> # Лабораторная работа 3

> # "Функциональные ряды. Степенные ряды"

> # Слуцкий Никита | гр. 053506 (ФКСиС, ИиТП)

> # Вариант 1 (номер в журнале - 21)

>

> $restart;$

> # Задание 1. Найти область сходимости функционального ряда, построить график его суммы и сравнить с полученным результатом

> $row\_1 := \frac{2\,n}{n+1} \cdot \frac{1}{\left(3\,x^2+4\,x+2\right)^n} :$

> $sequencical\_part\_1 := \frac{2\,n}{n+1} :$

>

> # воспользовавшись признаком Даламбера или Коши, можно, получив L(x) и решив неравенство L(x) < 1, найти область сходимости функционального ряда

> $limit\_sequence := limit\left(\sqrt[n]{sequencical\_part\_1}, n = \text{infinity}\right) :$

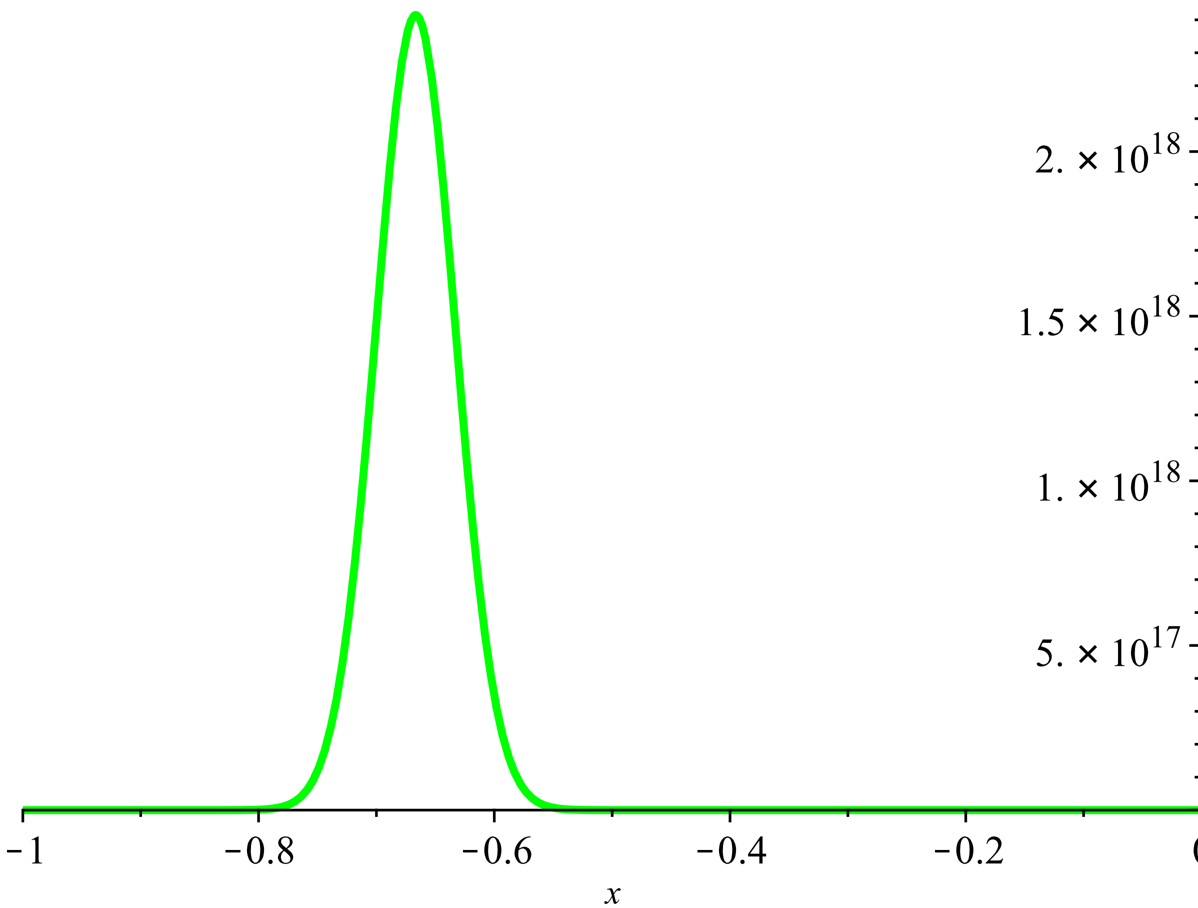
> $solve\left(\text{abs}\left(limit\_sequence \cdot \frac{1}{3\,x^2+4\,x+2}\right) < 1, x\right);$

$$RealRange(-\infty, Open(-1)), RealRange\left(Open\left(-\frac{1}{3}\right), \infty\right) \quad \textbf{(1)}$$

> # на данных участках x функциональный ряд из условия сходится абсолютно

> $sum\_function\_1 := sum(row\_1, n = 1..100) :$ # с inifinity долгая компиляция : непонятно, будет ли результат

> $plot(sum\_function\_1, x = -1..0, color = green, thickness = 3);$



> restart;

> # Задание 2. Доказать равномерную сходимость функционального ряда на отрезке [0, 1 . Найти наименьшее значение min n , при котором r < ε . Убедиться, что при ε = 0, 01 график частичной суммы nmin S ряда не выходит на отрезке [0, 1] за пределы ε − полосы, центрированной относительно графика суммы ряда результатом

> $sequence\_2 := \frac{(-1)^n \cdot x^n}{7\,n - 11}$:

>

> # Ряд сходится как ряд Лейбница. Выполняются условия знакочередования, стремления к нулю и убывания (т.к. на данном промежутке x < 1 => x^n < 1

> # Оценю модуль. Для знакочередующегося ряда n-ый остаток не превосходит по модулю (n+1)-го элемента

> $epsilon\_2 := 0.01$:

> # $\frac{x^{n+1}}{7\,n-11} < \frac{1}{7\,n-11}$ для всех x из [0 ..1]

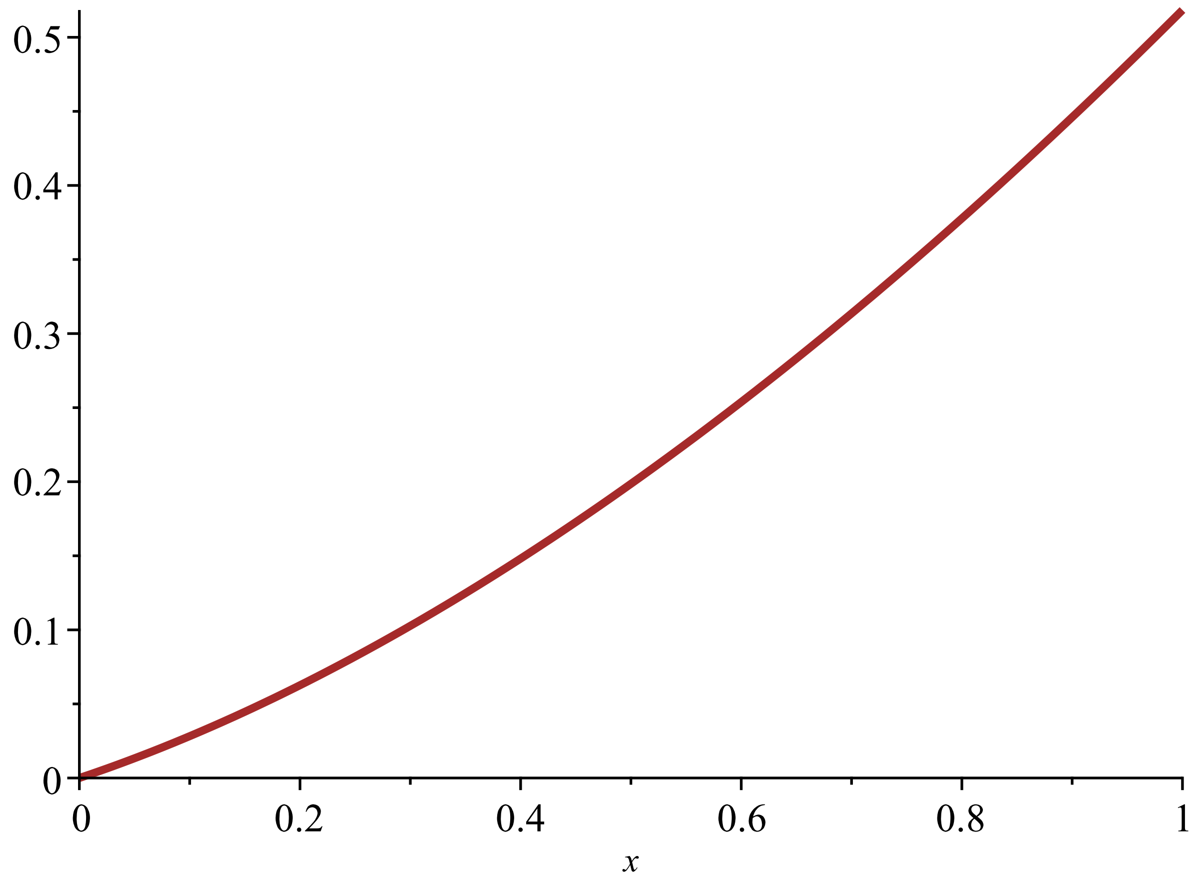
> $solve\left(\frac{1}{7\,n-11} < epsilon\_2\right)$

$$RealRange(-\infty, Open(1.571428571)), RealRange(Open(15.85714286), \infty) \qquad (2)$$

> # Nmin беру равным 16

> $Nmin\_2 := 16$:

> $sums\_2 := plot\left(\sum_{n=1}^{5000} sequence\_2, x = 0..1, color = brown, thickness = 3\right);$

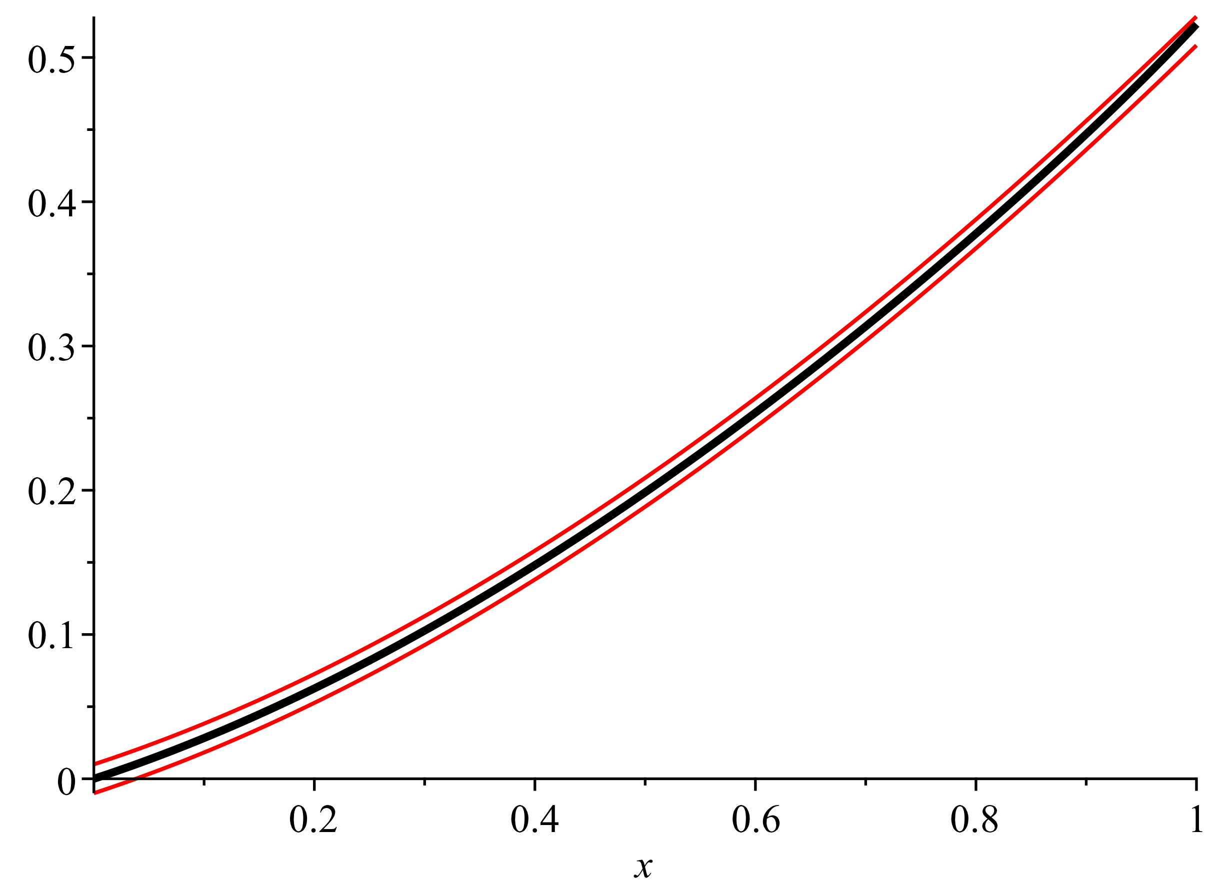


> # Построив график сумм (здесь частичных, но 5000 - достаточно большое число), можно увидеть, что ряд действительно сходится на отрезке [0 ..1].
> # Почему ? Потому что в каждой точке x из этого отрезка сумма принимает конкретное конечное значение ⇒ ряд сходится для этого x

>

> # Ну а теперь построю в соответствии с условием демонстрацию "невыхода" графика частичной суммы Nmin за пределы

```
> partSum := plot(sum(sequence_2, n = 1 ..Nmin_2), x = 0 ..1, color = black, thickness = 3) :
> sumEpsilonPositive := plot(sum(sequence_2, n = 1 ..5000) + epsilon_2, x = 0 ..1, thickness = 1, color = red) :
> sumEpsilonNegative := plot(sum(sequence_2, n = 1 ..5000) − epsilon_2, x = 0 ..1, thickness = 1, color = red) :
>
> plots[display](partSum, sumEpsilonPositive, sumEpsilonNegative);
```



\> # действительно. Найденное Nmin в погрешность вписывается

\>

\> *restart*;

\> # Задание 3. Вычислить интеграл с точностью до 0, 001 и проконтролировать результат с помощью расчетов в системе Maple . Обосновать свое решение

\> $epsilon\_3 := 0.001 :$

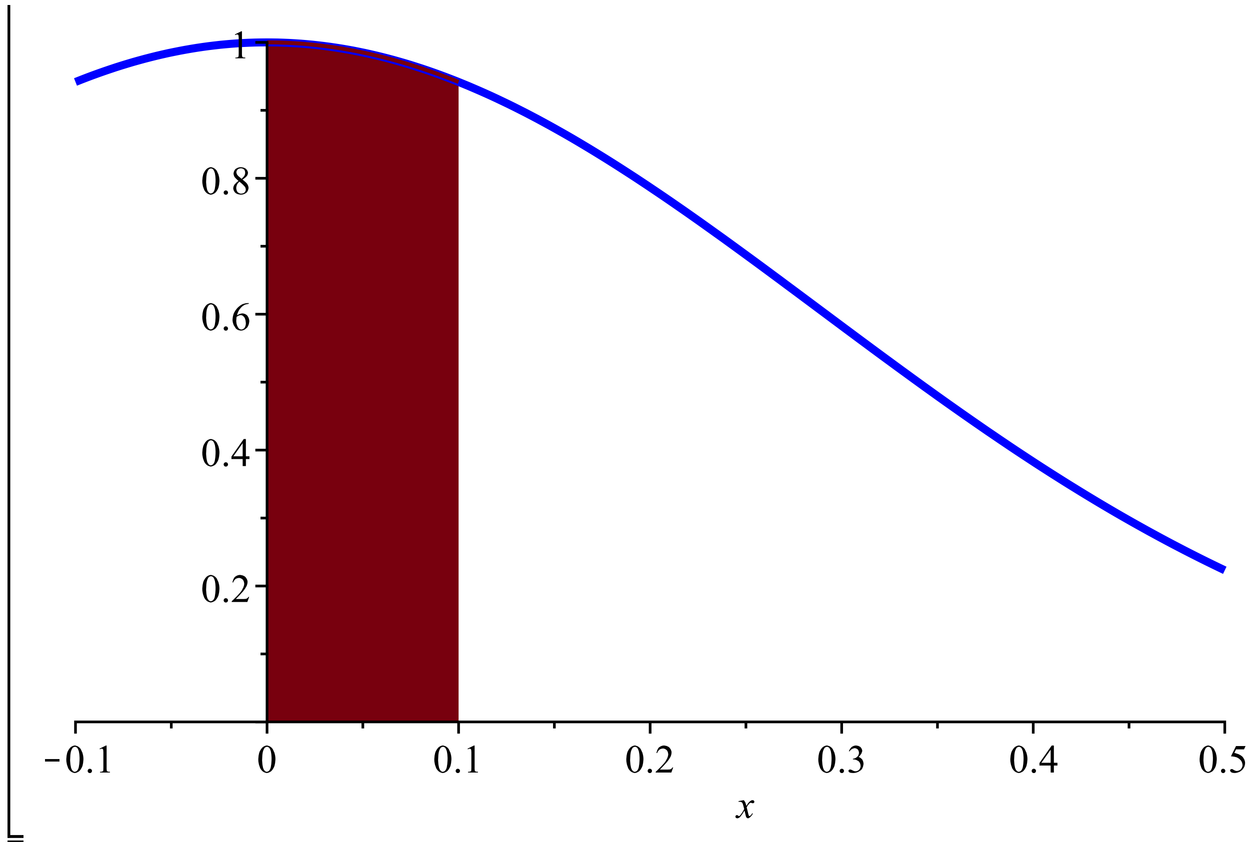
\> $function\_3 := \exp(-6\,x^2)$: # на промежутке 0..0.1

\>

\> $evalf\,(int(function\_3, x = 0\,..0.1\,), 5\,);$ # реальное значение интеграла (округлено)

$$0.098035 \tag{3}$$

\> $plots[display](plot(function\_3, x = -0.1\,..0.5, thickness = 3, color = blue), plot(function\_3, x = 0\,..0.1, filled = true)\,);$



> $taylor\_decomposition := taylor(function\_3, x = 0, 16);$

$$taylor\_decomposition := 1 - 6x^2 + 18x^4 - 36x^6 + 54x^8 - \frac{324}{5}x^{10} + \frac{324}{5}x^{12} - \frac{1944}{35}x^{14} + O(x^{16}) \quad \textbf{(4)}$$

> # разложение в ряд Тейлора в окрестности точки ноль (даже можно сказать — в ряд Маклорена).

> # Интегрируя эту сумму, взяв первые 2 слагаемых, можно получить приближённое значение интеграла, отличающегося от фактического точного не более, чем на заданную точность эпсилон

> $restart;$

> # Слуцкий Никита, гр. 053506

Лабораторная работа №3

17.10.2021

„Функциональные ряды. Степенные ряды"

номер в журнале — 21

вариант — 1

Задание 1

пример 1 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{n+1}\left(\frac{1}{(3x^2+4x+2)^n}\right)$;

Для нахождения области сходимости данного функционального ряда применю признак Коши, а именно — радикальный.

По признаку Коши: $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|U_n(x)|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{2n}{n+1}\left|\frac{1}{3x^2+4x+2}\right|^n} =$

$= \left|\frac{1}{3x^2+4x+2}\right|$. Ряд сходится абсолютно для x, таких, что $L(x)<1$.

$$\left|\frac{1}{3x^2+4x+2}\right| < 1.$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} \frac{1}{3x^2+4x+2} < 1 \\ \frac{1}{3x^2+4x+2} > -1 \end{cases}$$

Решив данную систему, например, в СКА Maple, получаю ответ —

область сходимости ряда:

$x \in (-\infty; -1) \cup (-\frac{1}{3}; +\infty)$.

(пример 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{2n} \frac{1}{(x^2-4x+5)^n}$

{ой, это случайно} 1.2.

Тот же способ. Признак Коши (радикальный). При $|L(x)|<1$ ряд сходится для этих x абсолютно.

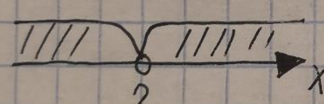
$$L(x) = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n+1}{2n}\right)\frac{1}{(x^2-4x+5)^n}} = \frac{1}{|x^2-4x+5|}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{x^2-4x+5} < 1 \\ \frac{1}{x^2-4x+5} > -1 \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{1-x^2+4x-5}{x^2-4x+5} < 0 \\ \frac{1+x^2-4x+5}{x^2-4x+5} > 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\overbrace{x^2-4x+4}^{(x-2)^2}}{x^2-4x+5} < 0 \\ \frac{x^2-4x+6}{x^2-4x+5} > 0. \end{cases}$$

$D = 16-16 = 0$ $\quad D = 16-20 < 0.$

$D = 16-24 < 0.$



$x \in (-\infty \ldots 2) \cup (2 \ldots +\infty).$

Задание 2 $\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{7n-11}$ // Карпук стр. 199

$[0 \ldots 1]$. $\varepsilon = 0.01$

Ряд сходится как ряд Лейбница:
1. знакопеременный
2. $\lim_{n\to\infty}\{a_n\} = 0$
3. $a_{n+1} < a_n$.

(для промежутка $[0 \ldots 1]$)

т.к. $x^n \le 1 \quad \forall x \in [0 \ldots 1] \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Оценю модуль остатка: для знакочередующегося ряда мы знаем, что остаток $\forall n$ не превосходит по модулю $(n+1)$-го элемента (Равно как и сумма (следствие) не превосходит a_1).

В итоге

$$|r_n(x)| \leq \frac{x^{n+1}}{7n-11}$$

А т.к. $x \in [0 \dots 1]$, $n \in \mathbb{N}$, то

$$\frac{x^{n+1}}{7n-11} \leq \frac{1^{n+1}}{7n-11} = \frac{1}{7n-11}$$

x_{max}

$$|r_n(x)| \leq \frac{1}{7n-11}$$

Отсюда: $|r_n(x)| \leq \dfrac{1}{7n-11} < \varepsilon$ заданная точность

если $|r_n(x)| < \varepsilon$, то сумма посчитана (первых N-сумма) с заданной точностью

Решу неравенство и найду номер N.

$$\frac{1}{7n-11} < \varepsilon \Rightarrow \boxed{n > \frac{1+11\varepsilon}{7\varepsilon}}$$

$\boxed{7n-11>0 \ \forall n>2 \in \mathbb{N}}$

$$\Downarrow$$

$$N_{min} = \left\lfloor \frac{1+11\varepsilon}{7\varepsilon} \right\rfloor + 1.$$

При $\varepsilon = 0.01$ $\quad N_{min} = \left\lfloor \dfrac{1+0.11}{0.07} \right\rfloor + 1 = 16$

$\boxed{\text{Задание 3}}$ $\int_0^{0.1} e^{-6x^2}dx$ $\varepsilon = 0.001$ Карпук стр. 232.

Степенные ряды можно использовать в приближенных вычислениях.

По формуле Тейлора $f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$.

$\cancel{(e^{-6x^2})' = e^{-6x^2}\cdot(-12x)}$

$\cancel{(e^{-6x^2}\cdot(-12x))' =}$

В СКА Maple разложу до 5-го порядка:

$\cancel{e^{-6x^2} \sim e^{-6} - 12e^{-6}(x-1) + 66e^{-6}(x-1)^2 - 216e^{-6}(x-1)^3 + 450e^{-6}(x-1)^4}$

Поменял СКА на Wolfram Mathematica

$e^{-6x^2} \sim 1 - 6x^2 + 18x^4 - 36x^6 + 54x^8 + \dots + (-1)^{2n-1}\cdot$

0 1 2 3 4

$e^{-6x^2} \sim 1 - 6x^2 + 18x^4 - 36x^6 + 54x^8 - \frac{324x^{10}}{5} + \frac{324x^{12}}{5} - \frac{1944x^{14}}{35} + O(x^{16})$

$\int_0^{0.1} e^{-6x^2}dx = \int_0^{0.1}\left(1 - 6x^2 + 18x^4 - 36x^6 + 54x^8 - \frac{324x^{10}}{5} + \frac{324x^{12}}{5}\dots\right)dx =$

$= \cancel{(x - 2x^3 + 3.6x^5 - 18}\ 6x\ \left(x - 2x^3 + 3.6x^5 - \frac{36}{7}x^7 + 6x^9 - \frac{324}{55}x^{11}\dots\right)\Big|_0^{0.1} =$

$= 0.1 - 2\cdot 0.1^3 + 3.6\cdot 0.1^5 - \frac{36}{7}\cdot 0.1^7 \dots$

Получили знакочередующийся ряд Лейбница.

удовлетворяет 3-м условиям.

Так как $(3.6 \cdot 10^{-5}) < \varepsilon$ $(\varepsilon = 0.001)$, то

для приближенного значения интеграла достаточно

взять первые 2 члена разложения.

Т.е. $\int_0^{0.1} e^{-6x^2} dx \approx 0.1 - 0.1^3 \cdot 2 = \underline{\underline{0.098}}$

Посчитав более точно (вычислив) этот интеграл

в СКА WOLFRAM MATHEMATICA, можно

увидеть, что СКА Wolfram выдаёт

ответ 0.0980355.

То есть мой ответ

действительно не превышает погрешность.