> # Лабораторная работа 5

> # Обыкновенные дифференциальные уравнения

> # Слуцкий Никита | гр. 053506 (ФКСиС, ИиТП)

> # Вариант 1 (номер в журнале - 21)

>

>

> restart;

> # Задание 1

> #` `Для данного дифференциального уравнения методом изоклин построить интегральную кривую, проходящую через точку M .

>

> with(DEtools) : # пакет DEtools - для работы с дифференциальными уравнениями

> M1_x := 1 :

> M1_y := 2 :

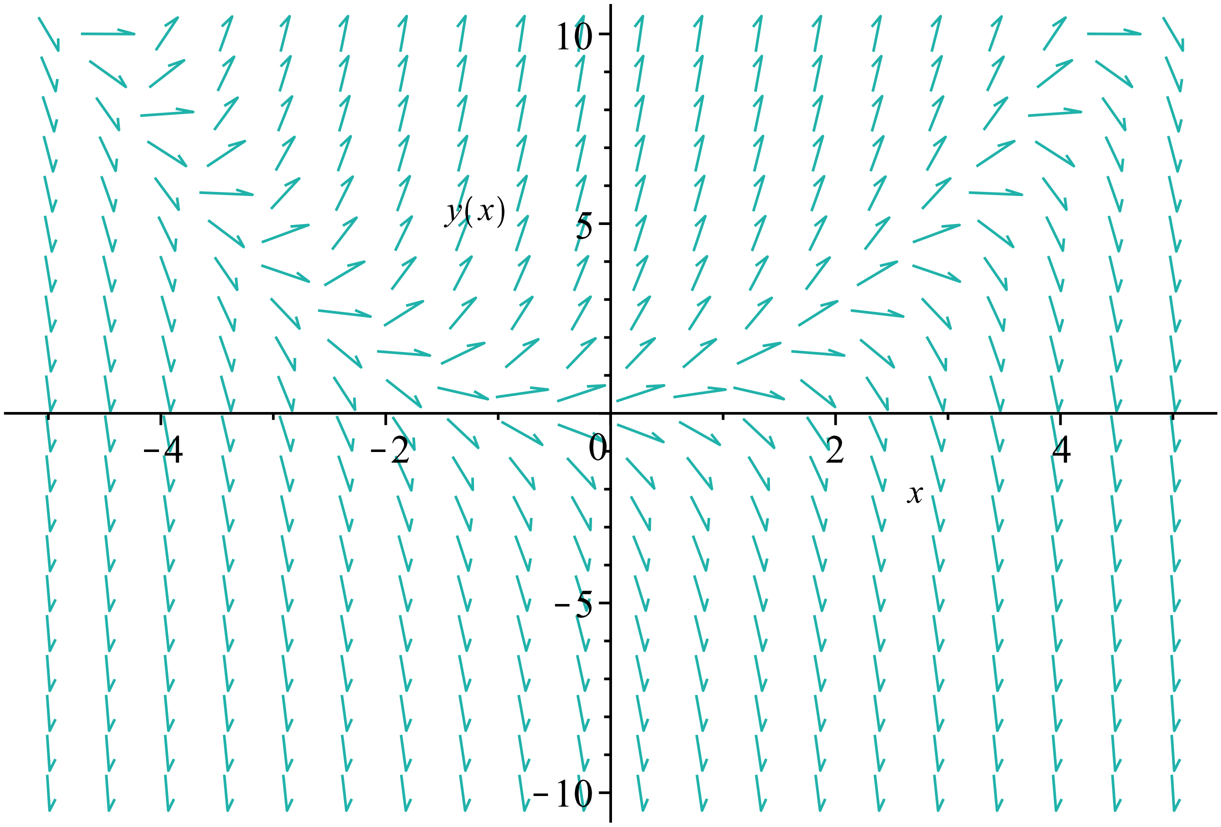
> equation1 := diff(y(x), x) = 2·y(x) − x^2;

$$equation1 := \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\, y(x) = 2\, y(x) - x^2 \tag{1}$$

> solution1 := dsolve({equation1, y(M1_x) = M1_y});
    # частное решение (решение задачи Коши с заданной точкой)

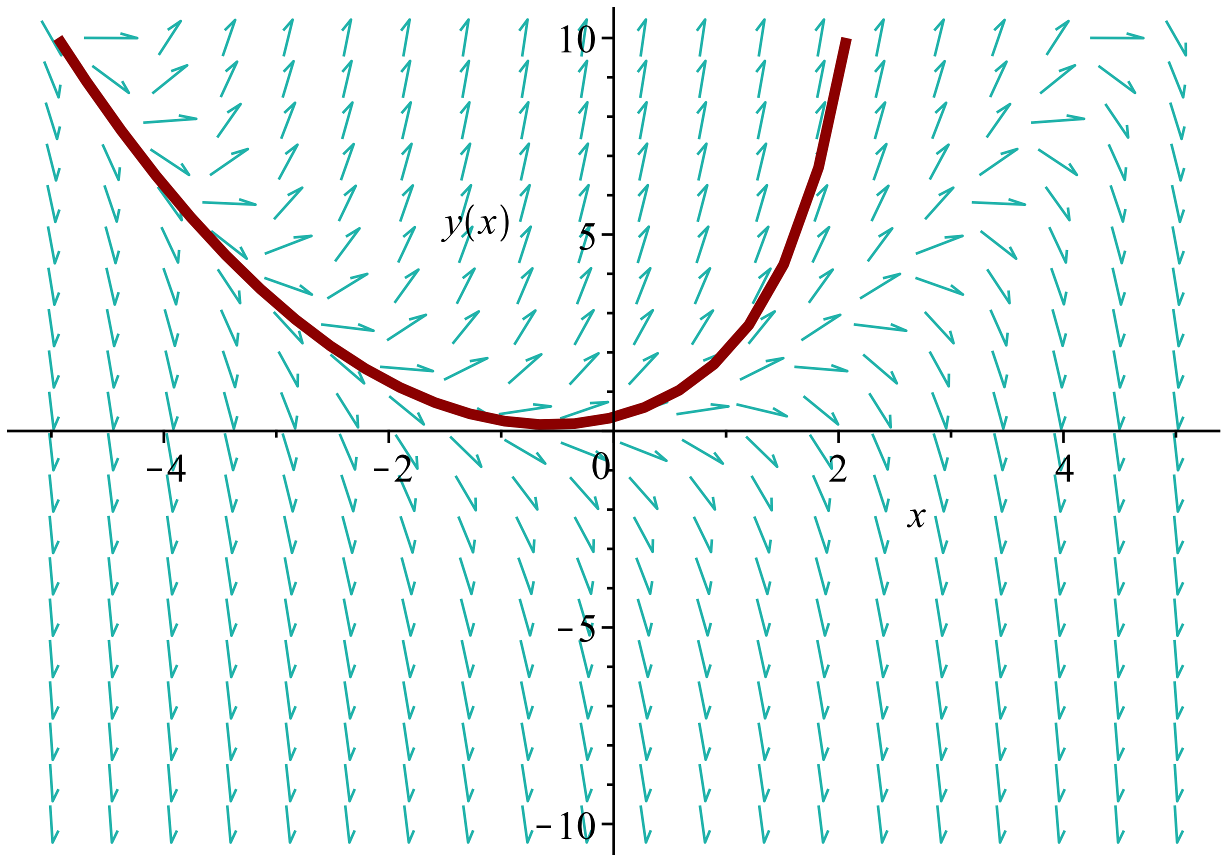
$$solution1 := y(x) = \frac{1}{2}\, x^2 + \frac{1}{2}\, x + \frac{1}{4} + \frac{3}{4}\, \frac{e^{2x}}{e^2} \tag{2}$$

> field1 := dfieldplot(equation1, y(x), x = -5 ..5, y = -10 ..10, color = "LightSeaGreen");



> *chart1* := *plots*[*implicitplot*](*solution1, x* = -5 ..5, *y* = -10 ..10, *thickness* = 4, *color* = "DarkRed") :

> *plots*[*display*](*field1*, *chart1*);



> restart;

> **# Задание 2**

> # Найти линию, проходящую через M_0 и обладающую свойством, что в любой ее точке M нормальный вектор MN с концом на Oy имеет длину a , и образует острый угол с положительным направлением Oy .

> # Сделать чертеж

> with(DEtools) :

> $a2\_1 := 25$:

> $M2\_1\_x := 15$:

> $M2\_1\_y := 1$:

> $equation2\_1 := diff(y(x), x) = \dfrac{x}{-\mathrm{sqrt}(625 - x^2)}$:

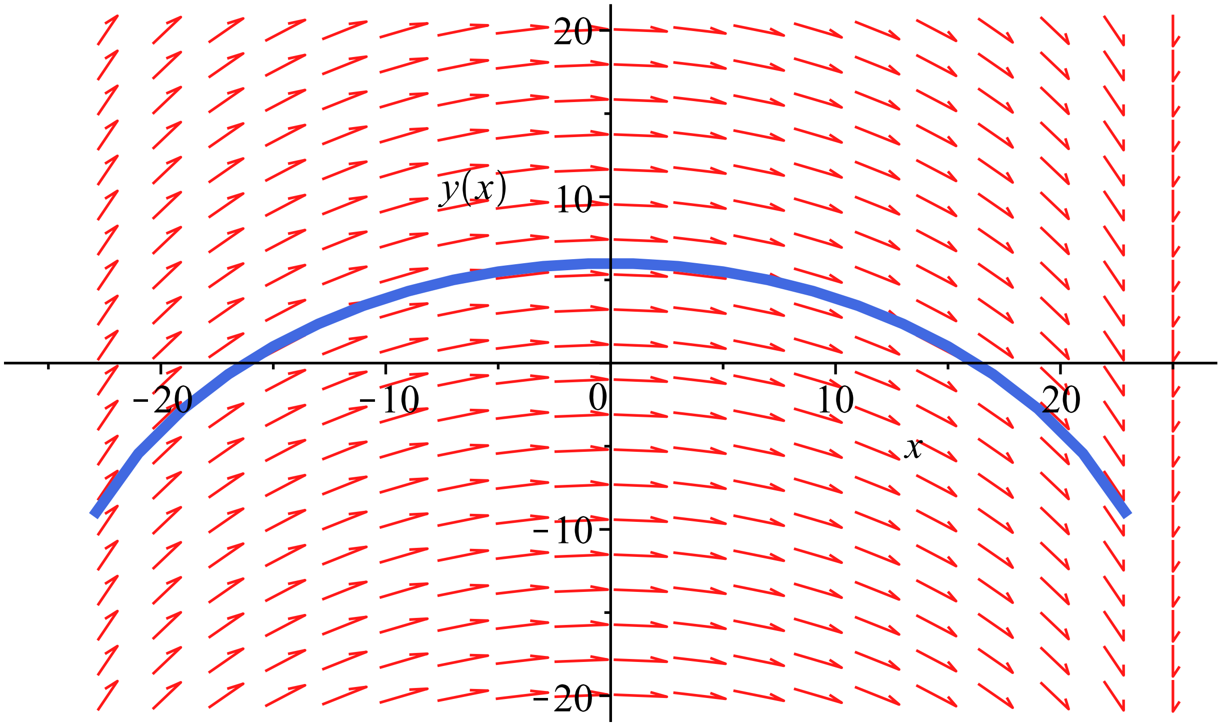
> $solution2\_1 := dsolve(\{equation2\_1, y(M2\_1\_x) = M2\_1\_y\});$

$$solution2\_1 := y(x) = -\frac{(x-25)\ (x+25)}{\sqrt{-x^2+625}} - 19 \qquad \textbf{(3)}$$

> $chart2\_1 := plots[implicitplot](solution2\_1, x = -25..25, y = -20..20, thickness = 4, color = \text{"RoyalBlue"})$:

> $field2\_1 := dfieldplot(equation2\_1, y(x), x = -25..25, y = -20..20)$:

```
> plots[display](field2_1, chart2_1);
```




```
>
>
> restart;
>
> with(DEtools) :
> M2_2_x := 1 :
> M2_2_y :=e:
```

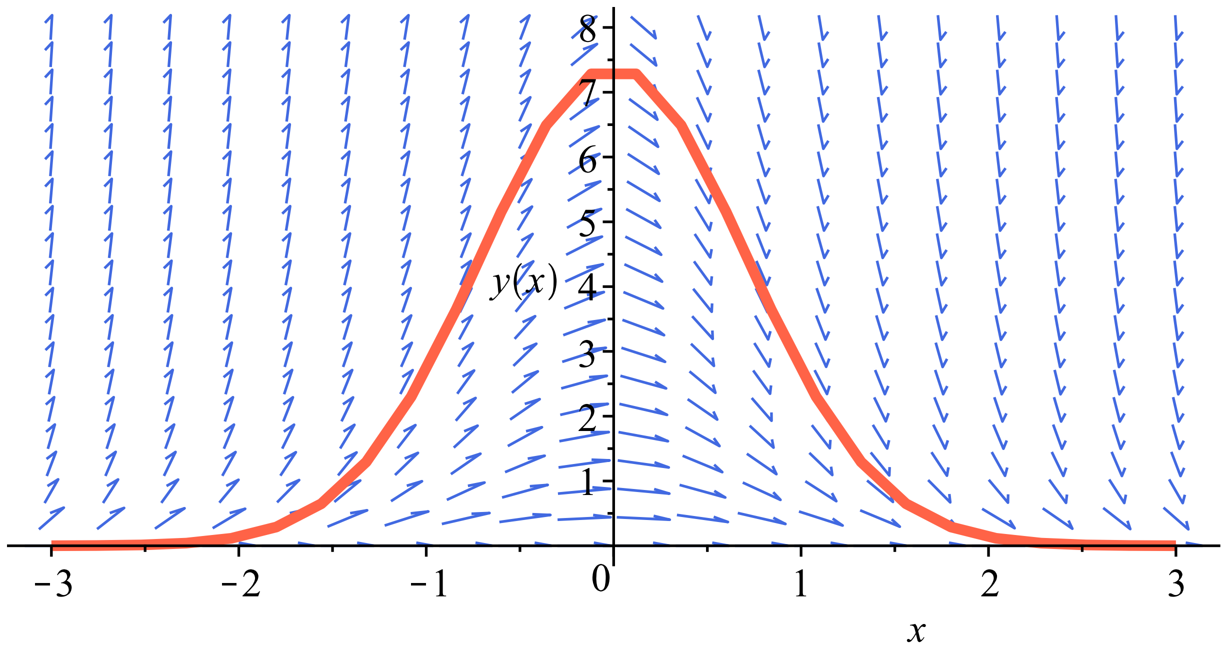
> $a2\_2 := -\frac{1}{2}$:

> $equation2\_2 := diff(y(x), x) = \frac{y(x) \cdot x}{a2\_2}$:

```
> solution2_2 := simplify(dsolve({equation2_2, y(M2_2_x) = M2_2_y}));
```

$$solution2\_2 := y(x) = e^{-x^2+2} \tag{4}$$

```
> chart2_2 := plots[implicitplot](solution2_2, x = -3 ..3, y = 0 ..8, thickness = 4, color
      = "Tomato") :
> field2_2 := dfieldplot(equation2_2, y(x), x = -3 ..3, y = 0 ..8, color = "RoyalBlue") :
> plots[display](field2_2, chart2_2);
```



\>

\>

\> *restart*;

\> **# Задание 3**

\> # Найти общий интеграл уравнения

\> # Построить на одном чертеже вблизи особой точки уравнения поле направлений и какую-либо интегральную кривую

\>

\> $with(DETools)$:

\> $equation3 := diff(y(x), x) = \frac{4 \cdot x + 21 \cdot y(x) - 25}{24 \cdot x + y(x) - 25}$:

\> $solution3 := dsolve(equation3);$

$$solution3 := 4 \ln\left(- \frac{y(x) - 5 + 4x}{x - 1} \right) - 5 \ln\left(\frac{-y(x) + x}{x - 1} \right) - \ln(x - 1) - \_C1 = 0 \qquad \textbf{(5)}$$

\> $system\_equations\_3 := \{4 \cdot x + 21 \cdot y - 25 = 0, 24 \cdot x + y - 25 = 0\}$:

\> $solve(system\_equations\_3, \{x, y\});$

$$\{x = 1, y = 1\} \qquad \textbf{(6)}$$

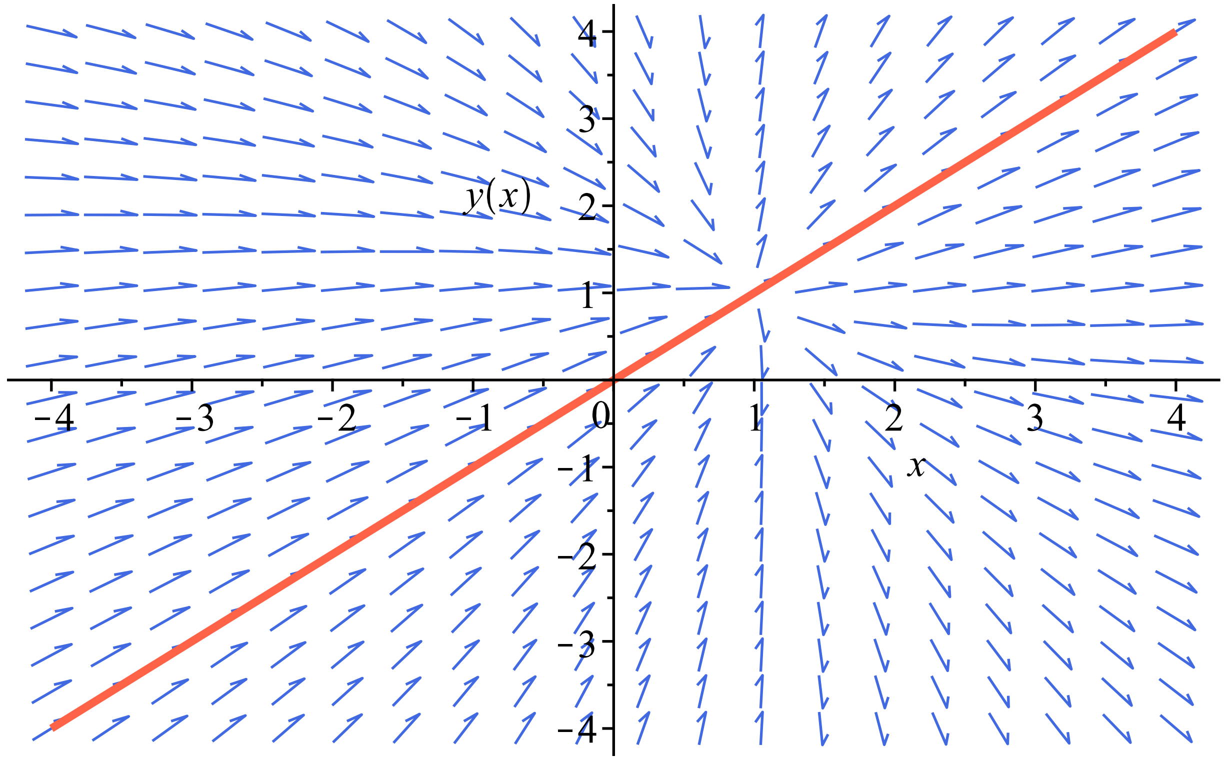
\> $solution3\_special\_point := dsolve(\{equation3, y(1) = 1\});$

$$solution3\_special\_point := y(x) = x, y(x) = 5 - 4x \qquad \textbf{(7)}$$

\> $field3 := dfieldplot(equation3, y(x), x = -4..4, y = -4..4, color = \text{"RoyalBlue"})$:

\> $chart\_3\_1 := plots[implicitplot](solution3\_special\_point[1], x = -4..4, y = -4..4, thickness = 3, color = \text{"Tomato"})$:

\> $plots[display](field3, chart\_3\_1);$



>

> $solve\left(linalg[det]\left(\begin{bmatrix} 24-\lambda & 1 \\ 4 & 21-\lambda \end{bmatrix}\right)=0\right);$

 # нашёл корни характеристического уравнения для определения типа особой точки

$$25, 20 \tag{8}$$

> *# корни действительны и оба корня > 0. Следовательно, это* ***неустойчивый узел***

>

>

> $restart;$

> ***# Задание 4***

> *# Найти решение задачи Коши*

> *# Сделать чертеж интегральной кривой.*

>

> $with(DEtools):$

> $equation4 := diff(y(x), x) + x\cdot y(x) = (1+x)\cdot e^{-x}\cdot (y(x))^2:$

> $dsolve(equation4);$

$$y(x) = \frac{1}{e^{\frac{1}{2}x^2}\_C1 + e^{-x}} \tag{9}$$

> $M4\_x := 0:$

> $M4\_y := 1:$

> $solution4 := dsolve(\{equation4, y(M4\_x) = M4\_y\});$

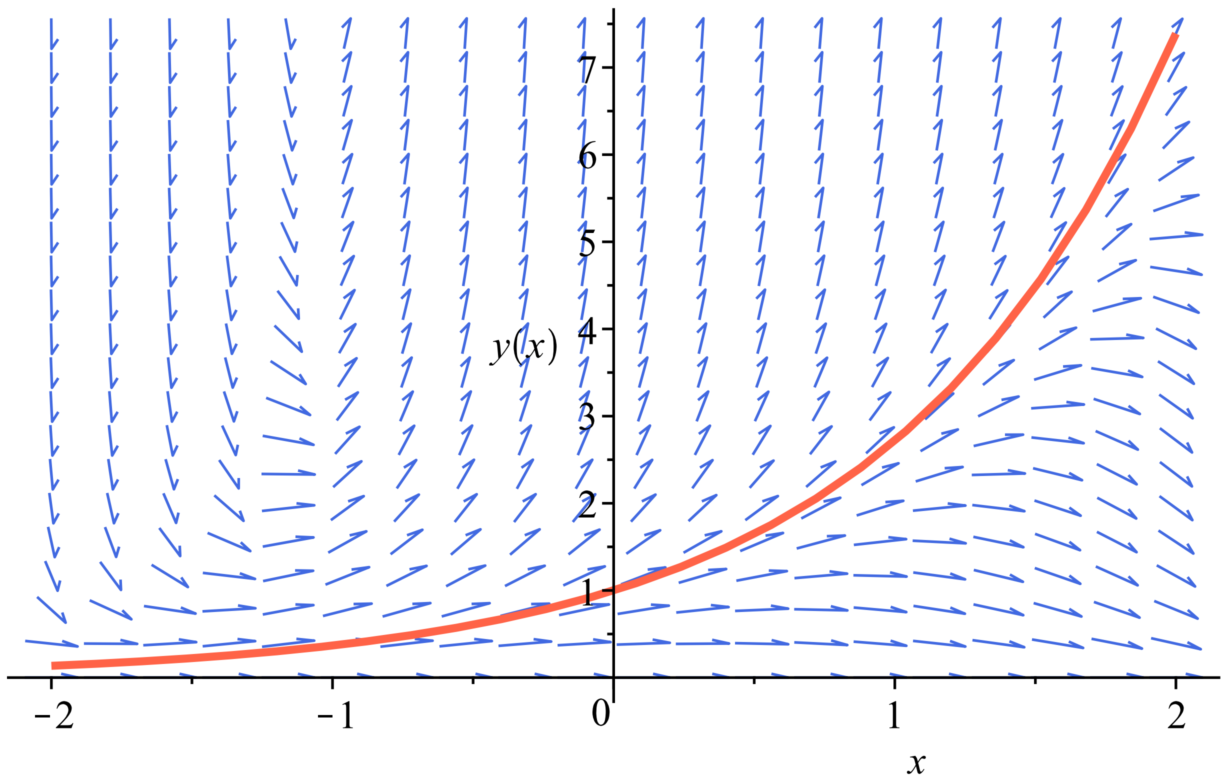
(10)

$$solution4 := y(x) = \frac{1}{e^{-x}} \tag{10}$$

> $field4 := dfieldplot\left(equation4, y(x), x = -2..2, y = 0..e^2, color = \text{"RoyalBlue"}\right):$

> $chart4 := plots[implicitplot]\left(solution4, x = -2..2, y = 0..e^2, color = \text{"Tomato"}, thickness = 3\right):$

> $plots[display](field4, chart4);$



>

>

> $restart;$

> **# Задание 5**

> *# Решить ДУ*

> *# Построить в одной системе координат интегральные кривые при целых значениях произвольной постоянной от −1 до 1.*

> $with(DEtools):$

> $equation5\_1 := diff(y(z), z) = z \cdot \arcsin(z);$

$$equation5\_1 := \frac{d}{dz} y(z) = z \arcsin(z) \tag{11}$$

> $solution5\_1 := dsolve(equation5\_1);$

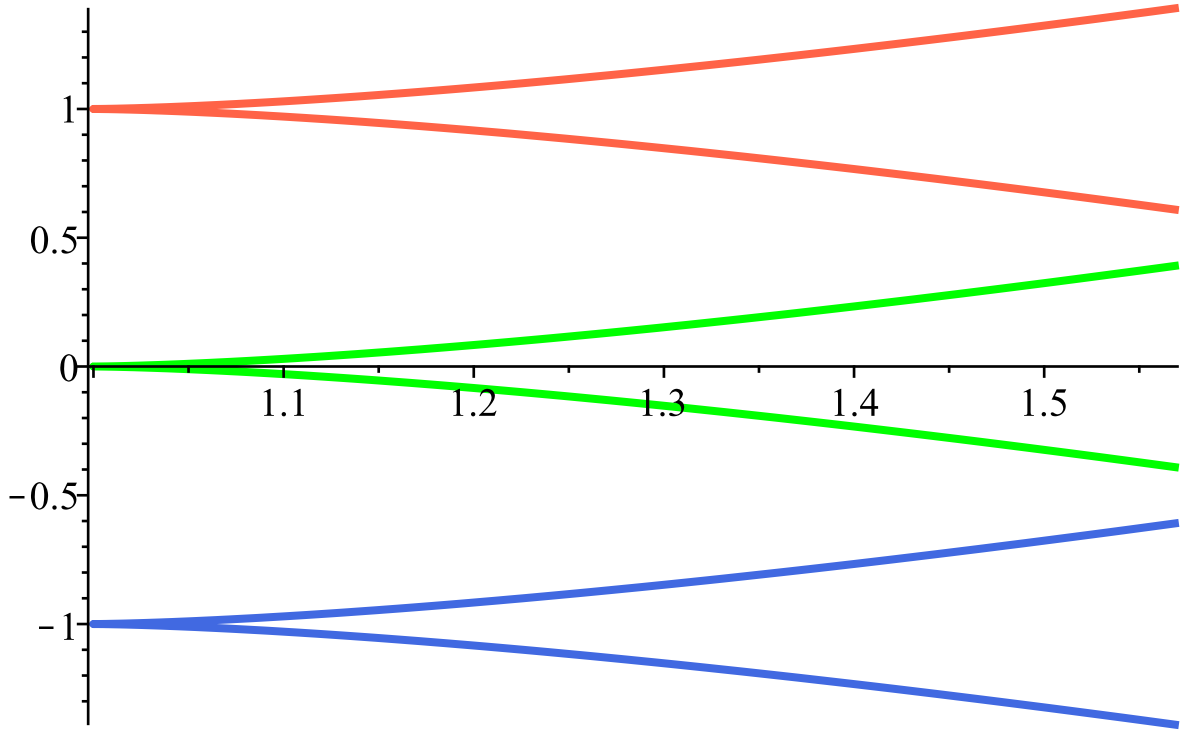
$$solution5\_1 := y(z) = \frac{1}{2} z^2 \arcsin(z) + \frac{1}{4} z \sqrt{-z^2+1} - \frac{1}{4} \arcsin(z) + \_C1 \tag{12}$$

> $chart5\_1\_0 := plot\left(\left[z \cdot \arcsin(z) + \mathrm{sqrt}\left(1 - z^2\right), \frac{1}{2} z^2 \arcsin(z) + \frac{1}{4} z \sqrt{-z^2+1} - \frac{1}{4} \arcsin(z), z = -1..1\right], thickness = 3, color = green\right):$

> $chart5\_1\_1 := plot\left(\left[z\cdot\arcsin(z) + \mathrm{sqrt}(1-z^2), \frac{1}{2}z^2\arcsin(z) + \frac{1}{4}z\sqrt{-z^2+1} - \frac{1}{4}\arcsin(z) + 1, z=-1..1\right], thickness=3, color="Tomato"\right):$

> $chart5\_1\_minus1 := plot\left(\left[z\cdot\arcsin(z) + \mathrm{sqrt}(1-z^2), \frac{1}{2}z^2\arcsin(z) + \frac{1}{4}z\sqrt{-z^2+1} - \frac{1}{4}\arcsin(z) - 1, z=-1..1\right], thickness=3, color="RoyalBlue"\right):$

> $plots[display](chart5\_1\_minus1, chart5\_1\_0, chart5\_1\_1);$



>

> $equation5\_2 := diff(x(p), p) = \frac{p}{1-p^2}:$

> $dsolve(equation5\_2);$

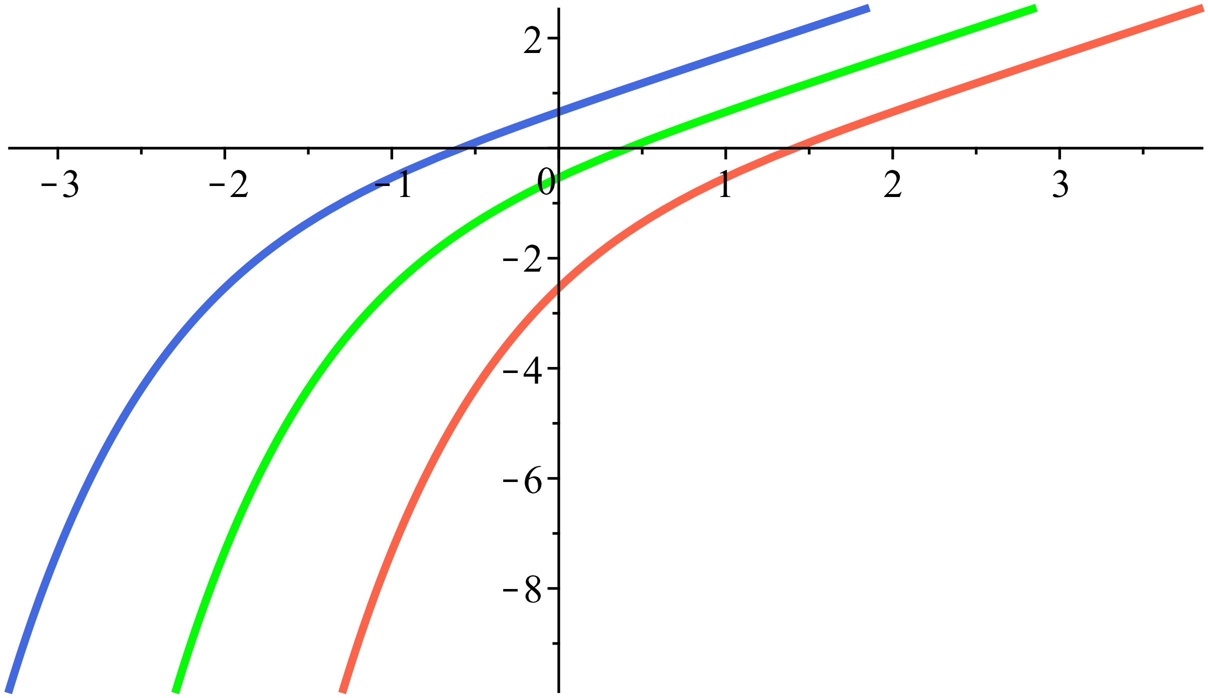
$$x(p) = -\frac{1}{2}\ln(p-1) - \frac{1}{2}\ln(p+1) + \_C1 \tag{13}$$

> $chart5\_2\_0 := plot\left(\left[-\frac{1}{2}\ln(p-1) - \frac{1}{2}\ln(1+p), \frac{1}{2}\ln\left(\left|\frac{1+p}{1-p}\right|\right) - p, p=-10..10\right], thickness=3, color=green\right):$

> $chart5\_2\_1 := plot\left(\left[-\frac{1}{2}\ln(p-1) - \frac{1}{2}\ln(1+p) + 1, \frac{1}{2}\ln\left(\left|\frac{1+p}{1-p}\right|\right) - p, p=-10..10\right], thickness=3, color="Tomato"\right):$

> $chart5\_2\_minus1 := plot\left(\left[-\frac{1}{2}\ln(p-1) - \frac{1}{2}\ln(1+p) - 1, \frac{1}{2}\ln\left(\left|\frac{1+p}{1-p}\right|\right) - p, p=-10..10\right], thickness=3, color="RoyalBlue"\right):$

> plots[display](chart5_2_minus1, chart5_2_0, chart5_2_1);



>

>

> restart;

> **# Задание 6**

> # Найти все решения уравнения

> # Построить в одной системе график особого решения и интегральных кривых при целых значениях постоянной от −3 до 3.

> with(DEtools) :

> $equation6 := y(x) = x \cdot diff(y(x), x) + 2 \cdot (diff(y(x), x))^2 - 1$:

> solution6 := dsolve(equation6);

$$solution6 := y(x) = -\frac{1}{8}x^2 - 1, y(x) = 2\_C1^2 + \_C1\,x - 1 \tag{14}$$

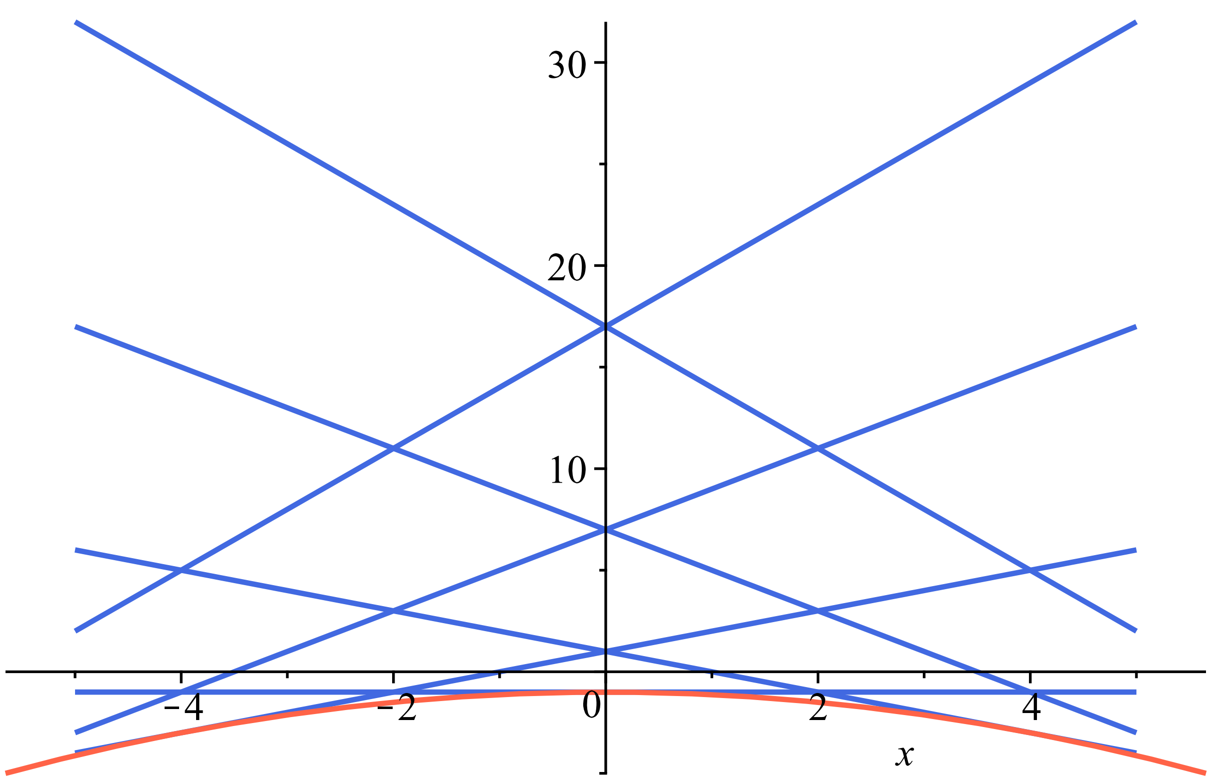
> lines6 := Array([1, 2, 3, 4, 5, 6, 7]) :

> index6 := 1 :

> **for** counter **from** -3 **by** 1 **to** 3 **do**
  $lines6[index6] := plot(2 \cdot counter^2 + counter \cdot x - 1, x = -5 ..5, thickness = 2, color = "RoyalBlue")$: # графики семейства прямых
  index6 := index6 + 1 :
  end do:

> chart6 := plots[implicitplot](solution6[1], x = -10 ..10, y = -5 ..5, thickness = 2, color = "Tomato") :

> plots[display](lines6[1], lines6[2], lines6[3], lines6[4], lines6[5], lines6[6], lines6[7], chart6);



>

>

>

> *restart*;

>

> # Слуцкий Никита | гр. 053506

>

>

>

Лабораторная работа №5

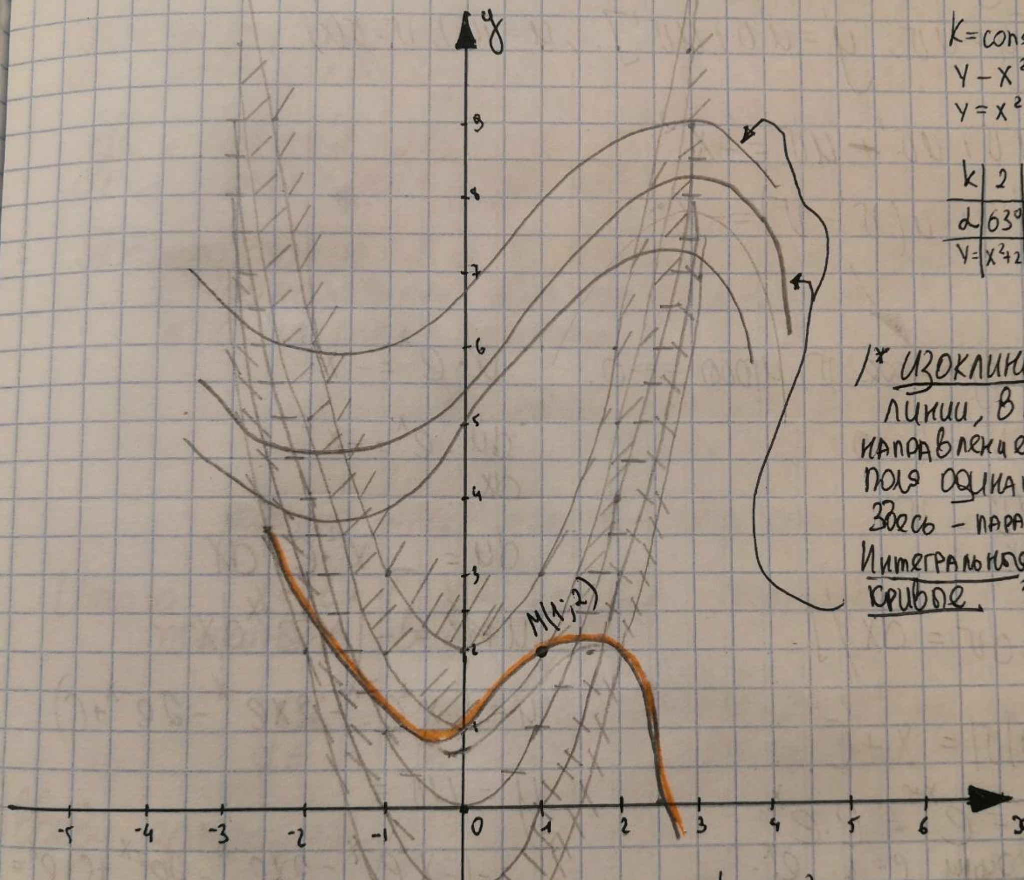
28.11.2021

„Обыкновенные дифференциальные уравнения"

{№ в журнале – 21; Вариант – 1}.

$M = (1, 2)$.

Задание 1 $y' = y - x^2$. $y' = tg\,\alpha$ – тангенс угла наклона касательной.



$K = const$

$y - x^2 = k$

$y = x^2 + k$

k	2	1	0	-1	-2
α	63°	45°	0°	-45°	-63°
y =	x^2+2	x^2+1	x^2	x^2-1	x^2-2

/* Изоклины – линии, в которых направление дифф. поля одинаково. Здесь – парабол. Интегральные кривые. */

$y' = y - x^2$ // нашёл общее решение (нашёл далее на сл. странице)

$y(x) = x^2 + 2x + 2 + e^x \cdot C$

$1 + 2 + \cancel{2} + e \cdot C = \cancel{2}$

$3 + e \cdot C = 0$

$e \cdot C = -3$

$C = -\frac{3}{e}$

$y' = y - x^2$ $\frac{dy}{dx} = y - x^2$. // нашёл частное решение

$y = x^2 + 2x + 2 - \frac{3}{e} e^x$

$y' = y - x^2$

$$\underset{y'}{y'} - \underset{P(x)}{y} = \underbrace{-x^2}_{f(x)}$$

это линейное ДУ I-го порядка.

Решу метотом бернулли.

$[y = uv;\ y' = u'v + uv']$. , $u = u(x)$, $v = v(x)$

$u'v + uv' - uv = -x^2$.

$u'v + u(v' - v) = -x^2$

найду такое v, чтобы $= = 0$.

$v' - v = 0$

$\frac{dv}{dx} = v$.

$\frac{1}{v} dv = dx \,/\int$

$\ln|v| = x + C$.

$v = e^{x+c} = C \cdot e^x$.

возьму $C = 1$. e^x.

$u' \cdot e^x = -x^2$

$\frac{du}{dx} \cdot e^x = -x^2$

$du = -x^2 e^{-x} dx$

$u + \cancel{c} = -\int x^2 e^{-x} dx$

$u = -(-x^2 e^{-x} - 2xe^{-x} - 2e^{-x} + C)$

$y = uv =$

$= -(-x^2 e^{-x} - 2xe^{-x} - 2e^{-x} + C) e^x =$

$= -(-x^2 - 2x - 2 + Ce^x) =$

$$= \underbrace{x^2 + 2x + 2 + e^x \cdot C}_{\text{общее решение}}$$

Задание 2 | подзадача 1: $M_0(15, 1)$, $a = 25$.

уравнение касательной к функции f в точке x_0:

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Пусть есть точка M_z $(z, f(z))$ на этой линии (ещё не найденной).
Там у нас касательная: $y = f(z) + f'(z)(x - z)$
нормаль в точке M_z: $y(x) = f(z) - \frac{1}{f'(z)}(x - z)$

эта прямая пересекает Oy в точке $N_z = \left(0, f(z) + \frac{z}{f'(z)}\right)$ (просто подставил $x=0$ в уравнение).
Всё, есть точка M_z, есть точка N_z. А $M_z N_z$ — это перпендикуляр к неизвестной кривой. И дана длина отрезка — a.

То есть $\sqrt{z^2 + \left(f(z) + \frac{z}{f'(z)} - f(z)\right)^2} = a$. $\uparrow^2$.

$$z^2 + \frac{z^2}{(f'(z))^2} = a^2.$$

$$\frac{a^2 - z^2}{1} = \frac{z^2}{f'(z)^2} \Longleftrightarrow (f'(z))^2 = \frac{z^2}{a^2 - z^2}.$$

$$f'(z) = \pm\frac{z}{\sqrt{a^2 - z^2}}$$ // т.к. интересует острый угол с направлением Oy, то берём с плюсом.

$\Downarrow$

$$f(z) = \pm\sqrt{a^2 - z^2} + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

$f(z) = \sqrt{a^2 - z^2} + C$ и эта кривая проходит через M_0

$1 = \sqrt{625 - 225} + C \quad 1 = 20 + C, \ \underline{\underline{C = -19}}$

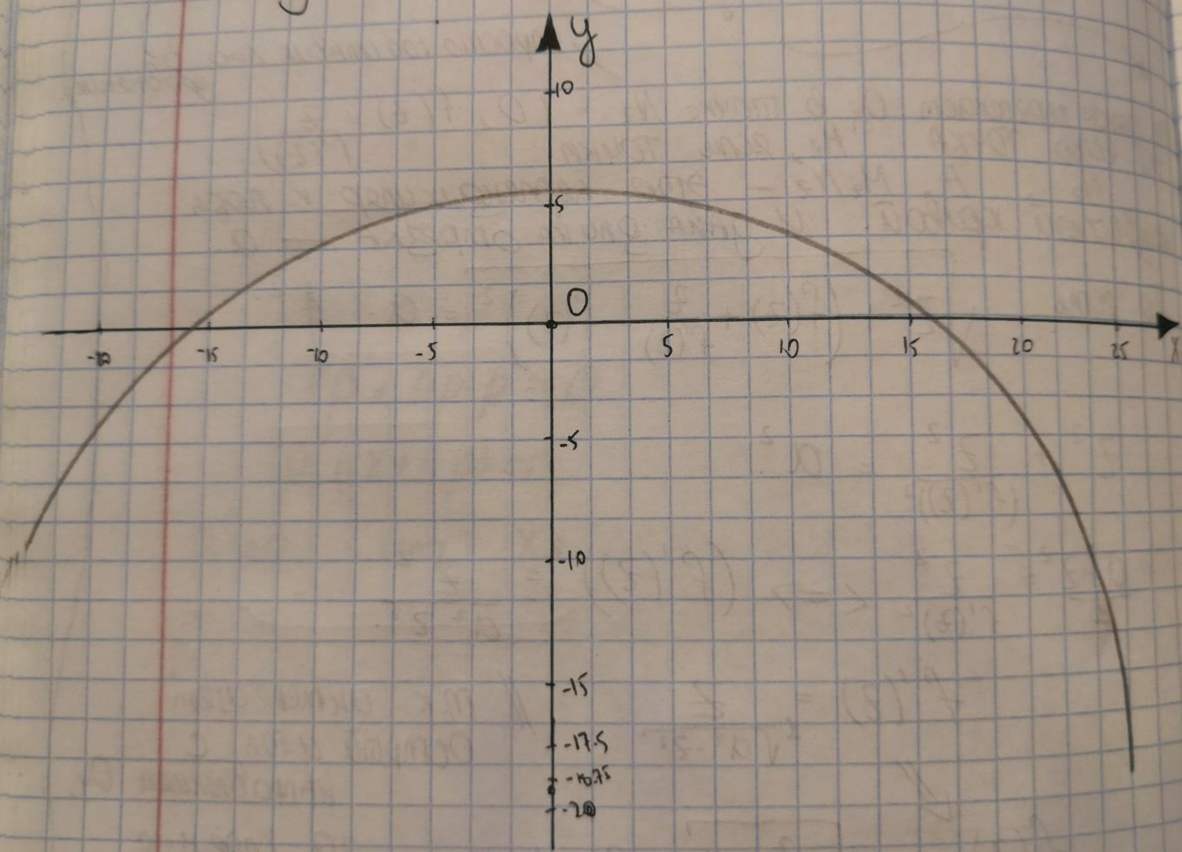
То есть $f(x) = \sqrt{625 - x^2} - 19$

// перешёл к обычн. переменной x

$y = \sqrt{625 - x^2} - 19$

$y + 19 = \sqrt{625 - x^2}$ $\,|^2$

$y^2 + 19^2 =$



2-я подзадача: $M_0(1, e)$, $a = -0.5$

уравнение касательной к функции f в точке x_0:

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

или же $y = y_0 + f'(x_0)(x - x_0)$

а в произв. точке

$\underline{y = y_0 + y'(x - x_0)}$

Касательная пересекает Ox в точке:

$$M = (x_0, f(x_0))$$

$$0 = y_0 + f'(x_0)(x - x_0)$$

$$0 = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

$$-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = x - x_0.$$

$$x = x_0 + \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

Итого N имеет координаты

$$N = \left(x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}, 0\right).$$

Проекция M_0N на Ox – это:

$$x_0 - \left(x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}\right) = \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}. \qquad \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = \frac{1}{x_0} \cdot a$$

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0) \cdot x_0}{a}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y \cdot x}{a} \qquad \frac{1}{y} dy = \frac{1}{a} x\, dx \Big/ \int$$

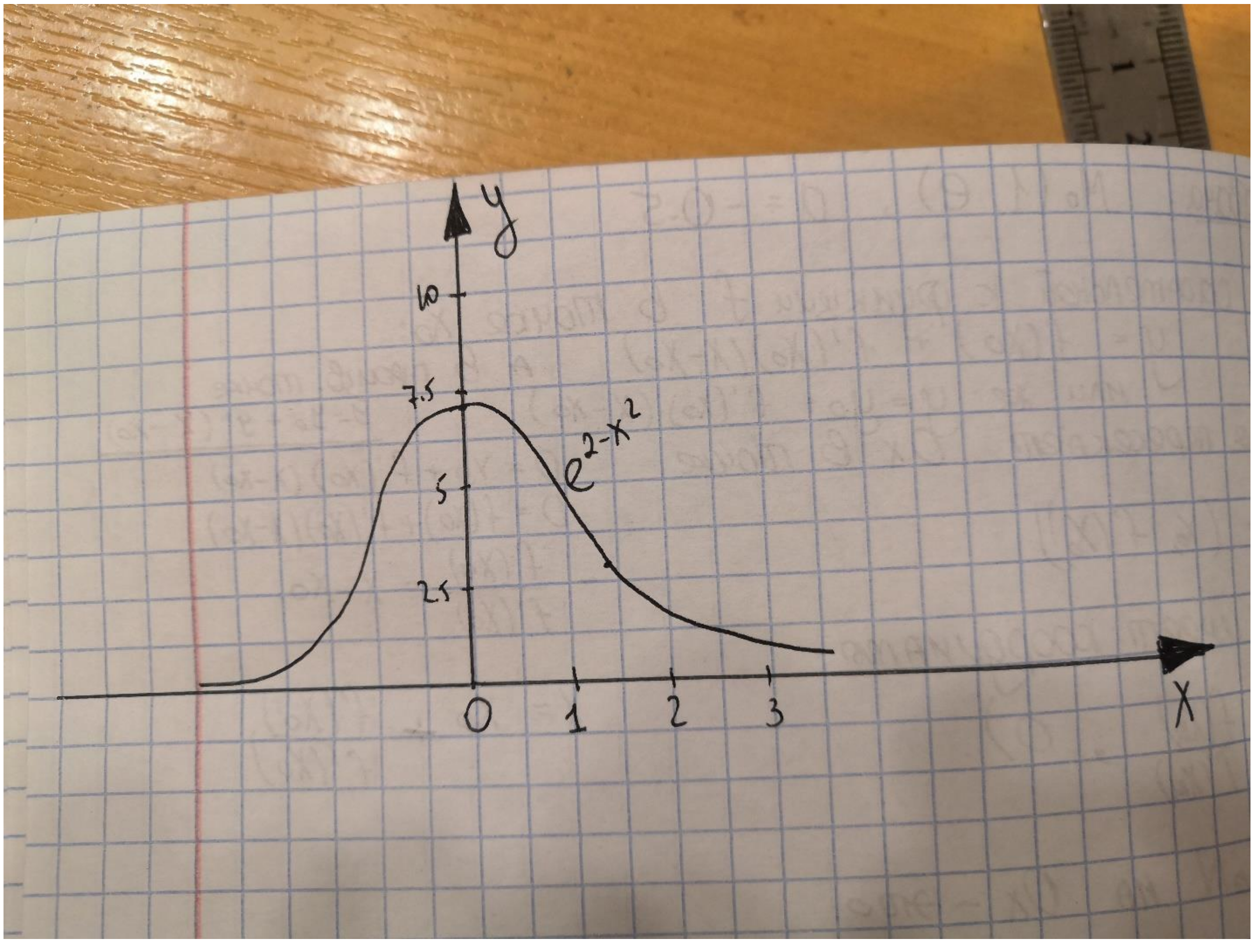
$$\ln|y| = \frac{1}{a} \cdot \frac{x^2}{2} + C_1$$

$$\underbrace{y} = e^{\frac{x^2}{2a} + C_1} = \underbrace{C \cdot e^{x^2/2a}}$$

найду C с M_0: $e = C \cdot e^{\frac{1}{-1}} \Rightarrow \underbrace{C = e^2}$

Итого $y = e^2 \cdot e^{x^2/(-1)} = \underline{\underline{e^{2-x^2}}}$

$$\underline{\underline{f(x) = e^{2-x^2}}}$$



y
10
7.5
5
2.5
e^{2-x^2}
0
1
2
3
X

Задание 3 $y' = \frac{4x+21y-25}{24x+y-25}$.

Замена: $\begin{cases} x = t+\alpha; \\ y = s+\beta; \end{cases}$ тут α и β пока неизвестны.

$t = t(x)$, $s = s(x)$

$t = x - \alpha$

$s = y - \beta$.

Из замены: $dx = dt$

$dy = ds$

$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{ds}{dt}$

$$\frac{ds}{dt} = \frac{4(t+\alpha)+21(s+\beta)-25}{24(t+\alpha)+(s+\beta)-25}.$$

$$\frac{ds}{dt} = \frac{4t+4\alpha+21s+21\beta-25}{24t+24\alpha+s+\beta-25}.$$

Подберу такие α и β, чтобы уравнение стало однородным. Для этого приравняю к 0 и решу систему:

$$\begin{cases} 4\alpha+21\beta-25=0 \\ 24\alpha+\beta-25=0. \end{cases}$$

Решение этой системы — пара чисел: $(\alpha;\beta) = (1;1)$.

Итого $x = t+1$, $y = s+1$, а уравнение с учётом принимает вид:

$$\frac{ds}{dt} = \frac{4t+21s}{24t+s} \Big| :t$$ это однородное уравнение для переменных s и t.

Введу замену $u = \frac{s}{t} \Rightarrow s = ut. \Rightarrow \frac{ds}{dt} = t\cdot\frac{du}{dt} + u$

$$\frac{ds}{dt} = \frac{4+21\frac{s}{t}}{24+\frac{s}{t}} \qquad \frac{4+21u}{24+u} = t\cdot\frac{du}{dt} + u$$

$$\frac{-u^2-3u+4}{24+u} = t\cdot\frac{du}{dt}$$

$$\frac{1}{t}dt = \frac{24+u}{-u^2-3u+4}du. \qquad \ln|t| = -5\ln|u-1| + 4\ln|u+4| + C$$

$$\ln|x-1| = -5\ln\left|\frac{s}{t}-1\right| + 4\ln\left|\frac{s}{t}+4\right| + C$$

$$\ln|x-1| = -5\ln\left|\frac{y-1}{x-1}-1\right| + 4\ln\left|\frac{y-1}{x-1}+4\right| + \ln C.$$

$$\ln|x-1| = \ln\left|\left(\frac{y-1}{x-1}-1\right)^{-5}\right| + \ln\left|\left(\frac{y-1}{x-1}+4\right)^{4}\right| + \ln C.$$

$$\underbrace{|x-1| = \left(\frac{y-1}{x-1}-1\right)^{-5}\cdot\left(\frac{y-1}{x-1}+4\right)^{4}\cdot C}$$

неявное решение.

$\boxed{\text{Задание 4}}$ $y' + xy = (1+x)e^{-x}y^2; \quad y(0) = 1.$

Это уравнение Бернулли. Отличается от линейного ДУ 1-го порядка y^2 справа.

$$\underbrace{y'}_{} + \underbrace{x}_{p(x)}y = \underbrace{(1+x)e^{-x}}_{f(x)}\underbrace{y^2}_{y^{\alpha}}, \ \alpha = 2.$$

$$y' + xy = (1+x)e^{-x}y^2 \ \Big| : y^2$$

$$\frac{y'}{y^2} + x\cdot\frac{1}{y} = (1+x)e^{-x}.$$

Введу замену: $\frac{1}{y} = z.$ $\underline{z = z(x)}$ // т.к. рассматривается $y = y(x)$.

тогда $z' = -\frac{1}{y^2}\cdot y' \Rightarrow \frac{y'}{y^2} = -z'.$

пусть $u = -\frac{1}{y}$.

Подставляю.

$$-z' + x \cdot z = (1+x)e^{-x} \quad / \cdot -1.$$

$$z' - \underbrace{x}_{P(x)} z = \underbrace{(-1-x)e^{-x}}_{f(x)}$$

Это линейное ДУ 1-го порядка

Решу его методом подстановки Бернулли. Искомое решение ищется в виде $z = uv$, где $u = u(x)$, $v = v(x)$

$$z = uv. \Rightarrow z' = u'v + uv'$$

$$u'v + uv' - uvx = (-1-x)e^{-x}.$$

$$u'v + u(v' - vx) = (-1-x)e^{-x}$$

найду такое v, чтобы $= = = 0$.

$$\frac{dv}{dx} = vx$$

$$\frac{1}{v} dv = x dx \quad / \int$$

$$\ln|v| = \frac{x^2}{2} + C$$

$v = Ce^{\frac{x^2}{2}}$, возьму $C = 1$.

$$v = e^{x^2/2}.$$

$$u' \cdot e^{x^2/2} = (-1-x)e^{-x}$$

$$\frac{du}{dx} = (-1-x) \cdot e^{-x-\frac{x^2}{2}}$$

$$du = (-1-x)e^{-x-\frac{x^2}{2}} dx$$

$$u = e^{-x-\frac{1}{2}x^2} + C$$

$z = uv =$

$$= e^{\frac{x^2}{2}} \cdot \left(e^{-x-\frac{x^2}{2}} + C\right) =$$

это для z

$$= e^{-x} + C \cdot e^{\frac{x^2}{2}} \text{ общее решение}$$

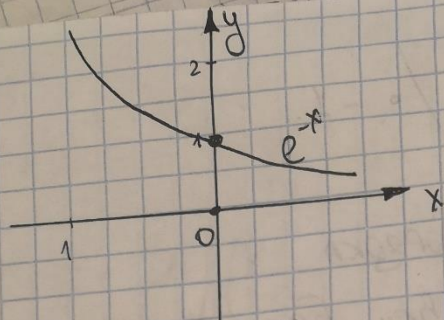
общее решение

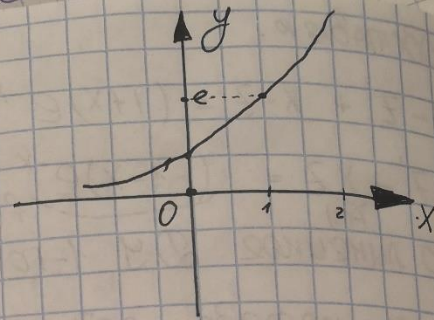
$$z = e^{-x} + C \cdot e^{x^2/2}$$

$$y = \frac{1}{e^{-x} + C \cdot e^{x^2/2}}$$

$y(0) = 1.$

$$\frac{1}{1} = \frac{1}{1+C} \Rightarrow C = 0 \Rightarrow y = e^{x} \text{ — решение задачи Коши}$$





// это для z :)

$\boxed{\text{Задание 5}}$: 1-й пример: $x = y' \arcsin y' + \sqrt{1-y'^2}$

ввожу замену: $[y' = z]$.

$x = z \arcsin z + \sqrt{1-z^2}$. — продифференцирую.

~~ещё одна замена:~~

~~$\arcsin z = t$.~~

~~$(\arcsin z)' = \frac{t'}{1} = \frac{1}{\sqrt{1-z^2}}$~~

$\frac{dy}{dx} = \frac{z}{1} \Rightarrow dx = \frac{dy}{z}$

это пригодится.

~~x z~~ d

параметрически ответ

- $x = z \arcsin z + \sqrt{1-z^2}$

$dx = (z \arcsin z + \sqrt{1-z^2})' dz$

$\frac{dy}{z} = \arcsin z \, dz$

$dy = z \arcsin z \, dz$

это уравнение, разрешённое относительно производной

- $y = \frac{\arcsin z \cdot z^2}{2} + \frac{-\arcsin z + z\sqrt{1-z^2}}{4} + C$
- $y' = z$

2-й пример: $y = \frac{1}{2} \ln\left|\frac{1+y'}{1-y'}\right| - y'$

это похоже на уравнение Лагранжа вида $y = x \cdot \varphi(y') + \psi(y')$,
где $\varphi(y') \equiv 0$.

Введу замену $[y' = p]$, $p = p(x)$

$y = \frac{1}{2} \ln\left|\frac{1+p}{1-p}\right| - p$ / продифференцирую по x

$p = \frac{1 \cdot p'}{1-p^2} - p'$

$p = p'\left(\frac{1}{1-p^2} - 1\right) = \left(\frac{1-1+p^2}{1-p^2}\right)p'$

$p = p'\left(\frac{p^2}{1-p^2}\right)$

$p = \frac{dp}{dx}\left(\frac{p^2}{1-p^2}\right)$ / $\cdot dx$ / $: p$

$dx = \frac{p}{1-p^2} dp$

$x + C_1 = -\frac{1}{2} \ln|1-p^2|$ / e

$e^{x+C_1} = e^{-\frac{1}{2}\ln|1-p^2|}$

$e^{x+C_1} = \frac{1}{\sqrt{1-p^2}}$ $\uparrow^2$

$e^{x+C_1} = \cancel{\ldots}$

$\frac{e^{2x+2C_1}}{1} = \frac{1}{1-p^2}$ $= e^{2x} \cdot e^{2C_1} = \underline{C_1 e^{2x}}$

$1 - p^2 = \frac{1}{C_1 e^{2x}} = C \cdot e^{-2x}$

$p^2 = 1 - e^{-2x} \cdot C$

$|p| = \sqrt{1 - C \cdot e^{-2x}}$

$|y'| = \sqrt{1 - C \cdot e^{-2x}}$

$y = \int(1 - C \cdot e^{-2x})dx$

$\boxed{\text{Задание 6}}$: $y = xy' + 2y'^2 - 1$

Это уравнение Клеро вида: $y = xy' + \psi(y')$.

$$y = xy' + \underbrace{2y'^2 - 1}_{\psi(y')}$$

Введу замену: $[y' = p]$.

тогда: $y = xp + 2p^2 - 1$.

продифференцирую по x:

$$y' = (xp)' + (2p^2-1)'_x$$

$$p = x \cdot p' + x' \cdot p + 4p \cdot p'$$

$$p = x \cdot p' + p + 4p \cdot p'$$

$$xp' + 4p \cdot p' = 0$$

$$p'(x+4p) = 0.$$

$p' = 0$ или $x + 4p = 0$

$\frac{dp}{dx} = 0$

$\Downarrow$

$p = C_1$

$\Downarrow$

$y' = C_1$

$\Downarrow$

$\underline{y = C_1 x + C_2}$

семейство прямых

$x + 4y' = 0$

$4y' = -x$

$4\frac{dy}{dx} = -x$

$4dy = -x\,dx \,/\int$

$4y = -\frac{x^2}{2} + C$

$y = -\frac{x^2}{8} + C$