> #` `Лабораторная работа 3

> #` `"Функциональные ряды. Степенные ряды"

> #` `Слуцкий Никита | гр. 053506 (ФКСиС, ИиТП)

> #` `Вариант 1 (номер в журнале - 21)

>

> $restart;$

> # Задание 1. Найти область сходимости функционального ряда, построить график его суммы и сравнить с полученным результатом

> $row\_1 := \frac{2\,n}{n+1} \cdot \frac{1}{\left(3\,x^2+4\,x+2\right)^n} :$

> $sequencical\_part\_1 := \frac{2\,n}{n+1} :$

>

> # воспользовавшись признаком Даламбера или Коши, можно, получив L(x) и решив неравенство L(x) < 1, найти область сходимости функционального ряда

> $limit\_sequence := limit\left(\sqrt[n]{sequencical\_part\_1}, n = \text{infinity}\right) :$

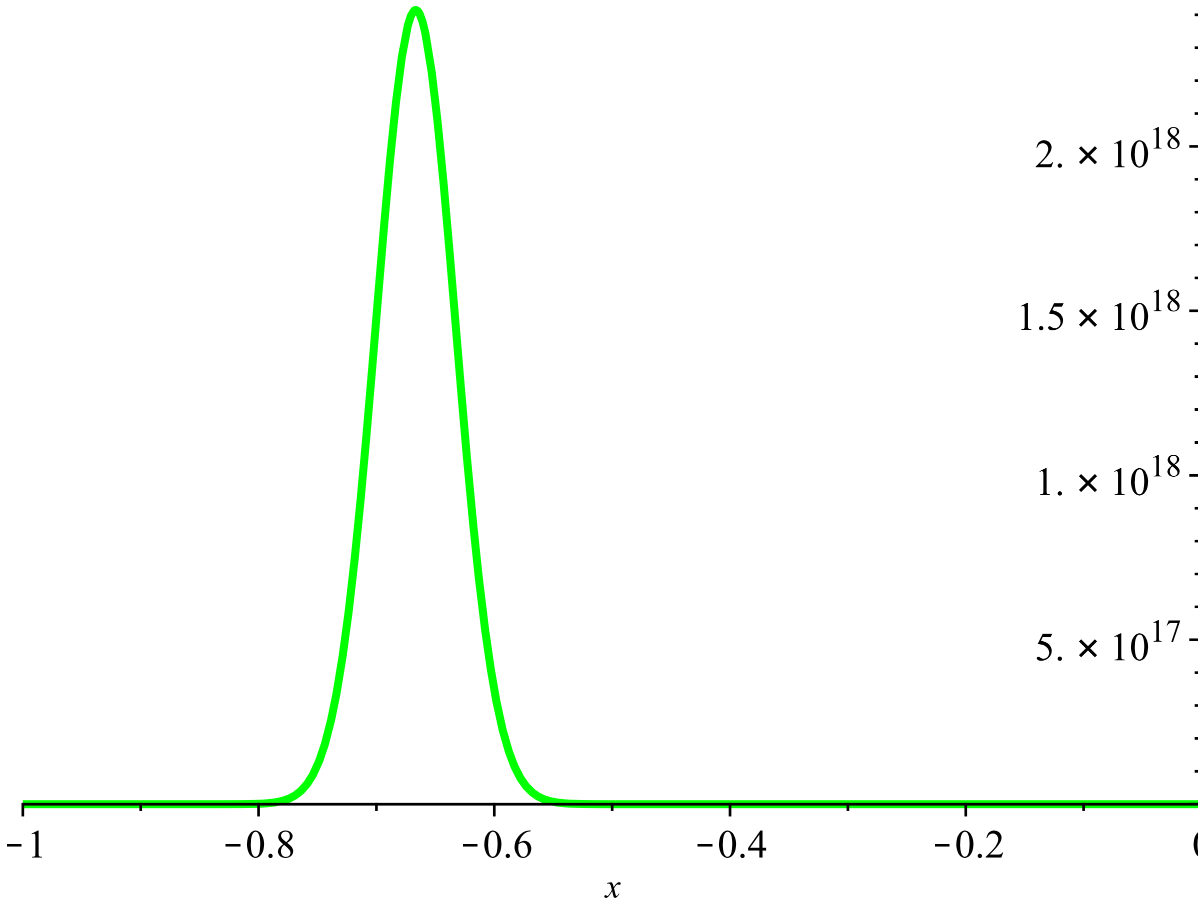
> $solve\left(\text{abs}\left(limit\_sequence \cdot \frac{1}{3\,x^2+4\,x+2}\right) < 1, x\right);$

$$RealRange(-\infty, Open(-1)),\ RealRange\left(Open\left(-\frac{1}{3}\right), \infty\right) \tag{1}$$

> # на данных участках x функциональный ряд из условия сходится абсолютно

> $sum\_function\_1 := sum(row\_1, n = 1 ..100) :$ # с inifinity долгая компиляция : непонятно, будет ли результат

> $plot(sum\_function\_1, x = -1 ..0, color = green, thickness = 3);$



> restart;

> # Задание 2. Доказать равномерную сходимость функционального ряда на отрезке [0, 1 . Найти наименьшее значение min n , при котором $r < \varepsilon$. Убедиться, что при $\varepsilon = 0, 01$ график частичной суммы nmin S ряда не выходит на отрезке [0, 1] за пределы $\varepsilon -$ полосы, центрированной относительно графика суммы ряда результатом

> $sequence\_2 := \dfrac{(-1)^n \cdot x^n}{7\,n - 11}$:

>

> # Ряд сходится как ряд Лейбница. Выполняются условия знакочередования, стремления к нулю и убывания (т.к. на данном промежутке $x < 1 \Rightarrow x^n < 1$

> # Оценю модуль. Для знакочередующегося ряда n-ый остаток не превосходит по модулю (n+1)-го элемента

> $epsilon\_2 := 0.01$:

> #`` $\dfrac{x^{n+1}}{7\,n-11} < \dfrac{1}{7\,n-11}$ для всех x из [0 ..1]

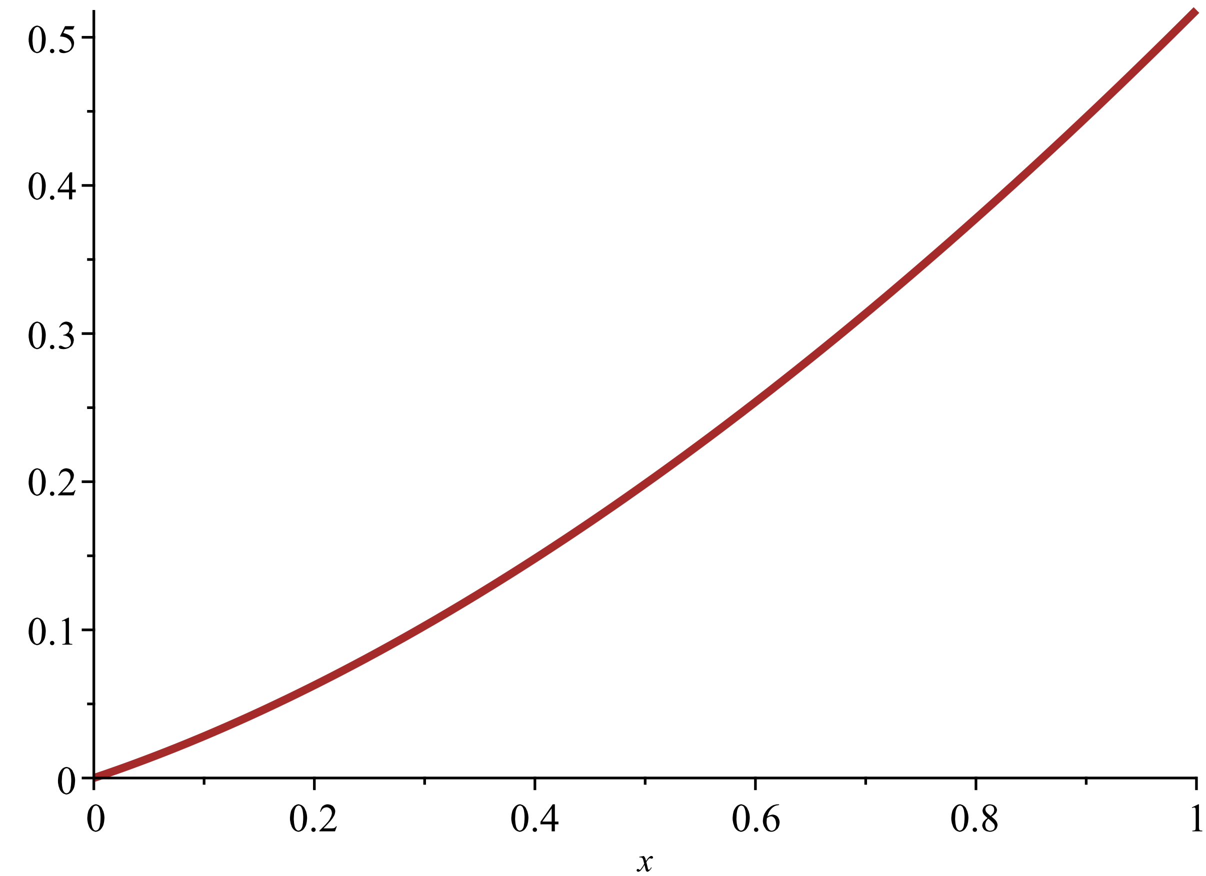
> $solve\left(\dfrac{1}{7\,(n+1)-11} < epsilon\_2\right)$;

$$RealRange(-\infty, Open(0.5714285714)), RealRange(Open(14.85714286), \infty) \qquad \textbf{(2)}$$

> # Nmin беру равным 16

> $Nmin\_2 := 15$:

> $sums\_2 := plot\left(\sum_{n=1}^{5000} sequence\_2, x = 0 ..1, color = brown, thickness = 3\right)$;

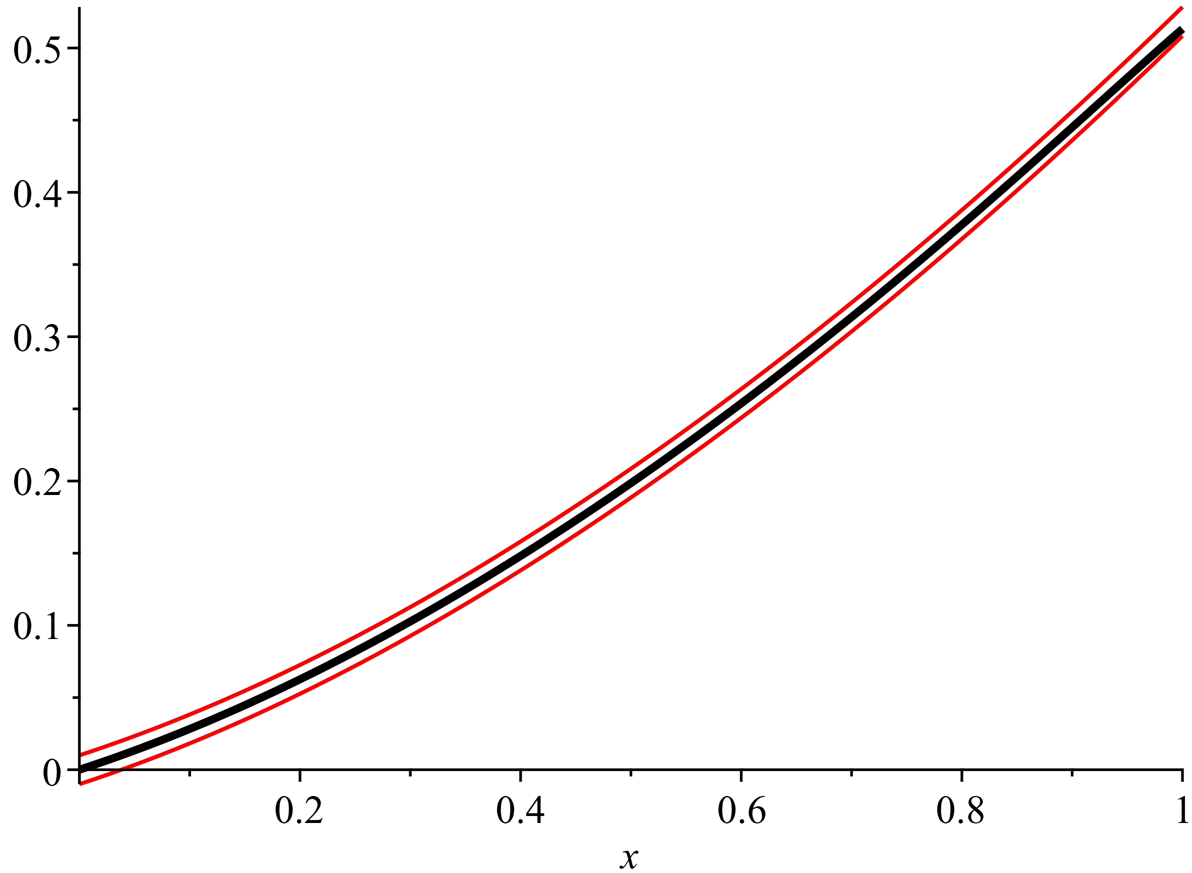


> # Построив график сумм (здесь частичных, но 5000 - достаточно большое число), можно увидеть, что ряд действительно сходится на отрезке [0 ..1].
> # Почему ? Потому что в каждой точке x из этого отрезка сумма принимает конкретное конечное значение ⇒ ряд сходится для этого x

>

> # Ну а теперь построю в соответствии с условием демонстрацию "невыхода" графика частичной суммы Nmin за пределы

```
> partSum := plot(sum(sequence_2, n = 1 ..Nmin_2), x = 0 ..1, color = black, thickness = 3) :
> sumEpsilonPositive := plot(sum(sequence_2, n = 1 ..5000) + epsilon_2, x = 0 ..1, thickness = 1,
    color = red) :
> sumEpsilonNegative := plot(sum(sequence_2, n = 1 ..5000) - epsilon_2, x = 0 ..1, thickness = 1,
    color = red) :
>
> plots[display](partSum, sumEpsilonPositive, sumEpsilonNegative);
```



> # действительно. Найденное Nmin в погрешность вписывается

>

> *restart*;

> # Задание 3. Вычислить интеграл с точностью до 0,
001 и проконтролировать результат с помощью расчетов в системе Maple
. Обосновать свое решение

> $epsilon\_3 := 0.001$:

> $function\_3 := \exp(-6\,x^2)$: # на промежутке 0..0.1

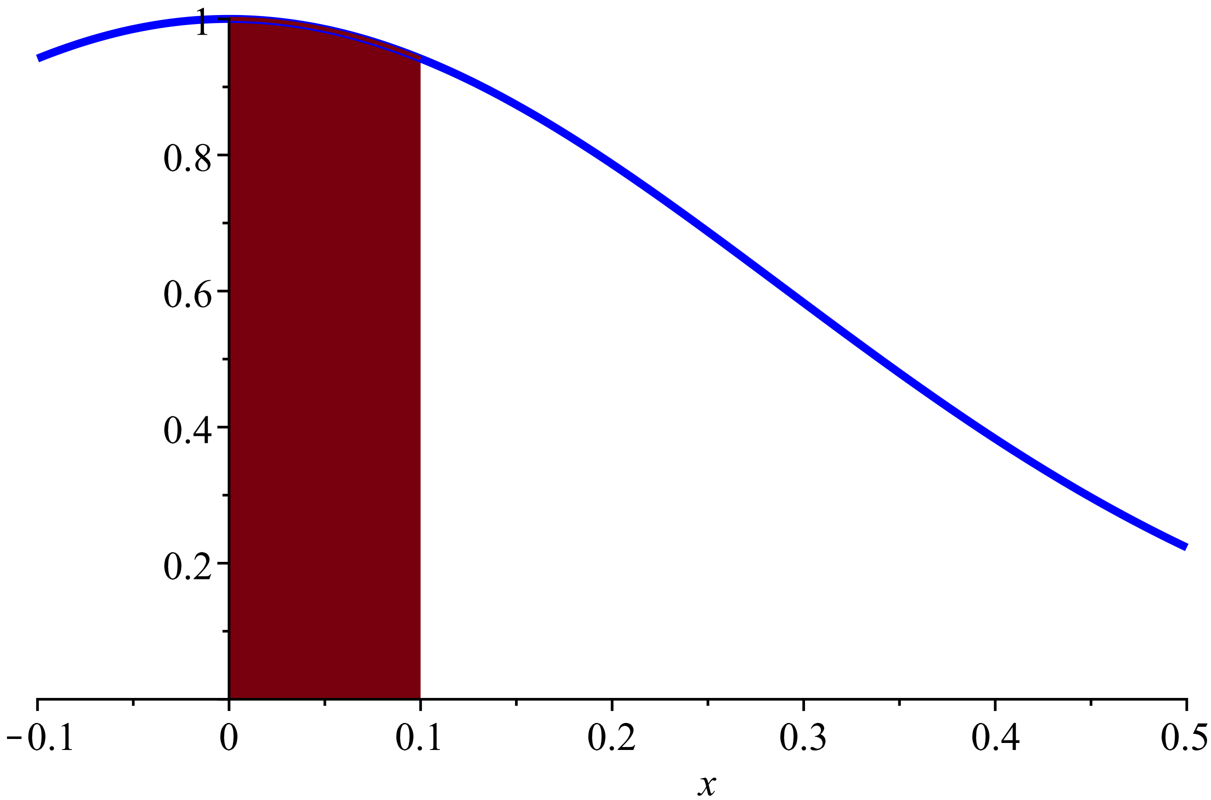
> $integral\_3 := evalf(int(function\_3, x = 0 ..0.1), 5);$

$$integral\_3 := 0.098035 \tag{3}$$

> # реальное значение интеграла (округлено)

$$0.098035 \tag{4}$$

> $plots[display](plot(function\_3, x = -0.1 ..0.5, thickness = 3, color = blue), plot(function\_3, x = 0 ..0.1, filled = true));$



\>

\>

\> $to\_find := 0:$

\> **for** *counter* **from** 0 **to** 16 **do**
to_find := *counter* :
integral := *int*(*convert*(*taylor*(*function_3*, *x* = 0, *counter*), *polynom*), *x* = 0 ..0.1) :
if (abs(*integral* − *integral_3*) < 0.001) **then break end if**:
end do:

\> *print*(*to_find*);

$$3 \tag{5}$$

\> # Интегрируя эту сумму, взяв первые 2 слагаемых, можно получить приближённое значение интеграла, отличающегося от фактического точного не более, чем на заданную точность эпсилон

\> # разложение в ряд Тейлора в окрестности точки ноль (даже можно сказать — в ряд Маклорена).

\>

\> # Слуцкий Никита, гр. 053506