Цель работы

1. Изучить метод разностных аппроксимаций для уравнения теплопроводности;
2. Составить алгоритмы решения уравнения теплопроводности методом сеток, применимыми для организации вычислений на ПЭВМ.
3. Составить программы решения уравнения теплопроводности по разработанным алгоритмам.
4. Выполнить тестовые примеры и проверить правильность работы программ.
5. Получить численное решение заданного уравнения теплопроводности.
6.

Выполнение работы

Задание 1.

Промоделировать стационарные процессы теплопроводности стержня в зависимости от входных данных задачи: коэффициента теплопроводности $K(x,c) = ck(x)$, начального и конечного значений пространственной переменной a и b, а также значений искомой функции на концах исследуемого пространственного отрезка U_A и U_B соответственно.

$$\begin{cases} -\dfrac{d}{dx}\left(K\dfrac{du}{dx}\right) = f, \\ u(a) = U_a, \qquad u(b) = U_b. \end{cases}$$

Решение.

Решение уравнения проведём, проинтегрировав его дважды.

$$-\frac{d}{dx}\left(c\sin(x)\,\frac{du}{dx}\right) = \cos(x),$$

$$c\sin(x)\,\frac{du}{dx} = -\sin(x) + C_1,$$

$$\frac{du}{dx} = -\frac{1}{c} + \frac{C_1}{\sin(x)},$$

$$u(x) = -\frac{x}{c} + C_1 \ln\frac{1-\cos(x)}{\sin(x)} + C_2.$$

Далее необходимо найти значения C_1, C_2 такие, чтобы $u(x)$ удовлетворила краевым условиям. Для этого решим следующую систему уравнений.

$$\begin{cases} -\frac{a}{c} + C_1 \ln \frac{1-\cos(a)}{\sin(a)} + C_2 = U_A, \\ -\frac{b}{c} + C_1 \ln \frac{1-\cos(b)}{\sin(b)} + C_2 = U_B, \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1 \ln \frac{1-\cos(a)}{\sin(a)} + C_2 = U_A + \frac{a}{c}, \\ C_1 \ln \frac{1-\cos(b)}{\sin(b)} + C_2 = U_B + \frac{b}{c}. \end{cases}$$

Вычтем второе уравнение из первого:

$$C_1 \left(\ln \frac{1-\cos(a)}{\sin(a)} - \ln \frac{1-\cos(b)}{\sin(b)} \right) = U_A + \frac{a}{c} - U_B - \frac{b}{c},$$

$$C_1 = \frac{U_A + \frac{a}{c} - U_B - \frac{b}{c}}{\ln \frac{\sin(b)\,(1-\cos(a))}{\sin(a)\,(1-\cos(b))}}.$$

Подставим полученное значение в первое уравнение системы:

$$C_2 = U_A + \frac{a}{c} - C_1 \ln \frac{1-\cos(a)}{\sin(a)},$$

$$C_2 = U_A + \frac{a}{c} - \frac{U_A + \frac{a}{c} - U_B - \frac{b}{c}}{\ln \frac{\sin(b)\,(1-\cos(a))}{\sin(a)\,(1-\cos(b))}} \ln \frac{1-\cos(a)}{\sin(a)}.$$

Подставляя полученные выражения для C_1, C_2 в выражение для u, получаем ответ для задачи в общем виде.

Используя полученное общее решение, найдём конкретные решения для заданных наборов параметров. Вещественные коэффициенты будем указывать с точностью 0.0001.

1. $U_A = 1, U_B = 2, c = 1.$
   Решение: $u(x) = -x + 1.9091 \ln\left(\frac{1-\cos(x)}{\sin(x)}\right) + 3.1542.$
2. $U_A = 1, U_B = 2, c = 2.$
   Решение: $u(x) = -\frac{x}{2} + 1.4318 \ln\left(\frac{1-\cos(x)}{\sin(x)}\right) + 2.3657.$
3. $U_A = 1, U_B = 2, c = 0.1.$
   Решение: $u(x) = -10x + 10.5001 \ln\left(\frac{1-\cos(x)}{\sin(x)}\right) + 17.3482.$
4. $U_A = -1, U_B = 2, c = 1.$

Решение: $u(x) = -x + 3.8182 \ln\left(\frac{1-\cos(x)}{\sin(x)}\right) + 2.3084$.

5. $U_A = 1, U_B = -2, c = 1$.

   Решение: $u(x) = -x - 1.9091 \ln\left(\frac{1-\cos(x)}{\sin(x)}\right) + 0.8458$.

6. $U_A = -1, U_B = -2, c = 1$.

   Решение: $u(x) = -x$.

Задание 2.

Промоделировать стационарные процессы теплопроводности стержня в зависимости от входных данных задачи – переменного коэффициента теплопроводности $k(x)$ и плотности источников тепла $f(x)$.

$$\begin{cases} -\dfrac{d}{dx}\left(k(x)\dfrac{du(x)}{dx}\right) = f(x), \\ u(a) = U_A, \qquad u(b) = U_B. \end{cases}$$

Решение.

Согласно рекомендации, выберем параметры задания следующими $a = 1$, $b = 2$, $U_A = 1$, $U_B = 2$, $h = \frac{b-a}{150} = \frac{1}{150}$.

К рассмотрению предлагаются следующий вид коэффициента теплопроводности $k(x)$:

$$k(x) = \begin{cases} k1, & a < x < a + \dfrac{1}{3}(b-a), \\ k2, & a + \dfrac{1}{3}(b-a) < x < a + \dfrac{2}{3}(b-a), \\ k3, & a + \dfrac{2}{3}(b-a) < x < b. \end{cases}$$

где $k1$, $k2$, $k3$ – некоторые вещественные числа.

К рассмотрению предлагаются функции плотностей источника тепла $f(x)$ вида $f(x) = C_1\delta_1(x - x_0) + C_2\delta_2(x - x_1)$, где $a < x_0, x_1 < b$ – некоторые точки, расположенные внутри линейного теплопроводящего тела. Следует рассмотреть отдельно вопрос о том, как преобразовать плотность источников такого вида при переходе к разностной схеме.

Напомним основные свойства функции $\delta(x)$.

1. $\delta(0) = +\infty$,
2. $\delta(x \neq 0) = 0$,
3. $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)dx = 1$.

Логичным способом дискретизации $\delta(x)$ (при условии попадания узла сетки в точку $x = 0$) будет следующий способ:

$$\delta'(x) = \begin{cases} \frac{1}{h}c, & x = 0, \\ 0, & x \neq 0. \end{cases}$$

Действительно, применяя формулу трапеций для приблизительного вычисления интеграла $\delta(x)$ в h-окрестности нуля используя эту сеточную функцию, получим:

$$\int_{-h}^{h} \delta(x)dx \approx \frac{1}{2}\left(0 + \frac{1}{h}c\right)h + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{h}c + 0\right)h = \frac{1}{h}ch = c.$$

Аналогичный принцип используем для аппроксимации $f(x)$ при составлении разностной схемы.

Заметим, что в связи со структурой этого коэффициента ($k'(x) \equiv 0$) можно провести упрощение данной задачи, приведя её к форме:

$$\begin{cases} -k(x)\dfrac{d^2u(x)}{dx^2} = f(x), \\ u(a) = U_A, \qquad u(b) = U_B. \end{cases}$$

Для такой задачи можно легко записать разностную схему второго порядка точности:

$$\begin{cases} -k_m\dfrac{u_{m+1} - 2u_m + u_{m-1}}{h^2} = f_m, \qquad 1 \leq m \leq N \\ u_0 = U_A, \qquad u_N = U_B. \end{cases}$$

Здесь N – количество шагов разбиения сетки, $u_m = u(a + \frac{b-a}{N}m)$, $f_m = f(a + \frac{b-a}{N}m)$, $k_m = k(a + \frac{b-a}{N}m)$.

Такая схема легко решается методом прогонки.

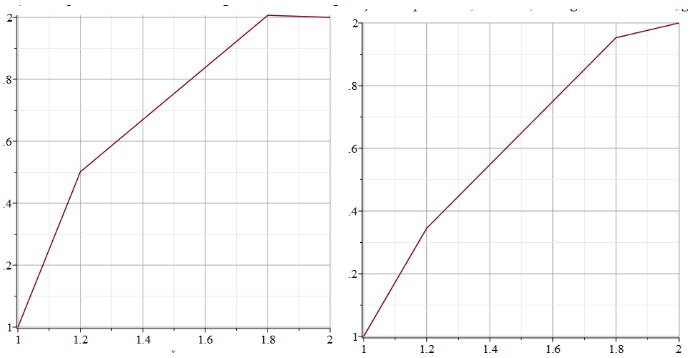
Продемонстрированный алгоритм был протестирован в рамках лабораторной работы 2, поэтому дополнительной проверки не требует.

В этой реализации функции $k(x)$ и $f(x)$ описаны следующим образом

$f := x \rightarrow piecewise\left(x < \frac{12}{10}, 0, x = \frac{12}{10}, \frac{c1}{h}, \frac{12}{10} < x < \frac{18}{10}, 0, x = \frac{18}{10}, \frac{c2}{h}, x > \frac{18}{10}, 0\right)$: *#источники тепла*

$k := x \rightarrow piecewise\left(1 \leq x < \frac{4}{3}, 3, \frac{4}{3} \leq x < \frac{5}{3}, 1, \frac{5}{3} \leq x \leq 2, 8\right)$: *#коэффициент теплопроводности* что соответствует указанному выше второму описанию коэффициента теплопроводности и способу дискретизации $f(x)$.

График результирующей функции $u(x)$ представляет собой ломаную, причём, как можно заметить при многократной подстановке новых параметров, точки разлома определяются положением источников теплоты (но не положением точек соединения различных теплопроводящих материалов, в чём можно легко убедиться). Углы наклона звеньев ломаной определяются и значениями мощности источников тепла, и коэффициентами теплопроводности. Ниже приведены примеры таких ломаных (для одинакового положения источников теплоты).



Вообще говоря, получаемые алгоритмом решения некорректны. Решая данное уравнение аналитически, можно заметить, что, места разлома ломаной и углы наклона звеньев однозначно определяются конфигурацией теплопроводящего тела $k(x)$. А так как однозначно определены точка начала ломаной (a, U_B) и форма кривой (набор отрезков фиксированной длины с фиксированным углом наклона), можно однозначно назвать точку в которой эта ломаная заканчивается, и эта точка почти наверняка не совпадает с (b, U_B). Таким образом, для данной задаче не гарантируется существование решения. Даже если оказывается, что ломаная удовлетворяет граничным условиям, оказывается что это решение не имеет непрерывной производной, хотя это прописано в условии задания.

Таким образом, разностная схема, приложенная к задачам, компоненты условия которой не обладают определённой степенью гладкости (вообще говоря зависящей от шага сетки), в общем случае не приводит к корректному решению. В этом случае уравнения системы, составленные при анализе задачи вблизи крутых точек, будут приводить к значительным погрешностям приближённого вычисления производных различных порядков.

Задание 3.

Промоделировать нестационарные процессы теплопроводности в зависимости от входных данных задачи – коэффициента теплопроводности и начальной температуры.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right) + f(x)(1 - e^{-t}), \qquad a \le x \le b, \qquad 0 < t < T,$$

$$u(0,t) = U_A, \qquad u(l,t) = U_B, \qquad 0 \le x \le T,$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \qquad a \le x \le b.$$

Параметры варианта: $k(x) = \frac{1}{sin^2(x)}$, $f(x) = 15\sin(x)^3$, $a = 0.2$, $b = 1.2$, $U_A = -1$, $U_B = -1$.

Решение.

Будем рассматривать временной промежуток $T = 5$.

Сначала приведём уравнение к виду, удобному для составления разностной схемы. Раскроем скобки

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + k'(x)\frac{\partial u}{\partial x} + f(x)(1 - e^{-t}).$$

Составим разностную схему:

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} = k_m \frac{u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m-1}^n}{h^2} + k'_m \frac{u_{m+1}^n - u_{m-1}^n}{2h} + f_m^n,$$

$$0 \le n \le N_t, \qquad 1 \le m \le N_x,$$

$$u_0^n = U_A, \qquad u_{N_x}^n = U_B, \qquad 0 \le n \le N_t,$$

$$u_m^0 = \varphi_m, \qquad 0 \le m \le N_x.$$

Здесь N_t – количество промежутков разбиения временного отрезка, N_x – количество промежутков разбиения пространственного отрезка, $h = \frac{b-a}{N_x}$ – шаг сетки по пространственной переменной, $\tau = \frac{T}{N_t}$ – шаг сетки по временной переменной.

Введённые обозначения: $u_m^n = u(a + mh, n\tau)$, $k_m = k(a + mh)$, $k'_m = k'(a + mh)$, $f_m^n = f(a + mh)e^{-\tau n}$, $\varphi_m = \varphi(a + mh)$.

В результате получена явная схема, пригодная для алгоритмизации. Отметим, для полноты решения перед выбором шагов сетки по различным переменным необходимо исследовать схему на устойчивость. Однако опустим здесь этот шаг. Как правило, случаи расхождения схемы легко обнаружить.

Однако в процессе реализации решения не удалось подобрать ни одной пары значений h и τ таких, чтобы написанная схема сходилась.

Задание 4.

Промоделировать нестационарные процессы теплопроводности в зависимости от входных данных задачи. Найти приближённое решение начально-краевой задачи для уравнения теплопроводности.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) + f(x,t), \qquad a < x < b, \qquad 0 < t \le T,$$

$$u(a,t) = g_1(t), \qquad u(b,t) = g_2(t), \qquad 0 < t \le T,$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \qquad a \le x \le b.$$

Для решения использовать явную разностную схему. Взять $h = \frac{b-a}{10}$, шаг τ выбрать из условия устойчивости. Изобразить графики зависимости приближённого решения от x при различных значениях t.

Решение.

Для решения задачи используем следующую явную разностную схему:

$$\frac{u_m^n - u_m^{n-1}}{\tau} = \frac{u_{m+1}^{n-1} - 2u_m^{n-1} + u_{m-1}^{n-1}}{h^2} + f_m^{n-1}, 1 \le m \le N_x - 1, 1 \le n \le N_t,$$

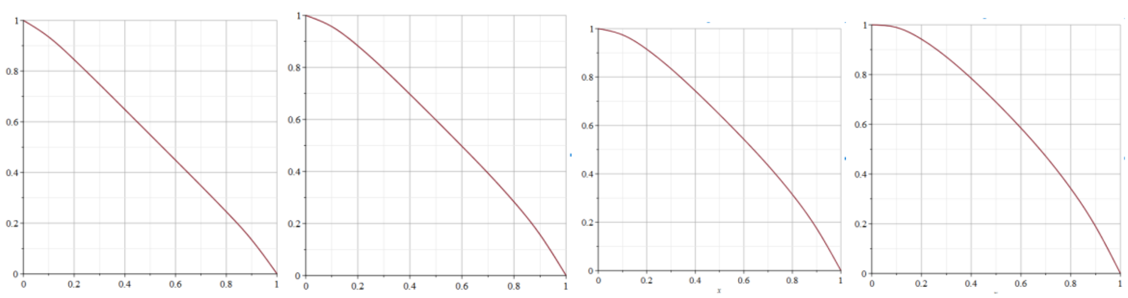
$$u_m^0 = \varphi_m, \qquad 0 \le m \le N_x,$$

$$u_0^n = g_{1_n}, \qquad u_{N_x}^n = g_{2_n}, \qquad 1 \le n \le N_t.$$

Здесь N_t – количество промежутков разбиения временного отрезка, N_x – количество промежутков разбиения пространственного отрезка, $h = \frac{b-a}{N_x}$ – шаг сетки по пространственной переменной, $\tau = \frac{T}{N_t}$ – шаг сетки по временной переменной.

Введённые обозначения: $u_m^n = u(a + mh, n\tau)$, $f_m^n = u(a + mh, n\tau)$, $\varphi_m = \varphi(a + mh)$, $g_{1_n} = g_1(n\tau)$, $g_{2_n} = g_2(n\tau)$.

На графике продемонстрированы графики $u(x,t)$, где $t = \frac{iT}{4}$, $i = 1..4$.



Тестирование программ

Для тестирования программы задания 4 составлено следующее уравнение.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ u(0,t) = 0, \qquad u(1,t) = 1, \\ u(x,0) = \sin(\pi x). \end{cases}$$

Решением этой задачи является функция $u(x,t) = e^{-\pi^2 t} \cdot \sin(\pi x)$.

Программой получено решение $u'(x,t)$ на временном промежутке $0..0.1$.

Проанимировав изменение функции $d(x,t) = u(x,t) - u'(x,t)$ получаем в результате $d(x,t) < 0.002$ на исследуемой прямоугольной области.

Заключение

В результате проделанной работы изучено нестационарное одномерное уравнение теплопроводности, способы его решения с помощью разностных схем. Рассмотрены основы теории устойчивости разностных схем.

Разработаны алгоритмы, позволяющие использовать ПЭВМ для моделирования одномерного процесса теплопроводности и схожих процессов (имеющих постановку задачи, близкую к задаче о теплопроводности).