Лабораторная работа 4

#` `Ряды Фурье

Слуцкий Никита | гр. 053506 (ФКСиС, ИиТП)

Вариант 1 (номер в журнале — 21)

> restart;

Задание 1

Получить разложение в тригонометрический ряд Фурье.

Создать пользовательскую процедуру для построения тригонометрического ряда Фурье произвольной функции, удовлетворяющей теореме Дирихле.

Построить в одной системе координат на промежутке $[-3\pi, 3\pi]$ графики частичных сумм $S_1(x)$, $S_3(x)$, $S_7(x)$ ряда и его суммы $S(x)$.

Анимировать процесс построения графиков сумм ряда, взяв в качестве параметра порядковый номер частичной суммы.

> GetA0 := **proc**(functionExpression, halfPeriod, leftIntBorder, rightIntBorder)

$$simplify\left(\frac{1}{halfPeriod}\cdot int(functionExpression, x = leftIntBorder..rightIntBorder)\right)$$

end proc:

> GetAn := **proc**(functionExpression, halfPeriod, leftIntBorder, rightIntBorder)

$$simplify\left(\frac{1}{halfPeriod}\cdot int\left(functionExpression\cdot\cos\left(\frac{n\cdot\pi\cdot x}{halfPeriod}\right), x = leftIntBorder..rightIntBorder\right)\right) \text{assuming } n :: posint$$

end proc:

> GetBn := **proc**(functionExpression, halfPeriod, leftIntBorder, rightIntBorder)

$$simplify\left(\frac{1}{halfPeriod}\cdot int\left(functionExpression\cdot\sin\left(\frac{n\cdot\pi\cdot x}{halfPeriod}\right), x = leftIntBorder..rightIntBorder\right)\right) \text{assuming } n :: posint$$

end proc:

> GetFourierSumValue := **proc**(expression, m, halfPeriod, leftIntBorder, rightIntBorder)

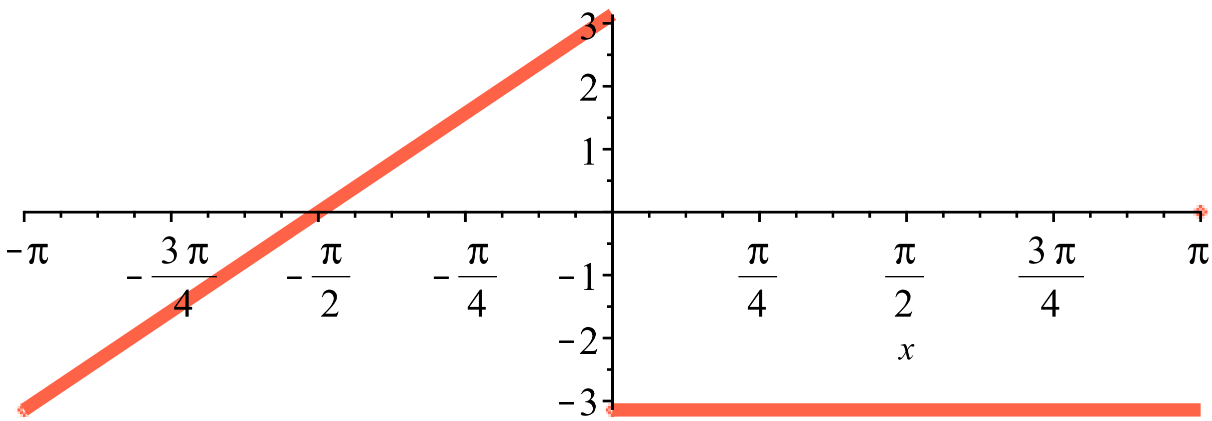
(напоминаю, теорема Дирихле: ф-я кусочно-гладкая => её ряд Фурье для каждого X сходится к f(X))

$$\frac{GetA0(expression, halfPeriod, leftIntBorder, rightIntBorder)}{2} + \sum_{n=1}^{m}\left(GetAn(expression, halfPeriod, leftIntBorder, rightIntBorder)\cdot\cos\left(\frac{n\cdot\pi\cdot x}{halfPeriod}\right) + GetBn(expression, halfPeriod, leftIntBorder, rightIntBorder)\cdot\sin\left(\frac{n\cdot\pi\cdot x}{halfPeriod}\right)\right)$$

end proc:

> $expression1 := piecewise(x < 0 \textbf{ and } x \geq -\pi, \pi + 2\cdot x, x \geq 0 \textbf{ and } x < \pi, -\pi)$:

> $expressionChart1 := plot(expression1, x = -\pi..\pi, color = \text{"Tomato"}, thickness = 5, discont = true);$



> `a0_1 := GetA0(expression1, π, -π, π);` # коэффициент A0, который вернулся из функции

$$a0\_1 := -\pi \tag{1}$$

> `an_1 := GetAn(expression1, π, -π, π) ;` # коэффициенты An из функции

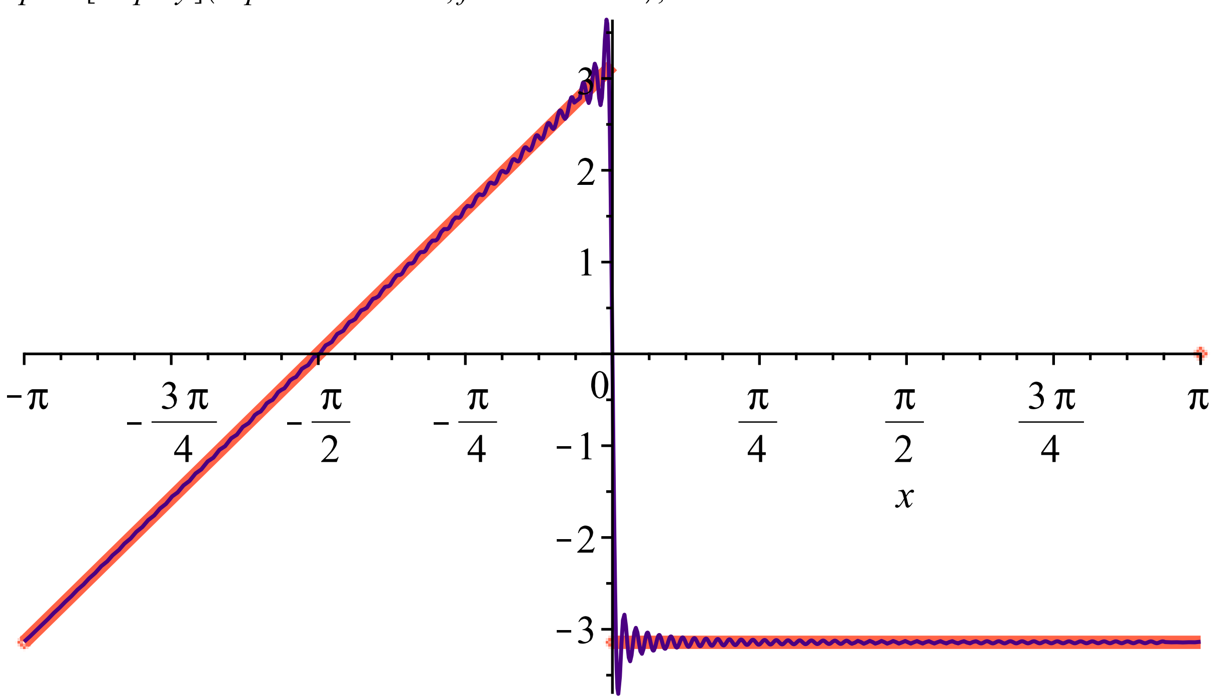
$$an\_1 := \frac{2\,(-1)^{1+n} + 2}{\pi\, n^2} \tag{2}$$

> `bn_1 := GetBn(expression1, π, -π, π) ;` # коэффициенты Bn из функции

$$bn\_1 := -\frac{2}{n} \tag{3}$$

> `fourierChart1 := plot(GetFourierSumValue(expression1, 100, π, -π, π), x = -π .. π, discont = true, color = "Indigo", thickness = 1) :` # График частичной суммы S[100]

> `plots[display](expressionChart1, fourierChart1);`

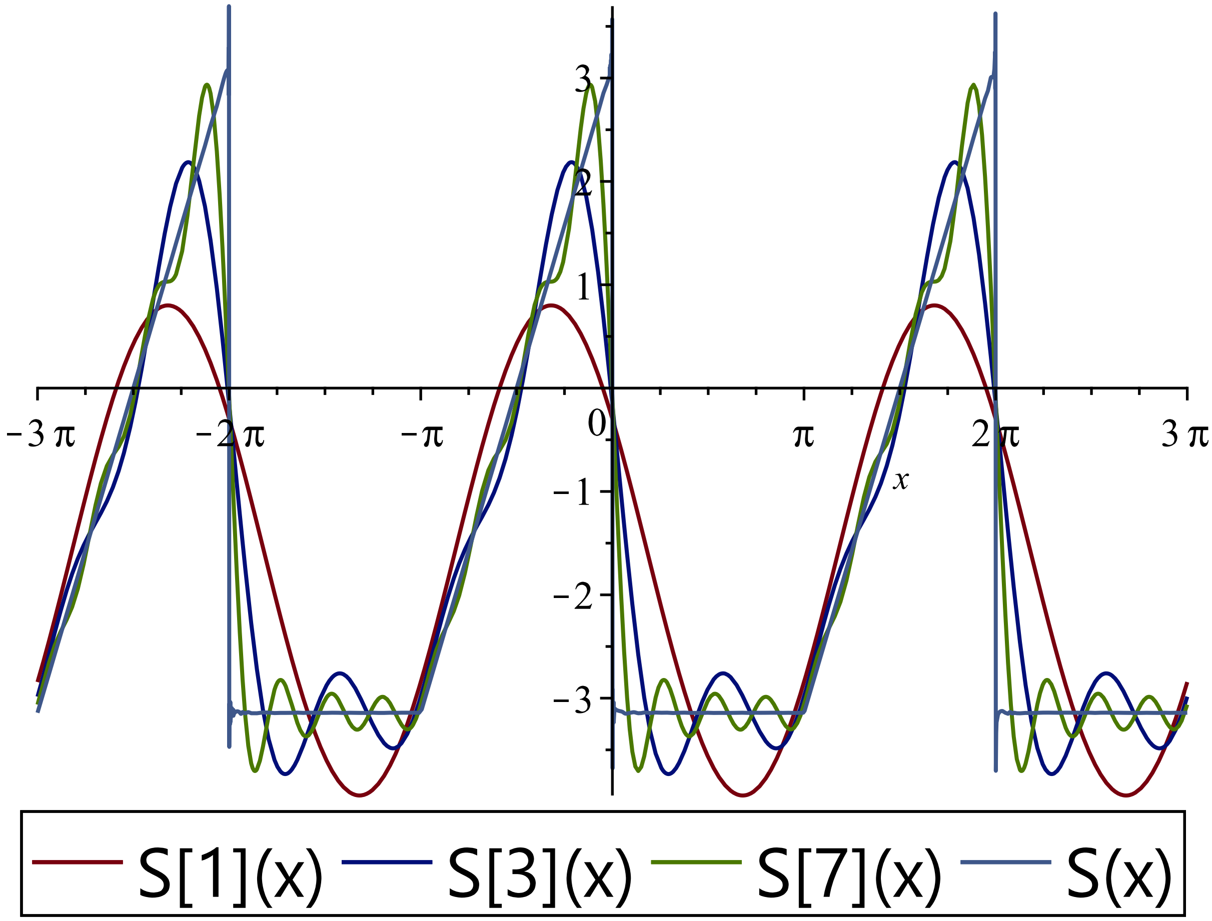


>

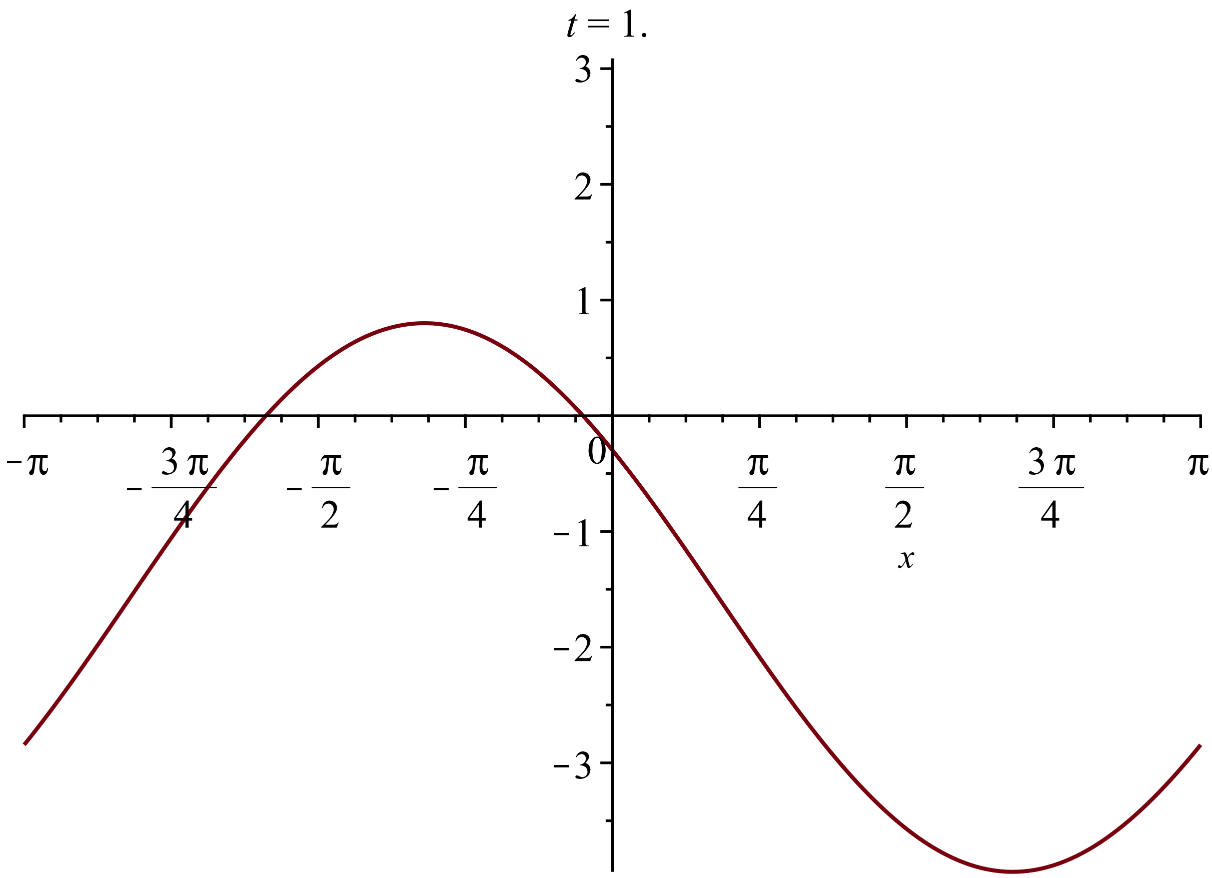
> `plot([GetFourierSumValue(expression1, 1, π, -π, π), GetFourierSumValue(expression1, 3, π, -π, π), GetFourierSumValue(expression1, 7, π, -π, π), GetFourierSumValue(expression1,`

$1000, \pi, -\pi, \pi)\,], x=-3\cdot\pi..3\cdot\pi, discont=true, legend=[\text{"S}_1(x)\text{"}, \text{"}S_3(x)\text{"}, \text{"}S_7(x)\text{"}, \text{"}S(x)\text{"}], legendstyle=[font=[\text{"Segoe UI"}, 20], location=bottom])\;;$

 # кастомизация функции plot: https://www.maplesoft.com/support/help/maple/view.aspx?path=plot/options



> $plots[animate](\,plot, [GetFourierSumValue(expression1, t, \pi, -\pi, \pi), x=-\text{Pi}..\text{Pi}], t=[1, 3, 5, 7, 9]);$ ***# долго компилируется (нужно ждать около минуты)***



>

>

>

>

> ***# Задание 2***

> #\` \`Разложить в ряд Фурье x_2 -периодическую функцию $y = f(x)$, заданную на промежутке $(0, x_1)$ формулой $y = ax + b$ а на $[x_2, x_2]$ $-y = c$

> #\` \`Построить в одной системе координат графики частичных сумм $S_1(x)$, $S_3(x)$, $S_7(x)$ ряда и его суммы $S(x)$ на промежутке $[-2x_2, 2x_2]$

> # Анимировать процесс построения графиков сумм ряда, взяв в качестве параметра порядковый номер частичной суммы.

>

> # Коэффициенты из условия:\` \`

> $a2 := 1 :$

> $b2 := 2 :$

> $c2 := -1 :$

> $x1 := 2 :$

> $x2 := 5 :$

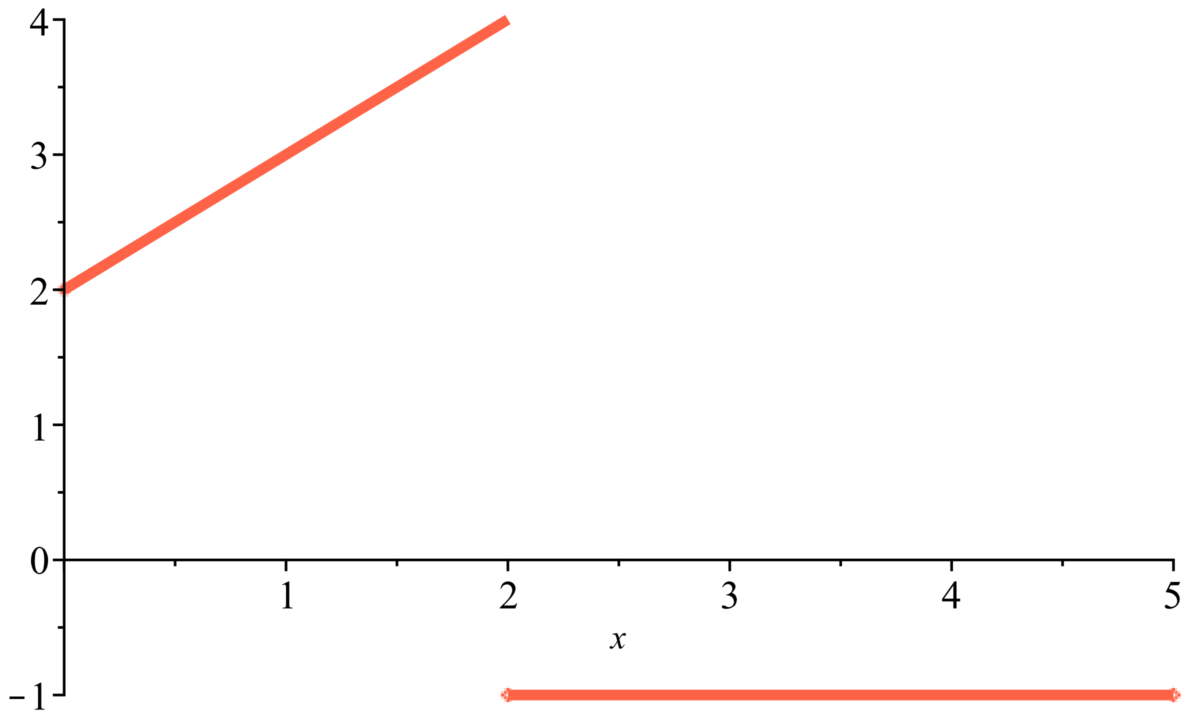
>

> $expression2 := piecewise(x \geq 0 \textbf{ and } x < x1, a2 \cdot x + b2, x \geq x1 \textbf{ and } x \leq x2, c2);$

$$expression2 := \begin{cases} x + 2 & 0 \leq x \textbf{ and } x < 2 \\ -1 & 2 \leq x \textbf{ and } x \leq 5 \end{cases} \quad \textbf{(4)}$$

> $chartExpression2 := plot(expression2, x = 0 ..x2, discont = true, thickness = 4, color$

= "Tomato");



> a0_2 := GetA0(expression2, $\frac{x2}{2}$, 0, x2);

$$a0\_2 := \frac{6}{5} \tag{5}$$

(6)

> an_2 := GetAn(expression2, $\frac{x2}{2}$, 0, x2);

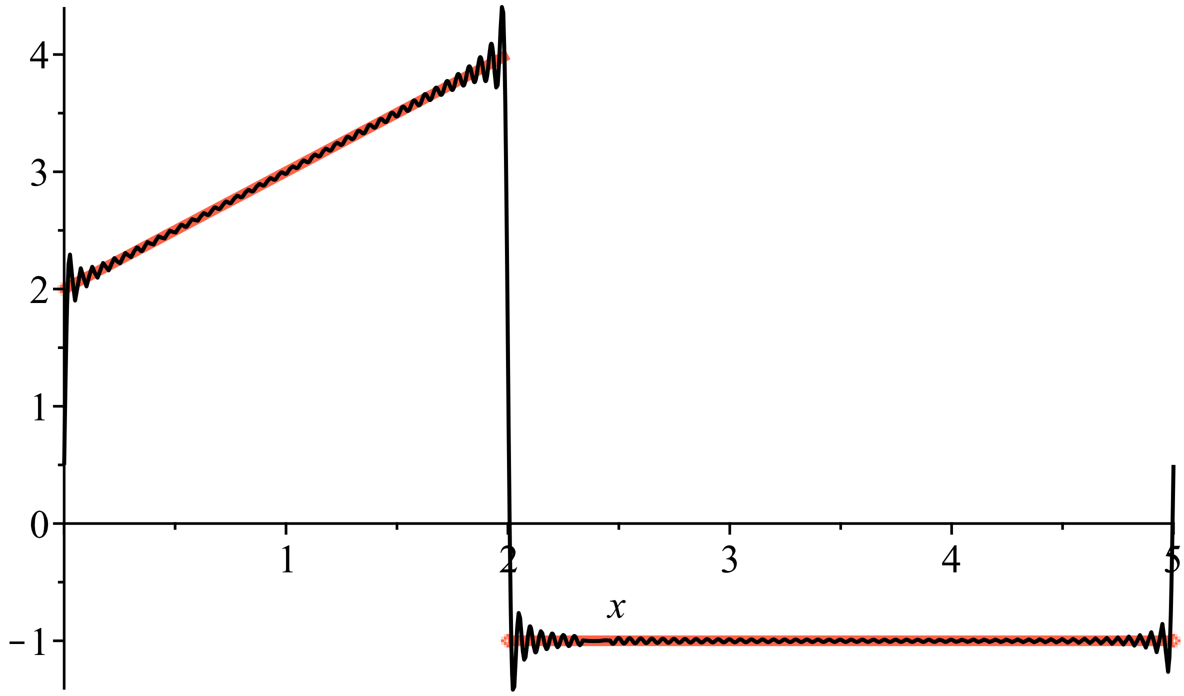
$$an\_2 := \frac{5}{2} \frac{2\, n\, \pi \sin\left(\frac{4}{5}\, n\, \pi\right) + \cos\left(\frac{4}{5}\, n\, \pi\right) - 1}{n^2\, \pi^2} \tag{7}$$

> bn_2 := GetBn(expression2, $\frac{x2}{2}$, 0, x2);

$$bn\_2 := -\frac{1}{2} \frac{10\, n\, \pi \cos\left(\frac{4}{5}\, n\, \pi\right) - 6\, n\, \pi - 5 \sin\left(\frac{4}{5}\, n\, \pi\right)}{n^2\, \pi^2} \tag{8}$$

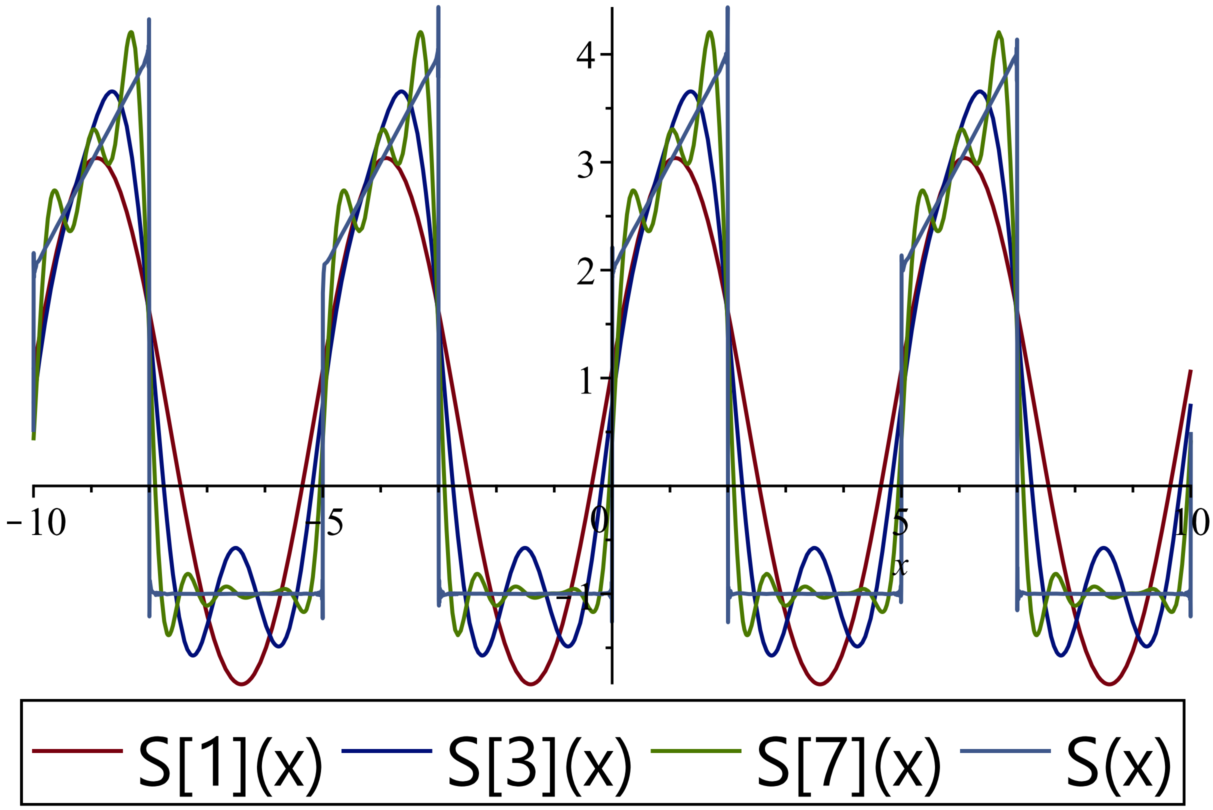
> chartFourier2 := plot(GetFourierSumValue(expression2, 100, $\frac{x2}{2}$, 0, x2), x = 0 .. x2, discont = true, color = black) :

> plots[display](chartExpression2, chartFourier2) ;



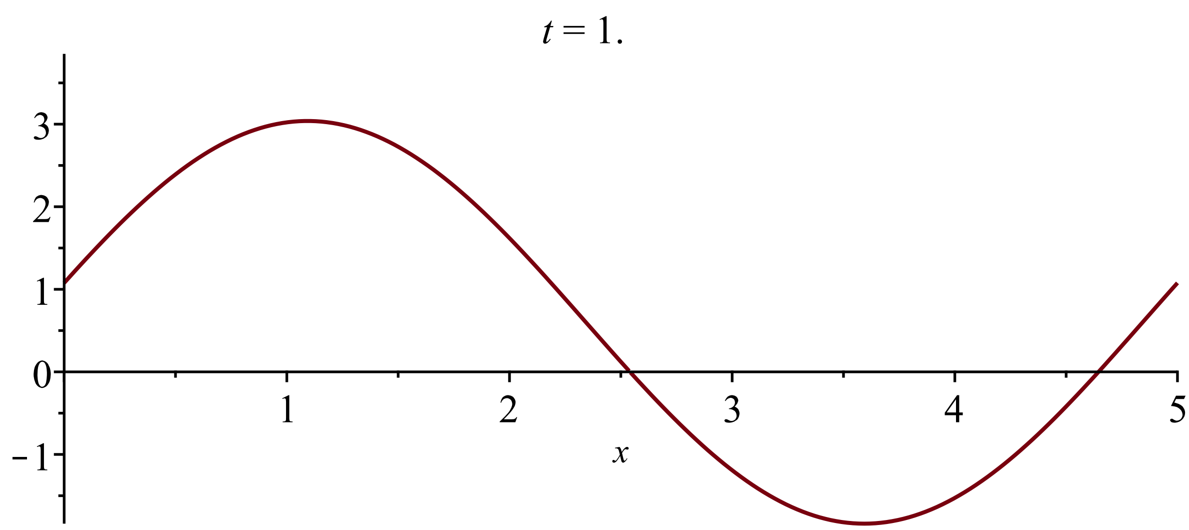
> $plot\left(\left[GetFourierSumValue\left(expression2, 1, \frac{x2}{2}, 0, x2\right), GetFourierSumValue\left(expression2, 3, \frac{x2}{2}, 0, x2\right), GetFourierSumValue\left(expression2, 7, \frac{x2}{2}, 0, x2\right), GetFourierSumValue\left(expression2, 1000, \frac{x2}{2}, 0, x2\right)\right], x = -2 \cdot x2 .. 2 \cdot x2, discont = true, legend = \left["S_1(x)", "S_3(x)", "S_7(x)", "S(x)"\right], legendstyle = [font = ["Segoe UI", 20], location = bottom]\right);$

 # кастомизация функции plot: https://www.maplesoft.com/support/help/maple/view.aspx?path=plot/options



>

> $plots[animate]\left(plot, \left[GetFourierSumValue\left(expression2, t, \frac{x2}{2}, 0, x2\right), x = 0 ..x2\right], t = [1, 2] \right);$ *# очень долго ждать (даже для двух значений)*



>

>

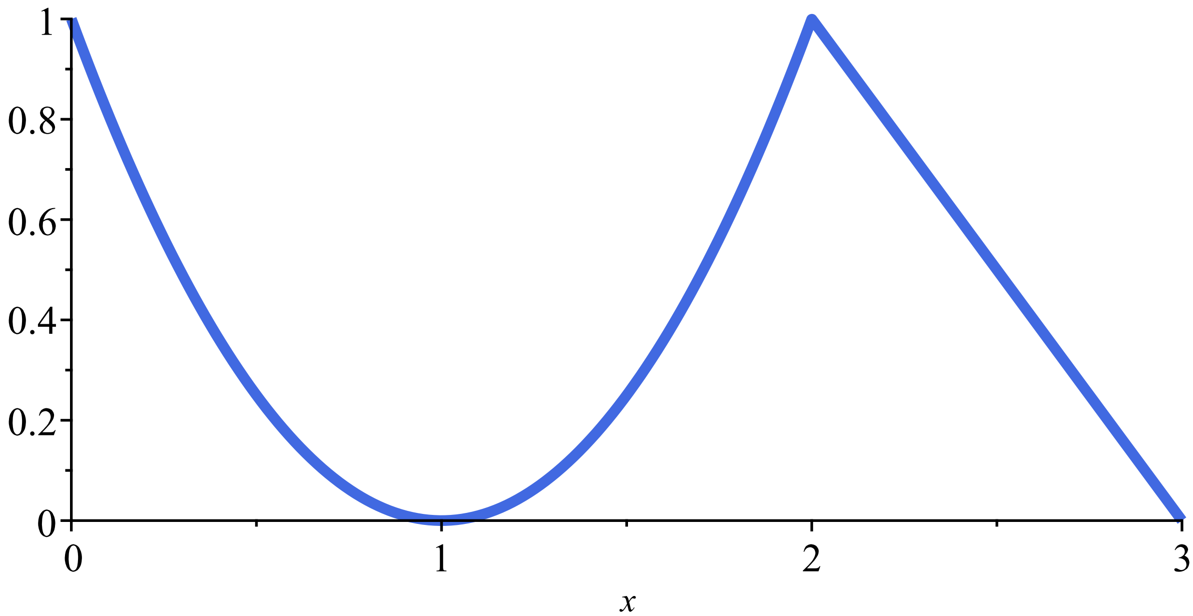
> ***# Задание 3***

> *# Построить три разложения (на полном периоде и на полупериоде (чётн. и нечётн)*

> $expression3 := piecewise\left(x \geq 0 \textbf{ and } x < 2, x^2 - 2x + 1, x \geq 2 \textbf{ and } x \leq 3, -x + 3\right);$

$$expression3 := \begin{cases} x^2 - 2x + 1 & 0 \le x \textbf{ and } x < 2 \\ -x + 3 & 2 \le x \textbf{ and } x \le 3 \end{cases} \tag{9}$$

> $chartExpression3 := plot(expression3, x = 0..3, color = \text{"RoyalBlue"}, thickness = 4);$



>

> # На полном периоде : $T = 3, l = \frac{T}{2} = \frac{3}{2}$

>

> $a0\_3\_1 := GetA0\left(expression3, \frac{3}{2}, 0, 3\right);$

$$a0\_3\_1 := \frac{7}{9} \tag{10}$$

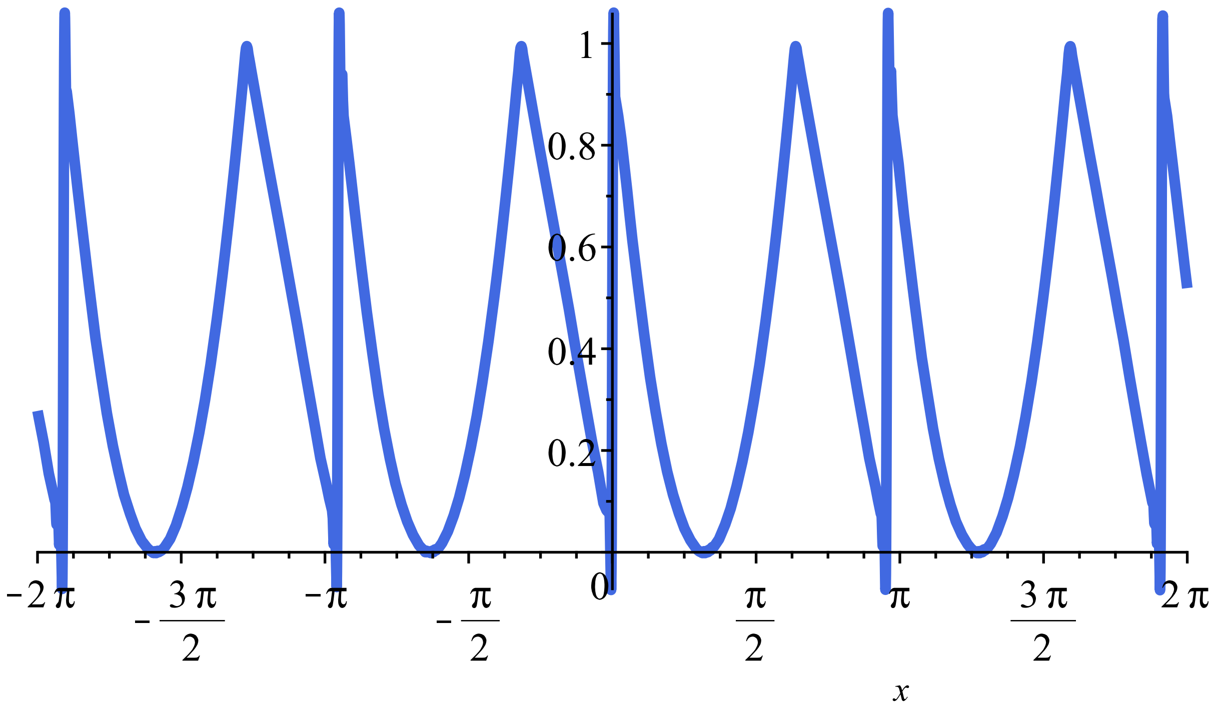
> $an\_3\_1 := GetAn\left(expression3, \frac{3}{2}, 0, 3\right);$

$$an\_3\_1 := \frac{3}{2} \frac{3 n \pi \cos\left(\frac{4}{3} n \pi\right) + n \pi - 3 \sin\left(\frac{4}{3} n \pi\right)}{n^3 \pi^3} \tag{11}$$

> $bn\_3\_1 := GetBn\left(expression3, \frac{3}{2}, 0, 3\right);$

$$bn\_3\_1 := \frac{1}{2} \frac{2 n^2 \pi^2 + 9 n \pi \sin\left(\frac{4}{3} n \pi\right) + 9 \cos\left(\frac{4}{3} n \pi\right) - 9}{n^3 \pi^3} \tag{12}$$

> $plot\left(GetFourierSumValue\left(expression3, 100, \frac{3}{2}, 0, 3\right), color = \text{"RoyalBlue"}, thickness = 4\right);$



>

>

> # На полупериоде с чётным доопределением : T = 6, l = 3

Тут f(x) · cos --- чётная, а f(x)·sin --- нечётная (=> bn = 0 по св-вам интеграла от нечётных ф-ий)

> $a0\_3\_2 := 2 \cdot GetA0(expression3, 3, 0, 3);$

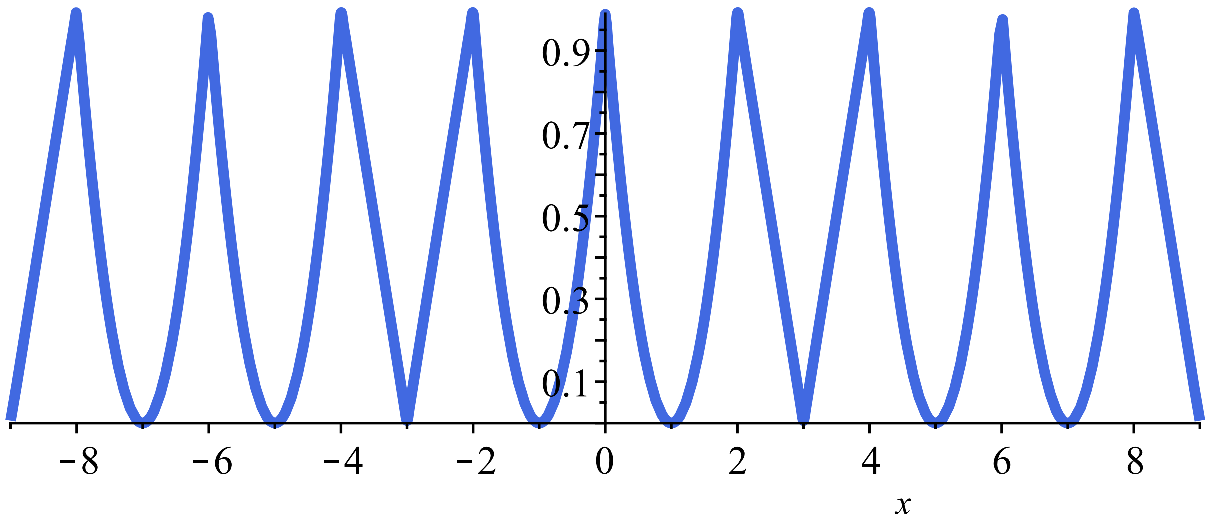
$$a0\_3\_2 := \frac{7}{9} \tag{13}$$

> $an\_3\_2 := 2 \cdot GetAn(expression3, 3, 0, 3);$

$$an\_3\_2 := \frac{2\left(3\,\pi\,(-1)^{1+n}\,n + 9\,n\,\pi\cos\left(\frac{2}{3}\,n\,\pi\right) + 6\,n\,\pi - 18\sin\left(\frac{2}{3}\,n\,\pi\right)\right)}{n^3\,\pi^3} \tag{14}$$

> $odd3 := \frac{a0\_3\_2}{2} + \sum_{n=1}^{100}\left(an\_3\_2 \cdot \cos\left(\frac{n \cdot x \cdot \pi}{3}\right)\right):$

> $plot(odd3, x = -9..9, color = \text{"RoyalBlue"}, thickness = 4);$



>

>

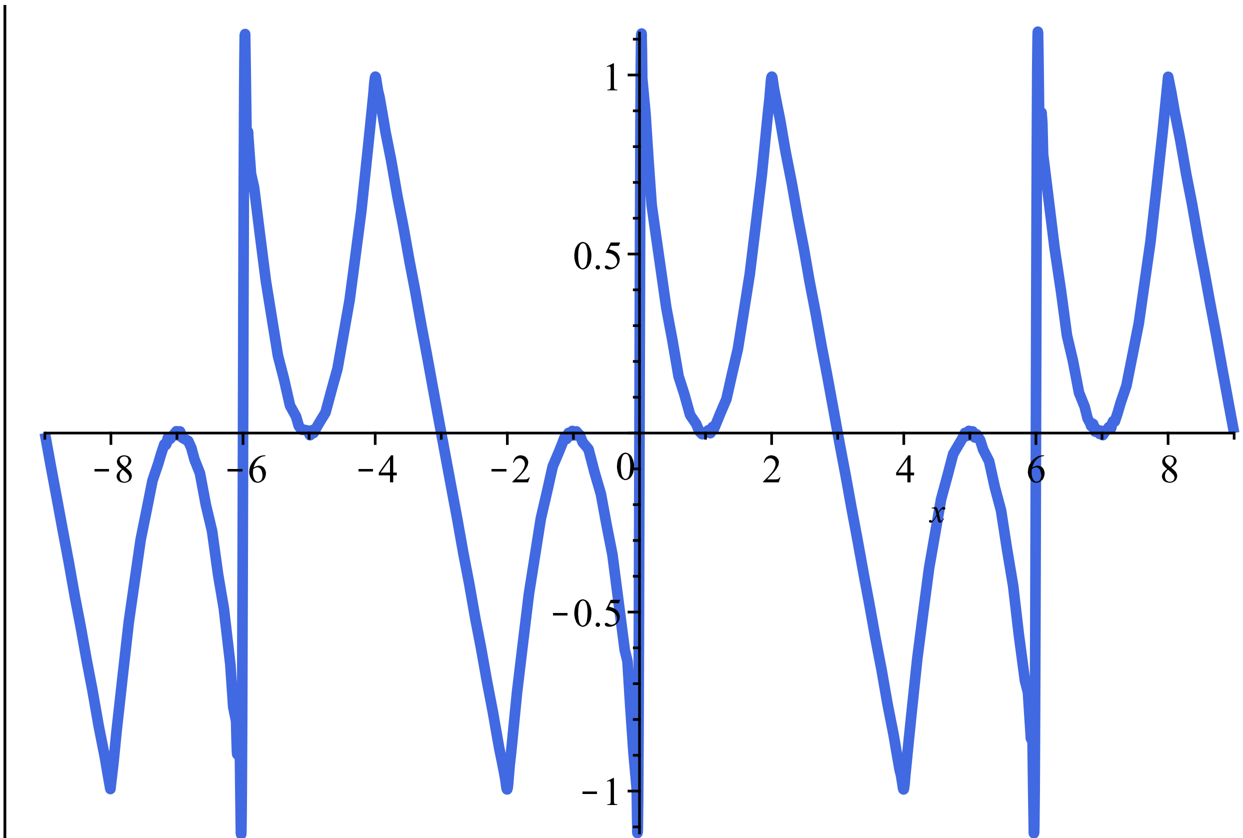
> # На полупериоде с нечётным доопределением : T = 6, l = 3# Тут $f(x) \cdot \cos$ - - - нечётная, а $f(x) \cdot \sin$ - - - чётная ($\Rightarrow an = 0$ по св — вам интеграла от нечётных ф — ий)

> $bn\_3 := 2 \cdot GetBn(expression3, 3, 0, 3);$

$$bn\_3 := \frac{2\left(n^2\pi^2 + 9\,n\,\pi\sin\left(\frac{2}{3}\,n\,\pi\right) + 18\cos\left(\frac{2}{3}\,n\,\pi\right) - 18\right)}{n^3\,\pi^3} \quad \textbf{(15)}$$

> $even3 := \sum_{n=1}^{100}\left(bn\_3 \cdot \sin\left(\frac{n \cdot x \cdot \pi}{3}\right)\right):$

> plot(even3, x =-9 ..9, color = "RoyalBlue", thickness = 4);



\>

\>

\>

\> *restart*;

\> # Слуцкий Никита, гр. 053506

01.11.2021

Лабораторная работа №4

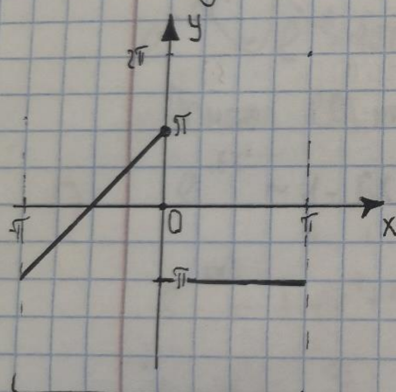
„Ряды Фурье"

Цель: научиться раскладывать функцию в ряд Фурье по тригонометрической системе функций и по ортогональным полиномам, определять область сходимости полученного ряда к порождающей его функции, контролировать результат с помощью средств системы Maple.

Номер в журнале – 21

Вариант – 1.

$\boxed{\text{Задание 1}}$ $f(x)=\begin{cases}\pi+2x, & -\pi\le x<0\\ -\pi, & 0\le x<\pi\end{cases}$



$$f(x)\sim\underbrace{\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)}$$

$T=2\pi=2l \Rightarrow l=\pi.$

[это для 2π-периодической, т.к. $\sin\frac{k\pi x}{l}=\sin\frac{k\pi x}{\pi}=\sin kx$].

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}(\pi+2x)dx+\int_{0}^{\pi}-\pi dx\right)=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left((\pi x+x^2)\Big|_{-\pi}^{0}+\pi x\Big|_{0}^{\pi}\right)=\frac{1}{\pi}\left(0-\underbrace{(-\pi^2+\pi^2)}_{0}+\pi^2\right)=\frac{\pi^2}{\pi}=-\pi.$$

$$\to a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} f(x)\cos nx\,dx + \int_{0}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\overset{①}{\int_{-\pi}^{0}(\pi+2x)\cos nx\,dx} + \overset{②}{\int_{0}^{\pi}(-\pi)\cos nx\,dx}\right) = ⊛$$

// прекращаю вычисление этого примера.

① $$\int(\pi+2x)\cos nx\,dx = \begin{bmatrix} \pi+2x=u & du=2\,dx \\ v=\dfrac{\sin nx}{n} & dv=\cos nx\,dx \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{(\pi+2x)\sin nx}{n} - \int\frac{2\sin nx}{n}\,dx = \frac{(\pi+2x)}{n}\sin nx - \frac{2}{n}\left(\frac{-\cos nx}{n}\right) =$$

$$= \frac{(\pi+2x)\sin nx}{n} + \frac{2\cos nx}{n^2} + C.$$

$$\left(\frac{(\pi+2x)\sin nx}{n} + \frac{2\cos nx}{n^2}\right)\Bigg|_{-\pi}^{0} = \left(0 + \underbrace{\frac{2\cos 0}{n^2}}_{\to\frac{2}{n^2}}\right) - \left(\underbrace{\frac{(-\pi)\sin\pi n}{n}}_{\to 0} + \frac{2\cos\pi n}{n^2}\right) =$$

$$= \frac{2}{n^2} - \frac{2\cos\pi n}{n^2} = \underline{\cancel{2}\,\frac{2}{n^2}\left(1-(-1)^n\right)}$$

② $$\int_{0}^{\pi}(-\pi)\cos nx\,dx = \left(\frac{-\pi\sin nx}{n}\right)\Bigg|_{0}^{\pi} = 0$$

$$⊛ = \frac{2}{\pi n^2}\left(1-(-1)^n\right)$$ // a_n.

$$\to b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx = \cancel{\frac{1}{\pi}}\ \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}(\pi+2x)\sin nx\,dx + \int_{0}^{\pi}(-\pi)\sin nx\,dx\right) =$$

$=$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}(\pi+2x)\sin nx\,dx + \int_{0}^{\pi}(-\pi)\sin nx\,dx\right) = \circledast$$

$$① \int(\pi+2x)\sin nx\,dx = \int(\pi+2x)\sin nx\,dx = \begin{bmatrix} u=\pi+2x & du = 2dx \\ v = -\frac{\cos nx}{n} & dv = \sin nx\,dx \end{bmatrix} =$$

$$= -\frac{(\pi+2x)\cos nx}{n} - \int -\frac{2\cos nx}{n}dx = -\frac{(\pi+2x)\cos nx}{n} + \frac{2}{n}\int \cos nx\,dx =$$

$$= -\frac{(\pi+2x)\cos nx}{n} + \frac{2}{n^2}\sin nx + C.$$

$$\left(-\frac{(\pi+2x)\cos nx}{n} + \frac{2}{n^2}\sin nx\right)\Big|_{-\pi}^{0} = \left(-\frac{\pi}{n}\right) - \left(\frac{(-1)^n(-\pi)}{n}+0\right) =$$

$$= -\frac{\pi}{n} + \frac{\pi(-1)^n}{n} = \frac{\pi}{n}\left(-1+(-1)^n\right)$$

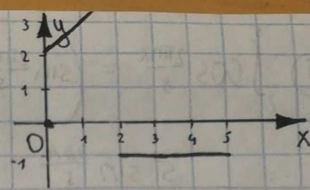
$$② \int_0^{\pi}(-\pi)\sin nx\,dx = \frac{(-\pi)\cdot(-\cos nx)}{n}\Big|_0^{\pi} = \left(\frac{\pi\cdot\cos nx}{n}\right)\Big|_0^{\pi} =$$

$$= \frac{\pi\cdot(-1)^n}{n} - \frac{\pi}{n} = \frac{\pi}{n}\left((-1)^n-1\right)$$

Итого $b_n = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{n}\left(-1+(-1)^n+(-1)^n-1\right)\right) = \frac{2(-1)^n}{n}$

Итого: $f(x) \sim -\frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{\pi n^2}\left(1-(-1)^n\right)\cos nx + \frac{2(-1)^n}{n}\sin nx\right)$

Задание 2 $f(x)=\begin{cases} x+2, & 0<x<2 \\ -1, & 2\le x\le 5\end{cases}$



① Период $T = 5-0 = 5.$

Полупериод $l = T/2 = 2.5 = 5/2.$

② $$a_0 = \frac{1}{l}\int_a^b f(x)dx = \left(\frac{2}{5}\int_0^5 f(x)dx\right) = \frac{2}{5}\left(\int_0^2 (x+2)dx + \int_2^5 (-1)dx\right) = \frac{2}{5}\left(\left(\frac{x^2}{2}+2x\right)\Big|_0^2 + (-x)\Big|_2^5\right) =$$

$$= \frac{2}{5}\left(2+4-5+2\right) = \frac{6}{5} = 1.2.$$

by Maple

$$n\omega x = n\cdot\frac{2\pi}{T}x = \frac{n\pi x}{l}$$

③ $$a_n = \frac{1}{l}\int_a^b f(x)\cos n\omega x\,dx = \frac{1}{l}\int_a^b f(x)\cos\frac{2n\pi x}{5}dx \cdot$$

$$= \frac{2}{5}\left(\int_0^2 (x+2)\cos\frac{2n\pi x}{5}dx + \int_2^5 (-1)\cos\frac{2n\pi x}{5}dx\right) = \frac{2}{5}\left(\overset{\mathrm{I}}{\int_0^2 (x+2)\cos\frac{2n\pi x}{5}dx} - \overset{\mathrm{II}}{\int_2^5 \cos\frac{2n\pi x}{5}dx}\right)$$

Ⅰ $$\int (x+2)\cos\frac{2n\pi x}{5}dx = \left|\begin{matrix} x+2=u & du=dx \\ v=\frac{5\sin\frac{2n\pi x}{5}}{2n\pi} & dv=\cos\frac{2n\pi x}{5}dx\end{matrix}\right| = \frac{(x+2)\cdot 5\sin\frac{2n\pi x}{5}}{2n\pi} - \int\frac{5}{2n\pi}\sin\frac{2n\pi x}{5} =$$

$$= \frac{5(x+2)\sin\frac{2n\pi x}{5}}{2n\pi} + \frac{5}{2\pi n}\cdot\cos\frac{2\pi n x}{5}\cdot\frac{5}{2\pi n} = \underbrace{\frac{5(x+2)\sin\frac{2\pi n x}{5}}{2n\pi} + \frac{25}{4\pi^2 n^2}\cos\frac{2n\pi x}{5} + C}_{\text{Неопределённый интеграл для } a_n \text{ 1 го интеграл}}$$

(ну и плюс на $\frac{1}{l} = \frac{2}{5}$ надо умножить)

$$\left(\left(\frac{5(x+2)\sin\frac{2\pi n x}{5}}{2\pi n}\right)\Bigg|_0^{x=2} + \left(\frac{25}{4\pi^2 n^2}\cdot\cos\frac{2n\pi x}{5}\right)\Bigg|_0^{x=2}\right) =$$

подтверждено Photomath.

$$= \frac{5}{2\pi n}\left(4\sin\frac{4\pi n}{5} - 2\cdot\overset{\sin 0}{0}\right) + \frac{25}{4\pi^2 n^2}\left(\cos\frac{4\pi n}{5} - 1\right) =$$

$$= \frac{20\sin\frac{4\pi n}{5}}{2\pi n} + \frac{25\cos\frac{4\pi n}{5}}{4\pi^2 n^2} - \frac{25}{4\pi^2 n^2}$$ ← подтверждение Photomath

$$a_n = \frac{2}{5}\left(\frac{20\sin\frac{4\pi n}{5}}{2\pi n} + \frac{25\cos\frac{4\pi n}{5}}{4\pi^2 n^2} - \frac{25}{4\pi^2 n^2}\right) = \underbrace{\frac{4\sin\frac{4\pi n}{5}}{\pi n} + \frac{5\cos\frac{4\pi n}{5}}{2\pi^2 n^2} - \frac{5}{2\pi^2 n^2}}_{\text{первая часть для } a_n.}$$

Ⅱ $\int_2^5 \cos\frac{2\pi n x}{5} = \left(\sin\frac{2\pi n x}{5}\cdot\frac{5}{2\pi n}\right)\Big|_{2}^{x=5} = \frac{5}{2\pi n}\left(\sin 2\pi n - \sin\frac{4\pi n}{5}\right) =$

$= -\frac{5\sin\frac{4\pi n}{5}}{2\pi n.} \quad \Big/\cdot\frac{2}{5} =$

$= -\frac{\sin\frac{4\pi n}{5}}{\pi n}$ ← проверено Photomath.

Итого $a_n = \frac{3\sin\frac{4\pi n}{5}}{\pi n} + \frac{5\cos\frac{4\pi n}{5}}{2\pi^2 n^2} - \frac{5}{2\pi^2 n^2}$

4) $b_n = \frac{1}{l}\int_a^b f(x)\sin\frac{\pi n x}{l}\,dx = \frac{2}{5}\left(\int_0^2 (x+2)\sin\frac{2n\pi x}{5}dx + \int_2^5 (-1)\sin\frac{2n\pi x}{5}dx\right) =$

Ⅰ $\int (x+2)\sin\frac{2n\pi x}{5}dx = \left|\begin{matrix} u = x+2 & du = dx \\ v = \frac{-5\cos\frac{2n\pi x}{5}}{2\pi n} & dv = \sin\frac{2\pi n x}{5}dx \end{matrix}\right| =$

$= \frac{-5(x+2)\cos\frac{2\pi n x}{5}}{2n\pi} + \int\frac{5\cos\frac{2n\pi x}{5}}{2\pi n}dx = -\frac{5(x+2)\cos\frac{2n\pi x}{5}}{2n\pi} + \frac{5}{2\pi n}\cdot\frac{5}{2\pi n}\sin\frac{2\pi n x}{5} =$

$= -\frac{5(x+2)\cos\frac{2n\pi x}{5}}{2n\pi} + \frac{25}{4\pi^2 n^2}\sin\frac{2n\pi x}{5} + C$ ← проверено Photomath.

$\left(-\frac{5(x+2)\cos\frac{2n\pi x}{5}}{2n\pi}\right)\Big|_0^{x=2} + \left(\frac{25}{4\pi^2 n^2}\sin\frac{2n\pi x}{5}\right)\Big|_0^{x=2} = \cancel{\left(-\frac{5\cdot 7}{2\pi n} + \frac{5\cdot 4\cdot\cos\frac{4\pi n}{5}}{2\pi n}\right)} +$

$+ \cancel{\left(\frac{25}{4\pi^2 n^2}\cdot\left(0 - \sin\frac{4\pi n}{5}\right)\right) = -\frac{35}{2\pi n} + \frac{20\cos\frac{4\pi n}{5}}{2\pi n} - \frac{25\sin\frac{4\pi n}{5}}{4\pi^2 n^2}}$

$= \left(-\frac{5\cdot 4\cdot\cos\frac{4\pi n}{5}}{2\pi n} + \frac{+5\cdot 2}{2\pi n}\right) + \left(\frac{25}{4\pi^2 n^2}\sin\frac{4\pi n}{5}\right) = -\frac{20\cos\frac{4\pi n}{5}}{2\pi n} + \frac{10}{2\pi n} + \frac{25\sin}{4\pi^2 n}$

↗ проверено в Photomath.

$$\text{II}\quad \int(-1)\sin\frac{2\pi n x}{5}\,dx = \frac{5\cos\frac{2n\pi x}{5}}{2\pi n} + C.$$

$$\left.\frac{5\cos\frac{2n\pi x}{5}}{2\pi n}\right|_2^5 = \frac{5}{2\pi n} - \frac{5\cos\frac{4\pi n}{5}}{2\pi n}$$ ← проверено в Photomath.

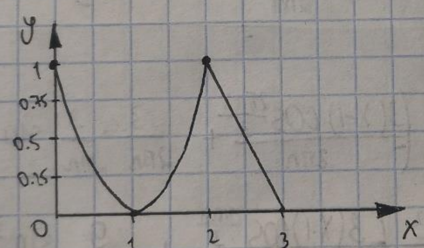
итого: $$b_n = \frac{2}{5}\left(-\frac{20\cos\frac{4\pi n}{5}}{2\pi n} + \frac{10}{2\pi n} + \frac{25\sin\frac{4\pi n}{5}}{4\pi^2 n^2} + \frac{5}{2\pi n} - \frac{5\cos\frac{4\pi n}{5}}{2\pi n}\right) =$$

$$= \frac{2}{5}\left(-\frac{25\cos\frac{4\pi n}{5}}{2\pi n} + \frac{15}{2\pi n} + \frac{25\sin\frac{4\pi n}{5}}{4\pi^2 n^2}\right) = \Leftrightarrow \cancel{b} - \frac{5\cos\frac{4\pi n}{5}}{\pi n} + \frac{3}{\pi n} + \frac{5\sin\frac{4\pi n}{5}}{2\pi^2 n^2}$$

В итоге: $$f(x) \sim \frac{1.2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3\sin\frac{4\pi n}{5}}{\pi n} + \frac{5\cos\frac{4\pi n}{5}}{2\pi^2 n^2} - \frac{5}{2\pi^2 n^2}\right)\cos\frac{2n\pi x}{5} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{5\cos\frac{4\pi n}{5}}{\pi n} + \frac{3}{\pi n} + \frac{5\sin\frac{4\pi n}{5}}{2\pi^2 n^2}\right)\sin\frac{2n\pi x}{5}$$

← ответ →

Задание 3.



$$f(x) = \begin{cases} -x+3, & 2 \le x \le 3 \\ (x-1)^2, & 0 \le x < 2. \end{cases}$$

$T_{3.1} = 3. \quad L_{3.1} = 3/2.$

Проанализирую график кусочно-заданной функции, чтобы представить её формулу.

- На участке [2...3] это: $y = -x+3$
- На участке [0...2] это:

$y = ax^2 + bx + c$

$$\begin{cases} \frac{-b}{2a} = 1 \\ c = 1 \\ 4a + 2b + 1 = 1. \end{cases} \quad \begin{cases} -b = 2a. \\ c = 1 \\ 2a + b = 0 \end{cases}$$

$a + b + 1 = 0$

$$\begin{cases} a + b = -1 \\ 2a + b = 0 \end{cases}$$

$a = 1$

$b = -2$

$$y = x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2.$$

3.1) На полном периоде.

$\frac{7}{9}$

① $a_0 = \frac{1}{l}\int_a^b f(x)dx = \frac{2}{3}\left(\int_0^2 (x^2-2x+1)dx + \int_2^3 (-x+3)dx\right) =$

$= \frac{2}{3}\left(\left(\frac{x^3}{3} - x^2 + x\right)\Big|_0^2 + \left(-\frac{x^2}{2} + 3x\right)\Big|_2^3\right) = \frac{2}{3}\left(\frac{2}{3} + \frac{1}{2}\right) = \cancel{\frac{2}{3}}\,\frac{7}{6}$

② $a_n = \frac{1}{l}\int_a^b f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx = \frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}\int_0^2 (x^2-2x+1)\cos\frac{2n\pi x}{3}dx + \frac{2}{3}\int_2^3 (-x+3)\cos\frac{2n\pi x}{3}dx\right)$
 (I) (II)

(I) $\int (x^2-2x+1)\cos\frac{2\pi n x}{3}dx = \left| \begin{matrix} u = x^2-2x+1 & du = (2x-2)dx \\ v = \frac{3}{2n\pi}\sin\frac{2n\pi x}{3} & dv = \cos\frac{2\pi n x}{3}dx \end{matrix} \right| = \circledast$

$= \frac{3(x^2-2x+1)\sin\frac{2n\pi x}{3}}{2\pi n} - \int (2x-2)\cdot\frac{3\sin\frac{2\pi n x}{3}}{2n\pi}dx = \circledast$
 (I.1)

(I.1) $\int \frac{3(2x-2)\sin\frac{2\pi n x}{3}}{2n\pi}dx = \frac{6}{2n\pi}\int (x-1)\sin\frac{2n\pi x}{3}dx = \left| \begin{matrix} u = x-1 & du = dx \\ v = -\frac{3\cos\frac{2\pi n x}{3}}{2\pi n} & dv = \sin\frac{2\pi n x}{3}dx \end{matrix} \right| =$

$= \frac{6}{2\pi n}\left(-\frac{3(x-1)\cos\frac{2\pi n x}{3}}{2\pi n} + \frac{3}{2\pi n}\cdot\frac{3}{2\pi n}\sin\frac{2\pi n x}{3}\right) =$

$= \frac{3}{\pi n}\left(-\frac{3(x-1)\cos\frac{2\pi n x}{3}}{2\pi n} + \frac{9}{4\pi^2 n^2}\sin\frac{2\pi n x}{3}\right)$

$\circledast = +\frac{3(x^2-2x+1)\sin\frac{2n\pi x}{3}}{2\pi n} + \frac{9(x-1)\cos\frac{2\pi n x}{3}}{2\pi^2 n^2} - \frac{27\sin\frac{2\pi n x}{3}}{4\pi^3 n^3}$

$\frac{2}{3}\cdot\circledast = \frac{(x^2-2x+1)\cdot\sin\frac{2n\pi x}{3}}{\pi n} + \frac{3(x-1)\cos\frac{2n\pi x}{3}}{\pi^2 n^2} - \frac{9\sin\frac{2\pi n x}{3}}{2\pi^3 n^3}$

(I) $\Big|_0^2 = \frac{\sin\frac{4\pi n}{3}}{\pi n} + \frac{3\cos\frac{4\pi n}{3}}{\pi^2 n^2} - \frac{9\sin\frac{4\pi n}{3}}{2\pi^3 n^3} - 0 + \frac{3}{\pi^2 n^2} - 0 =$

$= \frac{\sin\frac{4\pi n}{3}}{\pi n} + \frac{3\cos\frac{4\pi n}{3}}{\pi^2 n^2} - \frac{9\sin\frac{4\pi n}{3}}{2\pi^3 n^3} + \frac{3}{\pi^2 n^2}.$ ← проверено в Photomath

(II) $\int(-x+3)\cos\frac{2n\pi x}{3}dx = \left|\begin{matrix} u=-x+3 & du=-dx \\ v=\frac{3}{2\pi n}\sin\frac{2n\pi x}{3} & dv=\cos\frac{2n\pi x}{3}dx \end{matrix}\right| =$

$$= \frac{3(-x+3)}{2\pi n}\sin\frac{2n\pi x}{3} + \int\frac{3}{2\pi n}\sin\frac{2\pi n x}{3}dx = \frac{3(-x+3)}{2\pi n}\sin\frac{2\pi n x}{3} + \frac{3}{2\pi n}\int\sin\frac{2\pi n x}{3}dx =$$

$$= \frac{3}{2\pi n}(-x+3)\sin\frac{2\pi n x}{3} + \frac{3}{2\pi n}\cdot 3\,\frac{\left(-\cos\frac{2\pi n x}{3}\right)}{2\pi n} = \frac{3(-x+3)\sin\frac{2n\pi x}{3}}{2\pi n} + \frac{9\cos\frac{2n\pi x}{3}}{4\pi^2 n^2}.$$

$$\frac{2}{3}\cdot(\mathrm{II}) = \frac{(-x+3)\sin\frac{2n\pi x}{3}}{\pi n} - \frac{3\cos\frac{2n\pi x}{3}}{2\pi^2 n^2}.$$

$$\cancel{(\mathrm{II})\Big|_2^3 = +\frac{\sin\frac{4n\pi}{3}}{\pi n} - \frac{3\cos\frac{4n\pi}{3}}{2\pi^2 n^2} - \left(0 - \frac{3}{2\pi^2 n^2}\right) =}$$

$$\cancel{= +\frac{\sin\frac{4n\pi}{3}}{\pi n} - \frac{3\cos\frac{4n\pi}{3}}{2\pi^2 n^2} + \frac{3}{2\pi^2 n^2}.}$$

$$\cancel{\text{Итого } a_n = \frac{\sin\frac{4\pi n}{3}}{\pi n} + \frac{3\cos\frac{4\pi n}{3}}{\pi^2 n^2} - \frac{9\sin\frac{4\pi n}{3}}{2\pi^3 n^3} + \frac{3}{\pi^2 n^2} + \frac{\sin\frac{4\pi n}{3}}{\pi n} - \frac{3\cos\frac{4\pi n}{3}}{2\pi^2 n^2} + \frac{3}{2\pi^2 n^2} =}$$

$$\cancel{= \frac{2\sin\frac{4\pi n}{3}}{\pi n} + \frac{3\cos\frac{4\pi n}{3}}{2\pi^2 n^2} + \frac{9}{2\pi^2 n^2} - \frac{9\sin\frac{4\pi n}{3}}{2\pi^3 n^3}}$$

НА интервале [2...3], а не [0...2] !!!

(3) $\cancel{a_n = \frac{2}{3}}$

$$(\mathrm{II})\Big|_2^3 = \left(0 - \frac{3}{2\pi^2 n^2}\right) - \left(\frac{\sin\frac{4\pi n}{3}}{\pi n} - \frac{3\cos\frac{4\pi n}{3}}{2\pi^2 n^2}\right) = -\frac{3}{2\pi^2 n^2} - \frac{\sin\frac{4\pi n}{3}}{\pi n} + \frac{3\cos\frac{4\pi n}{3}}{2\pi^2 n^2}.$$

$$\text{Итого } a_n = \frac{\sin\frac{4\pi n}{3}}{\pi n} + \frac{3\cos\frac{4\pi n}{3}}{2\pi^2 n^2} - \frac{9\sin\frac{4\pi n}{3}}{2\pi^3 n^3} + \frac{6}{2\pi^2 n^2} - \frac{3}{2\pi^2 n^2} - \frac{\sin\frac{4\pi n}{3}}{\pi n} + \frac{3\cos\frac{4\pi n}{3}}{2\pi^2 n^2} =$$

$$= \boxed{\frac{9\cos\frac{4\pi n}{3}}{2\pi^2 n^2} + \frac{3}{2\pi^2 n^2} - \frac{9\sin\frac{4\pi n}{3}}{2\pi^3 n^3}}$$

a_n - проверено в Maple ! :)

③ b_n. В связи с трудоёмкостью вычислений коэффициент b_n посчитан при поддержке калькулятора на телефоне. (Умение считать продемонстрировано ранее)

$$b_n = \frac{2}{3}\int_0^2 (x^2+2x+1)\sin\frac{2n\pi x}{3}dx + \frac{2}{3}\int_2^3 (-x+3)\sin\frac{2n\pi x}{3}dx =$$

$$= \frac{3\sin\frac{4n\pi}{3}}{2n^2\pi^2} + \frac{9\cos\frac{4\pi n}{3}}{2n^3\pi^3} - \frac{\cos\frac{4\pi n}{3}}{n\pi} - \frac{9}{2n^3\pi^3} + \frac{21}{n\pi} +$$

$$+ \frac{\cos\frac{4n\pi}{3}}{n\pi} + \frac{3\sin\frac{4n\pi}{3}}{2n^2\pi^2} = \frac{6\sin\frac{4\pi n}{3}}{2n^2\pi^2} + \frac{9\cos\frac{4\pi n}{3}}{2n^3\pi^3} - \frac{9}{2\pi^3n^3} + \frac{1}{\pi n}.$$

Итого:

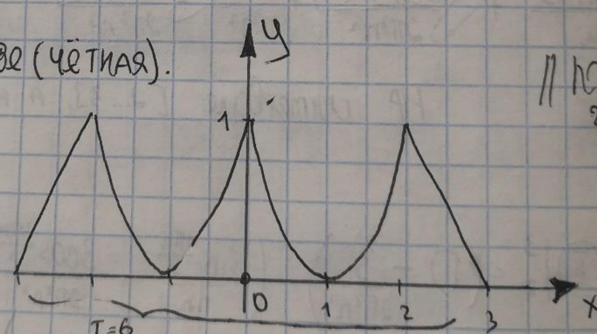
$$f(x) \sim \frac{7}{6\cdot 2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{9\cos\frac{4\pi n}{3}}{2\pi^2n^2} + \frac{3}{2\pi^2n^2} - \frac{9\sin\frac{4\pi n}{3}}{2\pi^3n^3}\right)\cos\frac{2n\pi x}{3} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{6\sin\frac{4\pi n}{3}}{2\pi^2n^2} + \frac{9(\cos\frac{4\pi n}{3}-1)}{2\pi^3n^3} + \frac{1}{\pi n}\right)\sin\frac{2\pi n x}{3}$$

ответ для полного периода.

$\frac{1}{3/2}$

(3.2) На полупериоде (чётная).

$\frac{1}{l} \xrightarrow{\cancel{1.5}} \frac{1}{2l} \Big| \cdot 2 \Rightarrow \frac{1}{l}$



// посчитал a_0 здесь и увидел, что $a_0^{new} = 1.5 a_0^{old}$.

Для чётной функции вид: $f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{l}$

$a_0 = 1.5 a_0$ из первого примера.

$a_0 = \frac{7 \cdot 1.5}{6}$ // т.к. четная

$a_n = 1.5 a_n$ из первого примера $= \frac{9\cos\frac{4\pi n}{3}}{\pi^2n^2} + \frac{3}{\pi^2n^2} - \frac{9\sin\frac{4\pi n}{3}}{\pi^3n^3}$

$f(x)\cos$ — четная!!!

Итого: $f(x) = \frac{7}{4\cdot 2} + 1.5\sum^{\infty}\left(\frac{9\cos\frac{4\pi n}{3}+3}{2\pi^2n^2} - \frac{9\sin\frac{4\pi n}{3}}{2\pi^3n^3}\right)$

$f(x)\sin$ — нечет

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_{-3}^{3} f(x)dx = \frac{1}{3}\cdot 2\int_0^3 f(x)\,dx = \frac{2}{3}\left(\int_0^2 (x^2-2x+1)dx + \int_2^3 (-x+3)\,dx\right) =$$

$$= \frac{7}{6}$$

$$a_n = \frac{1}{3}\cdot 2\cdot\int_0^3 f(x)\cos\frac{n\pi x}{3}dx =$$

// на калькуляторе

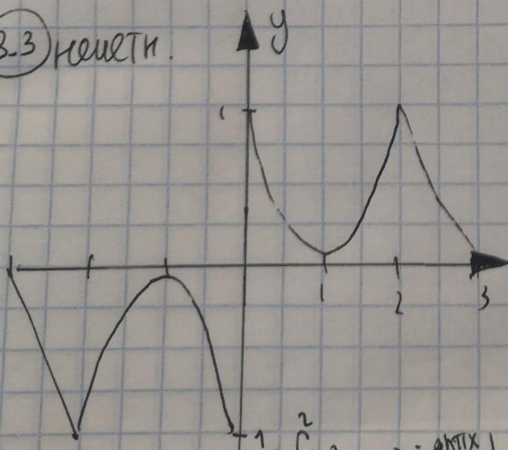
$$= \frac{2}{3}\left(\int_0^2 (x^2-2x+1)\cos\frac{n\pi x}{3}dx + \int_2^3 (-x+3)\cos\frac{n\pi x}{3}dx\right) = \frac{2\sin\frac{2n\pi}{3}}{n\pi} + \frac{12\cos\frac{2n\pi}{3}}{n^2\pi^2} - \frac{36\sin\frac{2\pi n}{3}}{n^3\pi^3} + \frac{12\pi n}{n^2\pi^2}$$

$$+ \frac{2\sin\frac{2n\pi}{3}}{n\pi} - \frac{6\cos\frac{2n\pi}{3}}{n^2\pi^2} + \frac{6}{n^2\pi^2} =$$

$$= \frac{4\sin\frac{2\pi n}{3}}{n\pi} + \frac{6\cos\frac{2\pi n}{3}}{\pi^2 n^2} + \frac{18}{n^2\pi^2} - \frac{36\sin\frac{2\pi n}{3}}{n^3\pi^3}$$

$$f(x)^{\text{чет}} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos\frac{n\pi x}{3}$$

(3.3) нечетн.



тут $f(x)^{\text{неч}} \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{l}$

почему? т.к.

$\int f\cdot\sin$ – четная

$\int f\cdot\cos$ – нечетн.

$$b_n = \frac{1}{3}\int_{-3}^{3} f(x)\sin\frac{n\pi x}{3}dx = \frac{2}{3}\int_0^3 f(x)\sin\frac{n\pi x}{3}dx =$$

$$\frac{2}{3}\int_0^2 (x^2-2x+1)\sin\frac{n\pi x}{3}dx + \int_2^3 (-x+3)\sin\frac{n\pi x}{3}dx \quad \text{четная}$$

$=$

$$= -\frac{2\cos\frac{2n\pi}{3}}{n\pi} + \frac{12\sin\left(\frac{2n\pi}{3}\right)}{n^2\pi^2} + \frac{36\cos\left(\frac{2n\pi}{3}\right)}{n^3\pi^3} - \frac{36}{n^3\pi^3} + \frac{2}{n\pi} \cdot 2$$

$$\cancel{16\sin n\pi}\ \frac{2}{n\pi}\cos\left(\frac{2n\pi}{3}\right) + \frac{6\sin\left(\frac{2n\pi}{3}\right)}{n^2\pi^2}$$

$$= \frac{4\cos\frac{2\pi n}{3}}{\pi n} + \frac{18\sin\frac{2\pi n}{3}}{\pi^2 n^2} - \frac{36}{n^3\pi^3} + \frac{2}{\pi n} + \frac{36\cos\frac{2\pi n}{3}}{n^3\pi^3}$$

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cdot \sin\frac{n\pi x}{3}$$