Методы оптимизации и управления
О.И. Костюкова, О.И. Дугинов

Лабораторная работа 4 «Двойственный симплекс-метод»

Рассмотрим задачу линейного программирования в канонической форме — прямую задачу

$$\begin{aligned} &c^\intercal x \to \max \\ &Ax = b \\ &x \geqslant 0, \end{aligned} \tag{1}$$

и двойственную к ней задачу

$$\begin{aligned} &b^\intercal y \to \min \\ &A^\intercal y \geqslant c, \end{aligned} \tag{2}$$

где $c \in \mathbb{R}^n$, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^\intercal \in \mathbb{R}^n$ — вектор переменных прямой задачи, $y^\intercal = (y_1, y_2, \ldots, y_m) \in \mathbb{R}^m$ — вектор двойственных переменных (переменных двойственной задачи), $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ — матрица, в которой m строк и n столбцов, $b \in \mathbb{R}^m$. Предполагаем, что $\operatorname{rank}(A) = m$.

Известно, что

а) если x — допустимый план прямой задачи (1) и y — допустимый план двойственной задачи (2), то $c^\intercal x \leqslant b^\intercal y$;

б) если x — допустимый план прямой задачи (1) и y — допустимый план двойственной задачи (2) такие, что $c^\intercal x = b^\intercal y$, то x — оптимальный план прямой задачи (1) и y — оптимальный план двойственной задачи (2).

Определение 1. Допустимый план y двойственной задачи (2) называется базисным, если существует подмножество B множества индексов переменных $\{1, 2, \ldots, n\}$ такое, что

а) $|B| = m$ (число индексов в множестве B равно числу строк m в матрице A);

б) $|A_B| \neq 0$ (определитель базисной матрицы A_B — матрицы, составленной из столбцов матрицы A с индексами из B, — не равен 0);

в) $y^\intercal = c_B^\intercal A_B^{-1}$.

Индексы переменных, принадлежащие множеству B, называются базисными, а остальные индексы — небазисными.

Определение 2. Пусть y — базисный допустимый план двойственной задачи с множеством базисных индексов B. Псевдопланом κ называется n-мерный вектор-столбец, в котором компоненты с базисными индексами определяются так

$$\kappa_B = A_B^{-1} b,$$

а все компоненты с небазисными индексами κ_N равны 0.

Известно, что если y — базисный допустимый план двойственной задачи и κ — соответствующий ему псевдоплан такой, что $\kappa \geqslant 0$, то κ — оптимальный план прямой задачи (1). Двойственный симлекс-метод решает прямую задачу (1) с помощью перебора базисных допустимых планов двойственной задачи с целью найти такой базисный допустимый план, для которого соответствующий псевдоплан неотрицателен.

Двойственный симплекс-метод

Вход: $c \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$ — параметры прямой задачи (1) и B — множество базисных индексов начального базисного допустимого плана двойственной задачи, причем множество B упорядочено.

Выход: x — оптимальный план прямой задачи (1) или сообщение о том, что прямая задача не совместна.

Шаг 1. Составим базисную матрицу A_B и найдем для нее обратную матрицу A_B^{-1}.

Шаг 2. Сформируем вектор c_B, состоящий из компонент вектора c с базисными индексами.

Шаг 3. Находим базисный допустимый план двойственной задачи $y^\intercal = c_B^\intercal A_B^{-1}$.

Шаг 4. Находим псевдоплан $\kappa^\intercal = (\kappa_B, \kappa_N)$, соответствующий текущему базисному допустимому плану y,

$$\kappa_B = A_B^{-1} b, \ \kappa_N = 0.$$

Шаг 5. Если $\kappa \geqslant 0$, то κ — оптимальный план прямой задачи (1) и метод завершает свою работу.

Шаг 6. Выделим отрицательную компоненту псевдоплана κ и сохраним ее индекс. Этот индекс базисный $j_k \in B$.

Шаг 7. Пусть Δy — это k-я строка матрицы A_B^{-1}. Для каждого индекса $j \in \{1, 2, \ldots, n\} \setminus B$ вычислим

$$\mu_j = \Delta y^\intercal A_j,$$

где A_j — это j-ый столбец матрицы A.

Шаг 8. Если для каждого индекса $j \in \{1, 2, \ldots, n\} \setminus B$ выполняется $\mu_j \geqslant 0$, то прямая задача (1) не совместна и метод завершает свою работу.

Шаг 9. Для каждого индекса $j \in \{1, 2, \ldots, n\} \setminus B$ такого, что $\mu_j < 0$ вычислим

$$\sigma_j = \frac{c_j - A_j^\intercal y}{\mu_j}.$$

Шаг 10. Найдем

$$\sigma_0 = \min\{\sigma_j : j \in \{1, 2, \ldots, n\} \setminus B \wedge \mu_j < 0\}.$$

и сохраним индекс, на котором достигается минимум, в переменной j_0.

Шаг 11. В множестве B заменим k-ый базисный индекс на индекс j_0. Переходим на Шаг 1.

Продемострируем работу метода на примере. Рассмотрим задачу

$$-4x_1 - 3x_2 - 7x_3 \to \max$$

$$\begin{aligned}
-2x_1 - x_2 - 4x_3 + x_4 &= -1\\
-2x_1 - 2x_2 - 2x_3 + x_5 &= -\tfrac{3}{2}\\
x_1 &\geqslant 0\\
x_2 &\geqslant 0\\
x_3 &\geqslant 0\\
x_4 &\geqslant 0\\
x_5 &\geqslant 0
\end{aligned}$$

Вектор коэффициентов при переменных в целевом функционале

$$c^{\mathsf{T}} = \begin{pmatrix} -4 & -3 & -7 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Матрица коэффициентов при переменных в основных ограничениях

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -4 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Вектор правых частей

$$b = \begin{pmatrix} -1 \\ -\frac{3}{2} \end{pmatrix}.$$

Начальный комплект базисных индексов $B = (j_1 = 4, j_2 = 5)$.

Итерация 1. Составим базисную матрицу

$$A_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

и найдем обратную к ней матрицу

$$A_B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Составим вектор c_B из компонент вектора c с базисными индексами

$$c_B^{\mathsf{T}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Найдем базисный допустимый план двойственной задачи

$$y^{\mathsf{T}} = c_B^{\mathsf{T}} A_B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Найдем компоненты псевдоплана с базисными индексами

$$\kappa_B = \begin{pmatrix} \kappa_4 \\ \kappa_5 \end{pmatrix} = A_B^{-1} b = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ -\frac{3}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -\frac{3}{2} \end{pmatrix}.$$

Все компоненты псевдоплана с небазисными индексами равны 0. Получаем псевдоплан

$$\kappa^{\mathsf{T}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}.$$

Заметим, что в псевдоплане есть отрицательные компоненты. Выделим одну из них

$$\kappa_5 = -\frac{3}{2}.$$

Имеем

$$j_2 = 5.$$

Положим $\Delta y^\intercal$ равным второй строке матрицы A_B^{-1}

$$\Delta y^\intercal = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Для каждого индекса $j \in \{1, 2, 3, 4, 5\} \setminus B = \{1, 2, 3\}$ находим μ_j

$$\mu_1 = \Delta y^\intercal \cdot A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix} = -2,$$

$$\mu_2 = \Delta y^\intercal \cdot A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} = -2,$$

$$\mu_3 = \Delta y^\intercal \cdot A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \end{pmatrix} = -2.$$

Для каждого индекса $j \in \{1, 2, 3, 4, 5\} \setminus B = \{1, 2, 3\}$ такого, что $\mu_j < 0$ вычислим σ_j

$$\sigma_1 = \frac{c_1 - A_1^\intercal y}{\mu_1} = \frac{-4 - \begin{pmatrix} -2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}}{-2} = 2,$$

$$\sigma_2 = \frac{c_2 - A_2^\intercal y}{\mu_2} = \frac{-3 - \begin{pmatrix} -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}}{-2} = \frac{3}{2},$$

$$\sigma_3 = \frac{c_3 - A_3^\intercal y}{\mu_3} = \frac{-7 - \begin{pmatrix} -4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}}{-2} = \frac{7}{2}.$$

Вычислим

$$\sigma_0 = \min(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = \frac{3}{2}.$$

Индекс, на котором достигается минимум,

$$j_0 = 2.$$

В множестве базисных индексов заменим индекс $j_2 = 5$ на j_0. Получим новое множество базисных индексов

$$B = \{j_1 = 4, j_2 = 2\}.$$

Итерация 2. Составим базисную матрицу

$$A_B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

и находим обратную к ней матрицу

$$A_B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Сформируем вектор

$$c_B^\intercal = \begin{pmatrix} 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

Находим вектор

$$y^\intercal = c_B^\intercal A_B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}.$$

Найдем псевдоплан κ, отвечающий этому y. Сперва найдем компоненты псевдоплана с базисными индексами

$$\kappa_B = \begin{pmatrix} \kappa_4 \\ \kappa_2 \end{pmatrix} = A_B^{-1} b = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ -\frac{3}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} \end{pmatrix}.$$

Все компоненты псевдоплана с небазисными индексами равны 0. Получаем псевдоплан

$$\kappa^\intercal = \begin{pmatrix} 0 & \frac{3}{4} & 0 & -\frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}.$$

Выделим отрицательную компоненту псевдоплана

$$\kappa_4 = -\frac{1}{4}.$$

Имеем базисный индекс

$$j_1 = 4.$$

Вектор $\Delta y^\intercal$ — первая строка матрицы A_B^{-1}

$$\Delta y^\intercal = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Для каждого индекса $j \in \{1, 2, 3, 4, 5\} \setminus B = \{1, 3, 5\}$ находим μ_j

$$\mu_1 = \Delta y^\intercal \cdot A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix} = -1,$$

$$\mu_3 = \Delta y^\intercal \cdot A_3 = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \end{pmatrix} = -3,$$

$$\mu_5 = \Delta y^\intercal \cdot A_5 = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}.$$

Для каждого индекса $j \in \{1, 2, 3, 4, 5\} \setminus B = \{1, 3, 5\}$ такого, что $\mu_j < 0$ вычислим σ_j

$$\sigma_1 = \frac{c_1 - A_1^\intercal y}{\mu_1} = \frac{-4 - \begin{pmatrix} -2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}}{-1} = 1,$$

$$\sigma_3 = \frac{c_3 - A_3^\intercal y}{\mu_3} = \frac{-7 - \begin{pmatrix} -4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}}{-3} = \frac{4}{3},$$

$$\sigma_5 = \frac{c_5 - A_5^\intercal y}{\mu_5} = \frac{0 - \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}}{-1/2} = 3.$$

Вычислим

$$\sigma_0 = \min(\sigma_1, \sigma_3, \sigma_5) = 1.$$

Индекс, на котором достигается минимум,

$$j_0 = 1.$$

В множестве базисных индексов заменим индекс $j_1 = 4$ на j_0. Получим новое множество базисных индексов

$$B = \{j_1 = 1, j_2 = 2\}.$$

Итерация 3. Составим базисную матрицу

$$A_B = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$$

и находим матрицу обратную к ней

$$A_B^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{2} \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Находим псевдоплан κ

$$\kappa_B = \begin{pmatrix} \kappa_1 \\ \kappa_2 \end{pmatrix} = A_B^{-1} b = \begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{2} \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ -\frac{3}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

и

$$\kappa_N = \begin{pmatrix} \kappa_3 \\ \kappa_4 \\ \kappa_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Получаем

$$\kappa^{\mathsf{T}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Так как $\kappa \geqslant 0$, то метод завершает свою работу, возвращая оптимальный план κ.

Ответ: $\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.