frac{1}{36} \frac{12 N^2 (-1)^N \text{LerchPhi}(-1, 2, N) + \pi^2 N^2 - 12 (-1)^N}{N^2} \quad (10)$$

```
> sum2 := sum(sequence2, n = 1 ..infinity);
```

$$sum2 := \frac{1}{36} \pi^2 \quad (11)$$

```
> sum2abs := sum(sequence2abs, n = 1 ..infinity);
```

$$sum2abs := \frac{1}{18} \pi^2 \quad (12)$$

```
> # Ряд сходится абсолютно.  $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{n^2}$  - ряд дирихле с  $a > 1 \Rightarrow$  сходится (можно доказать интегральным признаком Коши)
```

```
> restart;
```

```
> # Задание 3
```

```
> sequence3 :=  $\frac{n!}{n^n}$  ;
```

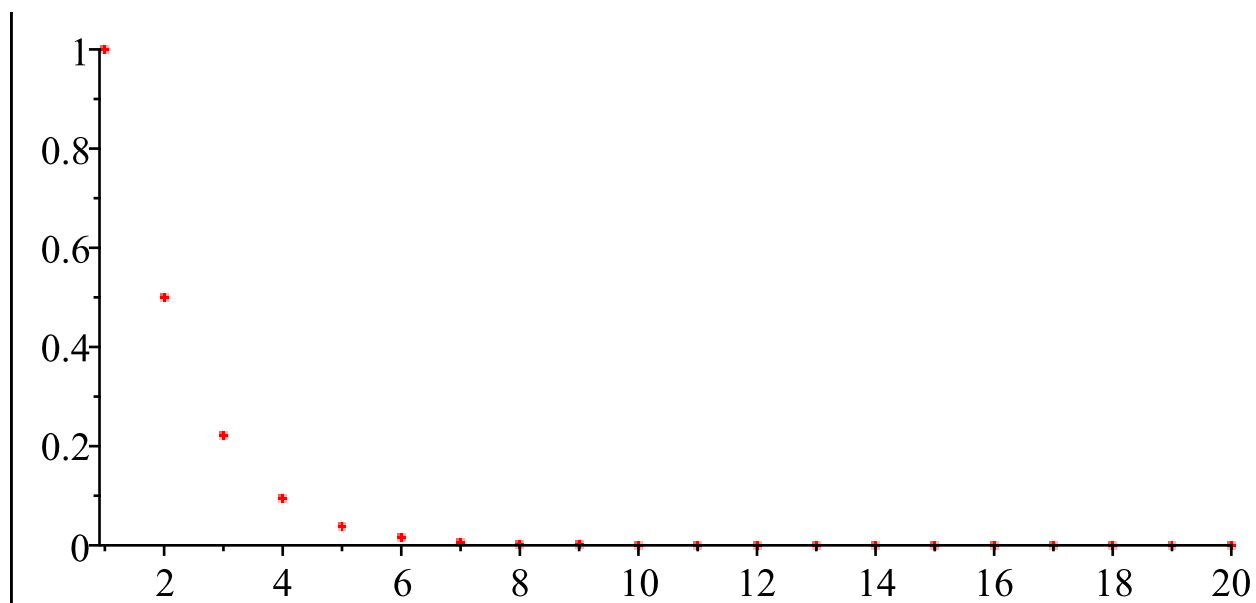
```
> # Если рассмотреть ряд, соответствующий этой последовательности, и доказать, что он сходится, то автоматически будет показано, что предел этой последовательности равен нулю, так как это необходимое условие сходимости. Это и сделано в тетради.
```

```
>  $\lim_{n \rightarrow \text{infinity}} \left( \frac{\frac{\partial}{\partial n} n!}{\frac{\partial}{\partial n} n^n} \right) ;$ 
```

$$\frac{1}{\text{infinity}^{\text{infinity}} (\ln(\text{infinity}) + 1)} \quad (13)$$

```
> # В СКА MAPLE применив правило Лопиталья, можно показать, что этот предел равен нулю. Также проиллюстрирую для первых 20 членов тенденцию данной последовательности
```

```
> with(plots) :  
pointplot( {seq( [n, sequence3], n = 1 ..20) }, color = red, symbol = soliddiamond, symbolsize = 5);
```



```
> restart;
```

```
> # Слуцкий Никита, гр. 053506
```

Слущкий Никита, гр. 053506.

ЛР №2. Полные решения.

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №2

23.09.

2021

„Числовые ряды“

Цель: „научиться исследовать числовые ряды на сходимость и контролировать результаты с помощью средств системы MAPLE“

Задание 1.

ПРИМЕР 1: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{9n^2+12n-5}$

1. Разложу $a_n = \frac{6}{9n^2+12n-5}$ на простые дроби:

$$9n^2+12n-5=0$$

$$D = 144 + 5 \cdot 4 \cdot 9 = 324 > 0. \quad \sqrt{D} = 18$$

$$9n = \frac{-12 \pm 18}{18} = \left\{ -\frac{30}{18} = -\frac{5}{3}; \frac{1}{3} \right\}$$

$$9n^2+12n-5 = 9\left(n+\frac{5}{3}\right)\left(n-\frac{1}{3}\right) = \frac{-5}{3}$$

$$= (3n+5)(3n-1)$$

$$\frac{6}{9n^2+12n-5} = \frac{6}{(3n+5)(3n-1)} = \frac{A}{3n+5} + \frac{B}{3n-1} =$$

$$= \frac{A(3n-1) + B(3n+5)}{(3n+5)(3n-1)}$$

Решу уравнение: $A(3n-1) + B(3n+5) = 6.$

$$3An - A + 3Bn + 5B = 6.$$

$$\begin{cases} 3An + 3Bn = 0 & A = -B. \\ 5B - A = 6 & 6B = 6 \end{cases}$$

$$B = 1, A = -1.$$

2. Распишу и сокращу сумму:

$$\frac{6}{(3n+5)(3n-1)} = \frac{-1}{3n+5} + \frac{1}{3n-1}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{(9n^2+12n-5)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{-1}{3n+5} + \frac{1}{3n-1} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n-1} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n+5} =$$

$$= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{8} + \frac{1}{11} + \dots + \frac{1}{-1+3n} \right) - \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{11} + \dots + \frac{1}{5+3n} \right)$$

Вот эта "сдвиг" на 2 позиции относительно этой

$$= \sum_{k=1}^2 \frac{1}{-1+3k} + \sum_{k=3}^n \frac{1}{-1+3k} - \left(\sum_{k=3}^n \frac{1}{-1+3k} + \sum_{k=n+1}^{n+2} \frac{1}{-1+3k} \right) =$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{5} - \left(\frac{1}{3(n+1)-1} + \frac{1}{3(n+2)-1} \right) \quad \left. \vphantom{\sum_{k=1}^2} \right\} S_n \text{ // общ. формула частичной суммы}$$

при $n \rightarrow \infty$ эти 2 слагаемых $\rightarrow 0$

Итого : $S = \frac{1}{2} + \frac{1}{5} = \frac{7}{10}$ — сумма ряда

уже посчитано.

А теперь, чтобы найти порядок n частичной суммы S_n , при котором S_n будет отличаться от S не более чем на ϵ (заданного в условии), составим и решим неравенство:

$$|S_n - S| < \epsilon$$

$$\left| \frac{1}{2} + \frac{1}{5} - \left(\frac{1}{3(n+1)-1} + \frac{1}{3(n+2)-1} \right) - \frac{7}{10} \right| < \epsilon \quad \frac{1}{3n+2} + \frac{1}{3n+5} - \frac{1}{10} < 0$$

$$\frac{30n+50+30n+20-9n^2-21n+10}{10(3n+2) \cdot (3n+5)} < 0$$

$$\frac{39n+60-9n^2}{10(3n+2) \cdot (3n+5)} < 0.$$

$$n > 0 \Rightarrow n \in \left(\frac{13 + \sqrt{409}}{6} \right). N = \left\lfloor \frac{13 + \sqrt{409}}{6} \right\rfloor + 1 = \underline{\underline{6}}$$

$$\text{Дробей: } S = 7/10. \quad N = 6$$

ПРИМЕР 2: $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{4-5n}{n(n-1)(n-2)}$; схема та же. разложу на простейшие дроби, разложу на отдельные суммы.

$$\frac{4-5n}{n(n-1)(n-2)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n-1} + \frac{C}{n-2}.$$

$$A(n-2)(n-1) + B(n)(n-2) + C(n)(n-1) = 4-5n$$

$$A(n^2-2n-n+2) + B(n^2-2n) + C(n^2-n) = 4-5n$$

$$A(n^2-3n+2) + B(n^2-2n) + C(n^2-n) = 4-5n$$

$$An^2-3An+2A+Bn^2-2Bn+Cn^2-Cn = 4-5n$$

$$(A+B+C)n^2 - (3A+2B+C)n + (2A) = 4-5n$$

$$\begin{cases} 2A = 4 \\ -(3A+2B+C) = -5 \\ A+B+C = 0. \end{cases} \Leftrightarrow (A, B, C) = (2, 1, -3)$$

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{4-5n}{n(n-1)(n-2)} = 2 \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n} + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n-1} - 3 \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n-2} =$$

$$= 2 \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{n} \right) + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n-1} \right) - 3 \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n-2} \right)$$

$$2 \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n} + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n-1} - 3 \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n-2}.$$

перейдём к отсчёту с 1.

$$2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} + 3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} =$$

$$= 2 \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2+n} \right) + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{1+n} \right) - 3 \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots \right)$$

нет, перейдём к таким суммам, чтобы $a_n = a_{n+1} = a_{n+2}$ по разнице предельно сходящаяся.

$$2 \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n} + 2 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n} - 3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} =$$

$$= 2 \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n} + \left(\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n} + \frac{1}{2} \right) - 3 \left(\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n} + 1 + \frac{1}{2} \right) =$$

$$= 3 \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n} + \frac{1}{2} - 3 \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n} - 4.5 = 0.5 - 4.5 = -4.$$

лучше правильно было бы записать так:

(-4) - сумма исходного ряда.

$$\begin{aligned} 2 \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n} &= \frac{2}{3} + \frac{2}{4} + \frac{2}{5} + \frac{2}{6} + \dots + \frac{2}{n-1} + \frac{2}{n} \\ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n} &= \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{n-1} \\ -3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} &= -3 - \frac{3}{2} - \frac{3}{3} - \frac{3}{4} - \frac{3}{5} - \frac{3}{6} - \frac{3}{n-1} \end{aligned}$$

— нейтрализуется

остаток $S = -3 - \frac{3}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{n-1} + \frac{2}{n} + \frac{2}{n-1}$; при $n \rightarrow \infty$ $S = -4$.

итого $S = -4 + \frac{3}{n-1} + \frac{2}{n}$

$$\left| \frac{3}{n-1} + \frac{2}{n} \right| < 0.1$$

Задача 2 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{3n^2}$; $\epsilon = 0.01$

это знакочередующийся ряд вида $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$, где $a_n > 0 \forall n$, т.к. $a_n = \frac{1}{3n^2}$.

$$\{a_n\} = \left\{ \frac{1}{3}, \frac{1}{12}, \frac{1}{27}, \dots, \frac{1}{3n^2} \right\} \Rightarrow a_n > a_{n+1} \forall n \geq 1.$$

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$
 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ сходится.

Составлю ряд из абсолютных величин ряда.
~~нет, здесь не~~

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n^2} = \frac{1}{3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}. \quad \text{это является рядом Дирихле, в котором } d > 1 \Rightarrow \text{он сходится.}$$

\Rightarrow исходный ряд является абсолютно сходящимся.

Теперь найду сумму с точностью ϵ (точнее, минимальный порядок этой частичной суммы).

По признаку Лейбница: $|r_n| \leq a_{n+1}$.

$$|r_n| \leq a_{n+1} = \frac{1}{3n^2}, \text{ где } n = n+1.$$

$$|r_n| \leq a_{n+1} = \frac{1}{3(n+1)^2} \leq \epsilon = 0.01 = \frac{1}{100}$$

$$n > \frac{-3 + 10\sqrt{3}}{3} \cdot n_F \left\lfloor \frac{-3 + 10\sqrt{3}}{3} \right\rfloor + 1 = 5 //$$

$$\frac{1}{3(n+1)^2} \leq \frac{1}{100}$$

$$100 \leq 3(n+1)^2$$

$$3n^2 + 6n + 3 \geq 100$$

$$3n^2 + 6n - 97 \geq 0$$

Задача 3

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n} = 0 \text{ — доказать.}$$

Можно рассмотреть ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$.

Если он сходится, то обязательно выполняется необходимое условие сходимости, которое как раз и значит, что $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

Используем признак Даламбера.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} : \frac{n!}{n^n} \right) =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n! \cdot (n+1) \cdot n^n}{(n+1)^n \cdot (n+1) \cdot n!} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^n}{(n+1)^n} \right)$$

пусть $[t = n+1]$. Тогда $n = t-1$.

$$n \rightarrow \infty \Rightarrow t-1 \rightarrow \infty$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{t-1}{t} \right)^{t-1} = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{-1}{t} \right)^{t-1}$$

$$= \lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{-1}{t} \right)^{(t-1) \cdot \frac{t}{t}} = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{-1}{t} \right)^{\frac{t}{t}} \right)^{t-1}$$

$$= \frac{1}{e} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t-1}{t} = \frac{1}{e} < 1$$

$$\left(1 + \frac{-1}{t} \right)^t = \left(1 + \frac{1}{-t} \right)^{-t}$$

ряд сходится.
необходимый признак
выполняется.