一元七次方程求根公式

标准型:$ax^7+bx^6+cx^5+dx^4+ex^3+fx^2+gx+h=0$($a\neq0$ 且系数$\in R$)

重根判别式:

$$\begin{cases} A=3b^2-7ac \\ B=10b^3-35abc+49a^2d \\ C=33b^4+98a^2c^2-154ab^2c+196a^2bd-343a^3e \\ D=12b^5-70ab^3c+294a^2b^2d-1029a^3be+2401a^4f \\ E=22b^6-343a^3c^3+441a^2b^2c^2-154ab^4c-196a^2b^3d+1029a^3b^2e-4802a^4bf+16807a^5g \\ F=6b^7-49ab^5c+343a^2b^4d-2401a^3b^3e+16807a^4b^2f-117649a^5bg+823543a^6h \end{cases}$$

$$\begin{cases} G=D^2+4CE \\ H=2C^3+2E^2-DF \end{cases}$$

$$\begin{cases} J=B^2-E \\ K=B^5+D^3-BDF \end{cases}$$

总判别式:$\Delta=F^2-4A^7$

①当 $A=B=C=D=E=F=0$ 时,方程有一个七重实根。

公式 1: $x_1=x_2=x_3=x_4=x_5=x_6=x_7=-\frac{b}{7a}=-\frac{c}{3b}=-\frac{3d}{5c}=-\frac{e}{d}=-\frac{5f}{3e}=-\frac{3g}{f}=-\frac{7h}{g}$

②当 $A\neq0$ 且 $B=C=D=E=\Delta=0$ 时,方程有三个二重实根。

公式 2: $x_1=\frac{-bA^3-F}{7aA^3},x_2=x_3=\frac{-bA^3+\cos\frac{\pi}{7}F}{7aA^3},x_4=x_5=\frac{-bA^3-\cos\frac{2\pi}{7}F}{7aA^3},x_6=x_7=\frac{-bA^3+\cos\frac{3\pi}{7}F}{7aA^3}$

③当 $B=C=D=E=0$ 且$\Delta>0$ 时,方程有一个实根和六个虚根。

$$y_{1,2}=\frac{F\pm\sqrt{\Delta}}{2}$$

公式 3: $x_1=\frac{-b-(\sqrt[7]{y_1}+\sqrt[7]{y_2})}{7a},x_{2,3}=\frac{-b+\cos\frac{\pi}{7}(\sqrt[7]{y_1}+\sqrt[7]{y_2})}{7a}\pm\frac{\sin\frac{\pi}{7}(\sqrt[7]{y_1}-\sqrt[7]{y_2})}{7a}i,$

$$x_{4,5}=\frac{-b-\cos\frac{2\pi}{7}(\sqrt[7]{y_1}+\sqrt[7]{y_2})}{7a}\pm\frac{\sin\frac{2\pi}{7}(\sqrt[7]{y_1}-\sqrt[7]{y_2})}{7a}i,$$

$$x_{6,7}=\frac{-b+\cos\frac{3\pi}{7}(\sqrt[7]{y_1}+\sqrt[7]{y_2})}{7a}\pm\frac{\sin\frac{3\pi}{7}(\sqrt[7]{y_1}-\sqrt[7]{y_2})}{7a}i$$

④当 $B=C=D=E=0$ 且$\Delta<0$ 时,方程有七个实根。

$$\theta=\cos^{-1}\frac{F}{2A^3\sqrt{A}}$$

公式 4: $x_1=\frac{-b-2\sqrt{A}\cos\frac{\theta}{7}}{7a},x_{2,3}=\frac{-b+2\sqrt{A}\left(\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{\theta}{7}\pm\sin\frac{\pi}{7}\sin\frac{\theta}{7}\right)}{7a},$

$$x_{4,5}=\frac{-b-2\sqrt{A}\left(\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{\theta}{7}\pm\sin\frac{2\pi}{7}\sin\frac{\theta}{7}\right)}{7a},$$

$$x_{6,7}=\frac{-b+2\sqrt{A}\left(\cos\frac{3\pi}{7}\cos\frac{\theta}{7}\pm\sin\frac{3\pi}{7}\sin\frac{\theta}{7}\right)}{7a}$$

⑤当 $C\neq0$ 且 $A=B=G=H=0$ 时,方程有一个实根和六个虚根。

公式 5: $x_1=\frac{-b-\sqrt[7]{\frac{D^3}{8C^2}}-\sqrt[7]{\frac{2C^3}{D}}}{7a},x_{2,3}=\frac{-b+\cos\frac{\pi}{7}\sqrt[7]{\frac{D^3}{8C^2}}-\cos\frac{2\pi}{7}\sqrt[7]{\frac{2C^3}{D}}}{7a}\pm\frac{\sin\frac{\pi}{7}\sqrt[7]{\frac{D^3}{8C^2}}-\sin\frac{2\pi}{7}\sqrt[7]{\frac{2C^3}{D}}}{7a}i$

$$x_{4,5}=\frac{-b-\cos\frac{2\pi}{7}\sqrt[7]{\frac{D^3}{8C^2}}+\cos\frac{3\pi}{7}\sqrt[7]{\frac{2C^3}{D}}}{7a}\pm\frac{\sin\frac{2\pi}{7}\sqrt[7]{\frac{D^3}{8C^2}}+\sin\frac{3\pi}{7}\sqrt[7]{\frac{2C^3}{D}}}{7a}i,$$

$$x_{6,7}=\frac{-b+\cos\frac{3\pi}{7}\sqrt[7]{\frac{D^3}{8C^2}}+\cos\frac{\pi}{7}\sqrt[7]{\frac{2C^3}{D}}}{7a}\pm\frac{\sin\frac{3\pi}{7}\sqrt[7]{\frac{D^3}{8C^2}}-\sin\frac{\pi}{7}\sqrt[7]{\frac{2C^3}{D}}}{7a}i$$

⑥当 B≠0 且 A=C=J=K=0 时,方程有一个实根和六个虚根。

公式 6: $x_1=\frac{-b-\sqrt[7]{\frac{D^2}{B}}-\sqrt[7]{\frac{B^4}{D}}}{7a}, x_{2,3}=\frac{-b+\cos\frac{\pi}{7}\sqrt[7]{\frac{D^2}{B}}+\cos\frac{3\pi}{7}\sqrt[7]{\frac{B^4}{D}}}{7a}\pm\frac{\sin\frac{\pi}{7}\sqrt[7]{\frac{D^2}{B}}+\sin\frac{3\pi}{7}\sqrt[7]{\frac{B^4}{D}}}{7a}i,$

$$x_{4,5}=\frac{-b-\cos\frac{2\pi}{7}\sqrt[7]{\frac{D^2}{B}}+\cos\frac{\pi}{7}\sqrt[7]{\frac{B^4}{D}}}{7a}\pm\frac{\sin\frac{2\pi}{7}\sqrt[7]{\frac{D^2}{B}}+\sin\frac{\pi}{7}\sqrt[7]{\frac{B^4}{D}}}{7a}i,$$

$$x_{6,7}=\frac{-b+\cos\frac{3\pi}{7}\sqrt[7]{\frac{D^2}{B}}-\cos\frac{2\pi}{7}\sqrt[7]{\frac{B^4}{D}}}{7a}\pm\frac{\sin\frac{3\pi}{7}\sqrt[7]{\frac{D^2}{B}}-\sin\frac{2\pi}{7}\sqrt[7]{\frac{B^4}{D}}}{7a}i$$