Лабораторная работа 2

Числовые ряды

> # *Слуцкий* Никита | гр. 053506 (ФКСиС, ИиТП)

> # *Вариант 1* (номер в журнале - 21)

>

> restart :

Задание 1

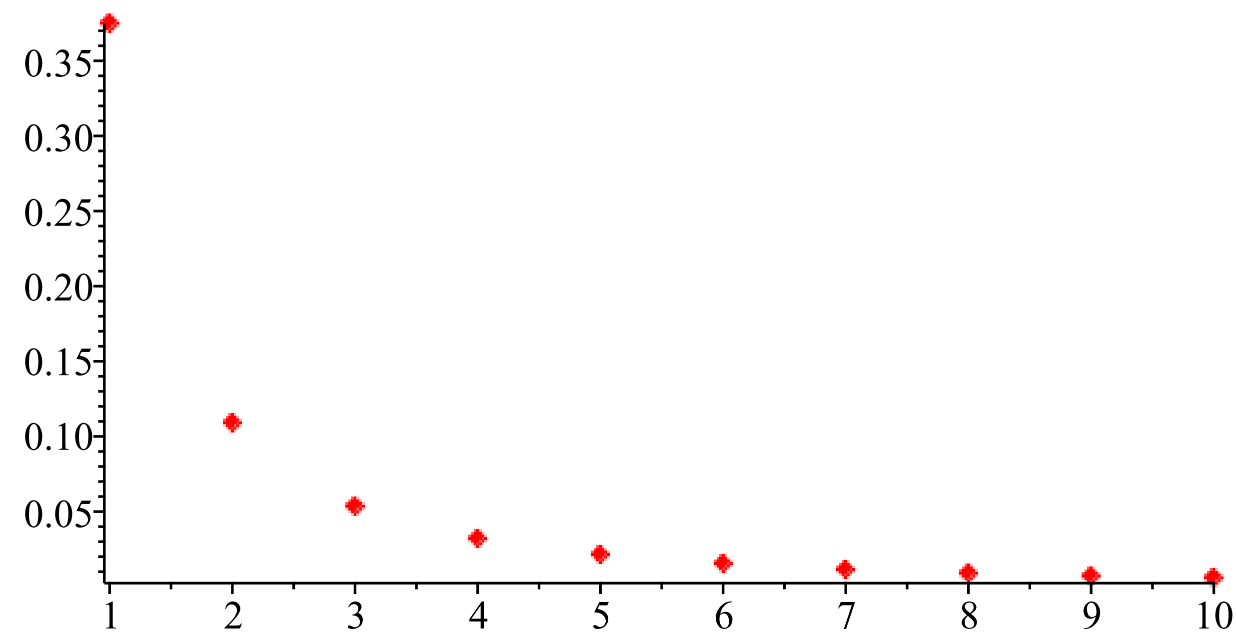
> epsilon1_1 := 0.1 :

> # Задание 1.1

> $sequence1\_1 := \dfrac{6}{9 \cdot n^2 + 12 \cdot n - 5}$:

> with(plots) :

> pointplot({seq([n, sequence1_1], n = 1 ..10)}, color = red, symbol = soliddiamond, symbolsize = 15);



> $sequence1\_1n[n] := \dfrac{6}{9 \cdot n^2 + 12 \cdot n - 5}$:

> partSum1_1[N] := sum(sequence1_1n[n], n = 1 ..N); # нашёл общий вид частичной суммы

$$partSum1\_1_N := -\frac{1}{3\left(N + \frac{2}{3}\right)} - \frac{1}{3\left(N + \frac{5}{3}\right)} + \frac{7}{10} \tag{1}$$

> sum1_1 := sum(sequence1_1, n = 1 ..infinity); # нашёл общий вид конечную сумму

$$sum1\_1 := \frac{7}{10} \tag{2}$$

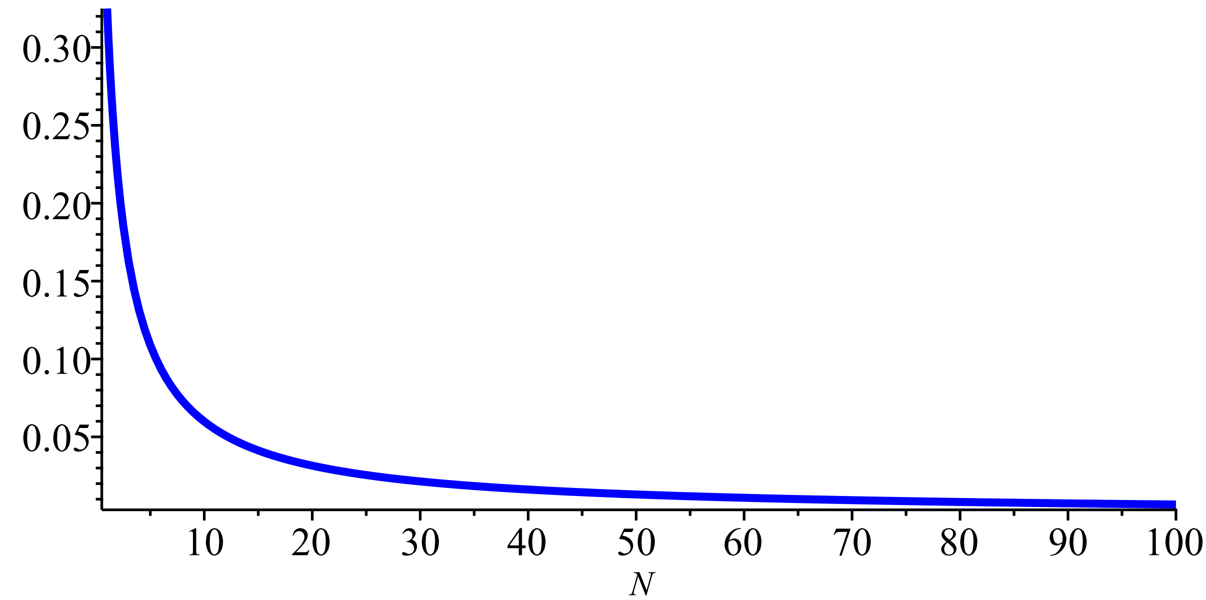
> solve(|sum1_1 - (partSum1_1[N])| < epsilon1_1);

$$RealRange(Open(-1.203958069), Open(-1.129375264)), RealRange(Open(5.537291403), \infty), RealRange(-\infty, Open(-7.870624736)) \tag{3}$$

> # Начиная с N = 6 сумма считается с не менее, чем заданной посчитается с заданной точностью

> # Покажу, что последовательность остатков стремится к нулю

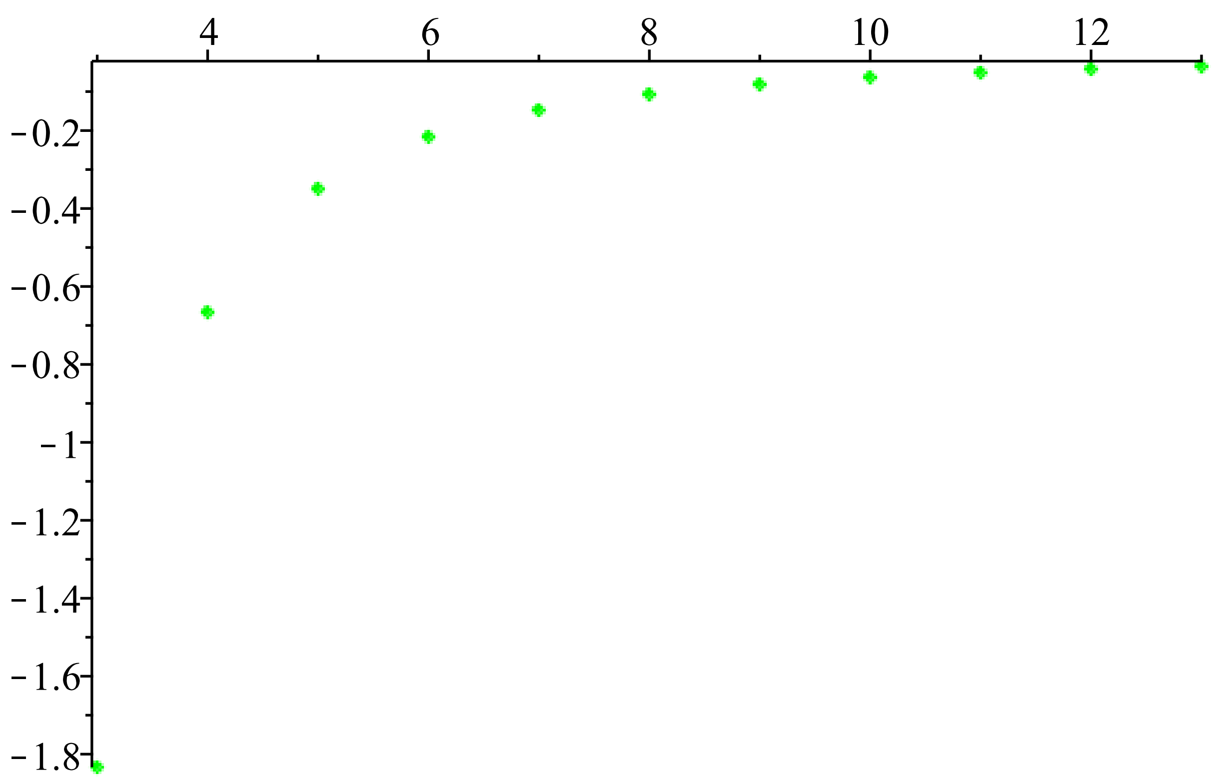
```
> plot(sum1_1 - partSum1_1[N], N = 1 ..100, thickness = 3, color = blue);
```



```
> restart;
> # Задание 1.2
> epsilon1_2 := 0.1 :
```

> $sequence1\_2 := \dfrac{4-5\,n}{(n\cdot(n-1)\cdot(n-2))}$:

```
> with(plots) :
> pointplot( {seq( [n, sequence1_2], n = 3 ..13 ) }, color = green, symbol = soliddiamond, symbolsize
    = 10);
```



> $sequence1\_2n[n] := \dfrac{4-5\,n}{(n\cdot(n-1)\cdot(n-2))}$:

> $partSum1\_2[N] := sum(sequence1\_2n[n], n = 3..N)$; # нашёл общий вид частичной суммы

$$partSum1\_2_N := \frac{3}{N-1} + \frac{2}{N} - 4 \tag{4}$$

> $sum1\_2 := sum(sequence1\_2, n = 3..\text{infinity})$; # нашёл общий вид конечную сумму

$$sum1\_2 := -4 \tag{5}$$

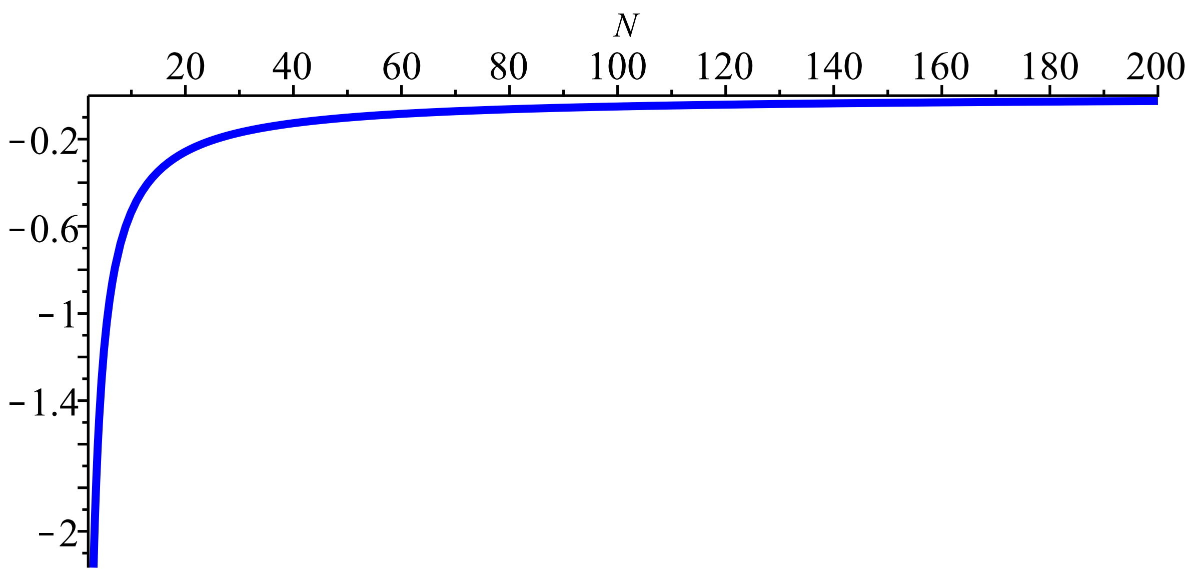
> $solve(|(sum1\_2) - (partSum1\_2[N])| < epsilon1\_2)$;

$$RealRange(-\infty, Open(-49.40481881)), RealRange(Open(0.3952195787), Open(0.4048188108)), RealRange(Open(50.60478042), \infty) \tag{6}$$

> # Начиная с N = 51 сумма считается с не менее, чем заданной посчитается с заданной точностью

> # Покажу, что последовательность остатков стремится к нулю

> $plot(sum1\_2 - partSum1\_2[N], N = 3..200, thickness = 3, color = blue)$;



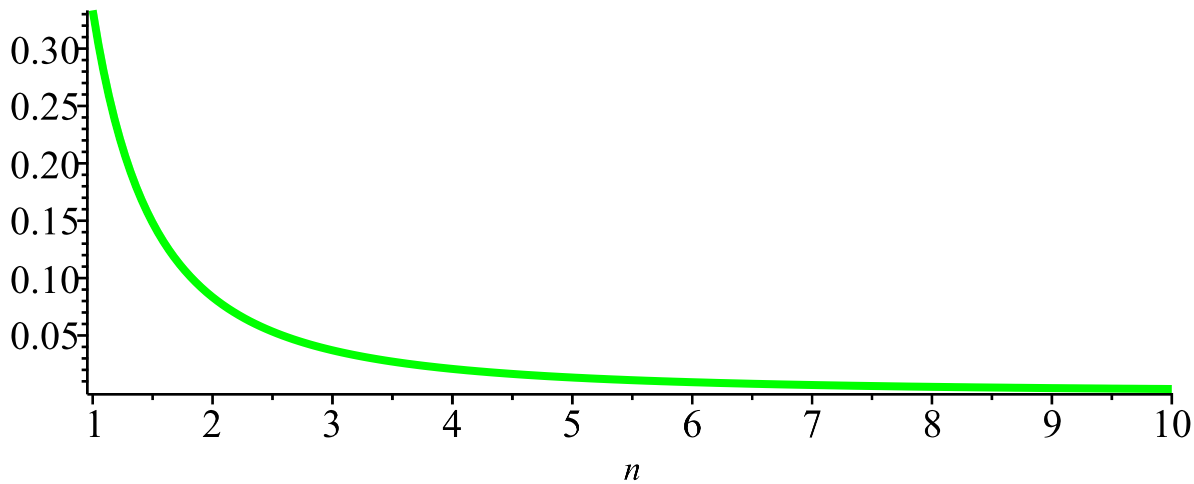
> $restart$;

> # *Задание 2*

> $sequence2 := \dfrac{(-1)^{n+1}}{3\cdot n^2}$:

> $sequence2abs := \dfrac{1}{3\cdot n^2}$:

> $plot(sequence2abs, n = 1..10, thickness = 3, color = green)$;



> $sequence2n[n] := \frac{(-1)^{n+1}}{3 \cdot n^2}$:

> $solve\left(\frac{1}{3 \cdot (n+1)^2} - \frac{1}{3 \cdot n^2} < 0\right)$;

$$RealRange\left(Open\left(-\frac{1}{2}\right), Open(0)\right), RealRange(Open(0), \infty) \quad \textbf{(7)}$$

> # Для всех N > 1 выполняется первое из двух условий для сходимости ряда знакочередующегося ряда

> $\lim_{n \to \text{infinity}} sequence2$;

$$0 \quad \textbf{(8)}$$

> # Для абсолютных величин последовательности предел равен нулю (при n -> бесконечность)

> # По признаку Лейбница ряд сходится

> $epsilon2 := 0.01$:

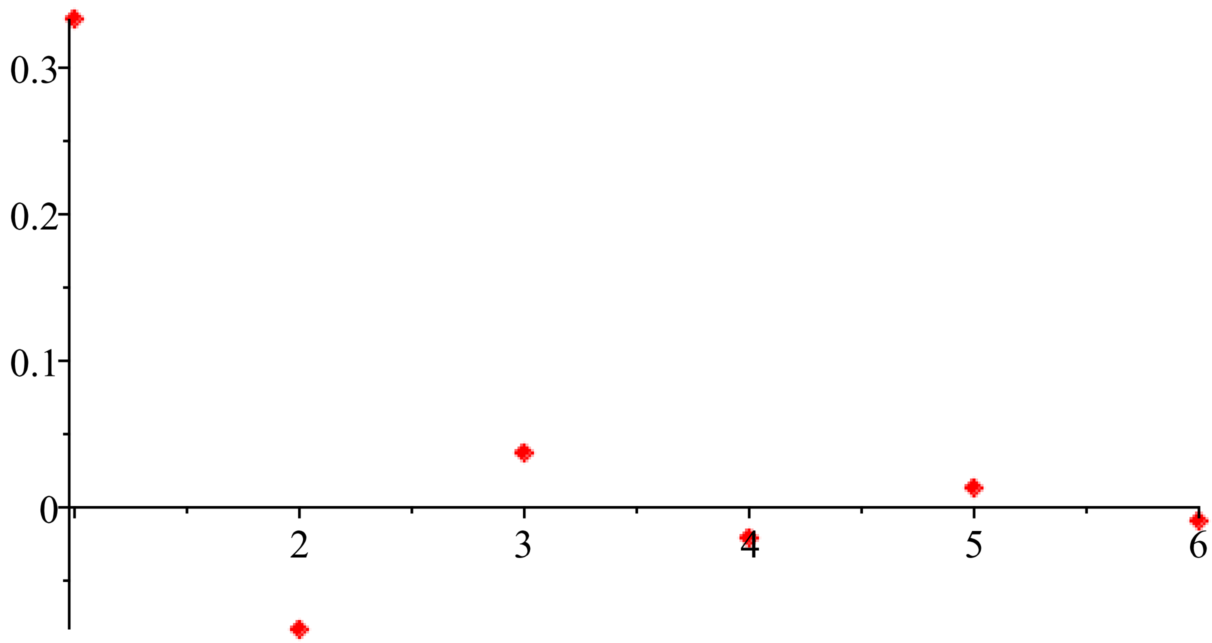
> # По признаку Лейбница также можно посчитать порядок частичной суммы, приближающий сумму с заданной точностью

> $solve\left(\frac{1}{3 \cdot (n+1)^2} < epsilon2\right)$;

$$RealRange(-\infty, Open(-6.773502692)), RealRange(Open(4.773502692), \infty) \quad \textbf{(9)}$$

> # Минимальный порядок равен N = 5. То есть сумма первых пяти элементов последовательности не отличается от конечной суммы ряда более, чем на заданную точность 0.01

> $with(plots)$:
$pointplot(\{seq([n, sequence2], n = 1 ..6)\}, color = red, symbol = soliddiamond, symbolsize = 15)$;



> $partSums2[N] := sum(sequence2n[n], n = 1 ..N);$

$$partSums2_N := \frac{1}{36}\,\frac{12\,N^2\,(-1)^N \operatorname{LerchPhi}(-1, 2, N) + \pi^2 N^2 - 12\,(-1)^N}{N^2} \qquad \textbf{(10)}$$

> $sum2 := sum(sequence2, n = 1 ..\text{infinity});$

$$sum2 := \frac{1}{36}\,\pi^2 \qquad \textbf{(11)}$$

> $sum2abs := sum(sequence2abs, n = 1 ..\text{infinity});$

$$sum2abs := \frac{1}{18}\,\pi^2 \qquad \textbf{(12)}$$

> # Ряд сходится абсолютно. $\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{n^2}$ - ряд дирихле с а $> 1 \Rightarrow$ сходится (можно доказать интегральным признаком Коши)

> $restart;$

> # Задание 3

> $sequence3 := \frac{n!}{n^n}:$

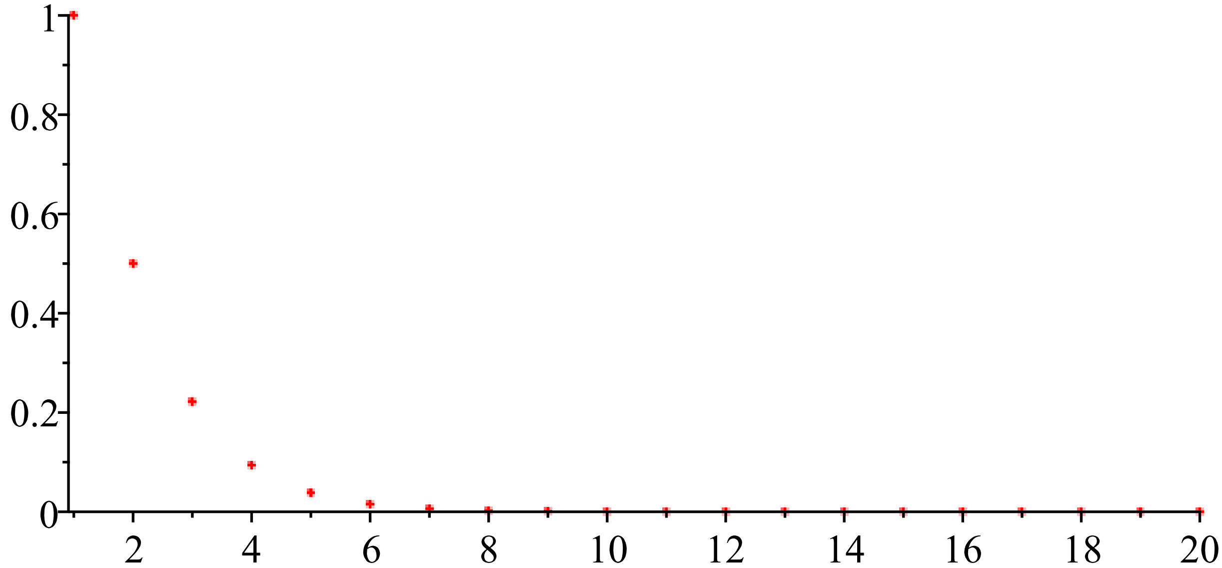
> # Если рассмотреть ряд, соответствующий этой последовательности, и доказать, что он сходится, то автоматически будет показано, что предел этой последовательности равен нулю, так как это необходимое условие сходимости. Это и сделано в тетради.

> $\lim\limits_{n \to inifinity}\left(\frac{\frac{\partial}{\partial n}\, n!}{\frac{\partial}{\partial n}\, n^n}\right);$

$$\frac{1}{inifinity^{inifinity}\,(\ln(inifinity) + 1)} \qquad \textbf{(13)}$$

> # В СКА MAPLE применив правило Лопиталя, можно показать, что этот предел равен нулю. Также проиллюстрирую для первых 20 членов тенденцию данной последовательности

> $with(plots):$
> $pointplot(\{seq([n, sequence3], n = 1 ..20)\}, color = red, symbol = soliddiamond, symbolsize = 5);$



> *restart*;

> # Слуцкий Никита, гр. 053506