Уравнение линейной теплопроводности

Пусть дан стержень, боковая поверхность которого теплоизолирована: через нее не происходит теплообмена с окружающей средой. Если этот стержень в начальном состоянии неравномерно нагрет, то благодаря теплопроводности в нем будет происходить передача тепла от более нагретых частей к менее нагретым. В простейшем случае, когда притока тепла извне нет и концы стержня тоже теплоизолированы, температура точек стержня с течением времени будет, изменяясь, выравниваться и в конечном итоге станет постоянной во всем стержне. Если возможен теплообмен с окружающей средой через концы стержня (торцевые сечения) или в некоторых участках стержня выделяется тепло, то распределение температуры будет более сложным.

В задаче линейной теплопроводности стержень предполагается настолько тонким, что в каждый момент времени температура всех точек данного поперечного сечения стержня (рис. 1) будет одной и той же.

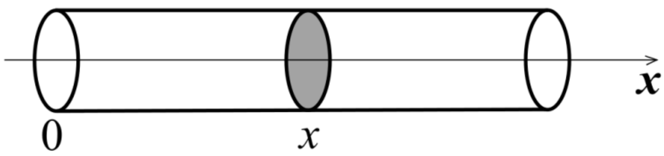

Рис. 1

Если принять ось стержня за ось Ox, то температура u будет зависеть от координаты x и времени t. При постоянном t функция $u(x, t)$ представляет зависимость температуры точек стержня в данный момент времени от их расстояния до начала координат. Частная производная $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ выражает при этом скорость изменения температуры в направлении оси Ox.

При фиксированном x функция $u(x, t)$ выражает закон изменения температуры в данном сечении стержня с течением времени.

Вывод дифференциального уравнения теплопроводности основан на следующих физических предпосылках:

1. Количество тепла, которое необходимо сообщить однородному телу, чтобы повысить его температуру на Δu, равно

$$c\rho V\Delta u \tag{1}$$

2. Количество тепла, протекающее через поперечное сечение стержня за момент времени Δt (*тепловой поток*), пропорционально площади сечения, скорости изменения температуры в направлении, перпендикулярном к сечению, и промежутку времени Δt, т. е. равно

$$-kS\frac{\partial u}{\partial x}\Delta t \tag{2}$$

где S – площадь поперечного сечения, k – *коэффициент теплопроводности*.

Величину теплового потока мы будем считать положительной, когда тепло проходит в сторону возрастания x, поэтому в формуле (2) выбран знак «минус». Если $\frac{\partial u}{\partial x} > 0$, то это значит, что с возрастанием x температура повышается. Так как тепло переходит от более нагретых участков к менее нагретым, тепловой поток будет направлен в сторону уменьшения x, т. е. его величина будет отрицательной.

Коэффициент теплопроводности k будем считать постоянным. Это оправдано, если стержень однородный, а температура меняется в небольших пределах.

Выделим участок стержня, ограниченный поперечными сечениями с абсциссами x и $x + \Delta x$ и составим для него уравнение теплового баланса.

Количество тепла, входящее через поперечное сечение с абсциссой x за промежуток времени Δt, выражается формулой (2). Если отбросить бесконечно малые величины высших порядков, то значение частной производной по x в точке $x + \Delta x$ будет равно

$$\frac{\partial u}{\partial x} + d_x\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Delta x$$

Таким образом, величина теплового потока, выходящего через сечение $x + \Delta x$, равна

$$-kS\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Delta x\right)\Delta t,$$

Взяв разность величин входящего и выходящего тепловых потоков, мы получим количество тепла ΔQ, сообщенное выбранному участку стержня за время Δt:

$$\Delta Q = -kS\frac{\partial u}{\partial x}\Delta t + kS\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Delta x\right)\Delta t = kS\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Delta x\Delta t.$$

С другой стороны, за этот же промежуток времени температура изменилась на величину $\frac{\partial u}{\partial t}\Delta t$ (с точностью до бесконечно малых высшего порядка). Поэтому по формуле (1) сообщенное количество тепла равно

$$\Delta Q = c\rho S\Delta x\frac{\partial u}{\partial t}\Delta t,$$

где объем дан формулой

$$V = S\Delta x.$$

Приравнивая полученные выражения для ΔQ и сокращая на общий множитель $S\Delta x\Delta t$, придем к уравнению

$$c\rho\frac{\partial u}{\partial t}=k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \tag{3}$$

Введем обозначение

$$a^2=\frac{k}{c\rho}$$

и окончательно получим

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \tag{4}$$

Уравнение (4) называется *уравнением теплопроводности для однородного стержня без тепловых источников*. Оно является однородным и линейным.

Постоянную

$$a=\sqrt{\frac{k}{c\rho}}$$

называют *коэффициентом температуропроводности*.

Предположим теперь, что в некоторых участках стержня может возникать или поглощаться тепло. В этом случае говорят, что внутри стержня имеются *тепловые источники*. Выделение (или поглощение) тепла будем описывать с помощью *плотности тепловых источников*. Под плотностью тепловых источников понимают функцию $F(x, t)$ такую, что на малом участке стержня $(x, x+\Delta x)$ за малый промежуток времени $(t, t+\Delta t)$ выделяется количество тепла, равное (с точностью до бесконечно малых высшего порядка)

$$F(x,t)\Delta x\Delta t \tag{5}$$

Если $F(x, t) > 0$, то тепло выделяется, а если $F(x, t) < 0$, то поглощается.

При составлении уравнения теплового баланса (3) надо учесть тепло, возникающее в рассматриваемом участке стержня. Для этого прибавим к правой части уравнения (3) величину, определяемую формулой (5) и разделенную на $S\Delta x\Delta t$. Получим:

$$c\rho\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{S}F(x,t)$$

Разделив обе части этого равенства на $c\rho$ и введя обозначение

$$g(x,t) = \frac{1}{c\rho S}F(x,t),$$

получим уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + g(x,t) \qquad (6)$$

Уравнение (6), полученное в предположении, что внутри стержня имеются тепловые источники, в отличие от уравнения (4), является неоднородным.

Начальное и краевые условия

Начальное условие для уравнения теплопроводности состоит в задании температуры во всех точках стержня в некоторый начальный момент времени. Обычно считается, что в начальный момент $t = 0$. Тогда начальное условие имеет вид:

$$u(x,0) = u\big|_{t=0} = f(x). \qquad (7)$$

где $f(x)$ – заданная функция.

Краевые условия должны выполняться там, где стержень может иметь теплообмен с окружающей средой, т. е. на торцевых сечениях (напомним, что боковая поверхность считается теплоизолированной). Пусть начало стержня совпадает с началом координат ($x = 0$), а его конец имеет абсциссу $x = l$. Наиболее просто записать краевые условия для случая, когда концы стержня поддерживаются при постоянной температуре:

$$\begin{aligned} u\big|_{x=0} &= \tilde{u}_0, \\ u\big|_{x=l} &= \tilde{u}_l, \end{aligned} \tag{8}$$

где $\tilde{u}_0$ и $\tilde{u}_l$ – заданные числа.

Можно записать и более общие краевые условия, учтя ситуацию, когда на торцевых сечениях стержня происходит теплообмен с окружающей средой по закону Ньютона. Этот закон состоит в том, что поток тепла через единицу поверхности в единицу времени пропорционален разности температур тела и окружающей среды, т. е. равен

$$h(u - \tilde{u}), \tag{9}$$

где u – температура конца стержня, $\tilde{u}$ – температура окружающей среды, h – коэффициент пропорциональности, зависящий от физических свойств стержня и среды. Коэффициент h называется *коэффициентом теплообмена*, или *коэффициентом внешней теплопроводности.* Мы будем считать его для данного торцевого сечения стержня постоянным. Условимся, что поток тепла считается положительным, когда тепло уходит из стержня в окружающую среду ($u > \tilde{u}$) и отрицательным в противоположном случае. Таким образом, $h > 0$.

Количество тепла, передаваемое со всего торцевого сечения за момент Δt, будет равно

$$h(u-\tilde{u})S\Delta t.$$

По закону сохранения энергии количество уходящего тепла должно быть равно потоку тепла, проходящего через рассматриваемое торцевое сечение в силу теплопроводности стержня. Тепловой поток, проходящий через поперечное сечение стержня в направлении оси Ox, представляется формулой (2). На правом конце стержня направление потока, идущего во внешнюю среду, совпадает с направлением оси Ox и поток равен

$$-kS\frac{\partial u}{\partial x}\Delta t\bigg|_{x=l}$$

На левом конце эти направления противоположны, поэтому поток равен

$$kS\frac{\partial u}{\partial x}\Delta t\bigg|_{x=0}$$

Внешние среды на концах стержня могут быть разными, поэтому на разных концах h и $\tilde{u}$ могут быть различными. Пусть на левом конце

$$h=h_0,$$
$$\tilde{u}=\tilde{u}_0,$$

а на правом

$$h=h_l,$$
$$\tilde{u}=\tilde{u}_l.$$

Тогда краевые условия на торцевых сечениях запишутся в виде

$$
\begin{aligned}
k\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} &= h_0\left(u|_{x=0}-\tilde{u}_0\right),\\
-k\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=l} &= h_l\left(u|_{x=l}-\tilde{u}_l\right),
\end{aligned}
\tag{10}
$$

где $\tilde{u}_0$ и $\tilde{u}_l$ – заданные температуры внешней среды, которые, вообще говоря, являются функциями времени. В наиболее простом случае их можно считать постоянными величинами.

Если какой-либо конец стержня теплоизолирован, то соответствующий коэффициент теплообмена равен нулю, и краевое условие на этом конце примет вид

$$
\frac{\partial u}{\partial x}=0.
$$

Условия (8) можно рассматривать как частный случай общих условий (10) при очень больших значениях коэффициентов теплообмена. В самом деле, записав, например, первое условие (10) в виде

$$
\frac{k}{h_0}\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0}=u|_{x=0}-\tilde{u}_0,
$$

и перейдя к пределу при $h_0 \to \infty$, получим первое из условий (8). Аналогичным образом из второго условия (10) при $h_l \to \infty$ получается второе из условий (8).

Отметим, что комбинация краевых условий на разных концах стержня может быть любой.