

# Лабораторная работа №7

22.12.2021

## Системы дифференциальных уравнений

Номер в журнале - 21

Вариант 1.

Задание

$$\begin{cases} y_1' = -2y_1 + 2y_2 \\ y_2' = 7y_1 + 3y_2 \end{cases} \quad \begin{cases} y_1'' = -2y_1' + 2y_2' \\ y_2' = 7y_1 + 3y_2 \end{cases} \quad (y_2 = \frac{y_1' + 2y_1}{2})$$

$$y_1'' = -2y_1' + 14y_1 + 6y_2$$

$$y_1'' = -2y_1' + 14y_1 + 3y_1' + 6y_1$$

$$y_1'' = 18y_1 + 3y_1'$$

$$y_1'' - 3y_1' - 18y_1 = 0.$$

$$y'' = 3y' + 18y$$

$$y_1 = y'$$

$$y_1' = y''$$

$$y_1 = y'$$

$$y_1' = 3y_1 + 18y$$

Обыкновенное дифференциальное уравнение II порядка.

Значит  $y = e^{\lambda x}$   $\lambda^2 - 3\lambda - 18 = 0.$

$$D = 9 + 72 = 81 > 0, 2 \text{ корня!}$$

$$\lambda = \frac{3 \pm 9}{2} = \{-3; 6\}.$$

Итого  $y_1 = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{6x}, C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$

$$y_2 = -\frac{3C_1 e^{-3x} + 6C_2 e^{6x} + 2C_1 e^{-3x} + 2C_2 e^{6x}}{2} =$$

$$= \frac{8C_2 e^{6x} - C_1 e^{-3x} - 4C_2 e^{6x} - 0.5C_1 e^{-3x}}{2}$$

Итого решение:  $\{C_1 e^{-3x} + C_2 e^{6x}; 2C_2 e^{6x} - 0.5C_1 e^{-3x}\}.$

$$Y' = AY$$

$$Y' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

$$Y' = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 7 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

$$\lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0$$

$$\lambda^2 - (1)\lambda + (-6 - 14) = 0$$

$$\lambda^2 + \lambda - 20 = 0$$

$$D = 121, \lambda = \frac{-1 \pm 11}{2} = \{-6, 5\}$$

следовательно, п.к.  $\lambda_1, \lambda_2$  - действительные  
числа разного знака.

точка равновесия = селло.



Задача 2

$$\begin{cases} y_1' = 5y_1 + 3y_2 \\ y_2' = 4y_1 + 9y_2 \end{cases}$$

- дифференцирую  $y_1' = 5y_1 + 3y_2$

$$y_1'' = 5y_1' + 3y_2', \text{ выражаю } y_2' = \frac{y_1'' - 5y_1'}{3}$$

- выражаю  $y_2$  из 1-го:  $y_2 = \frac{y_1' - 5y_1}{3}$

- подставляю полученные выражения в (2).

$$\frac{y_1'' - 5y_1'}{3} = 4y_1 + 3 \cdot \frac{y_1' - 5y_1}{3} \quad / \cdot 3$$

$$y_1'' - 5y_1' = 12y_1 + 3y_1' - 15y_1$$

- $y_1'' - 14y_1' + 33y_1 = 0$  // ОДУ II порядка  
 $\lambda^2 - 14\lambda + 33 = 0$

$$D = 196 - 120 - 12 = 76 - 12 = 64$$

$$\lambda = \frac{14 \pm 8}{2} = 7 \pm 4 = \{3; 11\}$$

Итого решение ОДУ для  $y_1$ :  $C_1 e^{3x} + C_2 e^{11x}$

$$y_2 = \frac{3C_1 e^{3x} + C_2 e^{11x} - 5C_1 e^{3x} - 5C_2 e^{11x}}{3}$$

$$= \frac{6C_2 e^{11x} - 2C_1 e^{3x}}{3} = 2C_2 e^{11x} - \frac{2}{3}C_1 e^{3x}$$

$$\text{Итого: } \left\{ C_1 e^{3x} + C_2 e^{11x}; 2C_2 e^{11x} - \frac{2}{3}C_1 e^{3x} \right\}$$

### Задача 3

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x} = x + 2y \\ \dot{y} = 2x + y + 1 \end{cases}$$

$$(x(0) = 0, y(0) = 5)$$

Найти решение системы ОДУ.

Матрица системы:

$$\begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{bmatrix}$$

$$\det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{bmatrix} = 0$$

$$(1-\lambda)^2 - 4 = 0$$

$$\lambda = \{-1; 3\}$$

$$\lambda_1: \begin{cases} 2\alpha + 2\beta = 0 \\ 2\alpha + 2\beta = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \alpha &= -\beta \\ (1; -1) \end{aligned}$$

$$\lambda_2: \begin{cases} -2\alpha + 2\beta = 0 \\ 2\alpha - 2\beta = 0 \end{cases}$$

$$\alpha = \beta \quad (1; 1)$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3t}$$



$$\begin{cases} x = c_1 e^{-t} + c_2 e^{3t} \\ y = -c_1 e^{-t} + c_2 e^{3t} \end{cases} \text{ общее решение} \\ \text{однородной системы.}$$

① В соответствии с методом Лагранжа ищем решение неоднородной системы в виде:

$$\begin{cases} x = c_1(t) e^{-t} + c_2(t) e^{3t} \\ y = -c_1(t) e^{-t} + c_2(t) e^{3t} \end{cases}$$

продифференцирую:

$$\begin{cases} \dot{x} = c_1'(t) e^{-t} - c_1(t) e^{-t} + c_2'(t) e^{3t} + 3c_2(t) e^{3t} \\ \dot{y} = -c_1'(t) e^{-t} + c_1(t) e^{-t} + c_2'(t) e^{3t} + 3c_2(t) e^{3t} \end{cases}$$

подставлю в исходные

$$\begin{cases} c_1' e^{-t} - c_1 e^{-t} + c_2' e^{3t} + 3c_2 e^{3t} = c_1 e^{-t} + c_2 e^{3t} - 2c_1 e^{-t} + 2c_2 e^{3t} \\ -c_1' e^{-t} + c_1 e^{-t} + c_2' e^{3t} + 3c_2 e^{3t} = 2c_1 e^{-t} + 2c_2 e^{3t} + c_1 e^{-t} + c_2 e^{3t} + 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_1' e^{-t} + c_2' e^{3t} = 0 \\ -c_1' e^{-t} + c_2' e^{3t} = 1 \end{cases} \quad c_1' e^{-t} = -\frac{1}{2} \quad c_1' = -\frac{1}{2} e^t, \quad c_1 = -\frac{1}{2} e^t + \tilde{c}_1$$

$$2c_2' e^{3t} = 1$$

$$c_2(t): c_2' = \frac{1}{2} e^{-3t}$$

$$\frac{dc_2}{dt} = \frac{1}{2} e^{-3t}$$

$$c_2 = \int \frac{1}{2} e^{-3t} dt = -\frac{1}{6} e^{-3t} + \tilde{c}_2 \rightarrow \in \mathbb{R}.$$



Умножив  $C_1(t)$  и  $C_2(t)$  на  $e^{3t}$ :

$$\begin{aligned} X &= C_1(t)e^{-t} + C_2(t)e^{3t} = \\ &= \left(-\frac{1}{2}e^t + \tilde{C}_1\right)e^{-t} + \left(-\frac{1}{6}e^{-3t} + \tilde{C}_2\right)e^{3t} = \\ &= -\frac{1}{2} + \tilde{C}_1e^{-t} - \frac{1}{6} + \tilde{C}_2e^{3t} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y &= -C_1(t)e^{-t} + C_2(t)e^{3t} = \\ &= \left(\frac{1}{2}e^t - \tilde{C}_1\right)e^{-t} + \left(-\frac{1}{6}e^{-3t} + \tilde{C}_2\right)e^{3t} = \\ &= \frac{1}{2} - \tilde{C}_1e^{-t} - \frac{1}{6} + \tilde{C}_2e^{3t} \end{aligned}$$

Общее решение

$$\begin{cases} -\frac{1}{2} + \tilde{C}_1 - \frac{1}{6} + \tilde{C}_2 = 0 \\ \frac{1}{2} - \tilde{C}_1 - \frac{1}{6} + \tilde{C}_2 = 5 \end{cases}$$

коэффициенты  $C_1 = -2$   
для задачи  $C_2 = 8/3$   
найдены

Общий вид

$$\begin{cases} X = -\frac{2}{3} + \tilde{C}_1e^{-t} + \tilde{C}_2e^{3t} \\ y = \frac{1}{3} - \tilde{C}_1e^{-t} + \tilde{C}_2e^{3t} \end{cases}$$



2  
задание

$$\begin{cases} \dot{x} = x + 2y \\ \dot{y} = 2x + y + 1 \end{cases} \cdot k.$$

// Возмужил на какое-то k.

$$\downarrow \frac{dy}{dt} \rightarrow \frac{dy}{dt} \cdot k \rightarrow \frac{d(yk)}{dt}$$

$$\begin{cases} \dot{x} = x + 2y \\ \dot{y} \cdot k = 2xk + yk + k \end{cases}$$

// сложим почленно

$$\frac{d(x+yk)}{dt} = (1+2k)x + (2+k)y + k$$

$$\frac{d(x+yk)}{dt} = (1+2k) \left( x + \frac{(2+k)}{1+2k} y \right) + k$$

выберу k так, чтобы  $\frac{2+k}{1+2k} = k$   
 $\{k = \pm 1\}$

Потому, так как такое k я найду, можно переписать в виде

$$\frac{d(x+ky)}{dt} = (1+2k)(x+ky) + k.$$

И это линейное уравнение первого порядка относительно функции  $z = x+ky$ .

$$x+ky \quad [x+ky = z].$$

$$\frac{dz}{dt} = (1+2k)z + k.$$

$$z' - (1+2k)z = k.$$

Решу методом Бернулли:  $z = u \cdot v$ .



$$u'v + uv' - (1+2k)uv = k$$

$$u'v + u(v' - (1+2k)v) = k$$

$$\frac{dv}{dt} = (1+2k)v$$

$$\frac{1}{v} dv = (1+2k) dt$$

$$\ln v = (1+2k)t + C \leftarrow \text{возьму } C=0$$

$$v = e^{(1+2k)t}$$

$$u' \cdot e^{(1+2k)t} = k$$

$$\frac{du}{dt} = k \cdot e^{-(1+2k)t}$$

$$u = -k \cdot \frac{e^{-t(1+2k)}}{1+2k} + C_1, C_1 \in \mathbb{R}$$

$$x + ky = \left( \frac{-k \cdot e^{-t(1+2k)}}{1+2k} + C_1 \right) e^{(1+2k)t} =$$

$$= -\frac{k}{1+2k} + C_1 \cdot e^{(1+2k)t}$$

Будем находить 2 значения  $k$ :  $\{1; -1\}$ .

(1)  $k_1$ :  $x + y = \left( -\frac{1}{3} + C_1 \right) e^{3t}$

$$k_1 = 1: \begin{cases} x + y = -\frac{1}{3} + C_1 e^{3t} \\ x - y = -1 + C_2 e^{-t} \end{cases}$$



Разрешая систему относительно  $\{x, y\}$   
получим общее решение этой системы ДУ

$$\begin{cases} x+y = -\frac{1}{3} + C_1 e^{3t} \\ x-y = -1 + C_2 e^{-t} \end{cases} \Rightarrow y = -\frac{1}{3} + C_1 e^{3t} - x$$

$$2x = -\frac{4}{3} + C_1 e^{3t} + C_2 e^{-t}$$

$$\begin{cases} x = -\frac{2}{3} + \frac{C_1}{2} e^{3t} + \frac{C_2}{2} e^{-t} \\ y = \frac{1}{3} + \frac{C_1}{2} e^{3t} - \frac{C_2}{2} e^{-t} \end{cases}$$

! Коэффициенты перед константами  $C_1$  и  $C_2$   
в ответах после методов  
Лагранжа и Бернулли не совпадают,  
но важно, что свободные члены  
и соотношения  $C_1$  и  $C_2$  одинаковы.  
Таким образом общие решения  
одинаковы и  $\Rightarrow$  ответ  
должен быть верен.