Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования
БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИНФОРМАТИКИ И РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ

Факультет Компьютерных Систем и Сетей
Кафедра Информатики
Дисциплина: Методы численного анализа

# ОТЧЁТ

к лабораторной работе

на тему

Решение краевых задач методом разностных аппроксимаций

Выполнил: студент группы 053505
Слуцкий Никита Сергеевич

Проверил: Анисимов Владимир Яковлевич

Минск 2022

## Вариант 21 (Номер в журнале – 21)

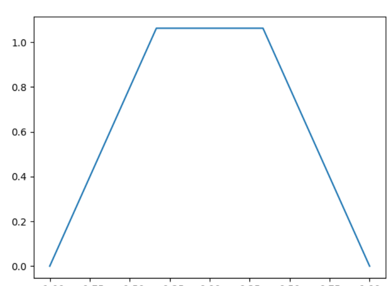
## Цели выполнения задания:

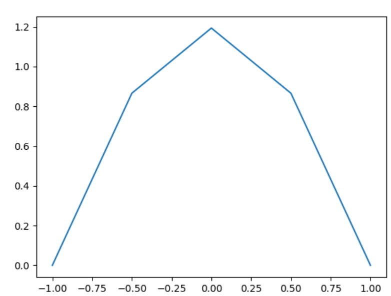
- Изучить метод разностных аппроксимаций, составить алгоритм метода и программу их реализации, получить численное решение заданной краевой задачи
- Составить алгоритм решения краевых задач указанными методами, применимыми для организации вычислений на ПЭВМ
- Составить программу решения краевых задач по разработанному алгоритму
- Выполнить тестовые примеры и проверить правильность работы программ

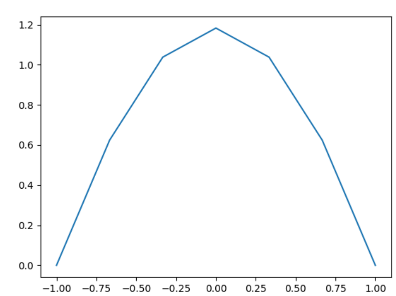
## Ход работы

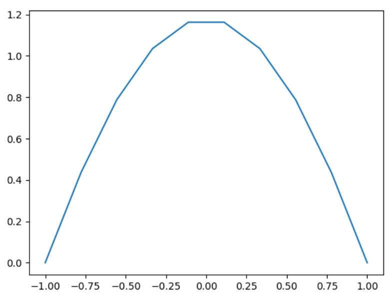
## Первое задание:

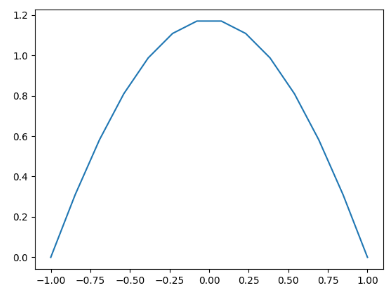
Есть интервал [a..b], в данном случае равный [-1..1]. За начальное количество отрезков разбиения тут взято 3. Далее при получении каждого следующего решения это количество увеличивается в полтора раза. После того, как норма разности сеточных функций предыдущего и следующего решения перестаёт превышать заданную точность, процесс прекращается. При точности E = 0.001 и начальном количестве отрезков разбиения N = 3 получено следующее:

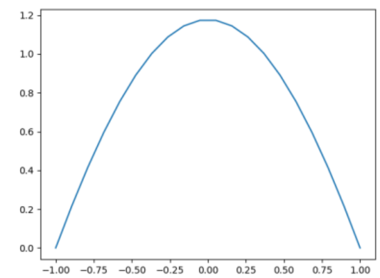









После получения 6-го решения норма стала уменьшаться уже на меньшее значение, чем задавалось в параметре эпсилон; следовательно, требуемая точность достигнута. Достигнута при N = 19.

Стоит упомянуть, что использовалась **квадратичная норма вида**:

$$\sqrt{\sum [y_k]^2 * h}$$

(h – размер шага сетки, $y_k$ – значения полученной в решении сеточной функции)

Если потребовать увеличить точность (то есть уменьшить по модулю эпсилон), то вот какие N получались для разных E (напомню, N – количество отрезков, на который разбивается интервал. Соответственно узлов в сетке получается N + 1):

| E | N |
|---|---|
| 0.0001 | 63 |
| 0.00001 | 211 |
| 0.000001 | 711 |

А что если поменять тип нормы для сеточной функции ? При получении результатов выше считалась квадратическая, то есть более хитрая норма. Теперь будет считаться равномерная норма вида:

$$\max\left(|y_k|\right)$$

Графики приводиться не будут, но в таблице представлены значения требуемой точности и получившиеся количества отрезков разбиения:

| E | N |
|---|---|

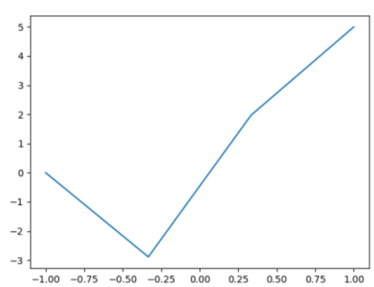
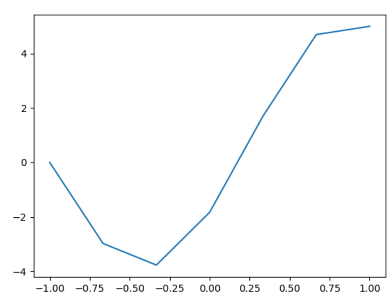
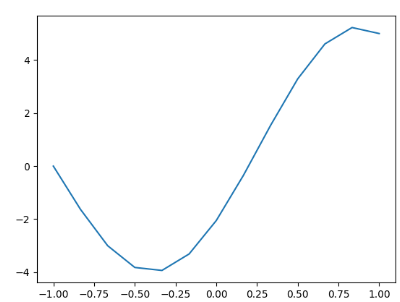
| | |
|---|---|
| 0.001 | 42 |
| 0.0001 | 141 |
| 0.00001 | 474 |
| 0.000001 | 1599 |

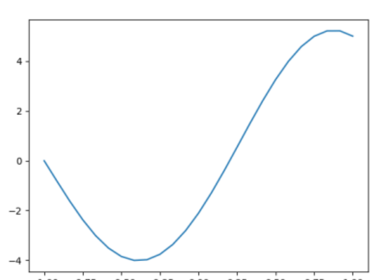
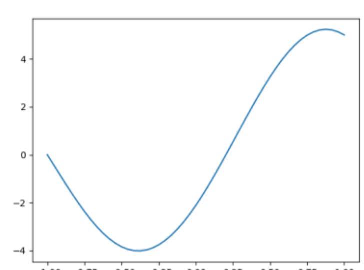
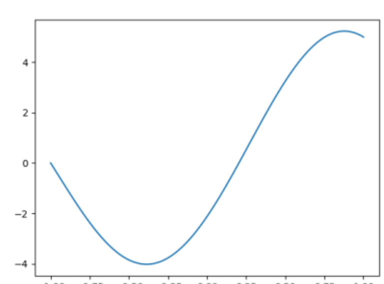
Поэтому можно сделать (в целом-то предсказуемый) вывод, что от выбора нормы зависит итоговое количество итераций.

## Второе задание:

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2.2.21 | $\sin x$ | $4(1+x^2)$ | $6e^{0.5x}$ | 0 | 2 | 0 | 5 | 0.05 |

В общем-то всё то же самое. Только теперь в итоговой решаемой СЛАУ коэффициенты вектора свободных членов не являются константами, а также высчитываются некой f(x). И порядок аппроксимации теперь $h^2$. И количество отрезков (по условию) теперь увеличивается в 2 раза на каждой итерации. Для заданной в моём варианте точности 0.05 потребовалось 6 раз повторить итерацию, прежде чем была достигнута эта точность. Норма квадратичная. Ниже приведены графики уточняемого решения (итераций).

Понадобилось разделить исходный отрезок на 96 частей.

Если потребовать увеличить точность, как и в прошлом задании, то:

| E | N |
|---|---|
| 0.01 | 384 |
| 0.001 | 3072 |

То же самое, но уже с равномерной нормой:

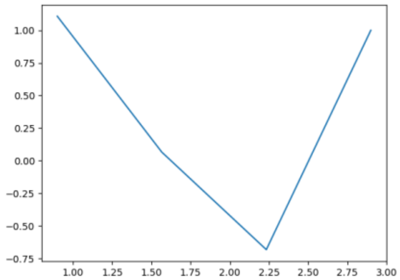
| E | N |
|---|---|
| 0.05 | 96 |
| 0.01 | 96 |
| 0.001 | 96 |

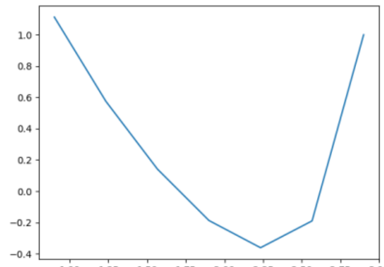
## Третье задание:

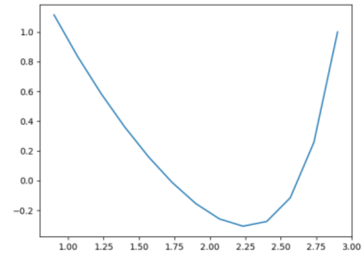
| | | |
|---|---|---|
| 2.3.1 | $u'' - xu' + 0.2u = x + 1$<br>$u(0.9) - 0.5u'(0.9) = 2$<br>$u(2.9) = 1$ | 0.04 |

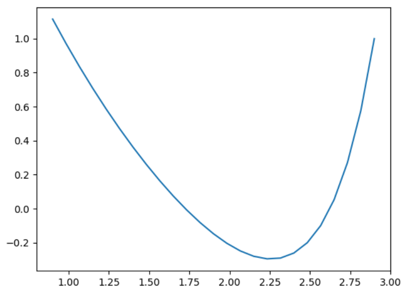
И снова суть та же. Единственное, что добавляется, это более сложное граничное условие (в моём варианте – слева). Поэтому в уже привычном алгоритме построения СЛАУ надо лишь немного усложнить принцип построения в данном случае первой строки (теперь там не один ненулевой коэффициент, а три, так как аппроксимировать уже нужно ещё и производную в граничной точке – граничное условие другого рода дано изначально).

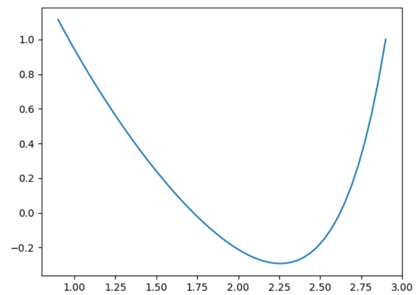
Для указанной точности при начальном разбиении на три отрезка (4 узла) и последующем увеличении данного количества узлов в два раза на каждой итерации всего потребовалось построить 5 решений, прежде чем была достигнута требуемая точность. Это при квадратичной норме. Учитывая вид функции, равномерная норма тут являлась бы бесполезной. Графики уточнённого решения представлены:




Итоговое разбиение – на N = 48 отрезков => N+1 = 49 узлов сетки.

Если потребовать увеличить точность, как и в прошлом задании, то:

| E | N |
|---|---|
| 0.01 | 192 |
| 0.001 | 3072 |

## Четвёртое задание:

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2.4.21 | 0 | 2.5 | 1.725 | 0.5 | 1.5 | 3.5 | 12.08 | $10x(1.3-0.2x^2)$ |

Три значащие цифры => эпсилон надо взять 0.0001

Программный продукт показал, что необходимо разбиение на 12000+ отрезков. Вычисление было прекращено ввиду трудоёмкости решения соответствующей СЛАУ. Для одной значащей цифры нужно N = 192. Для двух – N = 3072.

## Выводы:

В результате выполнения данной ЛР изучен метод разностных аппроксимаций.