一元七次方程求根公式

标准型:(系数∈R 且 $a\neq0$)

$ax^7+bx^6+cx^5+dx^4+ex^3+fx^2+gx+h=0$

重根判别式:

$A=3b^2-7ac$

$B=10b^3-35abc+49a^2d$

$C=33b^4+98a^2c^2-154ab^2c+196a^2bd-343a^3e$

$D=12b^5-70ab^3c+294a^2b^2d-1029a^3be+2401a^4f$

$E=22b^6-343a^3c^3+441a^2b^2c^2-154ab^4c-196a^2b^3d+1029a^3b^2e-4802a^4bf+16807a^5g$

$F=6b^7-49ab^5c+343a^2b^4d-2401a^3b^3e+16807a^4b^2f-117649a^5bg+823543a^6h$

$G=D^2+4CE$

$H=2C^3+2E^2-DF$

$J=B^2-E$

$K=B^5+D^3-BDF$

总判别式:$\Delta=F^2-4A^7$

①当 $A=B=C=D=E=F=0$ 时,方程有一个七重实根。

公式 1:$x_1=x_2=x_3=x_4=x_5=x_6=x_7=-\dfrac{b}{7a}=-\dfrac{c}{3b}=-\dfrac{3d}{5c}=-\dfrac{e}{d}=-\dfrac{5f}{3e}=-\dfrac{3g}{f}=-\dfrac{7h}{g}$

②当 $A\neq0$ 且 $B=C=D=E=\Delta=0$ 时,方程有三个二重实根。

公式 2:$x_1=\dfrac{-bA^3-F}{7aA^3}$ ,$x_2=x_3=\dfrac{-bA^3+\cos\frac{\pi}{7}F}{7aA^3}$ ,$x_4=x_5=\dfrac{-bA^3-\cos\frac{2\pi}{7}F}{7aA^3}$ ,$x_6=x_7=\dfrac{-bA^3+\cos\frac{3\pi}{7}F}{7aA^3}$

③当 $B=C=D=E=0$ 且 $\Delta>0$ 时,方程有一个实根和六个虚根。

$y_{1,2}=\dfrac{F\pm\sqrt{\Delta}}{2}$

公式 3:$x_1=\dfrac{-b-(\sqrt[7]{y_1}+\sqrt[7]{y_2})}{7a}$ ,$x_{2,3}=\dfrac{-b+\cos\frac{\pi}{7}(\sqrt[7]{y_1}+\sqrt[7]{y_2})}{7a}\pm\dfrac{\sin\frac{\pi}{7}(\sqrt[7]{y_1}-\sqrt[7]{y_2})}{7a}i$,

$$x_{4,5}=\frac{-b-\cos\frac{2\pi}{7}(\sqrt[7]{y_1}+\sqrt[7]{y_2})}{7a}\pm\frac{\sin\frac{2\pi}{7}(\sqrt[7]{y_1}-\sqrt[7]{y_2})}{7a}i,$$

$$x_{6,7}=\frac{-b+\cos\frac{3\pi}{7}(\sqrt[7]{y_1}+\sqrt[7]{y_2})}{7a}\pm\frac{\sin\frac{3\pi}{7}(\sqrt[7]{y_1}-\sqrt[7]{y_2})}{7a}i$$

④当 $B=C=D=E=0$ 且 $\Delta<0$ 时,方程有七个实根。

$\theta=\cos^{-1}\dfrac{F}{2A^3\sqrt{A}}$

公式 4:$x_1=\dfrac{-b-2\sqrt{A}\cos\frac{\theta}{7}}{7a}$ ,$x_{2,3}=\dfrac{-b+2\sqrt{A}\left(\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{\theta}{7}\pm\sin\frac{\pi}{7}\sin\frac{\theta}{7}\right)}{7a}$,

$$x_{4,5}=\frac{-b-2\sqrt{A}\left(\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{\theta}{7}\pm\sin\frac{2\pi}{7}\sin\frac{\theta}{7}\right)}{7a},$$

$$x_{6,7}=\frac{-b+2\sqrt{A}\left(\cos\frac{3\pi}{7}\cos\frac{\theta}{7}\pm\sin\frac{3\pi}{7}\sin\frac{\theta}{7}\right)}{7a}$$

⑤当 $C\neq0$ 且 $A=B=G=H=0$ 时,方程有一个实根和六个虚根。

公式 5:$x_1=\dfrac{-b-\sqrt[7]{\dfrac{D^3}{8C^2}}\sqrt[7]{\dfrac{2C^3}{D}}}{7a}$, $x_{2,3}=\dfrac{-b+\cos\dfrac{\pi}{7}\sqrt[7]{\dfrac{D^3}{8C^2}}-\cos\dfrac{2\pi}{7}\sqrt[7]{\dfrac{2C^3}{D}}}{7a}\pm\dfrac{\sin\dfrac{\pi}{7}\sqrt[7]{\dfrac{D^3}{8C^2}}-\sin\dfrac{2\pi}{7}\sqrt[7]{\dfrac{2C^3}{D}}}{7a}i$

$$x_{4,5}=\frac{-b-\cos\dfrac{2\pi}{7}\sqrt[7]{\dfrac{D^3}{8C^2}}+\cos\dfrac{3\pi}{7}\sqrt[7]{\dfrac{2C^3}{D}}}{7a}\pm\frac{\sin\dfrac{2\pi}{7}\sqrt[7]{\dfrac{D^3}{8C^2}}+\sin\dfrac{3\pi}{7}\sqrt[7]{\dfrac{2C^3}{D}}}{7a}i,$$

$$x_{6,7}=\frac{-b+\cos\dfrac{3\pi}{7}\sqrt[7]{\dfrac{D^3}{8C^2}}+\cos\dfrac{\pi}{7}\sqrt[7]{\dfrac{2C^3}{D}}}{7a}\pm\frac{\sin\dfrac{3\pi}{7}\sqrt[7]{\dfrac{D^3}{8C^2}}-\sin\dfrac{\pi}{7}\sqrt[7]{\dfrac{2C^3}{D}}}{7a}i$$

⑥当 $B\neq0$ 且 $A=C=J=K=0$ 时，方程有一个实根和六个虚根。

公式 6:$x_1=\dfrac{-b-\sqrt[7]{\dfrac{D^2}{B}}-\sqrt[7]{\dfrac{B^4}{D}}}{7a}$, $x_{2,3}=\dfrac{-b+\cos\dfrac{\pi}{7}\sqrt[7]{\dfrac{D^2}{B}}+\cos\dfrac{3\pi}{7}\sqrt[7]{\dfrac{B^4}{D}}}{7a}\pm\dfrac{\sin\dfrac{\pi}{7}\sqrt[7]{\dfrac{D^2}{B}}+\sin\dfrac{3\pi}{7}\sqrt[7]{\dfrac{B^4}{D}}}{7a}i$,

$$x_{4,5}=\frac{-b-\cos\dfrac{2\pi}{7}\sqrt[7]{\dfrac{D^2}{B}}+\cos\dfrac{\pi}{7}\sqrt[7]{\dfrac{B^4}{D}}}{7a}\pm\frac{\sin\dfrac{2\pi}{7}\sqrt[7]{\dfrac{D^2}{B}}+\sin\dfrac{\pi}{7}\sqrt[7]{\dfrac{B^4}{D}}}{7a}i,$$

$$x_{6,7}=\frac{-b+\cos\dfrac{3\pi}{7}\sqrt[7]{\dfrac{D^2}{B}}-\cos\dfrac{2\pi}{7}\sqrt[7]{\dfrac{B^4}{D}}}{7a}\pm\frac{\sin\dfrac{3\pi}{7}\sqrt[7]{\dfrac{D^2}{B}}-\sin\dfrac{2\pi}{7}\sqrt[7]{\dfrac{B^4}{D}}}{7a}i$$