Лабораторная работа 8

Элементы операционного исчисления

Слуцкий Никита, гр. 053506 (ФКСиС, ИиТП)
#Вариант 1 (номер в журнале 21)

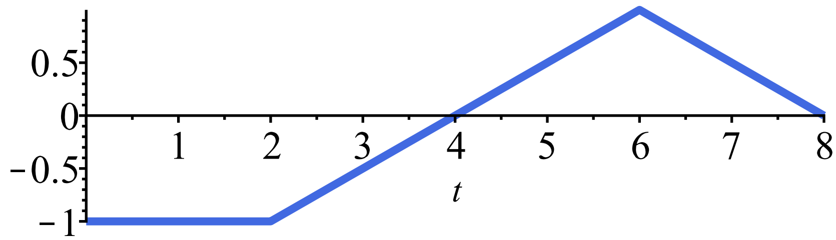
restart;

Задание 1

По данному графику функции-оригинала найти ее изображение Лапласа.
#Получить ответ в системе Maple и сравнить результаты

$$func := piecewise\left(t \geq 0 \textbf{ and } t \leq a, -1, t > a \textbf{ and } t \leq 3 \cdot a, \frac{t-2 \cdot a}{a}, t > 3 \cdot a \textbf{ and } t \leq 4 \cdot a, \frac{-t+4 \cdot a}{a}\right):$$

$chart := plot(subs(a = 2, func), t = 0 ..8, color = \text{"RoyalBlue"}, thickness = 3);$



$laplace := inttrans[laplace](subs(a = 2, func), t, p);$
функция subs делает подстановку (ниже будет активно использоваться)

$$-\frac{1}{p} + \frac{1}{2}\,\frac{-2\,e^{-6\,p} + e^{-8\,p} + e^{-2\,p}}{p^2} \tag{1}$$

restart;

Задание 2

Найти оригинал по заданному изображению

$$image := \frac{4 \cdot p + 5}{(p-2) \cdot (p^2 + 4 \cdot p + 5)}:$$

$fraction\_simple := convert(image, parfrac);$ # для того, чтобы показать, что в тетради верное разложение

$$\frac{1}{17}\,\frac{-13\,p - 10}{p^2 + 4\,p + 5} + \frac{13}{17\,(p-2)} \tag{2}$$

$original := inttrans[invlaplace](fraction\_simple, p, t);$

$$\frac{13}{17}\,e^{2\,t} + \frac{1}{17}\,(-13\cos(t) + 16\sin(t))\,e^{-2\,t} \tag{3}$$

restart;

Задание 3

Найти решение дифференциального уравнения, удовлетворяюшее условиям y(0) = 0 и y'(0) = 0

$differential\_equation := diff(y(x), x, x) - 2\cdot diff(y(x), x) + y(x) = \frac{e^x}{1+x^2}:$

$solution := dsolve(\{differential\_equation, y(0) = 0, D(y)(0) = 0\});$

$$y(x) = -\frac{1}{2} e^x \left(-2 \arctan(x)\, x + \ln(x^2+1)\right) \tag{4}$$

$restart;$

Задание 4

Операторным методом решить задачу Коши

Исходные данные в массиве [уравнение, 1—е условие, 2—е условие]. Поэтому можно менять лишь условие (элементы массива), перевыполнять строчки ниже - и будет получаться *решение*

$differential\_equation := [diff(y(t), t, t) + y(t) = 6\cdot e^{-t}, y(0) = 3, D(y)(0) = 1]:$

Получу разложение в виде переменных, а в следующей строчке подставлю, куда нужно, значения для задачи Коши

$laplace\_base := inttrans[laplace](differential\_equation[1], t, p);$

$$p^2\, laplace(y(t), t, p) - D(y)(0) - p\, y(0) + laplace(y(t), t, p) = \frac{6}{p+1} \tag{5}$$

Подставляю начальные условия, чтобы получить изображение в конечном виде

$laplace\_result := subs(differential\_equation[3], subs(differential\_equation[2], subs(y(0) = 3, laplace\_base)));$

$$p^2\, laplace(y(t), t, p) - 1 - 3p + laplace(y(t), t, p) = \frac{6}{p+1} \tag{6}$$

На данном этапе получил полностью преобразованное уравнение уже в виде изображения (воздействовав преобразованием Лапласа и подставив начальные условия)

Теперь "избавлюсь" от строчки laplace(..), которую в тетради обычно обозначаем Y(p), например, или просто Y. Обозначу здесь, как у себя в тетради, Y.

$laplace\_equation := subs(laplace(y(t), t, p) = Y, laplace\_result);$

$$Y p^2 + Y - 3p - 1 = \frac{6}{p+1} \tag{7}$$

Выражаю Y и сразу же раскладываю на простейшие дроби для последуюшего воздействия обратным преобразованием:

$fraction\_simple := convert(solve(laplace\_equation, Y), parfrac);$

$$\frac{3}{p+1} + \frac{4}{p^2+1} \tag{8}$$

$solution := inttrans[invlaplace](fraction\_simple, p, t);$

$$3\, e^{-t} + 4 \sin(t) \tag{9}$$

$restart;$

Задание 5

Решить систему дифференциальных уравнений операторным методом

Входные данные опять в виде массива. Два уравнения системы + начальные условия

$differential\_equation := [diff(x(t), t) = x(t) + 3\cdot y(t) + 2, diff(y(t), t) = x(t) - y(t) + 1, x(0) = -1, y(0) = 2]:$

Преобразую (преобразованием Лапласа) в общий вид, а потом сразу же уже в вид с нужными значениями (в ту же переменную)

.И так для двух уравнений системы

$laplace1 := inttrans[laplace](differential\_equation[1], t, p);$

$$p\, laplace(x(t), t, p) - x(0) = laplace(x(t), t, p) + 3\, laplace(y(t), t, p) + \frac{2}{p} \tag{10}$$

$laplace1 := subs(laplace(y(t), t, p) = Y, subs(laplace(x(t), t, p) = X, subs(differential\_equation[3], laplace1)));$

$$Xp + 1 = X + 3\,Y + \frac{2}{p} \tag{11}$$

$laplace2 := inttrans[laplace](differential\_equation[2], t, p);$

$$p\, laplace(y(t), t, p) - y(0) = laplace(x(t), t, p) - laplace(y(t), t, p) + \frac{1}{p} \tag{12}$$

$laplace2 := subs(laplace(y(t), t, p) = Y, subs(laplace(x(t), t, p) = X, subs(differential\_equation[4], laplace2)))$

$$Y p - 2 = X - Y + \frac{1}{p} \tag{13}$$

$solution\_laplace := solve(\{laplace1, laplace2\}, \{X, Y\}) :$
$laplace\_X := convert(solution\_laplace[1], parfrac);$
$laplace\_Y := convert(solution\_laplace[2], parfrac);$

$$X = \frac{15}{8\,(p-2)} - \frac{5}{4\,p} - \frac{13}{8\,(p+2)}$$
$$Y = \frac{5}{8\,(p-2)} - \frac{1}{4\,p} + \frac{13}{8\,(p+2)} \tag{14}$$

$solution\_x := inttrans[invlaplace]\left(-\frac{5}{4\,p}, p, t\right) + inttrans[invlaplace]\left(-\frac{13}{8\,(p+2)}, p, t\right) + inttrans[invlaplace]\left(\frac{15}{8\,(p-2)}, p, t\right);$

$$-\frac{5}{4} - \frac{13}{8}\,e^{-2\,t} + \frac{15}{8}\,e^{2\,t} \tag{15}$$

$solution\_y := inttrans[invlaplace]\left(\frac{5}{8\,(p-2)}, p, t\right) - inttrans[invlaplace]\left(\frac{1}{4\,p}, p, t\right) + inttrans[invlaplace]\left(\frac{13}{8\,(p+2)}, p, t\right);$

$$\frac{5}{8}\,e^{2\,t} - \frac{1}{4} + \frac{13}{8}\,e^{-2\,t} \tag{16}$$

$restart;$

Слуцкий Никита | гр. 053506

27.12.2021

Лабораторная работа № 8

„ Элементы операционного исчисления"

Вариант 1. / номер в журнале 21.

Начну с задания 2.

Задание 2 $\frac{4p+5}{(p-2)(p^2+4p+5)}$

Разложу на простые дроби:

$$\frac{A}{p-2}+\frac{B}{p^2+4p+5}=\frac{Ap^2+4Ap+5A+Bp-2B}{(p-2)(p^2+4p+5)}=$$

$$= Ap^2+(4A+B)p+5A-2B$$

Ой, виноват, с видом дроби здесь коэффициент B
↓
Cx + D.

Переделываю:

$$\frac{A}{p-2}+\frac{Cx+D}{p^2+4p+5}=\frac{Ap^2+4Ap+5A+Cp^2+Dp-2Cp-2D}{(p^2+4p+5)(p-2)}$$

$$=\frac{(A+C)p^2+(4A+D-2C)+(5A-2D)}{(p^2+4p+5)(p-2)}$$

$$\begin{cases} A+C=0 \\ 4A+D-2C=4 \\ 5A-2D=5 \end{cases} \quad \left\{ A=\frac{13}{17} \quad C=-\frac{13}{17} \quad D=-\frac{10}{17} \right\}.$$

$$\frac{13}{17}\frac{1}{p-2}+\frac{1}{17}\left(\frac{-13p-10}{p^2+4p+5}\right)=$$

$$=\frac{13}{17}\frac{1}{p-2}-\frac{13}{17}\left(\frac{p+\frac{10}{13}}{p^2+4p+5}\right)=$$

$$=\frac{13}{17}\frac{1}{p-2}-\frac{13}{17}\frac{p}{p^2+4p+5}-\frac{13}{17}\cdot\frac{10}{13}\frac{1}{p^2+4p+5}=$$

$$=\frac{13}{17}\frac{1}{p-2}-\frac{13}{17}\left(\frac{p-1+1}{p^2+4p+5}\right)-\frac{10}{17}\frac{1}{p^2+4p+5}=$$

$$\underbrace{=\frac{13}{17}\frac{1}{p-2}-\frac{13}{17}\frac{p-1}{(p-(-2))^2+1^2}-\frac{13}{17}\frac{1}{(p-(-2))^2+1^2}-\frac{10}{17}\frac{1}{(p-(-2))^2+1^2}}_{F(p)}$$

упростил до такой степени, что
можно по табличке смотреть.

$$F(p)\xrightarrow{L^{-1}}:$$

$$\frac{13}{17}e^{2t}-\frac{13}{17}e^{-2t}\cos t-\frac{13}{17}e^{-2t}\sin t-\frac{10}{17}e^{-2t}\sin t$$

ответ

Задание 3

$$y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{1+x^2}.$$

1

Лагранж.

Характеристическое уравнение:

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$$

$$(\lambda - 1)^2 = 0$$

$\lambda = 1$, кратность 2.

$$y = C_1 e^x + C_2 x e^x$$

В соответствии с методом Лагранжа ищу решение в виде:

$$y = C_1(x) e^x + C_2(x) x e^x$$

Дифференцирую:

$$y' = \underline{C_1'(x) e^x} + C_1(x) e^x + \underline{C_2'(x) x e^x} + C_2(x) e^x + C_2(x) x e^x$$

Дифференцирую второй раз:

$$y'' = C_1''(x) e^x + 2C_1(x) e^x + C_1(x) e^x + C_2''(x) x e^x + 2C_2'(x) e^x + $$
$$+ 2C_2'(x) x e^x + 2C_2(x) e^x + C_2(x) x e^x$$

$$C_2''(x) \cdot x \cdot e^x + C_1''(x) + 2C_2(x) = \frac{e^x}{1+x^2}$$

Фундаментальная система решений уравнения имеет вид:

$y_1(x) = e^x$, $y_2 = xe^x$

Общее решение: $y = C_1 y_1(x) \quad C_2(y_2(x))$.

Свяжу $C_1(x)$ и $C_2(x)$ уравнением:

- $C_1'(x)\,y_1(x) + C_2'(x)\,y_2(x) = 0$.

Тогда $y' = C_1(x)\,y_1'(x) + C_2(x)\,y_2'(x) =$

$= C_1(x)e^x + C_2(x)e^x + C_2(x)\,xe^x$

Найду вторую производную:

$y'' = C_1'(x)\,y_1'(x)$ .... короче, сразу посчитаю:

$C_1'(x)e^x + C_1(x)e^x + C_2(x)e^x + C_2'(x)e^x +$

$+ C_2'(x)e^x x + C_2(x)e^x x + C_2(x)e^x$

подставляю в исходное уравнение.

$$\begin{cases} C_2'(x)e^x x + C_1'(x)e^x + C_2(x)e^x = \dfrac{e^x}{1+x^2} \\ C_1'(x)e^x + C_2'(x)e^x x = 0 \end{cases} \quad \Big/ : e^x$$

$$C_2(x) = \frac{1}{1+x^2} + \tilde{C}_2$$

$$\begin{cases} C_2'(x)\,x + C_1'(x) + C_2(x) = \dfrac{1}{1+x^2} \\ C_1'(x)e^x + C_2'(x)e^x x = 0 \;\Big/ : e^x \quad C_1'(x) + C_2'(x)\,x = 0 \end{cases}$$

Задание 4

$$\begin{cases} y'' + y = 6e^{-t} \\ y(0) = 3,\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

$y \xrightarrow{L} Y$ $\qquad$ $Y(p)$

$y' \xrightarrow{L} pY - y(0) = pY - 3$ $\qquad$ // $pY - y(+0)$

$y'' \to p(pY - 3) - 1$ $\qquad$ // $p(pY - y(+0)) - y'(+0)$

$y'' \to p^2Y - 3p - 1.$

$$p^2Y - 3p - 1 + Y = 6\frac{1}{p+1}.$$

$$Y(p^2+1) - 3p - 1 = \frac{6}{p+1}$$

$$Y = \frac{\frac{6}{p+1} + (3p+1)^{\backslash p+1}}{p^2+1}. \qquad \begin{matrix} 3p^2 + 3p + p + 1 \\ 3p^2 + 4p + 1 + 6 \end{matrix}$$

$$Y = \frac{3p^2 + 4p + 7}{(p^2+1)(p+1)}$$ это не простейшая дробь.

$$\frac{3p^2+4p+7}{(p^2+1)(p+1)} = \frac{Ax + B}{p^2+1} + \frac{C}{p+1} =$$

$$= \frac{(A+C)p^2 + (A+B)p + (B+C)}{(p^2+1)(p+1)}$$

$$\begin{cases} A + C = 3 \\ A + B = 4 \\ B + C = 7 \end{cases} \iff \begin{cases} A = 0 \\ B = 4 \\ C = 3 \end{cases}$$

$$\frac{4}{p^2+1^2} + \frac{3}{p+1} \xrightarrow{L^{-1}} 4\sin t + 3e^{-t}$$

ответ

$$\Downarrow$$

$$4\frac{1}{(p-0)^2+1^2} + 3\frac{1}{\underset{p-(-1)}{p+1}}$$

$$\boxed{\text{Задание 5}} \quad \begin{cases} \dot{x} = x + 3y + 2 \\ \dot{y} = x - y + 1 \end{cases} \quad \{x(0) = -1 \quad y(0) = 2.\}.$$

$$\begin{cases} x \xrightarrow{L} X \\ x' \xrightarrow{L} pX - x(0) = pX + 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y \xrightarrow{L} Y \\ y' \xrightarrow{L} pY - y(0) = pY - 2. \end{cases}$$

подставляю:

$$\begin{cases} pX + 1 = X + 3Y + \frac{2}{p} \\ pY - 2 = \cancel{p}X - Y + \frac{1}{p} \end{cases} \quad \begin{cases} (p-1)X - 3Y = \frac{2}{p} - 1. \\ -X + (p+1)Y = \frac{1}{p} + 2 \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} p-1 & -3 \\ -1 & p+1 \end{vmatrix} = p^2 - 4. \quad \Delta_X = \begin{vmatrix} \frac{2}{p}-1 & -3 \\ \frac{1}{p}+2 & p+1 \end{vmatrix} = -\frac{p^2-7p-5}{p}$$

$$\Delta_Y = \begin{vmatrix} p-1 & \frac{2}{p}-1 \\ -1 & \frac{1}{p}+2 \end{vmatrix} = \frac{2p^2-2p+1}{p}$$

$$X = \frac{\Delta X}{\Delta} = -\frac{p^2-7p-5}{p(p-2)(p+2)} = -\frac{13}{8(p+2)} - \frac{5}{4p} + \frac{15}{8(-2+p)}$$

$$Y = \frac{\Delta Y}{\Delta} = \frac{2p^2-2p+1}{p(p-2)(p+2)} = \frac{13}{8}\frac{1}{p+2} - \frac{1}{4}\frac{1}{p} + \frac{5}{8}\frac{1}{p-2}$$

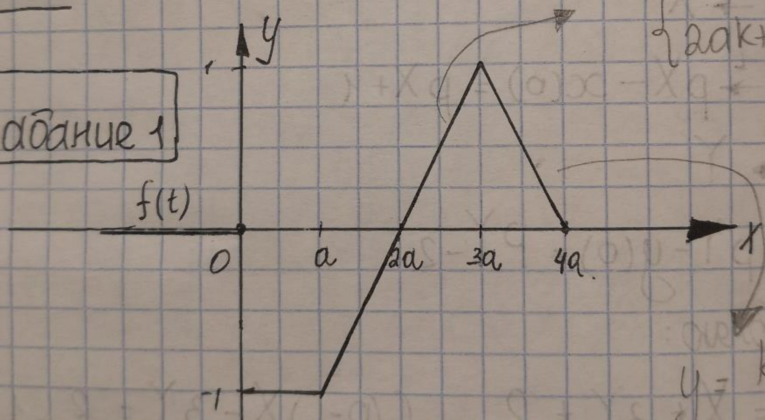
$$\cancel{X} = \begin{cases} x = -\frac{13}{8}e^{-2t} - \frac{5}{4} + \frac{15}{8}e^{2t} \\ y = \frac{13}{8}e^{-2t} - \frac{1}{4} + \frac{5}{8}e^{2t} \end{cases}$$

ответ

$y = kx + b$

$$\begin{cases} 3ak + b = 1 \\ 2ak + b = 0 \end{cases} \Rightarrow y = \frac{1}{a}x - 2$$

$\boxed{\text{Задание 1}}$



$y = kx + b$

$$\begin{cases} 3ak + b = 1 \\ 4ak + b = 0 \end{cases}$$

$y = -\frac{1}{a}x + 4$

$$f(t) = \begin{cases} -1, & 0 < t \le a \\ \frac{1}{a}\cancel{x}t - 2, & a < t \le 3a = \frac{t-2a}{a} \\ -\frac{1}{a}\cancel{x}t + 4, & 3a < t \le 4a = \frac{-t+4a}{a} \end{cases}$$

$$-1\cdot\eta(t) + \frac{t-2a}{a}\eta(t-2a) + \left(\frac{-t+4a}{a}\right)\eta(t-3a)$$

$$\underbrace{-1\cdot\eta(t) + \frac{t-2a}{a}\eta(t-2a) - \frac{t-4a}{a}\eta(t-3a).}_{\text{оригинал.}}$$

$$\frac{t-3a}{a}\eta(t-3a) - \frac{a}{a}\eta(t$$

Воздействую преобразованием ЛАПЛАСА

$$\Big\downarrow L$$

$$-\frac{1}{p} + \frac{1}{a}e^{-2ap}\frac{1}{p^2} - \frac{1}{a}e^{-3ap}\frac{1}{p^3} + \frac{e^{-3ap}}{p}$$

ответ