Лабораторная работа 4
«Задача о целочисленном рюкзаке»

Пусть имеется n различных предметов, у каждого из которых есть две характеристики — объем и ценность. Предметы упорядочены и занумерованы натуральными числами $1, 2, \ldots, n$. Обозначим через $v_i \in \{z \in \mathbb{Z} : z \geqslant 0\}$ — объем i-го предмета, а через $c_i \in \{z \in \mathbb{Z} : z \geqslant 0\}$ — его ценность. Ценность предмета — это количественная мера того на сколько ценный предмет. Чем больше значение этой величины, тем более ценный предмет.

Есть рюкзак, вместимость которого B единиц. В рюкзак можно поместить предметы, суммарный объем которых не превосходит B. Требуется выбрать предметы с условиями:

а) все выбранные предметы помещаются в рюкзак;

б) суммарная ценность выбранных предметов максимальна.

Один и тот же предмет нельзя выбрать несколько раз.

Рассмотрим алгоритм динамического программирования для решения указанной задачи. Первое, что необходимо сделать, — это разбить процесс выбора оптимального набора предметов на этапы. На каждом этапе мы решаем выбрать и поместить очередной предмет в рюкзак или нет. Второй шаг состоит в погружении задачи в семейство подобных задач меньшей размерности. Для этого необходимо выбрать параметры, характеризующие размерность задачи. Любая оптимизационная задача характеризуется рядом числовых параметров. При инвариантном погружении отвлекаются от заданных значений некоторых параметров и считают их переменными величинами. Выбор таких параметров есть в некотором смысле искусство: в каждом конкретном случае он зависит от опыта и изобретательности человека.

В нашем случае в качестве параметров размерности можно выбрать пару (k, b), где k — это число первых предметов, из которых выбираем, $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, b — это вместимость рюкзака, $b \in \{0, 1, \ldots, B\}$. Обозначим через (k, b) задачу о целочисленном рюкзаке, в которой необходимо среди первых k предметов выбрать предметы, которые, во-первых, помещаются в рюкзак вместимостью b и, во-вторых, суммарная ценность выбранных предметов максимальна. Обозначим через $OPT(k, b)$ максимальную суммарную ценность выбранных предметов в задаче (k, b). Заметим, что

$$OPT(k, b) = \max_{\substack{(x_1, \ldots, x_k) \\ v_1 x_1 + \ldots + v_k x_k \leqslant b \\ x_i \in \{0,1\},\ i = 1, \ldots, k}} \left(\sum_{i=1}^{n} c_i x_i \right).$$

Обозначим через $x(k, b)$ величину, которая принимает значение 0 или 1, при этом $x(k, b) = 1$, если последний выбранный предмет в оптимальном решении задачи (k, b) — это предмет под номером k; $x(k, b) = 0$ в противном случае. Необходимо решить задачу (n, B). Погрузим эту задачу (n, B) в семейство задач (k, b), где $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ и $b \in \{0, 1, \ldots, B\}$.

Запишем рекуррентное соотношение, выражающее максимальную ценность выбранных предметов в задаче (k, b) через максимальные стоимости задачи меньших размерностей.

Пусть $k = 1$. В нашем распоряжении есть только первый элемент. Мы можем его выбрать или нет. Если он помещается в рюкзак, то мы его выбираем. Если нет, то не выбираем. Таким образом

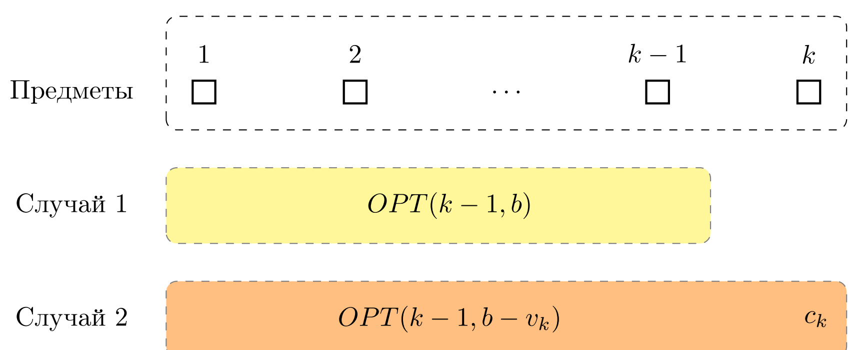
$$OPT(k, b) = \begin{cases} c_1, & \text{если } v_1 \leqslant b \text{ (выбрали 1-й предмет)}, \\ 0, & \text{если } v_1 > b \text{ (не выбрали 1-й предмет)}. \end{cases} \tag{1}$$

Если объем первого предмета не больше, чем вместимость рюкзака, то мы выбираем этот предмет и помещаем его в рюкзак. Ценность помещенного в рюкзак предмета c_1. Если объем первого предмета больше вместимости рюкзака, то мы не можем выбрать первый элемент. Ничего не выбрали и ценность выбранных предметов равна 0. В этом случае

$$x(k, b) = \begin{cases} 1, & \text{если } v_1 \leqslant b \text{ (выбрали 1-й предмет)}, \\ 0, & \text{если } v_1 > b \text{ (не выбрали 1-й предмет)}. \end{cases} \tag{2}$$

Если выбрали первый предмет, то последний выбранный предмет — это предмет под номером 1. Если ничего не выбрали, то мы должны записать символ, обозначающий, что предмет 1 не выбран, т.е. символ 0.

Пусть $k \geqslant 2$. Мы рассматриваем только первые k предметов



Случай 1. Пусть k-й предмет не выбран. Выбираем среди первых $(k-1)$ предметов предметы с максимальной суммарной ценностью, которые можно поместить в рюкзак вместимости b. Какова эта максимальная суммарная ценность? Ответ: $OPT(k-1, b)$. Последний выбранный предмет — это не предмет под номером k. Поэтому $x(k, b) = 0$.

Случай 2. Пусть выбран k-й предмет и помещен в рюкзак. Это возможно только тогда, когда $v_k \leqslant b$. Итак, в рюкзаке находится k-й предмет. Этот предмет вносит вклад в суммарную ценность, равный c_k. Сколько свободного места осталось в рюкзаке? Ответ: $b - v_k$. Выберем из первых $(k-1)$ предметов предметы с максимальной общей ценностью, которые помещаются в рюкзак вместимостью $b - v_k$. Какова максимальная возможная ценность? Ответ: $OPT(k, b-v_K)$. В итоге в рюкзаке окажутся предметы с суммарной ценностью

$OPT(k-1, b-v_k)+c_k$. Последний выбранный предмет — это предмет k, т.е. $x(k,b)=1$.

В случае 1 получим максимальную ценность предметов, помещаемых в рюкзак, $OPT(k-1,b)$. В случае 2, который реализуется когда $v_k \leqslant b$, получим максимальную ценность предметов, помещаемых в рюкзак, $OPT(k-1,b-v_k)+c_k$. В результате

$$OPT(k,b) = \begin{cases} \max(OPT(k-1,b), OPT(k-1,b-v_k)+c_k), & \text{если } v_k \leqslant b \\ OPT(k-1,b), & \text{если } v_k > b. \end{cases} \tag{3}$$

Если $v_k \leqslant b$, то, оказывается, что максимум из двух величин в (3), есть максимальная ценность в задаче (k,b). Если $v_k > b$, то второй случай не реализуется и максимальная ценность в задаче (k,b) равна $OPT(k-1,b)$.

Для последнего выбранного предмета ситуация следующая:

$$x(k,n) = \begin{cases} 1, & \text{если } v_k \leqslant b \ \wedge \ OPT(k-1,b-v_k)+c_k > OPT(k-1,b), \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} \tag{4}$$

Используя соотношения (1) – (4), с помощью прямого хода алгоритма динамического программирования найдем все значения $OPT(k,b)$ и $x(k,b)$ для каждого $k \in \{1,2,\dots,n\}$ и для каждого $b \in \{0,1,\dots,B\}$. Максимальная суммарная ценность равна $OPT(n,B)$. Затем с помощью обратного хода алгоритма динамического программирования найдем какие предметы необходимо поместить рюкзак, чтобы в рюкзаке находились предметы с максимальной суммарной ценностью. Иначе говоря, нам необходимо найти значения переменных $x_i \in \{0,1\}$, $i \in \{1,2,\dots,n\}$. Если $x_i = 1$, то i-й предмет выбран и помещен в рюкзак, и наборот. Ясно, что $x_n = x(n,B)$. Пусть значения $x_n, x_{n-1}, \dots, x_{\ell+1}$ уже найдены. Тогда $x_\ell = x(\ell, B - \sum_{i=\ell+1}^{n} v_i x_i)$