

一元三次方程求根公式

标准型: (系数 $\in \mathbb{R}$  且  $a \neq 0$ )

$$ax^3+bx^2+cx+d=0$$

重根判别式:

$$A=b^2-3ac$$

$$B=2b^3-9abc+27a^2d$$

总判别式:

$$\Delta=B^2-4A^3$$

①当  $A=B=0$  时, 方程有一个三重实根。

$$\text{公式 1: } x_1=x_2=x_3=-\frac{b}{3a}=-\frac{c}{b}=-\frac{3d}{c}$$

②当  $A \neq 0$  且  $\Delta=0$  时, 方程有一个二重实根。

$$\text{公式 2: } x_1=\frac{-bA-B}{3aA}, x_2=x_3=\frac{-2bA+B}{6aA}$$

③当  $\Delta > 0$  时, 方程有一个实根和两个虚根。

$$y_{1,2}=\frac{B \pm \sqrt{\Delta}}{2}$$

$$\text{公式 3: } x_1=\frac{-b-(\sqrt[3]{y_1}+\sqrt[3]{y_2})}{3a}, x_{2,3}=\frac{-2b+(\sqrt[3]{y_1}+\sqrt[3]{y_2})}{6a} \pm \frac{\sqrt{3}(\sqrt[3]{y_1}-\sqrt[3]{y_2})}{6a}i$$

④当  $\Delta < 0$  时, 方程有三个实根。

$$\theta = \arccos \frac{B}{2A\sqrt{A}}$$

$$\text{公式 4: } x_1=\frac{-b-2\sqrt{A} \cos \frac{\theta}{3}}{3a}, x_{2,3}=\frac{-b+\sqrt{A}(\cos \frac{\theta}{3} \pm \sqrt{3} \sin \frac{\theta}{3})}{3a}$$