Паросочетания в графе

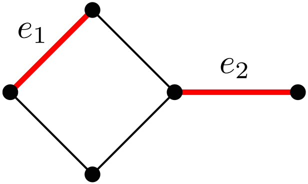
Часть 1. Максимальное паросочетание, теорема Бержа

Дугинов О.И.
email: oduginov@gmail.com

БГУ, 2013

Определения

- Пусть дан неориентированный граф $G = (V, E)$. Подмножество $M \subseteq E$ называется **паросочетанием**, если любые два ребра из M не имеют общих концов.
- Пример:



$M = \{e_1, e_2\}$ — паросочетание

Задача о максимальном паросочетании

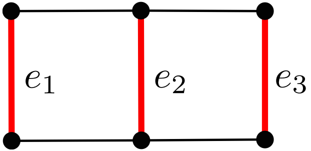
Задача

Для заданного графа $G = (V, E)$ требуется построить паросочетание M, мощность которого максимальна.

- У этой задачи имеется два аспекта:
  1. Первый — алгоритмический: граф нам выдали и мы хотим построить максимальное паросочетание.
  2. Второй аспект — комбинаторный (абстрактный): например, как охарактеризовать паросочетание максимального размера?

Совершенное паросочетание

- Паросочетание M в графе $G = (V, E)$ называется **совершенным**, если M покрывает все вершины графа, т.е. каждая вершина $v \in V$ инцидентна одному из ребер в M.
- Пример:



$M = \{e_1, e_2, e_3\}$ — совершенное паросочетание

Лемма

Если количество вершин в графе нечетно, то в нем нет совершенного паросочетания.

Совершенное паросочетание

- С совершенным паросочетанием связано две задачи:
  1. алгоритмическая задача — найти в графе совершенное паросочетание (частный случай задачи о максимальном паросочетании),
  2. теоретико-графовая — как описать графы, которые имеют совершенное паросочетания.

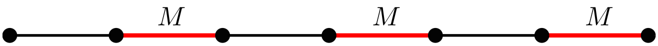
Максимальное паросочетание в графе

- Как построить максимальное паросочетание в графе?
- Один из подходов следующий: начиная с произвольного паросочетания графа
  - находим способ локально перестроить текущее паросочетание с целью увеличения его размера;
  - повторяем те же действия с новым паросочетанием;
  - процесс продожается до тех пор пока не достигнем максимального паросочетания.
- Необходимо уметь отличать максимальное паросочетание от не максимального.
- Для этого нам понадобятся два объекта: чередующаяся и увеличивающая цепь.

Чередующаяся цепь

Определение

Пусть в графе G зафиксировано некоторое паросочетание M. Цепь P в графе называется **чередующейся** *(alternating path) относительно M, если эта цепь устроена следующим образом: в этой цепи идут попеременно ребра то из паросочетания M, то не из M.*

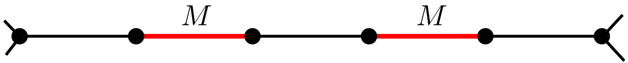


Чередующаяся цепь.

Увеличивающая цепь

Определение

Цепь P называется **увеличивающей** *(augmenting path), если P является чередующейся цепью и концевые вершины P непокрыты реберами из паросочетания M.*

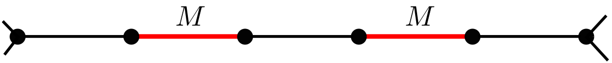


Увеличивающая цепь.

- Наличие увеличивающей цепи в графе говорит о том, что паросочетание M не является максимальным, так как существует локальная перестройка, которая позволяет увеличить количество ребер в паросочетании.

Увеличение

- Такая локальная перестройка называется **увеличением** (augmentation).
- Пусть M — паросочетание, а P — увеличивающая цепь.



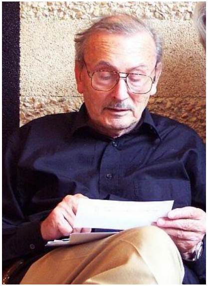
- Рассмотрим M' — новое паросочетание, которое получается из M так: рассмотрим ребра цепи P и те из них, которые принадлежат M — удалим из M, а те которые не из M — добавим.
- Таким образом, $M' = M \Delta P = (M \setminus P) \cup (P \setminus M)$.
- Очевидно, $|M'| = |M| + 1$.

Теорема Бержа I

Теорема (C. Berge, 1957)

Паросочетание является максимальным тогда и только тогда, когда нет увеличивающих цепей.

Доказательство:
Необходимость очевидна.
Достаточность. Докажем контрапозицию: если паросочетание M не максимально, то существует увеличивающая цепь.



К. Берж
(1926 — 2002)

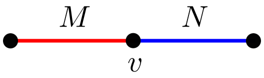
- Пусть $M \subseteq E$ — паросочетание в $G = (V, E)$, которое не является максимальным.
- Следовательно, существует паросочетание $N \subseteq E$ такое, что $|N| > |M|$.

- Предлагается, используя N и M, построить в $G = (V, E)$ увеличивающую цепь (относительно M).
- Для этого рассмотрим специальный граф $H = (V, M \Delta N)$.

Утверждение

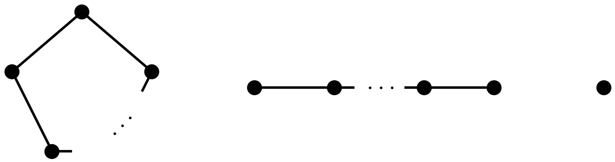
$deg_H(v) \leq 2$ для любой вершины v графа H.

Доказательство:
Рассмотрим в графе H вершину v. Одно ребро, инцидентное вершине v, — из M, а второе ребро — из N.



$\square$

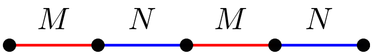
- Известно, что любой граф, в котором степень каждой вершины не больше 2, представляет собой дизъюнктное объединение простых циклов, простых цепей и изолированных вершин:



- Введем более подробную классификацию графов, которые являются связными компонентами графа H.
- **Элементами I-го типа** назовем все простые цепи **четной** длины. В каждой такой цепи ребра из M и ребра из N чередуются и концевые вершины покрыты ребрами из разных паросочетаний.

Теорема Бержа IV

- **Элементы II-го и III-го типов** — это простые цепи **нечетной** длины. Такие цепи также состоят из чередующихся ребер из M и из N. Однако, концевые вершины таких цепей будут покрыты ребрами одного и того же типа.
- **Элементами II-го типа** будем считать все простые цепи, концевые вершины которых покрыты ребрами из M, а **элементами III-го типа** будем считать цепи нечетной длины, концы которых покрыты ребрами из N.

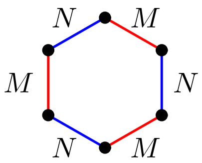
I


II


III

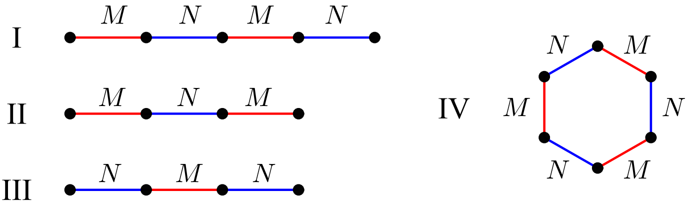

- К **IV-му типу элементов** отнесем все простые циклы.

IV



- В графе H все циклы четной длины. Нечетных циклов нет, так как в цикле ребра из M и ребра из N чередуются.
- Подсчитаем в каких элементах каких ребер больше?

Теорема Бержа VI



- В элементах типа I:

  $\boxed{\text{кол-во ребер из } \boldsymbol{M} = \text{кол-во ребер из } \boldsymbol{N}.}$

- В элементах типа II:

  $\boxed{\text{ребер из } \boldsymbol{M} \text{ на одно больше чем ребер из } \boldsymbol{N}.}$

- В элементах типа III:

  $\boxed{\text{ребер из } \boldsymbol{N} \text{ на одно больше чем ребер из } \boldsymbol{M}.}$

- В элементах типа IV:

  $\boxed{\text{кол-во ребер из } \boldsymbol{M} = \text{кол-во ребер из } \boldsymbol{N}.}$

Теорема Бержа VII

- Поэтому

$$|N| - |M| = c(III) - c(II),$$

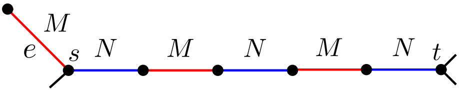
где $c(II)$ — кол-во элементов типа II и $c(III)$ — кол-во элементов III.

$$c(III) = (|N| - |M|) + c(II) > 0.$$

- Следовательно, элементы типа III существуют. Т.е. в графе G существует чередующаяся (относительно M) цепь P:

- Докажем, что эта цепь является увеличивающей (относительно M). Для этого достаточно показать, что концы этой цепи — вершины s и t — не покрыты ребрами из M.

Теорема Бержа VIII



- Если вершина s покрыта ребром $e \in M$ и в цепи P его нет, то такое может произойти только по одной причине, а именно ребро e принадлежит N (так как при взятии симметрической разности M и N ребро e должно исчезнуть). Однако, ребро e не может принадлежать N.
- Для вершины t работает то же самое.
- Следовательно, цепь P является увеличивающей в графе G.

$\square$

- На основе этой теоремы можно построить алгоритм, который находит максимальное паросочетание в двудольном графе.

Алгоритм

- Для заданного двудольного графа G требуется построить максимальное паросочетание.
- Алгоритм начинает работать с пустого паросочетания и итеративно улучшает паросочетание пока это возможно:

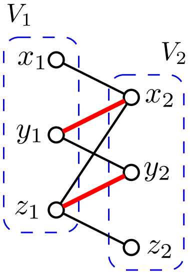
Алгоритм 1: Bipartite-Matchings

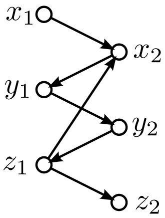
Вход : $G = (V, E)$ — двудольный граф
Выход: Максимальное паросочетание в G

while $\exists$ *увеличивающая цепь* P **do**
    $M \leftarrow M \Delta P$;
end
return M;

- Количество итераций алгоритма не больше $|V|$.

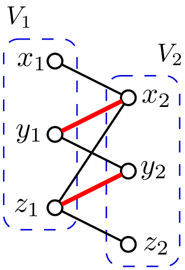
- Для распознавания увеличивающих цепей в двудольном графе $G = (V, E)$ с долями V_1, V_2 предлагается превратить G в ориентированный граф.
- Если ребро $\{u, v\} \in E$, где $u \in V_1$ и $v \in V_2$ не принадлежит паросочетанию M, то мы ориентируем это ребро от вершины u к вершине v; в противном случае задаем направление от вершины v к вершине u.

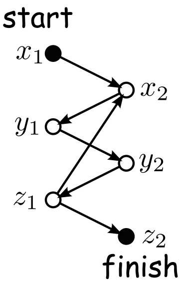




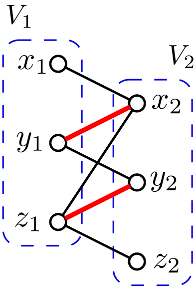
Распознавание увеличивающих цепей

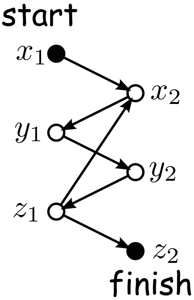
- Отметим вершины из V_1, не покрытые ребрами из паросочетания и назовем их **стартовыми**.
- Выделим вершины из V_2, не покрытые ребрами из паросочетания и назовем их **финишными**.





Распознавание увеличивающих цепей





- Чередующиеся цепи в графе взаимно однозначно соответствуют путям в орграфе.
- Чтобы концы чередующейся цепи не были покрыты ребрами из паросочетания, соответствующий ему путь должен идти из какой-то стартовой вершины в финишную.

Распознавание увеличивающих цепей

- Тем самым задача распознавания увеличивающих цепей в двудольном графе сводится к задаче поиска пути в орграфе, идущего от какой-то стартовой вершины к финишной (задача о достижимости, Reachibility problem).
- Последняя задача может быть решена за время $\mathcal{O}(|E|)$ с помощью поиска в глубину или поиска в ширину.
- Время работы алгоритма 1 составляет $\mathcal{O}(|V| \cdot |E|)$.