Лабораторная работа 9

Элементы комплексного анализа

Слуцкий Никита, 053506 (ФКСиС, ИиТП)

Вариант 1

ПРИМЕЧАНИЕ : после выполнения задач из лабораторной работы 9 в конце попрактиковано выполнение последнего 4 -го задания из лабораторной работы 4
(*которое ранее ввиду необязательности не было сделано, но сейчас было рассмотрено*)

restart;

Задание 1

Найти все значения корня
Построить точки, соответствуюшие найденным значениям, в комплексной плоскости

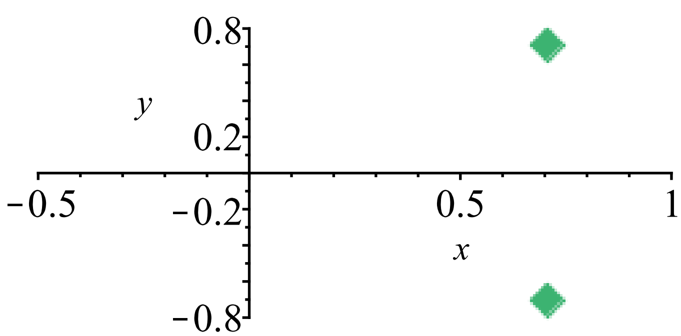
$expression1 := \sqrt[4]{-1}$:
$complex1\_1 := expand(simplify(expression1))$;

$$\frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2} \mathrm{I}\sqrt{2} \tag{1}$$

$complex1\_2 := conjugate(complex1\_1)$; # Функция позволяет получить сопряжённое комплексное число

$$\frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{1}{2} \mathrm{I}\sqrt{2} \tag{2}$$

complexplot - функция для построения точек в комплексной плоскости
plots[*complexplot*]([*complex1_1*, *complex1_2*], *x* =−0.5 ..1, *y* =−0.8 ..0.8, *style* = *point*, *symbol* = *soliddiamond*, *symbolsize* = 45, *thickness* = 5, *color* = "MediumSeaGreen");



restart;

Задание 2

Представить выражение в алгебраической форме
Изобразить точки, соответствуюшие аргументу и значению функции, в одной системе координат

$expression2 := \sin\left(\frac{\pi}{4} + 2\cdot I\right)$:
$complex2\_1 := \mathrm{Re}(expression2) + I\cdot\mathrm{Im}(expression2)$;
Re и Im - получают действительную (Real) и мнимую (Imaginary) части

$$\frac{1}{2}\sqrt{2}\cosh(2) + \frac{1}{2} \mathrm{I}\sqrt{2}\sinh(2) \tag{3}$$

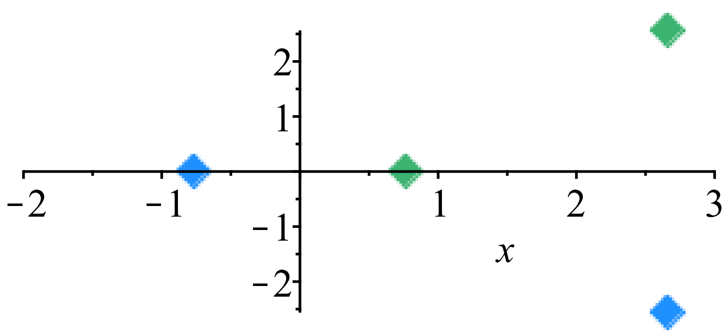
$complex2\_2 := conjugate(complex2\_1)$;

$$\frac{1}{2}\sqrt{2}\cosh(2) - \frac{1}{2}\mathrm{I}\sqrt{2}\sinh(2) \qquad (4)$$

complexPlot2_1 := *plots*[*complexplot*]([argument(*complex2_1*), *complex2_1*], *x* = −2 ..3, *style* = *point*, *symbol* = *soliddiamond*, *symbolsize* = 45, *thickness* = 5, *color* = "MediumSeaGreen") :

complexPlot2_2 := *plots*[*complexplot*]([argument(*complex2_2*), *complex2_2*], *x* = −2 ..3, *style* = *point*, *symbol* = *soliddiamond*, *symbolsize* = 45, *thickness* = 5, *color* = "DodgerBlue") :

plots[*display*]([*complexPlot2_1*, *complexPlot2_2*]);



restart;

Задание 3

\# Представить выражение в алгебраической форме
\# и получить его главное значение в системе Maple

$$expression3 := simplify\left(\arctan\left(\frac{1\text{-} I\left(\sqrt{3}-1\right)}{\sqrt{3}+1+I}\right)\right):$$

evalcedSimplifiedComplex3 := *simplify*(*evalc*(*expression3*)) :
complex3 := Re(*evalcedSimplifiedComplex3*) + *I* · (Im(*evalcedSimplifiedComplex3*));

$$\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{10+4\sqrt{3}}{16+9\sqrt{3}}\right) + \mathrm{I}\left(\frac{1}{4}\ln(3) - \frac{1}{4}\ln(73) + \frac{1}{4}\ln\left(11-4\sqrt{3}\right)\right) \qquad (5)$$

simplify(argument(*complex3*));

$$\arctan\left(\frac{1}{2}\,\frac{\ln(3)-\ln(73)+\ln\left(11-4\sqrt{3}\right)}{\arctan\left(\frac{10+4\sqrt{3}}{16+9\sqrt{3}}\right)}\right) \qquad (6)$$

restart;

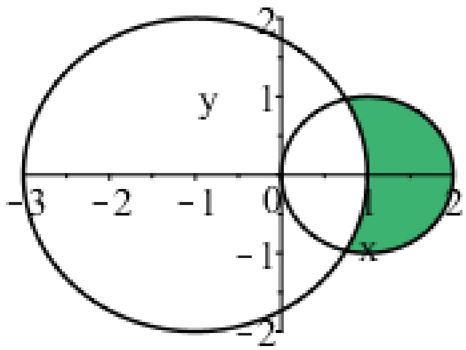
Задание 4
Изобразить области, заданные неравенствами

Рассуждения
|z - 1| <= 1
$(|(x-1)+i\cdot y| \le 1) \to \left(\sqrt{(x-1)^2+y^2} \le 1\right) \to ((x-1)^2+y^2 \le 1)$. Аналогично со вторым неравенством

$inequation4\_1 := (x-1)^2 + y^2 \le 1, (x+1)^2 + y^2 \ge 4:$

https://www.maplesoft.com/support/help/MapleSim/view.aspx?path=plots/inequal
inequal из пакета plots закрашивает области, заданные неравенствами

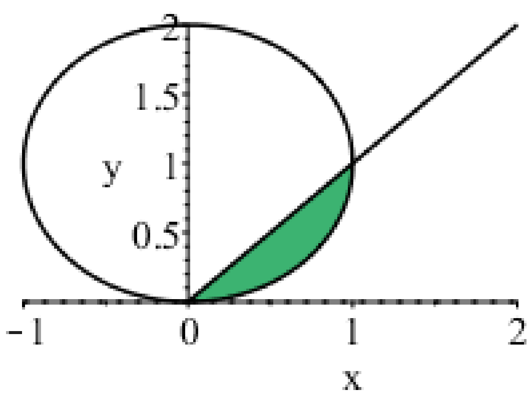
plots[inequal]([inequation4_1], x = -3 ..2, y = -2 ..2, color = "MediumSeaGreen");



#$(|z - i| \le 1) \to (|x + i(y-1)| \le 1)$

$inequation4\_2 := x^2 + (y-1)^2 \le 1, y > 0, y \le x:$

plots[inequal]([inequation4_2], x = -1 ..2, y = -0 ..2, color = "MediumSeaGreen");



restart;

Задание 6
Восстановить аналитическую в окрестности точки z_0 функцию $f(z)$ по известной действительной $u(x, y)$ или мнимой $v(x, y)$ части и значению $f(z_0)$

$expression6 := x^2 - y^2 + x:$

dUdx := diff(expression6, x); # Продифференцировал U по x

$2x + 1$ **(7)**

dUdy := diff(expression6, y); # И по y

$-2y$ **(8)**

$dVdy := dUdx;$ # По условиям Коши-Римана $\frac{dU}{dx} = \frac{dV}{dy}, \frac{dU}{dy} = -\frac{dV}{dx}$ (стр. 425)

$$2x+1 \tag{9}$$

$dVdx := -dUdy;$

$$2y \tag{10}$$

$Vxy := expand(int(dVdy, y)) + c(x);$ # Проинтегрировал $\frac{dV}{dy}$ по y

$$2yx+y+c(x) \tag{11}$$

$diff(Vxy, x);$ # а теперь продифференцировал по X. Должна получиться функция $\frac{dV}{dx} = \frac{dV}{dy}$ (которая уже есть ⇒ найду вид для c'(x))

$$2y+\frac{d}{dx}c(x) \tag{12}$$

Следовательно, c'(x) = 0. И c(x) = const = c; И функция имеет вид U(x,y) + i·V(x,y) :
f = $(x^2 - y^2 + x) + i\cdot(2xy + y + c)$
Учитывая, что f(0) = 0, то c = 0

$restart;$

Задание 7
Вычислить интеграл от функции комплексного переменного по заданному множеству L.
Сделать чертеж

Здесь в итоге L - это часть окружности с радиусом |z| = $\sqrt{2}$ (которая соответствует сектору между $\frac{3\pi}{4}$ и $\frac{5\pi}{4}$)

задам число в тригонометрической форме $\sqrt{2}\cdot(\cos(t) + i\cdot\sin(t))$ и в соответствуюшей ей *показательной* форме $\sqrt{2}\cdot e^{i\cdot t}$

$expression7 := \sqrt{2}\cdot e^{I\cdot t}:$

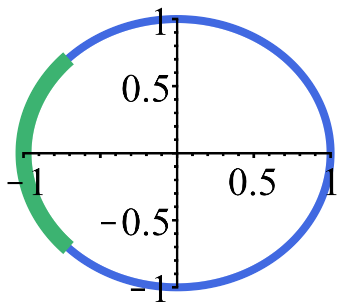
$expression7\_to\_integrate := \sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\cdot I\cdot e^{I\cdot t}:$

$solution7 := int\left(expression7\_to\_integrate, t = \frac{3\pi}{4}..\frac{5\pi}{4}\right);$

$$-2I\sqrt{2} \tag{13}$$

$plots[display]\left(plottools[arc]([0, 0], 0..2\cdot Pi, color = "RoyalBlue", thickness = 3),\right.$
$\left.plottools[rotate]\left(plottools[arc]\left([0, 0], \frac{Pi}{2}..Pi, color = "MediumSeaGreen", thickness = 6\right), \frac{Pi}{4}\right)\right);$

с помошью пакета plottools я могу отрисовывать многие виды примитивов, а также трансофрмировать их по разному. Тут приведены команды arc и rotate, чтобы отрисовать часть окружности, вдоль которой интегрирую



restart;

Задание 8
 # Найти все лорановские разложения заданной функции по степеням z

$expression8 := convert\left(\frac{z-4}{z^4+z^3-2\cdot z^2}, parfrac\right);$

$$-\frac{1}{z-1}+\frac{1}{2z}+\frac{2}{z^2}+\frac{1}{2(z+2)} \tag{14}$$

$numapprox[laurent](expression8, z, 8);$ # https://www.maplesoft.com/support/help/maple/view.aspx?path=numapprox

$$2z^{-2}+\frac{1}{2}z^{-1}+\frac{5}{4}+\frac{7}{8}z+\frac{17}{16}z^2+\frac{31}{32}z^3+\frac{65}{64}z^4+\frac{127}{128}z^5+O\left(z^6\right) \tag{15}$$

restart;

Задание 9
 # Найти все лорановские разложения заданной функции по степеням z-z0

$z09 := 1+2\cdot I:$ # центр разложения

$expression9 := convert\left(\frac{z+1}{z\cdot(z-1)}, parfrac\right);$

$$-\frac{1}{z}+\frac{2}{z-1} \tag{16}$$

$subs\left((z-1-2\cdot I)=(z-z_0), numapprox[laurent](expression9, z=z09, 4)\right);$

$$-\frac{1}{5}-\frac{3}{5}I+\left(\frac{19}{50}-\frac{4}{25}I\right)(z-z_0)+\left(\frac{11}{125}+\frac{117}{500}I\right)(z-z_0)^2+\left(-\frac{681}{5000}+\frac{24}{625}I\right)(z-z_0)^3+O\left((z-z_0)^4\right) \tag{17}$$

restart;

Далее идёт ранее не решённое задание 4 из лабораторной работы 4

Задание 4 из Лабораторной Работы 4

Разложить функцию в ряд Фурье по многочленам Лежандра и Чебышёва напромежутке [1,1]

Когда я раскладываю функцию в ряд Фурье по какой-то системе ортогональных на отрезке функций, i—ый коэффициент для такой линейной комбинации многочленов высчитывается как частное скалярного произведения функции на i-й многочлен и нормы i-го многочлена в квадрате

$GetCn := \mathbf{proc}(functionExpression, polynomExpression)$

$simplify\left(\frac{int(functionExpression \cdot polynomExpression, x = -1..1)}{int(polynomExpression \cdot polynomExpression, x = -1..1)}\right)$

end proc:

$GetLeganderN := \mathbf{proc}(n)$

$\frac{1}{n! \cdot 2^n} \cdot \frac{d^n}{dx^n}\left(\left(x^2 - 1\right)^n\right)$

end proc:

демонстрирую правильность подсчёта многочлена Лежандра для первых 4-х известных его членов

$counter := 0:$

for *counter* **from** 0 **to** 5 **do**

$print(\ GetLeganderN(counter)\ );$

end do:

1

x

$\frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}$

$x^3 + \frac{3}{2}\left(x^2 - 1\right)x$

$x^4 + 3\left(x^2 - 1\right)x^2 + \frac{3}{8}\left(x^2 - 1\right)^2$

$$x^5 + 5\left(x^2 - 1\right)x^3 + \frac{15}{8}\left(x^2 - 1\right)^2 x \tag{18}$$

$GetPartialSumByLejander := \mathbf{proc}(function, order)$

$counter2 := 0:$

$sumByLejander := 0:$

for *counter2* **from** 0 **to** *order* **do**

$sumByLejander := sumByLejander + (GetLeganderN(counter2) \cdot GetCn(function, GetLeganderN(counter2)))$

end do:

sumByLejander

end proc:

Warning, `counter2` is implicitly declared local to procedure `GetPartialSumByLejander`
Warning, `sumByLejander` is implicitly declared local to procedure `GetPartialSumByLejander`

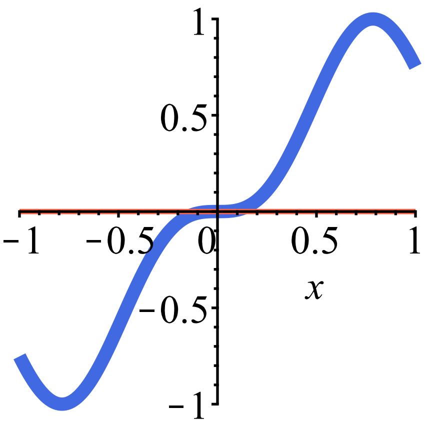
$y1 := \sin(2 \cdot x)^3:$

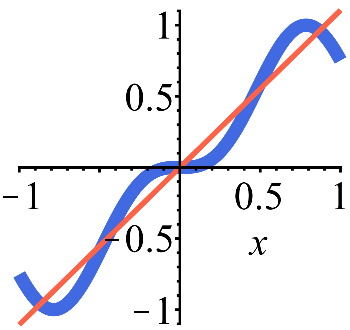
$y1\_chart := plot(y1, x = -1..1, thickness = 5, color = \text{"RoyalBlue"}):$

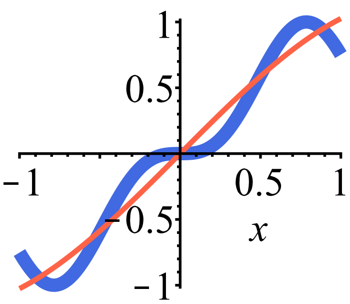
for *counter* **from** 0 **to** 8 **by** 2 **do**

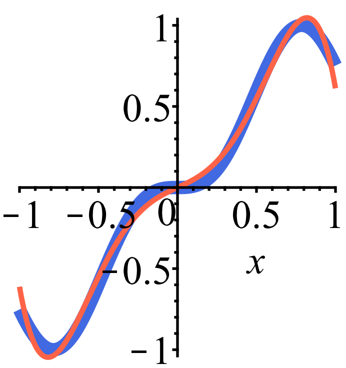
plots[*display*]$\left(y1\_chart, plot\left(GetPartialSumByLejander\left(\sin(2\cdot x)^3, counter\right), x = -1 ..1, color = \text{"Tomato"}, thickness = 2\right)\right)$;

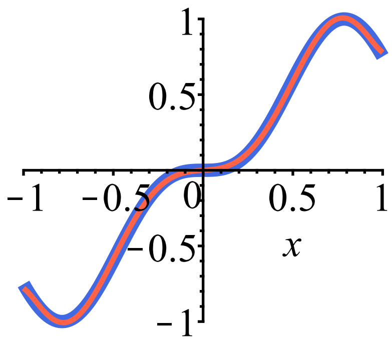
end do;





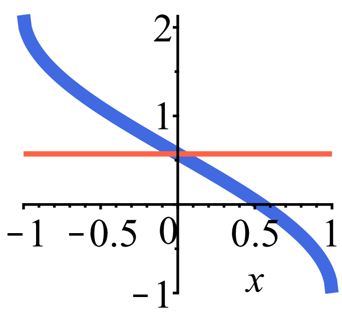


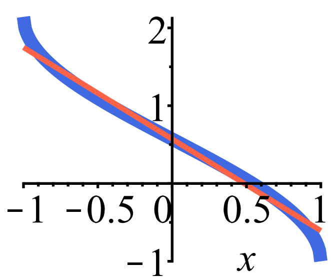


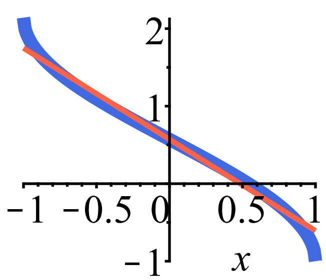


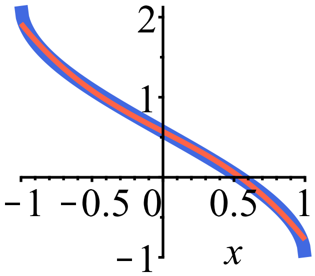
Показано, что уже при примерно порядке 8 график частичной суммы и график исходной функции "сливаются" при отрисовке
Теперь то же самое для второй функции из условия. Разложу её по системе многочленов Лежандра

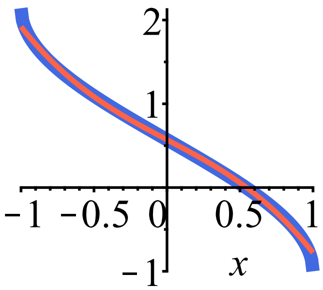
```
y2 := arccos(x) − 1:
y2_chart := plot(y2, x = −1 ..1, thickness = 5, color = "RoyalBlue") :
for counter from 0 to 5 by 1 do
 plots[display](y2_chart, plot(GetPartialSumByLejander(y2, counter), x = −1 ..1, color = "Tomato",
    thickness = 2));
 end do;
```

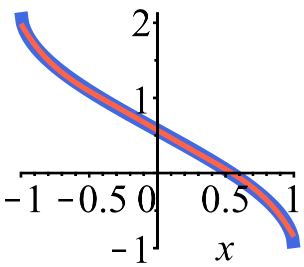












При порядке 5 также наблюдается уже достаточно близкое поведение на исследуемом интервале

Теперь то же самое проведу с помошью многочленов Чебышёва (T(n) = cos(n·arccos(x))

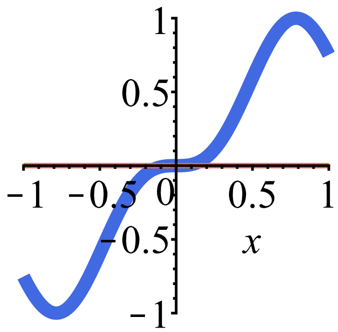
GetChebyshev := **proc**(*n*)
cos(*n*·arccos(*x*))
end proc:

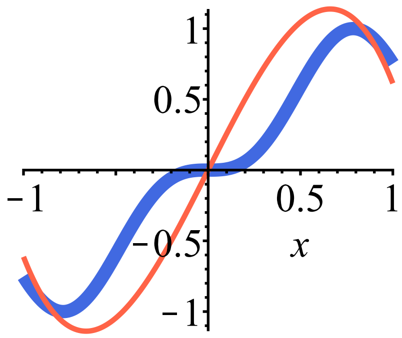
GetPartialSumByChebyshev := **proc**(*function*, *order*)
counter := 0 :
sumByChebyshev := 0 :
for *counter* **from** 0 **to** *order* **do**
sumByChebyshev := *sumByChebyshev* + (***GetChebyshev***(*counter*)·*GetCn*(*function*, ***GetChebyshev***(*counter*)))
end do:
sumByChebyshev
end proc:

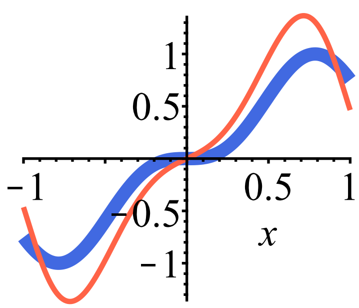
```
Warning, `counter` is implicitly declared local to procedure `GetPartialSumByChebyshev`
Warning, `sumByChebyshev` is implicitly declared local to procedure `GetPartialSumByChebyshev`
```

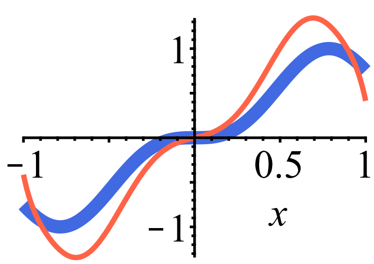
for *counter* **from** 0 **to** 30 **by** 4 **do**
plots[*display*](*y1_chart*, *plot*(*GetPartialSumByChebyshev*(*y1*, *counter*), *x* = −1 ..1, *color* = "Tomato",

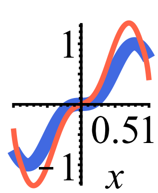
```
    thickness = 2));
end do;
```

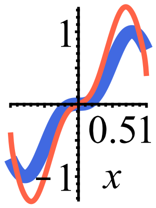


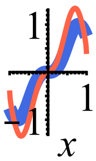


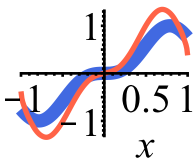












Видно, что частичные суммы приближаются, повторяя как бы очертания, но как будто бы что-то не так

!!! Многочлены Чебышёва ортогональны **при наличии весовой функции** $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. Вероятно, её нужно дописать, но трансляция занимает ∞ времени, поэтому приближение остаётся в таком виде

Слуцкий Никита | гр. 053506 | 12.01.2022