Лабораторная работа 3 «Задача распределения ресурсов»

Пусть имеется $Q \in \mathbb{Z}$ единиц однородного ресурса и $P \in \mathbb{N}$ агентов. Выделяя $x \in \mathbb{Z}$ единиц имеющегося ресурса i-му агенту, мы получаем прибыль в размере $f_i(x)$ единиц. Необходимо распределить весь имеющийся ресурс между агентами так, чтобы максимизировать суммарную прибыль. Предполагается, что любому агенту можно передать любое целое количество ресурсов от 0 до Q единиц.

Априори, мы не знаем вид функций $f_i(x)$ прибыли и, вообще говоря, эти функции могут не быть монотонно возрастающими на всей области определения. Последнее означает, что увеличение объема передаваемого агенту ресурса не всегда приводит к увеличению прибыли.

Традиционно, функции прибыли задаются в виде матрицы A. В матрице A в точности P строк и $Q+1$ столбцов. Индексация строк матрицы A начинается с единицы, а индексация столбцов начинается с нуля. Элемент матрицы A, стоящий в i-й строке и j-м столбце равен прибыли, которую мы получим от i-го агента, если отдадим ему j единиц ресурса. В задаче требуется распределить Q единиц ресурса между P агентами таким образом, чтобы получить максимальную суммарную прибыль от всех агентов.

Один из стандартных подходов к решению этой задачи основан на идеях динамического программирования. В качестве размера задачи выберем пару чисел (p, q), где $p \in \{1, 2, \ldots, P\}$ — это параметр, характеризующий число агентов, а $q \in \{0, 1, \ldots, Q\}$ — это параметр, определяющий количество единиц ресурса. Функция Беллмана $B(p, q)$ зависит от размера задачи и каждой паре чисел (p, q) сопоставляет число, равное максимальной прибыли, которую можно получить, распределив q единиц ресурса между первыми p агентами.

Для нахождения значений функции Беллмана составим рекуррентное соотношение, которое называется уравнением Беллмана. Для этого рассмотрим два случая $p = 1$ и $p \geqslant 2$.

Случай 1. Пусть $p = 1$. Тогда имеется один агент — первый агент. Единственная возможность, которая имеется — это отдать весь имеющийся запас ресурса в количестве q единиц этому агенту. В результате мы получим прибыль, равную $A(p, q)$. Поэтому

$$\forall\, q \in \{0, 1, \ldots, Q\} \quad B(p, q) = A(p, q). \tag{1}$$

Случай 2. Пусть $p \geqslant 2$. Требуется найти максимальный размер прибыли $B(p, q)$, которую мы можем получить, распределив q единиц ресурса между первыми p агентами. Рассмотрим последнего из первых p агентов. Сколько единиц ресурса мы можем передать ему? Можем передать $0, 1, \ldots, q$ единиц ресурса.

Рассмотрим ситуацию, в которой p-му агенту мы отдаем 0 единиц ресурса. От этого агента получим прибыль в размере $A(p, 0)$. При этом у нас останется q единиц ресурса, которые мы должны распределить между первыми $(p-1)$

агентами. Какую максимальную прибыль извлечем при распределении q единиц ресурса между первыми $(p-1)$ агентами? Ответ: $B(p-1,q)$. Суммарная прибыль составит $A(p,0)+B(p-1,q)$.

Рассмотрим ситуацию, когда агенту с порядковым номером p мы передаем 1 единицу ресурса. От него мы получим прибыль в размере $A(p,1)$. У нас останется еще $(q-1)$ единиц ресурса, которые мы должны распределить между первыми $(p-1)$ агентами. Какую максимальную прибыль можно получить? Ответ: $B(p-1,q-1)$. Тогда суммарная прибыть составит $A(p,1)+B(p-1,q-1)$.

Рассмотрим общую ситуацию, в которой агенту с порядковым номером p мы отдаем i единиц ресурса. От него получим прибыль $A(p,i)$. Оставшиеся $(q-i)$ единиц ресурса мы должны распределить оптимальным образом между первыми $(p-1)$ агентами. Максимальная прибыль при этом составит $B(p-1,q-i)$. Суммарно получим прибыль $A(p,i)+B(p-1,q-i)$.

Наконец, рассмотрим ситуацию, в которой p-му агенту мы отдаем q единиц ресурса. Прибыль, которую мы получим от него, равна $A(p,q)$. Остаточный объем ресурса составит 0 единиц. Поэтому от первых $(p-1)$ агентов получим прибыль в размере $B(p-1,0)$. Суммарная прибыль равна $A(p,q)+B(p-1,0)$.

Размер максимальной прибыли, которую получим, распределив q единиц ресурса между первыми p агентами, равен максимальному из $(q+1)$ найденных суммарных прибылей

$$\forall\, q \in \{0,1,\dots,Q\} \quad B(p,q) = \max_{i\in\{0,1,\dots,q\}} (A(p,i)+B(p-1,q-i)). \tag{2}$$

Рекуррентное соотношение Беллмана состоит из двух уравнений (1), (2). Идея состоит в том, чтобы, используя рекуррентное соотношение Беллмана, найти значения $B(p,q)$ для каждой пары (p,q), где $p \in \{1,2,\dots,P\}$ и $q \in \{0,1,\dots,Q\}$. Соответствующая процедура выглядит следующим образом:

Процедура 1 Прямой ход метода динамического программирования

for $p = 1$ **to** P **do**
  for $q = 0$ **to** Q **do**
    if $p = 1$ **then**
      $B(p,q) = A(p,q)$
      $C(p,q) = q$
    else
      $B(p,q) = \max\{A(p,i)+B(p-1,q-i) : i \in \{0,\dots,q\}\}$
      $C(p,q) = i$, где i — это величина, на которой достигается максимум
    end if
  end for
end for
return $B(P,Q)$ ▷ макс. прибыль от распределения всего ресурса между всеми агентами

Как найти оптимальное распределение Q единиц ресурса между P агентами? Вместе со значениями функции $B(p,q)$ будем вычислять значения $C(p,q)$, где $C(p,q)$ — это количество единиц ресурса, которое необходимо передать p-му агенту, чтобы получить максимальную прибыль при распределении q единиц ресурса между первыми p агентами.

Процедура 2 Обратный ход метода динамического программирования

$q = Q$
$p = P$
while $p > 0$ **do**
    выделим p-му агенту $C(p, q)$ единиц ресурса
    $p = p - 1$
    $q = q - C(p, q)$
end while

Пример. Пусть имеется $P = 3$ агента и $Q = 3$ единиц ресурсов. Пусть функции прибыли заданы следующей матрицей:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

С помощью приведенных выше процедур найдем матрицы B и C

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & 4 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Матрицы B и C заполняются построчно, начиная с первой строки.

Строка 1. Для каждого $q \in \{0, 1, 2, 3\}$ находим значения $B(1, q)$ и $C(1, q)$ по следующим правилам: $B(1, q) = A(1, q)$ и $C(1, q) = q$. Первая строка матрицы B совпадает с первой строкой матрицы A, а первая строка матрицы C состоит из подряд идущих целых чисел, начиная с 0.

Строка 2. Для того, чтобы заполнить вторую строку в матрице B и матрице C воспользуемся (2). Положим $p = 2$.

Для $q = 0$

$$B(2, 0) = \max(\underbrace{A(2, 0) + B(2 - 1, 0)}_{i=0}) = \max(0 + 0) = 0.$$

Так как максимум достигается при $i = 0$, то $C(2, 0) = 0$.

Для $q = 1$

$$B(2, 1) = \max(\underbrace{A(2, 0) + B(2 - 1, 1 - 0)}_{i=0}, \underbrace{A(2, 1) + B(2 - 1, 1 - 1)}_{i=1}) =$$
$$= \max(0 + 1, 0 + 0) = 1.$$

Так как максимум достигается при $i = 0$, то $C(2, 1) = 0$.

Для $q = 2$

$$B(2, 2) = \max(\underbrace{A(2, 0) + B(2 - 1, 2 - 0)}_{i=0}, \underbrace{A(2, 1) + B(2 - 1, 2 - 1)}_{i=1},$$
$$\underbrace{A(2, 2) + B(2 - 1, 2 - 2)}_{i=2}) = \max(0 + 2, 0 + 1, 1 + 0) = 2.$$

Для $q = 3$

$$B(2,3) = \max(\underbrace{A(2,0) + B(2-1, 3-0)}_{i=0}, \underbrace{A(2,1) + B(2-1, 3-1)}_{i=1},$$
$$\underbrace{A(2,2) + B(2-1, 3-2)}_{i=2}, \underbrace{A(2,3) + B(2-1, 3-3)}_{i=3}) =$$
$$= \max(0+2, 0+1, 1+0) = 2.$$

Так как максимум достигается при $i = 0$, то $C(2,3) = 0$.

Строка 3. Найдем элементы в третьей строке матрицы B и матрицы C. Положим $p = 3$.

Для $q = 0$

$$B(3,0) = \max(\underbrace{A(3,0) + B(2, 0-0)}_{i=0}) = \max(0+0) = 0.$$

При $i = 0$ значение $C(3,0) = 0$.

Для $q = 1$

$$B(3,1) = \max(\underbrace{A(3,0) + B(2, 1-0)}_{i=0}, \underbrace{A(3,1) + B(2, 1-1)}_{i=1}) = \max(0+1, 2+0) = 2.$$

Так как максимум достигается при $i = 1$, то $C(3,1) = 1$.

Для $q = 2$

$$B(3,2) = \max(\underbrace{A(3,0) + B(2, 2-0)}_{i=0}, \underbrace{A(3,1) + B(2, 2-1)}_{i=1},$$
$$\underbrace{A(3,2) + B(2, 2-2)}_{i=2}) = \max(0+2, 2+2, 2+0) = 4.$$

Так как максимум достигается при $i = 1$, то $C(3,2) = 1$.

Для $q = 3$

$$B(3,3) = \max(\underbrace{A(3,0) + B(2, 3-0)}_{i=0}, \underbrace{A(3,1) + B(2, 3-1)}_{i=1},$$
$$\underbrace{A(3,2) + B(2, 3-2)}_{i=2}, \underbrace{A(3,3) + B(2, 3-3)}_{i=3}) =$$
$$= \max(0+3, 2+2, 2+1, 3+0) = 4.$$

Так как максимум достигается при $i = 1$, то $C(3,3) = 1$.

Максимальная прибыль, которую можно получить от распределения $Q = 3$ единиц ресурса среди $P = 3$ агентов, равна $B(3,3) = 4$. Для того, чтобы найти оптимальное распределение ресурсов исследуем матрицу C. Изначально, имеется $Q = 3$ единиц ресурсов и $P = 3$ агентов. Так как $C(P,Q) = C(3,3) = 1$, то третьему агенту мы выделяем 1 единицу ресурсов. Свободными останутся две единицы ресурса и два агента. Так как $C(2,2) = 0$, то второму агенту выделим 0 единиц ресурса. Останутся две единицы ресурсов и один агент. Так как $C(1,2) = 2$, то первому агенту выделим две единицы ресурсов.