# Цель работы

Ознакомиться с наиболее часто применяемыми способами аппроксимации граничных условий второго рода (граничных условий Неймана) в методе конечных разностей (на примере граничных условий для одномерного нестационарного уравнения теплопроводности).

# Краткие теоретические сведения

Краевые условия должны выполняться там, где стержень может иметь теплообмен с окружающей средой. Пусть начало стержня совпадает с началом координат (), а его конец имеет абсциссу . Наиболее просто записать краевые условия для случая, когда концы стержня поддерживаюстся при постоянной температуре:

где , – заданные числа.

Можно записать и более общие краевые условия, учтя ситуацию, когда на торцевых сечениях стержня происходит теплообмен с окружающей средой по закону Ньютона. Это закон состоит в том, что поток тепла через единицу поверхности в единицу времени пропорционален разности температур тела и окружающей среды, т. е. равен

где – тепмература конца стержня, – температура окружающей среды, – коэффициент пропорциональности, зависящий от физических свойств стержня и среды. Коэффициент называется *коэффициентом теплообмена,* или *коэффициентом теплопроводности*. Мы будем считать его для данного торцевого сечения стержня постоянным. Условимся, что поток тепла считается положительным, когда тепло уходит из стержня в окружающую среду () и отрицательным в противоположном случае. Таким образом, .

Количество тепла, передаваемого со всего торцевого сечения за момент времени , будет равно

По закону сохранения энергии количество уходящего тепла должно быть равно потоку тепла, проходящего через рассматриваемое торцевое сечение в силу теплопроводности стержня, который вообще говоря равен

Таким образом, граничное условие в общем виде принимает вид

В лабораторной работе исследуются частные случаи краевых условий Ньютона. Краевое условие

названное краевым условием второго рода, получается из краевого условия Ньютона, если коэффициент теплообмена оказывается равным нулю (либо если температура внешней среды на соответствующем конце поддерживается постоянной).

# Выполнение работы

## Задание лабораторной работы (вариант 25)

Найти приближённое решение начально-краевой задачи для уравнения теплопроводности

используя явную и неявную разностные схемы.

Исходные данные для варианта: , , , , , , , .

## Выполнение задания

Решение задачи проведём в общем виде, сохраняя возможность её параметризации другими значениями , , , , , , , .

Средой разработки и выполнения алгоритма выбрана СКА Maple.

Этап 1. Задание параметров решаемой задачи.

Параметры решаемой задачи будут задаваться в коде алгоритма явным образом.



Этап 2. Задание параметров секти.

Реализуемые алгоритмы решают поставленную задачу на сетке с шагом разбиения по пространственной переменной и шагом по временной переменной, где – количество промежутков, на которые разбивается исследуемый отрезок , – количество промежутков разбиения сеткой исследуемого отрезка времени.

Значения функции в точке будем обозначать . Аналогично будем поступать с функциями , , , .

Задание параметров сетки также будет задаваться в коде программы явным образом. **

Соответствующие значения шагов и далее будут вычислены автоматически.

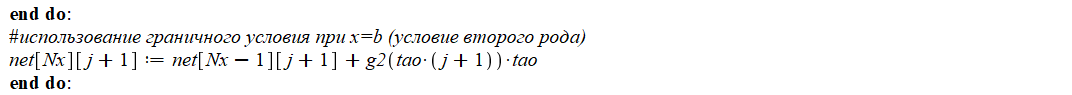
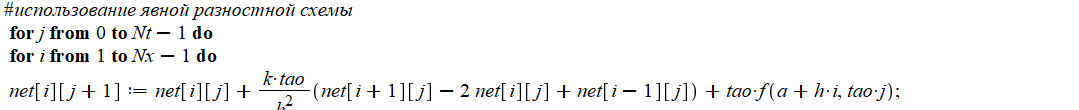
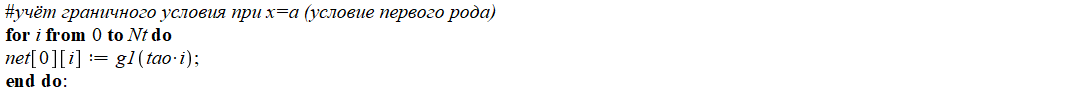
**

Этап 3. Составление алгоритмов

Явный алгоритм с первым способом разрешения ГУ второго рода испльзует следующую разностную схему:

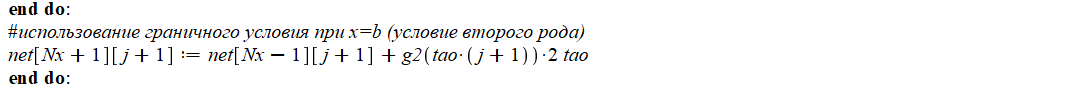
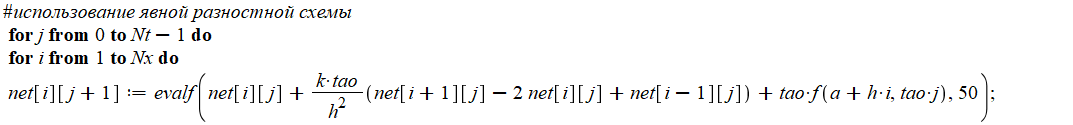
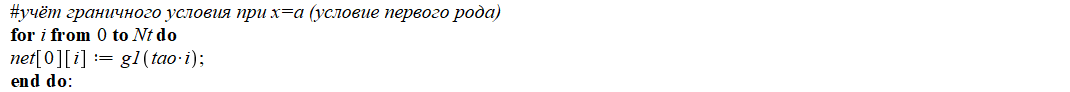
Из указанных равенств легко получить явные выражения для .

Реализация алгоритма:



Явный алгоритм со вторым способом разрешения ГУ второго рода использует ту же разностную схему, однако граничное условие второго рода разрешается по другому правилу:

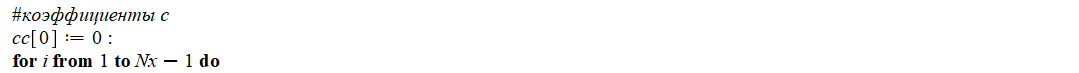
Реализация алгоритма:



Неявный алгоритм с первым способом разрешения ГУ второго рода использует следующую разностную схему:

Здесь для определения значений сеточной функции на каждом последующем временном слое необходимо решить систему линейных алгебраических уравнений, которая, как видно, в данном случае, является трёхдиагональной. Поэтому для этого можно использовать метод прогонки.

Реализация алгоритма:





Этап 4. Получение модели.

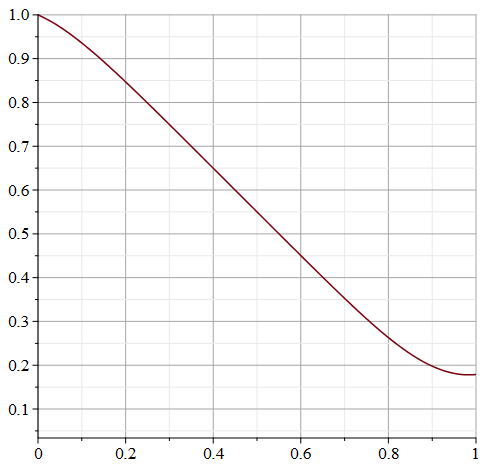
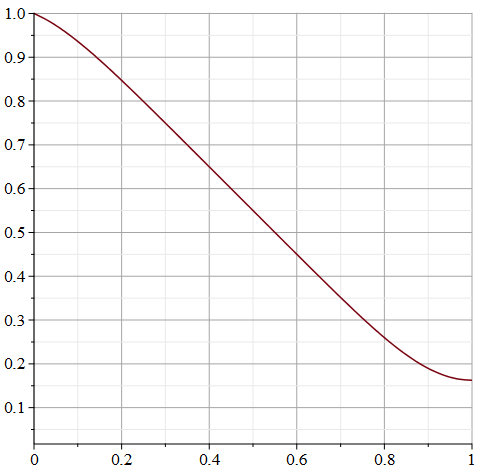
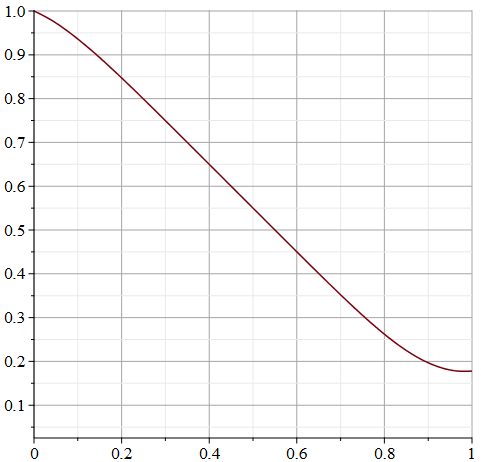
СКА Maple предоставляет набор средств для наглядного представления результатов моделирования, в том числе средства для создания анимации.

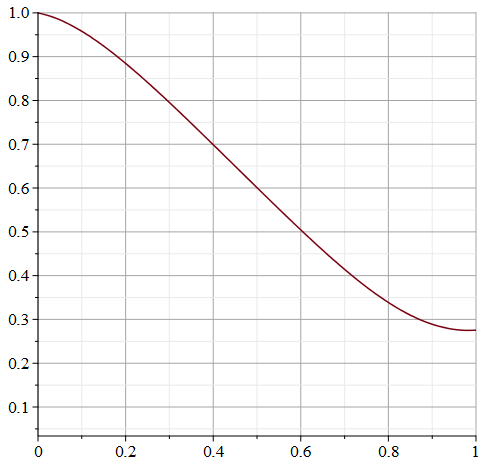
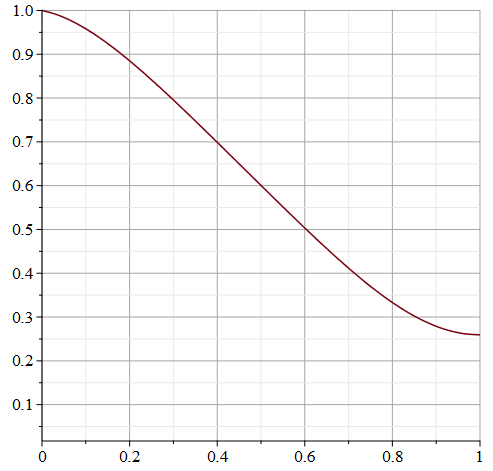
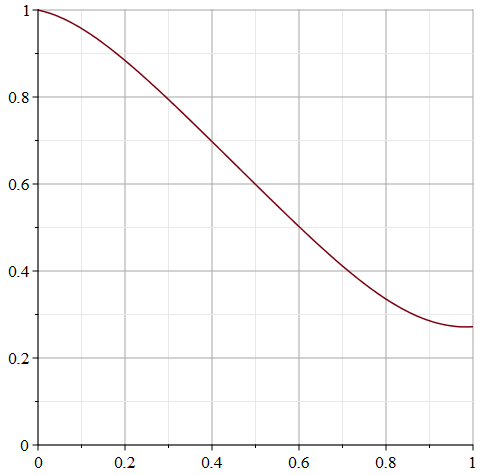
Следующая последовательность команд позволит выполнить анимацию смоделированного процесса теплопроводности.

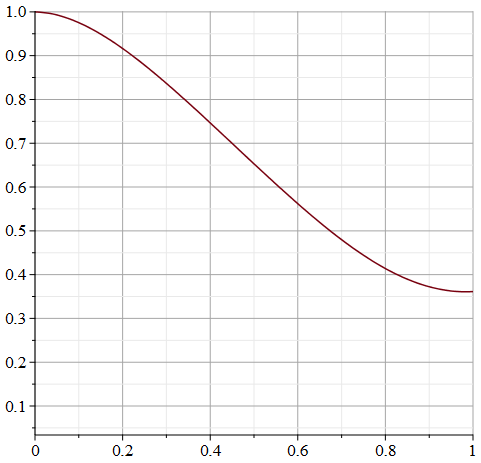
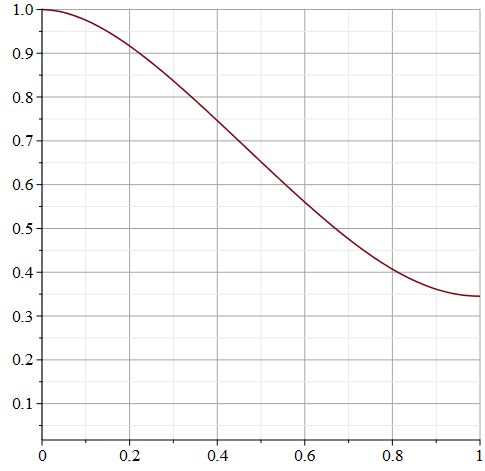
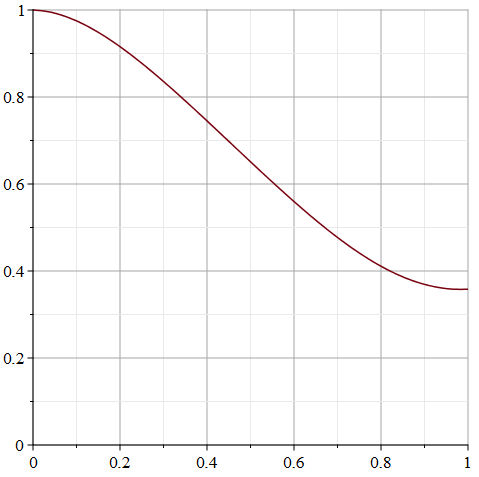


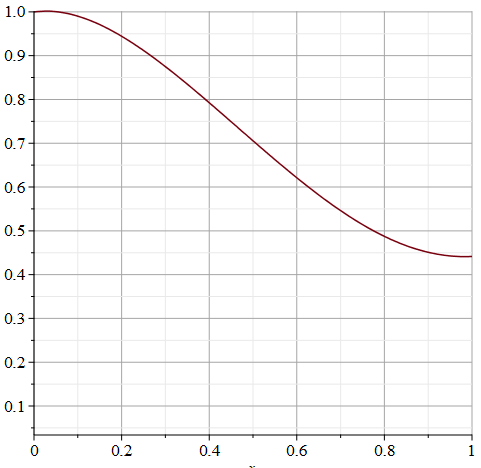
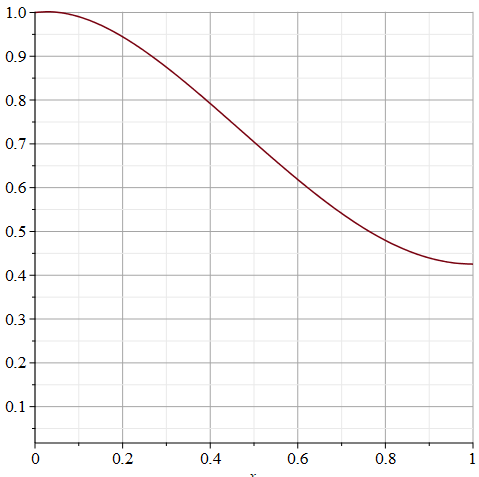
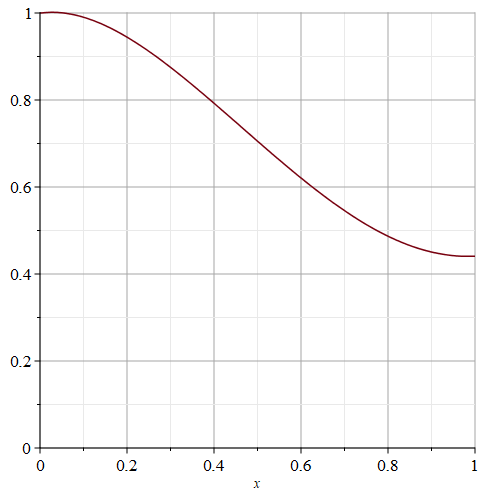
Полученная анимация представляет сечение функции плоскостью , где – момент времени, соответствующий демонстрируемому кадру.

Здесь для наглядности приведём лишь графики , , , , соответствующие графикам распределения температуры в моменты времени , , , , которые получены соответственно с использованием алгоритмов 1, 2, 3. При этом в каждом случае реализована сетка с разбиением временного отрезка на промежутков, пространственного отрезка на промежутка.

**

**

**

**

Этап 4. Анализ скорости сходимости явной явной схемы.

В этом подразделе проведём анализ скорости сходимости явной схемы (реализованной в алгоритмах 1, 2).

Примем как данное, что при выборе шагов и таким образом, чтобы они удовлетворяли условию сходимости исследуемой схемы , схема будет сходится. Порядок сходимости, вообще говоря, будет равен . Однако, если соблюдено равенство , порядок сходимости будет .

Выполним расчёты, используя алгоритм 2, выбрав достаточно большими и так, чтобы выполнялось условие . Выполнив вычисления, занесём в таблицу значения полученной сеточной функции в ммо

# Заключение

В результате проделанной работы изучены распространённые варианты граничных условий, часто имеющие место при моделировании одномерных нестационарных процессов теплопроводности, так как они возникают при создании линейных теплопроводящих каналов с соответствующим их поведением на их окончаниях (теплоизолированные концы, концы, поддерживаемые при постоянной температуре).

Изучены простые способы математического моделирования поведения таких каналов, используемые в численных расчётах.

Составлены алгоритмы для проведения этого моделирования, пригодные для вычисления на ЭВМ.