

# Bachelorarbeit

## Winkeldefektbedingungen für intrinsisches Delaunay-Refinement

Vorgelegt von:

Tarik Abdel-Moati Moussa Salama

Matrikelnummer: 380833

Berlin, den 19. Oktober 2022

Erstgutachter:

Prof. Dr. Marc Alexa (TU Berlin)

Zweitgutachter:

Prof. Dr. Alexander I. Bobenko (TU Berlin)

Betreuer:

Ugo Paavo Finnendahl (TU Berlin)



# Erklärung der Urheberschaft

Hiermit erkläre ich an Eides statt gegenüber der Fakultät I der Technischen Universität Berlin, dass die vorliegende, dieser Erklärung angefügte Arbeit selbstständig und nur unter Zuhilfenahme der im Literaturverzeichnis genannten Quellen und Hilfsmittel angefertigt wurde. Alle Stellen der Arbeit, die anderen Werken dem Wortlaut oder dem Sinn nach entnommen wurden, sind kenntlich gemacht. Ich reiche die Arbeit erstmals als Prüfungsleistung ein. Ich versichere, dass diese Arbeit oder wesentliche Teile dieser Arbeit nicht bereits dem Leistungserwerb in einer anderen Lehrveranstaltung zugrunde lagen.

Berlin, den 19. Oktober 2022

A handwritten signature in black ink, appearing to read 'T. Neumann', written in a cursive style.



# Danksagung

An dieser Stelle möchte ich mich bei all denjenigen bedanken, die mich während der Anfertigung dieser Abschlussarbeit unterstützt und motiviert haben.

Zuerst gebührt mein Dank Herrn Ugo Finnendahl, der meine Bachelorarbeit betreut und Herrn Prof. Dr. Marc Alexa, der sie begutachtet. Für die hilfreichen Anregungen und die konstruktive Kritik bei der Erstellung dieser Arbeit möchte ich mich herzlich bedanken.

Ein besonderer Dank gilt Herrn Carl O. R. Lutz, für seine interessanten Beiträge und Antworten auf meine Frage.

Ebenfalls möchte ich mich bei meinen Kommilitonen Lea Nicolas, Thorsten Lucke, Melanie Koser, Lysanne Passek und Joanna Stammer, bedanken, die mir mit viel Geduld, Interesse und Hilfsbereitschaft zur Seite standen. Bedanken möchte ich mich für die zahlreichen interessanten Debatten und Ideen, die maßgeblich dazu beigetragen haben, dass diese Bachelorarbeit in dieser Form vorliegt.

Außerdem möchte ich Herrn Sebastian Zimmermann und Herrn Erhard Zorn für das Korrekturlesen meiner Bachelorarbeit danken.

Abschließend möchte ich mich bei Herrn Christian Schröder bedanken, der mir mein Studium durch seine Unterstützung ermöglichte und stets ein offenes Ohr für mich hatten.

# Abstract

This thesis aims to assess the impact of angle defects on the termination of the intrinsic Delaunay-Refinement (iDR). The emergence of an angular defect on a surface means that the angles around a point do not add up to  $2\pi$ .

This leads to the following research question: What are the conditions under which the proof of termination of planar Delaunay-Refinement (pDR) algorithms may be applied to iDR for closed surface triangulations without boundary?

To answer this question, the proof of termination for known DR algorithms is analyzed in the euclidean plane. This is done to identify possible problems that could emerge in the process. Subsequently, ways to overcome these problems are introduced.

Our evaluation shows that the only angular defects that become a problem with regard to the proof of termination are those with a magnitude of  $\frac{5}{3}\pi$  or greater. It is demonstrated that defects of smaller magnitude generally have a valid proof of termination.

This shows that the Delaunay-Refinement's range of applications can be extended to surface triangulations if the angular defect is less than  $\frac{5}{3}\pi$ .

Finally, it is shown that the presumption that rules regarding handling of segments, grade and size optimality as well as relevant lemmata in the euclidean plane can also be used for surfaces is a reasonable notion.

# Zusammenfassung

Ziel der vorliegenden Arbeit ist die Untersuchung des Einflusses eines Winkeldefekts auf die Terminierung des intrinsischen Delaunay-Refinements (iDR). Das Auftreten eines Winkeldefekts bei Oberflächen bedeutet, dass sich die Winkel um einen Punkt zu weniger als  $2\pi$  addieren.

Daraus ergibt sich folgende Forschungsfrage: Unter welchen Bedingungen lässt sich der Terminierungsbeweis vom planaren Delaunay-Refinement (pDR) auf das iDR für geschlossene Oberflächentriangulierungen übertragen?

Um diese Frage zu beantworten, wird zuerst der Terminierungsbeweis des Delaunay-Refinement für die euklidische Ebene analysiert. Dabei werden die Probleme ermittelt, die sich bei der Übertragung des Beweises auf iDR ergeben könnten. Im Anschluss wird gezeigt, wie die ermittelten Probleme behandelt werden können.

Die Auswertungen ergaben, dass der Winkeldefekt erst ein Problem für die Terminierung darstellt, wenn dieser größer als  $\frac{5}{3}\pi$  ist. Für einen kleineren Defekt lässt sich die Terminiertheit beweisen.

Das zeigt, dass für einen Winkeldefekt kleiner als  $\frac{5}{3}\pi$  das Delaunay-Refinement auf Oberflächentriangulierungen erweitert werden kann.

Desweiteren wird in dieser Arbeit die Vermutung erläutert, weshalb für den Umgang mit Segmenten und Abstufungs- sowie Größenoptimalität die selben Lemmata wie für die euklidische Ebene gelten könnten.

# Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung	1
2. Verwandte Arbeiten	4
3. Grundlagen	7
4. Delaunay-Refinement	14
5. Vergleich: Planares und intrinsisches Delaunay-Refinement	18
6. Terminierung des intrinsischen Delaunay-Refinements	22
7. Abschließende Beurteilung	30
Literaturverzeichnis	32



# 1. Einleitung

In vielen Bereichen, wie z.B. der Computergrafik oder Simulation, wird zur Modellierung oder der Lösung komplexer Probleme eine Grundstruktur verwendet, die auf der Vernetzung von Punktmengen in der Ebene beruht. Die erzeugten Netze sind häufig Dreiecksnetze – sogenannten Triangulierungen. Die Triangulierung einer Punktmenge ist dabei nicht eindeutig; je nach Anwendungsfall gibt es bessere und schlechtere Triangulierungen.

In der Anwendung sind Delaunay-Triangulierung [18] aufgrund ihrer theoretischen Garantien sowie ihrer vorteilhaften Eigenschaften besonders beliebt. Diese Eigenschaften sind unter anderem die Dualität zum Voronoidiagramm [1], die Vermeidung annähernd kollinearere Dreiecke und die Maximierung des kleinsten Innenwinkels über alle Dreiecke. Diese Eigenschaften sind wichtig, um in der Weiterverarbeitung Rundungsfehler zu minimieren.

Für die Fälle, in denen z. B. der maximale kleinste Innenwinkel einer festen Knotenmenge immer noch zu klein ist, wurden *Delaunay-Refinement-Algorithmen* (siehe Kapitel 4) entwickelt. Diese Algorithmen verbessern die Qualität einer gegebenen Triangulierung durch inkrementelles Einfügen von Punkten.

In der intrinsischen Geometrie [3, 10] wird die Oberfläche eines Objektes ohne Bezug auf das Objekt oder dessen Lage im Raum als abstrakte Flächen beschrieben, die lokal euklidisch ist und vereinzelt kegelspitzenartige Singularitäten besitzt. Zur Beschreibung dürfen dabei nur Größen verwendet werden, die innerhalb der Oberfläche gemessen werden können, wie Nachbarschaftsbeziehung, Längen, Winkel u.s.w. Die intrinsische Betrachtung eines Objekts ermöglicht die Anwendung von ursprünglich für die euklidische Ebene entwickelte Verfahren auf die Oberfläche von Objekten. Dies schließt die Delaunay-Triangulierung [10] und das Delaunay-Refinement [28] ein.

Zweidimensionale Triangulierungen sind in der euklidischen Ebene bereits gut untersucht [30], lassen sich aber auch zur Repräsentation von dreidimensionalen Objekten verwenden, in dem sie die Oberfläche modellieren (siehe Abbildung 1.1).

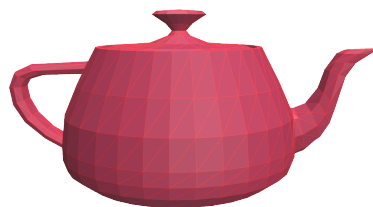


Abbildung 1.1.: Illustration der Modellierung von 3D-Objekt durch zweidimensionale Triangulierungen

Delaunay-Refinement mit einer Oberflächentriangulierung als Eingabe hat die Schwierigkeit, dass im Allgemeinen die durch die Optimierung veränderte Oberflächentriangulierung die geometrische Nähe zum Ursprungsobjekt verliert (siehe Abbildung 1.2).

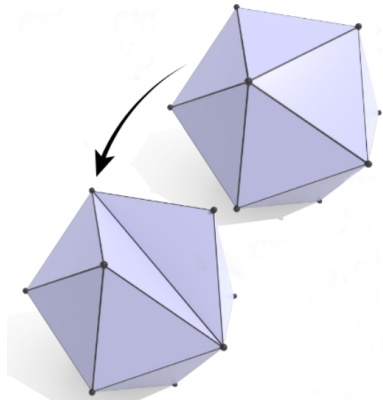


Abbildung 1.2.: Illustration dass durch die der Veränderung der Oberflächentriangulierung auch die Geometrie verändert wird [28]

Beim intrinsischen Delaunay-Refinement wiederum wird die Eingabe als Triangulierung einer abstrakten Fläche betrachtet, wodurch nur die Triangulierung selbst verändert wird, nicht aber ihre Lage im Raum. Dadurch bleibt die Geometrie des Objekts trotz Veränderung der Triangulierung erhalten. In [28] stellt Sharp u. a. ein Werkzeug für ein intrinsisches Delaunay-Refinement vor, das sich ausschließlich auf die Qualität der Triangulierung konzentriert, ohne die zugrunde liegende Geometrie zu verändern (siehe Abbildung 1.3).

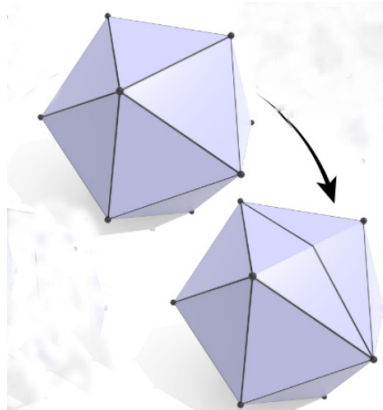


Abbildung 1.3.: Illustration dass durch intrinsische Veränderung der Oberflächentriangulierung die Geometrie nicht verändert wird [28]

Das Ziel dieser Bachelorarbeit ist es nun, zu zeigen, welche Einschränkungen bei der Übertragung des Terminierungsbeweises vom planaren Delaunay-Refinement Verfahren [7, 27, 30] auf das von Sharp u. a. in [28] vorgestellte intrinsische Delaunay-Refinement Verfahren auftreten. Dazu werden wir zuerst das traditionelle Delaunay-Refinement besprechen und vergleichend dazu das intrinsischen Delaunay-Refinement, die Unterschiede zwischen beiden und die daraus resultierenden Schwierigkeiten für den Terminierungsbeweis.

Der Hauptunterschied liegt hierbei im Winkeldefekt, der bei Oberflächen von Objekten auftreten kann. Ein Winkeldefekt liegt vor, wenn sich die Winkel einer Oberfläche um einen Punkt zu mehr oder weniger als  $2\pi$  addieren. Dies kann in der euklidischen Ebene nicht passieren: Hier addieren sich die Winkel um einen Punkt immer genau zu  $2\pi$ .

Ich zeige in dieser Arbeit, dass ein Winkeldefekt kleiner gleich  $\frac{5}{3}\pi$  keine Auswirkungen auf die Terminierung hat. Auf den Umgang mit Segmenten, Größenoptimalität und Aspekte der Abstufung werde ich nur am Rande eingehen.

## 2. Verwandte Arbeiten

In diesem Kapitel werden einige wissenschaftlichen Arbeiten vorgestellt, auf denen diese Bachelorarbeit aufbaut.

Shewchuk [29, 30] diskutiert ausführlich die Delaunay-Triangulierung und verschiedene Delaunay-Refinements Algorithmen in der euklidischen Ebene. Eine ausführliche Beschreibung des Delaunay-Refinement ist in Kapitel 4 S.14 dieser Bachelorarbeit zu finden. In seinen Arbeiten werden auch die bekanntesten Verfahren von Chew [7, 8] und Ruppert [27] vorgestellt. Da die Triangulierungen von geschlossenen stückchenweise flachen Oberfläche (StF-Oberflächen) keine Segmente enthält, wird in dieser Bachelorarbeit nicht weiter auf den Unterschied der beiden Algorithmen eingegangen. Siehe dazu und zum jeweiligen Umgang mit Segmenten: Shewchuk.

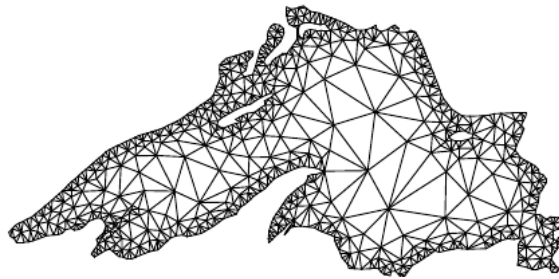


Abbildung 2.1.: Illustration des Delaunay-Refinements: Für den abgebildeten Polygonzug erzeugen Chews zweite und Ruperts Version fast die gleiche Ausgangstriangulierung [30].

Analog zur Triangulierung von Flächen in der euklidischen Ebene beschäftigen wir uns mit der Triangulierung [3] von Flächen, die im dreidimensionalen Raum eingebettet sind. Diese werden in der Mathematik vereinfacht als stückchenweise flache 2-Mannigfaltigkeiten [2] bezeichnet. Shewchuk vermutet dazu, dass sich die Lemmata, welche für Triangulierungen gelten, übertragen lassen [30, Abschnitte 5.3.2]. Diese Übertragbarkeit werden wir in Kapitel 6 auch für einige Lemmata von Ruppert [27] zeigen.

Diese Arbeit orientiert sich an der Definition von Bobenko und Springborn [3], die auf den Arbeiten [4, 14, 16] aufbaut. Sie zeigen in ihrer Arbeit, dass die Eigenschaften, die für die Delaunay-Triangulierung in der Ebene gelten, sich auch auf die Delaunay-Triangulierung von stückchenweise flachen Oberflächen [3, Definition 1] im dreidimensionalen Raum übertragen lassen [3, Definition 3].

Von Bobenko und Springborn [3] inspiriert entwickeln Fisher u. a. [10] das *incremental overlay-Schema* [10, Abschnitt 2.3]. Das Schema basiert auf dem expliziten Speichern von Kantenschnittpunkten und ist die erste Datenstruktur zur Realisierung intrinsischer Triangulierungen. Das *incremental overlay-Schema* wurde gezielt für intrinsische Kantenflips entwickelt und unterstützt darüber hinaus nur wenige weitere Operationen [28, Abschnitt 2].

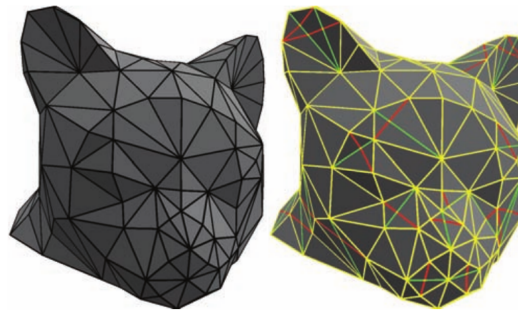


Abbildung 2.2.: Illustration des *incremental overlay-Schema*: Originale Kanten grün geflippte Kanten rot und nicht veränderte kanten gelb. Gespeichert werden die Schnittpunkte der Kanten. [10]

Sharp u. a. [28] hat mit der *signpost data structure* eine allgemeinere Datenstruktur vorgestellt [28, Abschnitt 3], welche weitere Operationen auf intrinsischen Triangulierungen ermöglicht. Mithilfe dieser Datenstruktur gelingt es ihm unter anderem, eine intrinsische Version des Delaunay-Refinement Verfahrens für Triangulierungen in der euklidischen Ebene auf Triangulierungen von stückchenweise flachen Oberflächen [3, Definition 1] anzuwenden. Das intrinsische Delaunay-Refinement von Sharp u. a. basiert auf dem zweiten Algorithmus

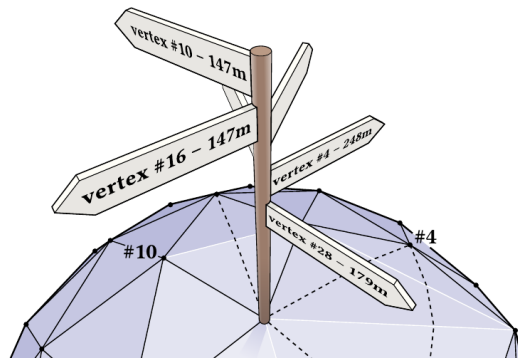


Abbildung 2.3.: Illustration des *signpost data structure*: Sie basiert auf einer Halbkanten-Datenstruktur [20], die Triangulierungen implizit codiert, indem sie die Richtung und den Abstand benachbarter Knoten speichert. Diese implizite Codierung ermöglicht die praktische Anwendung des intrinsischen Delaunay-Refinements. [10]

von Chew [8], mit der Modifikation, dass Dreiecke, die einen Knoten von Grad Eins enthalten, ignoriert werden. Da Sharp u. a. [28] zur Unterstützung seiner These nur eine empirische Betrachtung vornimmt, ist noch nicht gesichert, dass der Algorithmus mathematisch korrekt ist und für jede Eingabe terminiert. Diese Bachelorarbeit beschäftigt sich daher mit dem Beweis, dass das intrinsische Delaunay-Refinement terminiert.

Es folgen nun weitere Möglichkeiten für Refinement-Verfahren, welche jedoch nicht Teil dieser Bachelorarbeit sind.

Üngör [31] stellt das Delaunay-Refinement mit *off-center*-Einfügestrategie vor, die eine Ver-

allgemeinerung der Umkreismittelpunkt-Einfügestrategie ist.

Rand [25] zeigte bereits mithilfe der *Miller-Pav-Walkington analysis*, dass im zweidimensionalen Raum bessere Ergebnisse erzielt werden als mit dem bekannten Delaunay-Refinement. Weitere Möglichkeiten hierfür sind auch die optimale Delaunay-Triangulierung von Chen und Xu [5, 6] und die Minimal-Gewichtete-Triangulierungen von Mulzer und Rote [23].

Die genannten Algorithmen ließen sich mit der von Sharp u. a. [28] vorgestellten Datenstruktur auch leicht in eine intrinsische Form bringen.

Der Vollständigkeit halber werden an dieser Stelle noch andere Arbeiten genannt, die sich mit alternativen intrinsischen *remeshing* beschäftigt haben. Liu u. a. [19] und Xin u. a. [32] haben die intrinsische Delaunay-Triangulierung mithilfe geodätischer Methoden erzeugt. Der Vorteil dieser Methode ist, dass die Ausgabe eine extrinsische Triangulierung ist. Der Nachteil ist laut Sharp u. a. [28], dass unter Umständen viele Elemente erzeugt werden können und die Triangulierung zwar Delaunay-Eigenschaften hat, jedoch immer noch kleine Winkel aufweisen kann.

### 3. Grundlagen

Diese Arbeit befasst sich mit Winkeldefekten und ihren Auswirkungen auf die Terminierung des intrinsischen Delaunay-Refinements. Zum Verständnis sind Grundkenntnisse der computergestützten Geometrie und deren Begrifflichkeiten sowie allgemeine mathematische Grundbegriffe erforderlich. Im Folgenden werden daher einige der wichtigsten Grundbegriffe und Definitionen erläutert. Wir orientieren uns dabei in der Formulierung an den Arbeiten von Bobenko, Springborn, Fisher u. a., Sharp u. a. und Shewchuk [3, 10, 28–30], wobei wir die Notation im Sinne der Konsistenz dieser Arbeit ggf. anpassen.

#### Triangulierung

Eine Triangulierung  $M$ , gegeben durch das Tripel  $(V, E, T)$ , ist die Zerlegung einer Fläche oder Oberfläche in disjunkte Dreiecksflächen; die Dreiecke sind dabei entlang ihrer Kanten überlappungsfrei verbunden. Triangulierungen bestehen dabei im Allgemeinen nicht aus uniformen Dreiecken. Die Vereinigung der disjunkten Dreiecksflächen bildet die zerlegte Fläche.

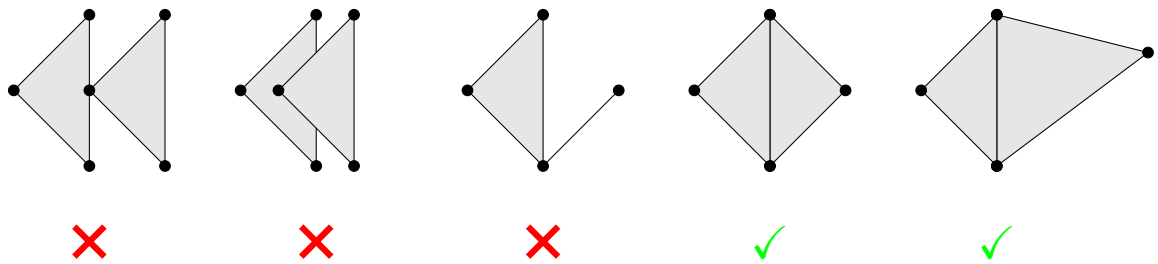


Abbildung 3.1.: Illustration von zulässigen und nicht zulässigen Flächenaufteilungen

Dabei bezeichnet  $V$  die Menge der Knoten,  $E$  die Menge der Kanten und  $T$  die Menge der Dreiecksflächen.

#### Auffaltung

Die Auffaltung eines dreidimensionalen Objektes ist die Ausbreitung seiner Oberfläche (oder Teilen davon) in der euklidischen Ebene, nachdem es an einigen Kanten aufgeschnitten worden ist.

#### Gesamtwinkel

Seien  $M = (V, E, T)$  eine Triangulierung,  $i, j, k \in V$  und  $(i, j), (i, k), (j, k) \in E$ , dann bezeichnet  $\theta_i^{j,k}$  den Winkel zwischen den Kanten  $(i, j)$  und  $(i, k)$  in einem Dreieck. Der Gesamtwinkel  $\Theta_i$  eines Knotens  $i$  bezeichnet die Summe aller zu  $i$  gehörender Innenwinkel  $\theta_i^{j,k}$ .

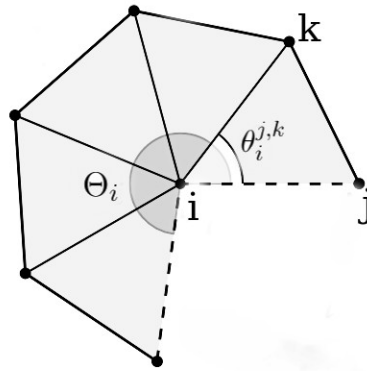


Abbildung 3.2.: Illustration Gesamtwinkel  $\Theta_i$  und Innenwinkel  $\theta_i^{j,k}$  eines Knotens  $i$  [28]

## Winkeldefekt

In der euklidischen Ebene addieren sich die Winkel um einen Knoten zu  $2\pi$ . Bei einer Oberfläche können die Winkel sich zu weniger oder mehr als  $2\pi$  addieren. Dieses Phänomen bezeichnet man in der Geometrie als Winkeldefekt. Für den Gesamtwinkel eines Knotens gilt dann:  $\Theta_i \neq 2\pi$  [26].

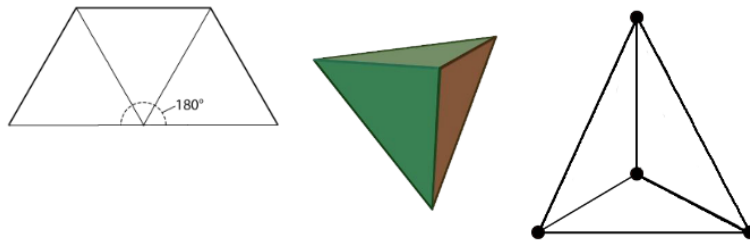


Abbildung 3.3.: Illustration eines Knotens mit Gesamtwinkel  $\pi$  und Winkeldefekt von  $\pi$  [15]

Bei einer Oberfläche ist der Winkeldefekt an einem Knoten  $i$  gleich  $2\pi - \Theta_i$ .

### Definition 3.0.1. (Kegelspitze)

Ein Knoten  $s \in V$  wird als Kegelspitze bezeichnet, wenn er einen Winkeldefekt hat.

Es werden zwei Arten von Kegelspitzen unterschieden:

- sphärische Kegelspitzen, falls  $\Theta_s < 2\pi$  und
- hyperbolische Kegelspitzen, falls  $\Theta_s > 2\pi$ .



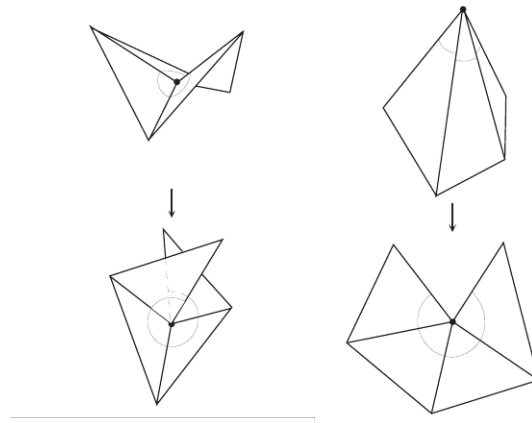


Abbildung 3.4.: Links hyperbolische Kegelspitze und rechts sphärische Kegelspitze [24]

## Delaunay-Triangulierung einer stückchenweise flachen Oberfläche

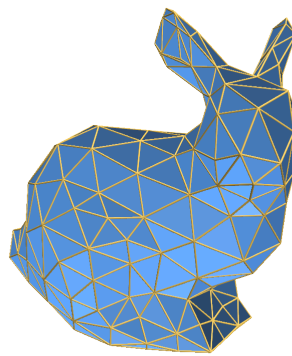


Abbildung 3.5.: Illustration der Triangulierung einer stückchenweise flachen Oberfläche

### Stückchenweise flache Oberflächen (StF-Oberflächen)

Stückweise flache Oberflächen wie in Abbildung 3.5 gezeigt sind 2-Mannigfaltigkeit mit kegelspitzenartigen Singularitäten. Intuitiv bedeutet das, dass diese Flächen lokal euklidisch sind außer an einigen singulären Punkten. Dort verhalten sie sich wie eine sphärische oder hyperbolische Kegelspitze. Kegelspitzen können im Allgemeinen dort auftreten, wo Linien zusammengeführt werden (siehe Abbildung 3.5).

### Triangulierung einer StF-Oberfläche

Sei  $M = (V, E, T)$  eine Triangulierung einer StF-Oberfläche. Dann gilt für die Menge der Kegelspitzen  $S$  der StF-Oberfläche, dass  $S \subset V$ .

Die Triangulierung einer Stf-Oberfläche ist für gewöhnlich eine Sammlung von ebenen Dreiecken im Raum (siehe Abbildung 3.5). Dies ist jedoch keine Anforderung an die Triangulierung, es wird lediglich gefordert, dass die Möglichkeit existiert, jede Fläche als Dreieck in der euklidischen Ebene aufzufalten.

Auf  $M$  sind also auch sogenannte irreguläre Dreiecke erlaubt, bei denen (zum Beispiel) ein Knoten eine (irreguläre) Kante zu sich selbst hat und die anderen beiden Kanten gleich sind oder alle drei Knoten identisch sind (siehe Abb. 3.6). Formal ist  $M$  somit ein  $\Delta$ -Komplex [21, Abschnitt 2.1].

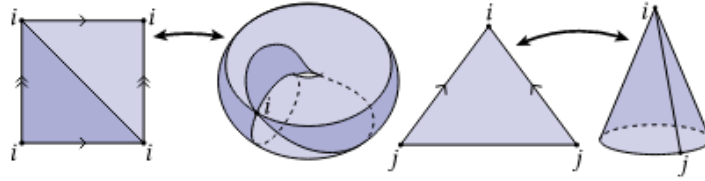


Abbildung 3.6.: Illustration von irregulären Dreiecken, die sich in der euklidischen Ebene zu gewöhnliche Dreiecken auffalten [28]

**Definition 3.0.2.** (Eingebettete leere Kreisscheibe)

Sei  $M = (V, E, T)$  eine Triangulierung einer Stf-Oberfläche. Eine eingebettete leere Kreisscheibe ist eine stetige Abbildung  $\phi : k^* \rightarrow M$ , wobei  $k$  eine offene runde Scheibe in der euklidischen Ebene und  $k^*$  ihr Abschluss ist. Jeder  $v \in K$  hat eine Nachbarschaft, die isometrisch abgebildet wird. Es gilt  $\phi(k) \cap V = \emptyset$ . Folglich sind alle Punkte in  $\phi^{-1}(V)$  im Rand von  $K$  enthalten:  $\phi^{-1}(V) \subset \partial K$ .

### Delaunay-Triangulierung einer geschlossenen Stf-Oberfläche

Sei  $M = (V, E, T)$  eine Delaunay-Triangulierung einer geschlossenen Stf-Oberfläche. Die Delaunay-Triangulierung ist dabei eine Zerlegung der Stf-Oberfläche in disjunkte Teilmengen und besteht aus folgenden Mengen: Eine Teilmenge  $C \subset M$  ist eine geschlossene Zelle der Delaunay-Triangulierung genau dann, wenn eine eingebettete leere Kreisscheibe  $\phi : k^* \rightarrow M$  existiert, sodass  $\phi^{-1}(M) \neq \emptyset$  und auf ihrem Rand genau die Elemente aus  $C$  liegen.  $C$  ist also das Bild der konvexen Hülle von  $\phi^{-1}(M)$ . Dabei unterscheidet man die Zellen an der Anzahl ihrer Knoten: 1-Zellen (Knoten), 2-Zellen (Kanten) und 3-Zellen (Flächen).

Aufgrund ihrer nützlichen Eigenschaften ist die Delaunay-Triangulierung eine der in der Praxis am häufigsten eingesetzten Triangulierungen. Die Eigenschaften sind unter anderem:

- die Dualität zum Voronoidiagramm (siehe Abb. 3.8 ) [1, 14]
- die Eigenschaft der leeren Kreisscheibe (im folgenden Delaunay-Eigenschaft genannt) (siehe Abb. 3.9)
- sie ist in der Regel eindeutig (siehe Abb. 3.10)

- jede beliebige Triangulierung kann mit einer endlichen Zahl an Kantenflips in eine Delaunay-Triangulierung überführt werden. Dies gilt für die euklidische Ebene [29] und für die StF-Oberfläche [3].
- eine Kante ist genau dann Teil der Delaunay-Triangulierung, wenn sie die Delaunay-Eigenschaft erfüllt.
- unter allen möglichen Triangulierungen ist die Delaunay-Triangulierung diejenige, welche den minimalen Innenwinkel über alle Dreiecke maximiert.

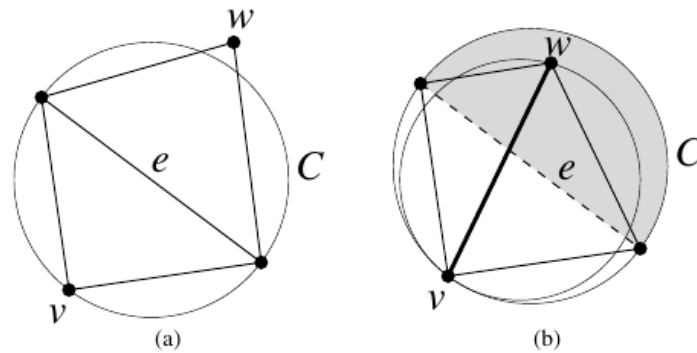


Abbildung 3.7.: Illustration, dass jede Kante, die geflippt werden muss geflippt werden kann. In (a) erfüllt  $e$  die Delaunay-Eigenschaft. in (b) erfüllt  $e$  sie nicht, aber die durch den Kantenflip erzeugte Kante erfüllt die Delaunay-Eigenschaft [29]

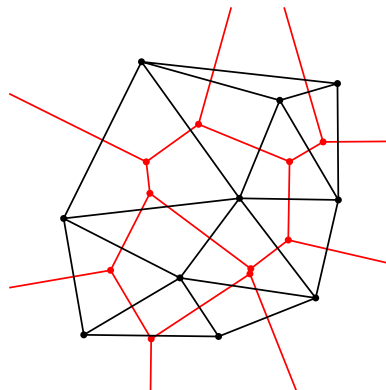


Abbildung 3.8.: Umkreismittelpunkte der Dreiecke der Delaunay-Triangulierung sind die Knoten der Voronoi-Zellen. [13]

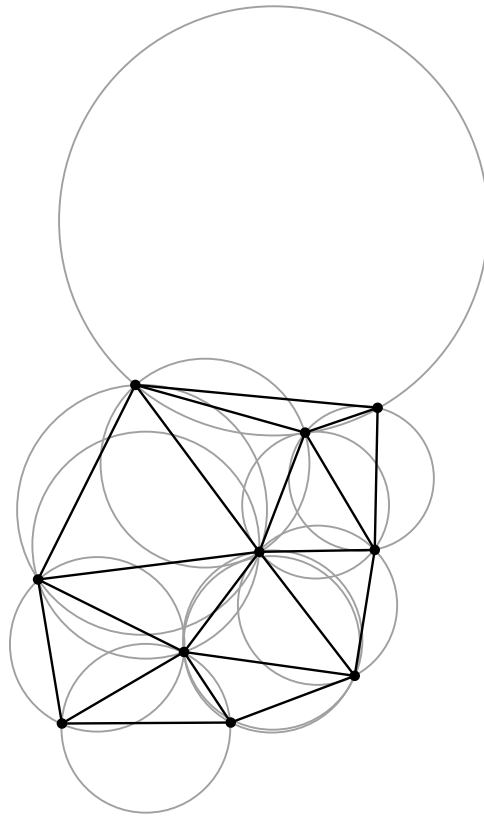


Abbildung 3.9.: Der Umkreis eines Dreiecks ist die einzige Kreisscheibe, die durch die drei Eckknoten des Dreiecks verläuft. Die Delaunay-Triangulierung ist die Triangulierung, bei der jedes Dreieck einen leeren Umkreis (Kreisscheibe) besitzt. D. h. die Fläche der Kreisscheibe enthält keine anderen Knoten der Triangulierung. [12]

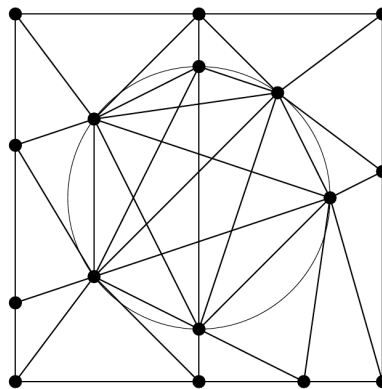


Abbildung 3.10.: Wenn mehr als drei Punkte auf dem Rand derselben Kreisscheibe liegen, ist die Delaunay Triangulierung nicht eindeutig. Da dies in der Praxis selten vorkommt, treffen wir die vereinfachte Annahme, dass niemals mehr als drei Punkte auf einer Kreisscheibe liegen. [29]

Die Qualität der Triangulierung definiert sich über das Verhältnis der Innenwinkel- und Flächenverteilung der einzelnen Dreiecke. Da die durch die Delaunay-Triangulierung maximierten Innenwinkel über alle Dreiecke einer festen Knotenmenge noch zu klein sein könnten, kann die Qualität darüber hinaus verbessert werden. Dies kann über das gezielte Einfügen weiterer Knoten geschehen. Hierfür werden Delaunay-Refinement Algorithmen verwendet.

## 4. Delaunay-Refinement

Da der Schwerpunkt dieser Arbeit auf dem Terminierungsbeweis des intrinsischen Delaunay-Refinements liegt, wird im Folgenden das Delaunay-Refinement vorgestellt und eine intuitive Beweisidee der Terminierung gegeben. Die Ausführungen beruhen dabei auf den Überlegungen von Shewchuk [29, 30].

Delaunay-Refinement Algorithmen basieren auf Delaunay-Triangulierungen, die so lange durch das Einfügen neuer Knoten optimiert werden, bis die Triangulierung, die vorher definierten Anforderungen an Winkel- und Flächengrößen erfüllt. In diesem Kapitel wird davon ausgegangen, dass der Leser mit Delaunay-Triangulierungen vertraut ist; für weitere Informationen siehe Lee, Lin [18] und Chew [8].

### Beschreibung des Algorithmus

Delaunay-Refinement-Algorithmen bestehen üblicherweise aus zwei Schritten: das Einfügen eines neuen Knotens und die Wiederherstellung der Delaunay-Eigenschaft. Diese Schritte werden so lange wiederholt, bis die Triangulierung die vorher definierten Anforderungen erfüllt.

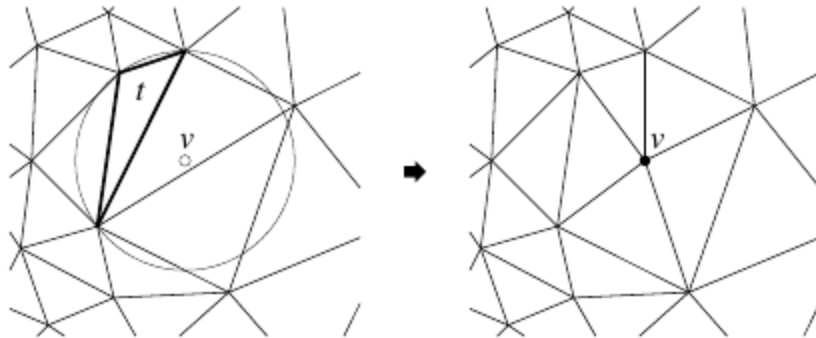


Abbildung 4.1.: Illustration einer Iteration des Delaunay-Refinements: ein dünnes Dreieck  $t$  wird geteilt, indem sein Umkreismittelpunkt  $v$  eingefügt wird und die Delaunay Eigenschaft der Triangulierung wiederhergestellt wird. [30]

Die Anforderung an die Eingabe ist für gewöhnlich, dass alle Innenwinkel der Dreiecke größer als ein Winkel-Schwellenwert  $\Theta_{\min}$  sind. In Kapitel 6 zeigen wir, dass der Algorithmus für ein  $\Theta_{\min} \leq \frac{\pi}{6}$  terminiert.

Im Kontext von Delaunay-Refinement werden in der Literatur Dreiecke als dünn bezeichnet, die die vorher definierten Anforderungen nicht erfüllen [29]. Dünne Dreiecke sind z. B. Dreiecke mit einem Innenwinkel kleiner als  $\Theta_{\min}$ .

## Intrinsischer Delaunay-Refinement Algorithmus

**Eingabe:** Ein Winkel-Schwellenwert  $\Theta_{\min}$  und die Triangulierung einer StF-Oberfläche, die verfeinert werden soll.

**Ausgabe:** Eine intrinsische Delaunay-Triangulierung derselben StF-Oberfläche, die mit der Geometrie der Eingabe übereinstimmt und keine dünnen Dreiecke mehr enthält.

---

### Algorithmus 1 : intrinsisches Delaunay-Refinement

---

**Daten :** Triangulierung einer StF-Oberfläche  $M$ ; Winkel-Schwellenwert  $\Theta_{\min}$

**Ergebnis :** Intrinsische Delaunay-Refinement  $M'$

```

1 WiederherstellenDerDelaunayEigenschaft( $M$ );
2  $T_{bad} \leftarrow \{t_{bad} \in M \mid t_{bad} \text{ ist ein dünnes Dreieck}\}$ ;
3 solange  $T_{bad} \neq \emptyset$  tue
4    $t_{bad} \leftarrow T_{bad}.\text{pop}$ ;
5   EinfügenNeuerKnotens( $t_{bad}, M$ );
6   WiederherstellungDelaunay-Eigenschaft( $M$ );
7   Aktualisiere( $T_{bad}$ );
8 Ende
```

---

### Einfügen neuer Knoten

Im Allgemeinen liegt der neu einzufügende Knoten  $p$  innerhalb der Fläche eines beliebigen Dreiecks  $t$  von  $M$ , mit  $i, j, k \in t$ . Dann wird nach dem Einfügen von  $p$  in  $M$   $t$  aus  $M$  entfernt und die Dreiecke  $t_{i,j,p}$ ,  $t_{i,k,p}$  und  $t_{k,j,p}$  werden in  $M$  eingefügt. Für den Fall, dass  $p$  auf einer Kante  $e$  liegen, wird derselbe Prozesse auf den beiden angrenzenden Dreiecke ausgeführt (siehe Abbildung. 4.2).

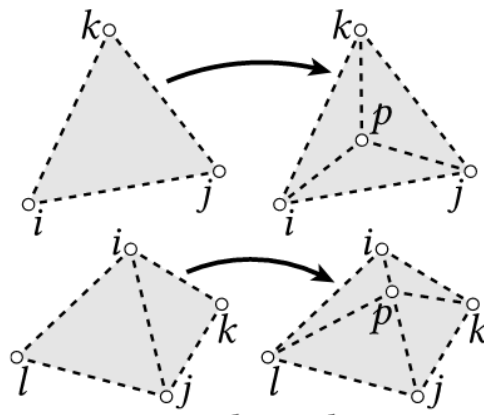


Abbildung 4.2.: Illustration des Punkteinfügens [28]

Der Einfachheit halber wird das Einfügen eines Knotens in den Umkreisradius eines Dreiecks im Folgenden als Teilung eines Dreiecks bezeichnet [11, zitiert nach [29]].

Hierbei ist es wichtig, dass der neu eingefügte Knoten möglichst weit entfernt von anderen Knoten ist. Andernfalls könnten wieder neue kurze Kanten entstehen, was zur Erzeugung neuer dünner Dreiecke führt. Daher wird als neu einzufügender Knoten der Umkreismittelpunkt

eines dünnen Dreiecks [11, 27] gewählt, denn in einer Delaunay-Triangulierung enthält definitionsgemäß der Umkreis eines Dreiecks keine anderen Knoten. Zudem haben dünne Dreiecke im Allgemeinen große Umkreisradien. Somit hat der neu eingefügte Knoten von allen anderen Punkten garantiert mindestens den Abstand des Umkreisradius des besagten Dreiecks. Das Einfügen eines Knotens in den Umkreis eines Dreiecks garantiert zudem die Löschung des Dreiecks, da sein Umkreis nicht mehr leer ist und es beim Wiederherstellen der Delaunay Eigenschaft verschwindet. Der Algorithmus ist so konzipiert, dass er alle dünnen Dreiecke der Reihe nach teilt, bis es keine mehr gibt. Der Algorithmus terminiert genau dann, wenn es keine dünnen Dreiecke mehr in  $M$  gibt. Falls also beim Teilen dünner Dreiecke immer weiter neue dünne Dreiecke entstehen, würde der Algorithmus nicht terminieren.

### Wiederherstellung der Delaunay-Eigenschaft

Da die Eingabe im Allgemeinen keine Delaunay-Triangulierung ist, wird zu Beginn die Delaunay Eigenschaft hergestellt. Genauso muss nach dem Einfügen eines Knotens die Delaunay-Eigenschaft wiederhergestellt werden. Nach dem Einfügen eines Knotens in den Umkreis eines dünnen Dreiecks ist dieser nicht mehr leer und somit gilt nach Definition, dass das besagte Dreieck nicht mehr Teil der Delaunay-Triangulierung ist.

Die Wiederherstellung der Delaunay-Eigenschaft kann mithilfe von einem Kanten-Flip-Algorithmus umgesetzt werden, denn es gilt: Eine beliebige Triangulierung kann mithilfe endlich vieler Kantenflips in eine Delaunay-Triangulierung überführt werden [29]. Shewchuk empfiehlt dafür z.B. eine Variation von *Lawson's algorithm* [17].

### Begrenzungen und Unterschiede verschiedener Delaunay-Refinement Algorithmen

Wir betrachten in dieser Arbeit als Eingabe des Intrinsischen Delaunay-Refinements nur Triangulierungen ohne Rand. Daher liegt der Umkreismittelpunkt eines Dreiecks immer innerhalb der Triangulierung. Deswegen wird in dieser Beschreibung nicht weiter auf den Umgang mit Begrenzungen oder auf die darin liegenden Unterschiede der verschiedenen Delaunay-Refinement Algorithmen eingegangen. In der euklidischen Ebene jedoch ist der Umgang mit Begrenzungen ein großes Problem, denn dort kann der Umkreismittelpunkt eines Dreiecks auch außerhalb der Triangulierung liegen und verschiedene Delaunay-Refinement Algorithmen unterscheiden sich vor allem im Umgang mit Begrenzungen.



## Intuitive Beweisidee

In diesem Kapitel wird das Umkreis-zu-kürzesten-Kante-Verhältnis als Werkzeug zur Analyse des Delaunay-Refinements eingeführt. Mit seiner Hilfe wird eine intuitive Erklärung für den Beweis der Terminierung hergeleitet.

Bei Dreiecken ist neben dem kleinsten Innenwinkel  $\theta_{min}$  das Verhältnis von Umkreisradius zur kürzesten Kante ein natürliches Maß für die Analyse von Delaunay-Refinement Algorithmen [22].  $\kappa = \frac{d}{r}$  bezeichnet die Beziehung zwischen dem Umkreisradius  $r$  eines Dreiecks und der Länge seiner kürzesten Kante  $d$ . Die Länge  $d$  ist dabei eine Maß, dass durch Delaunay-Refinement-Algorithmen automatisch verbessert wird [30]. Die Optimierung von  $\kappa$  ist dabei äquivalent zur Optimierung von  $\theta_{min}$ , denn die beiden Variablen stehen in Relation zueinander:

$$\kappa = 2 \sin(\theta_{min}).$$

Es gilt demnach: Umso größer  $\kappa$ , desto größer ist  $\theta_{min}$ . Wenn es also eine Untergrenze  $\kappa_{min}$  von  $\kappa$  über alle Dreiecke gibt, dann gibt es keinen Winkel, der kleiner ist als

$$\sin^{-1}\left(\frac{\kappa_{min}}{2}\right)$$

und umgekehrt.

Ein Dreieck, bei dem  $\kappa$  kleiner  $\kappa_{min}$  ist, wird demnach ebenfalls als dünn bezeichnet.

Anmerkung: Das in dieser Arbeit verwendete Umkreis-zu-kürzeste-Kante-Verhältnis ist dabei reziprok zu dem von Shewchuk [30] eingeführten Umkreis-zu-kürzeste-Kante-Verhältnis.

Der Algorithmus verwendet eine Schranke von  $\kappa_{min} = 1$ , er teilt also nur Dreiecke, für die  $r \geq d$  gilt. Daher wird kein Knoten eingefügt, der näher an einem anderen Knoten ist als die Länge der kürzesten Kante der Eingabetriangulierung.

Das Delaunay-Refinement muss schließlich terminieren, da die Fläche, auf der neue Knoten hinzugefügt werden können, begrenzt ist und ein Mindestabstand zu anderen Knoten eingehalten werden muss. Nach der Terminierung haben alle Winkel einen Wert zwischen  $\frac{\pi}{6}$  und  $\frac{5\pi}{3}$ .

Durch die Betrachtung der Umkreisradien wird klar, dass alle dünnen Dreiecke im Delaunay-Refinement geteilt werden. Da dünne Dreiecke im Verhältnis große Umkreisradien haben, werden zwangsläufig im Verlauf des Algorithmus Knoten in ihren Umkreis eingefügt. Da in der Ausgabetriangulierung die Abstände der Knoten einigermaßen gleichmäßig sind, können große leere Kreisscheiben ebenfalls nicht an kurze Kanten angrenzen. Dünne Dreiecke können zudem nicht in der Delaunay-Triangulierung verbleiben.

In einer Triangulierung ohne Rand kann das Delaunay-Refinement alle dünnen Dreiecke teilen, bei denen  $\kappa < 1$  bzw.  $\theta_{min} < \frac{\pi}{6}$  gilt, ohne dass eine Kante entsteht, die kürzer ist als die bereits vorhandene kürzeste Kante.

## 5. Vergleich: Planares und intrinsisches Delaunay-Refinement

In diesem Teil vergleichen wir das planare und das intrinsische Delaunay-Refinement und zeigen Probleme auf, die bei der Anwendung auf Triangulierungen von geschlossenen Oberflächentriangulierungen entstehen könnten.

### Einfügen von Knoten

Im Vergleich zu Triangulierungen in der euklidischen Ebene stellt sich neben der Frage, welcher Punkt eingefügt werden soll auch die Frage, wo genau auf der StF-Oberfläche sich der Punkt befindet, wenn er nicht innerhalb seines Dreiecks liegt?

Aufgrund der Delaunay-Eigenschaft liegen keine Knoten innerhalb des Umkreises eines dünnen Dreiecks. Infolgedessen ist garantiert, dass alle am Umkreis beteiligten Dreiecke gemeinsam und eindeutig flach in der euklidischen Ebene aufgefaltet werden können. Somit befindet sich der gesuchte Punkt immer auf der Fläche eines aufgefalteten Dreiecks und kann somit wie in der Ebene verwebt werden.

Sharp u. a. [28] schlägt folgendes Vorgehen vor: Wenn der Umkreismittelpunkt eines Dreiecks  $t$  außerhalb von  $t$  liegt, dann muss es einen stumpfen Winkel an einem einzigen Eckpunkt  $a$  geben. Da der Umkreis von  $t$  leer ist, kann er eindeutig in der euklidischen Ebene aufgefaltet werden und es kann ein Vektor  $p$  von  $a$  zum ebenen Umkreismittelpunkt  $u$  konstruieren werden. Dann kann  $p$  als geradlinige Geodäte [24] entlang der Oberfläche zu  $u$  verfolgt und eingefügt werden.

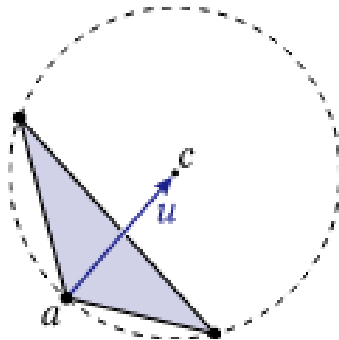


Abbildung 5.1.: Illustration des Vorgehens von Sharp u. a. [28]

## Wiederherstellung der Delaunay-Eigenschaft

Im Allgemeinen erfüllen Triangulierungen von StF-Oberflächen ebenfalls nicht die Delaunay-Eigenschaft. Laut Bobenko und Springborn [3] kann die Delaunay-Eigenschaft einer jeden Triangulierung einer StF-Oberfläche durch intrinsische Kanten-Flips erhalten werden. Ein mögliches Vorgehen einen intrinsischen Kanten-Flip Algorithmus stellt Fisher u. a. [10] vor. Das Schema basiert auf dem intrinsischen LaplaceBeltrami Operator [3].

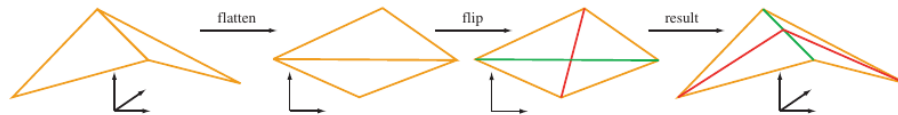


Abbildung 5.2.: Illustration des Intrinsischen Kantenflips: die beteiligten Dreiecke werden erst gemeinsam aufgefaltet und dann die Kante geflippt. Das Resultat ist **die neue Kante** und **die alte Kante** [10].

Generell gilt: Die vom intrinsischen Kanten Flip Algorithmus erzeugten Delaunay-Triangulierung müssen nicht zwingend regulär sein, weshalb irreguläre Dreiecke im Folgenden gesondert betrachtet werden müssen.

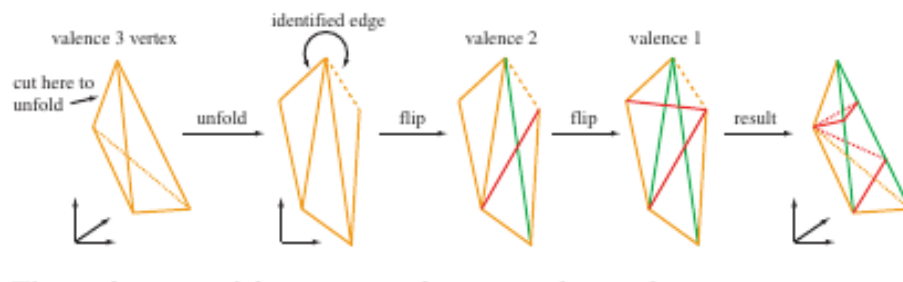


Abbildung 5.3.: Illustration der Erzeugung von irregulären Kanten: Hier wird ein Knoten von Grad drei durch zwei intrinsische Kantenflips zu einem Knoten vom Grad eins. Im Resultat sind **die neue Kante** und **die alte Kante** [10].

## Winkeldefekt und irreguläre Triangulierungen

Die bei Triangulierungen von StF-Oberflächen erlaubte intrinsische Irregularität bedeutet, dass sie Dreiecke enthalten kann, bei denen zwei Kanten identisch sind oder ein Knoten eine Kante zu sich selbst hat. Das ist ein wesentlicher Unterschied zu Triangulierungen in der euklidischen Ebene.

Die bei StF-Oberflächen auftretenden irregulären Kanten (beide Endknoten sind identisch) müssen daher ebenfalls gesondert betrachtet werden, denn für sie gelten die von Ruppert [27] aufgestellten Längenlemmata nicht. Irreguläre Kanten legen sich im Allgemeinen als Schlaufe um ein Loch [9], um einen Bereich mit kurzem Durchmesser oder eine Kegelspitze.

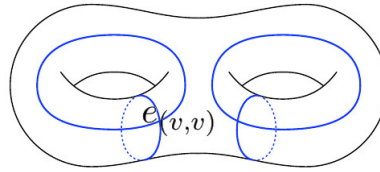


Abbildung 5.4.: Illustration einer irregulären Kante  $e_{v,v}$ , die sich als Schlaufe um ein Loch legt.

Dass sich irreguläre Kanten als Schlaufe um ein Loch oder Bereich mit kurzen Durchmesser legen, ist für die weitere Betrachtung unproblematisch, denn hier gibt es durch die Geometrie der Eingabe ein festgelegtes Minimum. Erickson und Whittlesey [9] schlagen in ihrer Arbeit eine Methode vor, wie diese einfach berechnet werden kann.

Dass sich die irreguläre Kante als Schlaufe um eine Kegelspitze legt, ist für die weitere Betrachtung problematischer, denn hier kann sie sich in Richtung Kegelspitze weiter zuziehen und somit theoretisch immer kleinere irreguläre Kanten erzeugen.

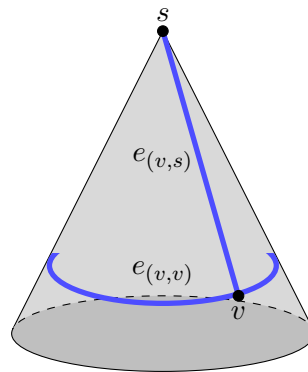


Abbildung 5.5.: Illustration einer irregulären Kante  $e_{v,v}$ , die sich als Schlaufe um die Kegelspitze  $s$  legt [9].

Dass sich irreguläre Kanten als Schleife um eine Kegelspitze legen, ist wichtig, damit sich der durch den Winkeldefekt minimierte Gesamtwinkel einer Kegelspitze optimal auf den Innenwinkel eines Dreiecks verteilen kann. Da der Innenwinkel eines Dreiecks maximal  $\pi$  groß sein kann, tritt dieses Phänomen nur bei Kegelspitzen mit Gesamtwinkel kleiner gleich  $\pi$  auf. Daher werden wir im Folgenden besagte Kegelspitzen näher untersuchen und in Lemma 6.0.5 zeigen, dass Kegelspitzen mit Gesamtwinkel größer  $\frac{\pi}{3}$  keine Auswirkungen auf die Terminierung des Algorithmus haben.

## Größte Kreisscheibe und aufgewickelte Kanten

Ein weiterer Unterschied ist, dass im zweidimensionalen Fall der größte Umkreisradius einfach nach oben abgeschätzt werden kann. Nämlich durch einen Kreis, der die konvexe Hülle der Triangulierung umschließt. Bei Oberflächen lässt sich diese Obergrenze nicht so leicht finden. Zudem existieren auf einer geschlossenen Oberfläche unendlich viele Möglichkeiten zwei Knoten zu verbinden (siehe Abb. 5.6). Das hat zur Folge, dass der Algorithmus theoretisch

ebenfalls immer längere Kanten erzeugen könnte, wodurch er immer neue dünne Dreiecke generieren und folglich nicht terminieren würde.

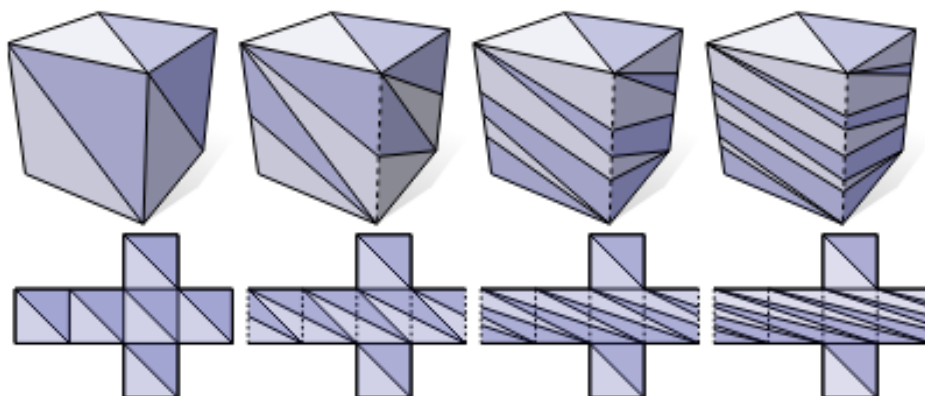


Abbildung 5.6.: Illustration von aufgewickelten Kanten: die Kante zwischen zwei festen Knoten kann theoretisch beliebig lange werden, in dem sie sich immer weiter um die geschlossene Oberfläche wickelt. [28]

Daher ist ebenfalls die Existenz einer möglichen Obergrenze für die Länge des Umkreisradius eines Dreiecks und seiner längsten Kante zu untersuchen.

In Lemma 6.0.4 zeigen wir, dass es eine natürliche Obergrenze des Umkreisradius von neu erzeugten Dreiecken gibt. Somit können auch neu erzeugte Kanten nicht unendlich lang werden, denn die längste Kante eines Dreiecks ist maximal doppelt so lange wie der Umkreisradius (siehe Abb. 5.7).

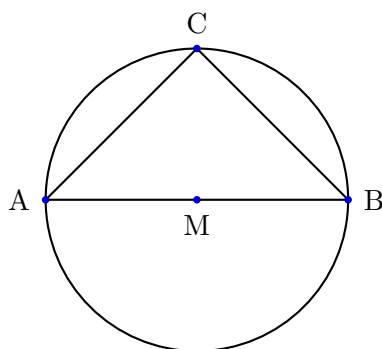


Abbildung 5.7.: Illustration, dass die längste Kante eines Dreiecks maximal doppelt so lang ist wie der Umkreisradius des Dreiecks.

## 6. Terminierung des intrinsischen Delaunay-Refinements

Im Folgenden werden wir zeigen, dass der Algorithmus für eine Eingabe garantiert terminiert, für die alle Knoten  $i$  einen Gesamtwinkel  $\Theta_i \geq \frac{\pi}{3}$  haben und einen Winkel-Schwellenwert  $\Theta_{\min} \leq \frac{\pi}{6}$ . In der Ausgabe des Algorithmus soll für alle Innenwinkel der Triangulierung gelten, dass sie größer gleich dem gegebenen Winkel-Schwellenwert  $\Theta_{\min}$  sind. Erst, wenn diese Bedingungen erreicht ist, terminiert der Algorithmus.

Da der Beweis mit Längenrelationen arbeitet, führen wir Hilfsfunktionen ein, um Entfernungen besser zu beschreiben.

### Hilfsfunktionen

Die Hilfsfunktionen definieren verschiedene Längen, um später im Beweis mit ihnen arbeiten zu können.

**Definition 6.0.1.** Sei  $M = (V, E, T)$  eine Delaunay-Triangulierung einer geschlossenen StF-Oberfläche, sei  $t \in T$  ein Dreieck aus  $M$ , sei  $v, u \in V$  ein Knoten aus  $M$  und sei  $e_{(v,u)} \in V$  eine Kante aus  $M$ , dann entspricht

- $d(t)$  die Länge der kürzesten Seite von  $t$
- $d(v)$  die Länge der kürzesten zu  $v$  inzidenten Kante
- $d(v, u)$  die Länge der Kante  $e_{(v,u)}$
- $r(t)$  die Länge des Umkreisradius von  $t$
- $N(v)$  einer Liste aller zu  $v$  inzidenten Kanten

Das folgende Lemma besagt, dass für einen Iterationsschritt die jeweils neu erzeugten Kanten adjazent zum neu eingefügten Knoten sind.

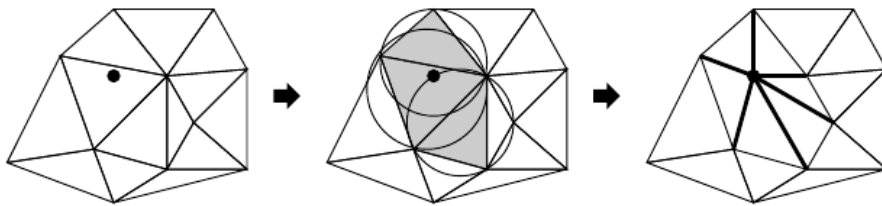


Abbildung 6.1.: Illustration, dass alle neu erzeugten Kanten adjazent zum neu eingefügten Knoten sind [29].

**Lemma 6.0.2.** Sei  $M = (V, E, T)$  eine intrinsische Delaunay-Triangulierung einer geschlossenen StF-Oberfläche und sei  $M' = (V', E', T')$  die Delaunay-Triangulierung  $M$  nach dem Einfügen eines neuen Knotens  $v$ .

Wenn eine Kante  $e \in E'$  und  $e \in N(v)$  ist und  $e \in N(v)$  dann folgt  $e \notin E$ .

*Beweis.* Angenommen  $e \notin N(v)$ , dann ist zu zeigen, dass  $e \in E$  gilt.

Nach [3, Definition 3] ist eine Kante in einer Delaunay-Triangulierung enthalten genau dann, wenn eine leere Kreisscheibe existiert, auf deren Rand nur ihre beiden Endknoten liegen.

Wegen  $V \subset V'$  ist jede leere Kreisscheibe in  $M'$  auch in  $M$  enthalten. Per Annahme enthält  $M$  auch beide Endknoten von  $e$ . Somit enthält  $M$  auch  $e$ .  $\square$

Dünne Dreiecke sind Dreiecke mit mindestens einem Innenwinkel  $\leq \frac{\pi}{6}$ . Das nächste Lemma zeigt, dass für ein dünnes Dreieck der Umkreisradius mindestens so lang ist wie seine kürzeste Kante.

**Lemma 6.0.3.** *Sei  $t$  ein Dreieck mit kleinstem Winkel  $\alpha \leq \frac{\pi}{6}$ . Dann gilt:*

$$r(t) \geq d(t).$$

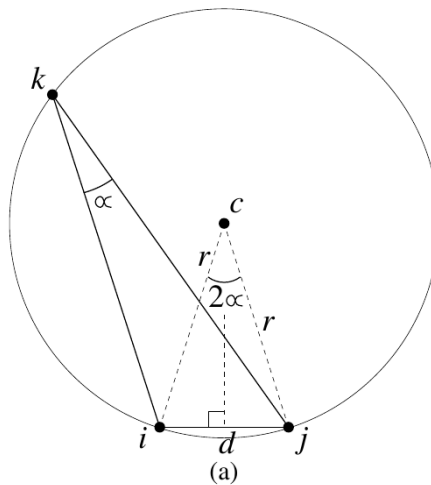


Abbildung 6.2.: Illustration des Kreiswinkelsatzes [29]

*Beweis.* Mithilfe des Kreiswinkelsatzes (6.2) gilt:

$$d(t) = r(t) \cdot 2 \cdot \sin(\alpha)$$

Aus der Annahme  $\alpha \in [0, \frac{\pi}{6}]$  folgt:

$$\sin(\alpha) \leq \frac{1}{2}.$$

Einsetzen in obige Gleichung ergibt

$$d(t) \leq r(t).$$

□

Das nächste Lemma zeigt, dass der größtmögliche Umkreisradius bereits in der Eingabe-Triangulierung enthalten ist und durch das Einfügen neuer Punkte nur leere Kreisscheiben erzeugt werden, deren Radius kleiner gleich dem größten Radius der Eingabe ist.

Aufgrund der Delaunay-Eigenschaft gilt jedoch, dass in der Kreisscheibe (also nicht außerhalb und nicht auf dem Rand) keine Kugelpunkte liegen. Infolgedessen ist für eingebettete leere Kreisscheiben garantiert, dass alle beteiligten Flächen sich gemeinsam und eindeutig flach in der Ebene auf falten lassen. Somit können eingebettete leere Kreisscheiben, für sich genommen, wie in der Ebene behandelt werden.

**Lemma 6.0.4.** *Sei  $M = (V, E, T)$  eine intrinsische Delaunay-Triangulierung einer geschlossenen StF-Oberfläche. Sei  $K$  die größte leere Kreisscheibe auf  $M$  und sei  $M' = (V', E', T')$  die Delaunay-Triangulierung  $M$  nach dem Einfügen eines neuen Knotens  $v$ . Dann gilt für die größte leere Kreisscheibe  $K'$  in  $M'$ ,*

$$r(K) \geq r(K').$$

*Beweis.* Angenommen, durch das Einfügen von  $v$  in  $M$  entsteht eine neue leere Kreisscheibe  $K'$  mit

$$r(K') > r(K).$$

Aus  $V = V' \setminus \{v\}$  und  $K' =$  folgt  $K' \subset M$ , da sie dann immer noch leer ist. Das widerspricht der Annahme, dass  $K$  die größte leere Kreisscheibe in  $M$  ist.

□

Bei der Triangulierung von geschlossenen StF-Oberfläche gibt es im Vergleich zu Triangulierungen in der euklidischen Ebene zusätzliche topologische Besonderheiten zu beachten. Da sie irreguläre Dreiecke zulassen, kann ein Knoten  $v$  eine Kante  $e_{(v,v)}$  zu sich selbst haben.



Die minimale Länge von regulären Kanten wird dadurch festgelegt, dass Knoten nicht zu nahe beieinander eingefügt werden können. Dies gilt nicht für irreguläre Kanten. Dabei ist es wichtig zu unterscheiden, ob sie sich um ein Loch, einen Bereich mit kurzem Umfang oder Kegelspitze wickelt. Bei einem Loch oder einem Bereich mit kurzem Umfang existiert ebenfalls ein festes Minimum, nämlich der minimale Umfang der StF-Oberfläche. Diese lässt sich berechnen [9]. Bei Kegelspitzen kann sich die Schleife theoretisch unendlich klein zusammenziehen. Daher müssen wir diesen Fall gesondert betrachten.

Da die Eingabetriangulierung im Allgemeinen regulär ist, können irreguläre Dreiecke erst durch das Wiederherstellen der Delaunay-Eigenschaft entstehen [3, 10]. Wir betrachten den Fall einer Schleife um eine Kegelspitze und zeigen, dass die erzeugte irreguläre Kante größer gleich der regulären Kante ist.

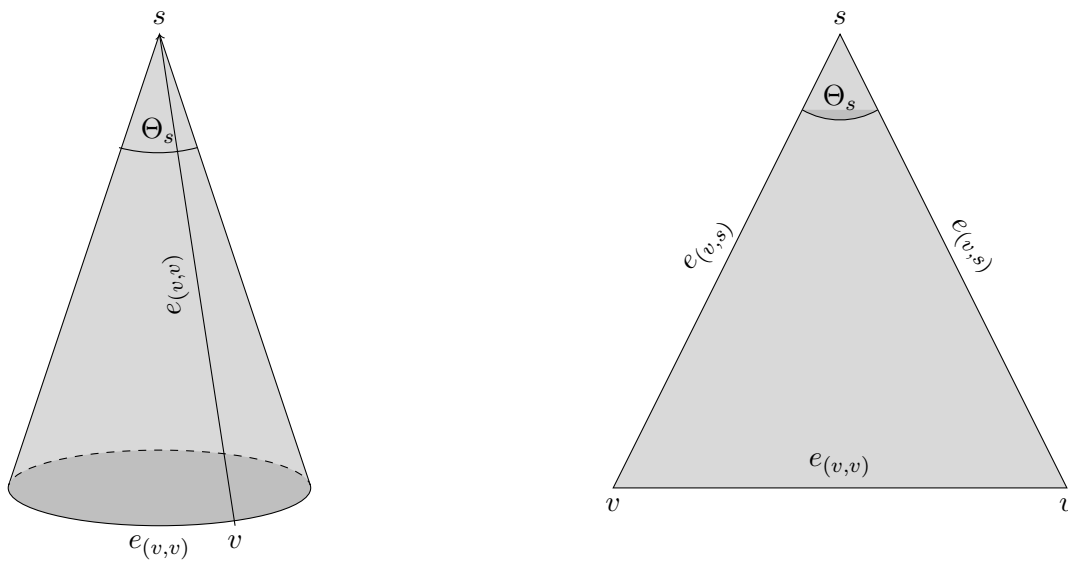


Abbildung 6.3.: Illustration der Auffaltung eines irregulären Dreiecks in der euklidischen Ebene.

**Lemma 6.0.5.** *Sei  $M = (V, E, T)$  eine intrinsische Delaunay-Triangulierung einer geschlossenen StF-Oberfläche und  $t \in T$  ein irreguläres Dreieck aus  $M$ .*

*Seien  $v, s \in V$  die Knoten von  $t$ ,  $e_{(v,v)}$  die irreguläre Kante und Kegelwinkel  $\Theta_s$  von  $s$  gilt  $\Theta_s \in [\frac{\pi}{3}, \pi]$ .*

*Dann folgt:*

$$d(e_{(v,v)}) \geq d(e_{(v,s)}).$$

*Beweis.* Aus dem Kosinussatz folgt

$$d(e_{(v,v)})^2 = d(e_{(s,v)})^2 + d(e_{(v,s)})^2 - 2 \cdot d(e_{(s,v)}) \cdot d(e_{(v,s)}) \cdot \cos(\Theta_s).$$

Da  $d(e_{(s,v)}) = d(e_{(v,s)})$  gilt, erhalten wir durch Umformung

$$d(e_{(v,v)}) = \sqrt{2(1 - \cos(\Theta_s))} \cdot d(e_{(v,s)}).$$

Wegen  $\Theta_s \in [\frac{\pi}{3}, \pi]$ , also  $-1 \leq \cos(\Theta_s) \leq \frac{1}{2}$  folgt

$$\sqrt{2(1 - \cos(\Theta_s))} \geq \sqrt{2(1 - \frac{1}{2})} \geq 1$$

und damit  $e_{(v,v)} \geq e_{(v,s)}$ .

□

Das folgende Lemma zeigt, dass durch den Algorithmus erzeugte reguläre Kanten nicht kleiner als der entsprechende Umkreisradius  $r(t_{bad})$  des dünnen Dreiecks  $t_{bad}$  sein können, aus dem sie erzeugt wurden.

**Lemma 6.0.6.** Sei  $M = (V, E, T)$  eine Delaunay-Triangulierung einer geschlossenen StF-Oberfläche, sei  $t \in T$  ein Dreieck aus  $M$ , sei  $v$  der Umkreismittelpunkt von  $t$ .

Nach dem Einfügen von  $v$  in  $M$  und der Wiederherstellung der Delaunay-Eigenschaft gilt für jede neu erzeugte reguläre Kante  $e$ , dass sie adjazent zu  $v$  ist, und dass

$$d(e) \geq r(t)$$

gilt.

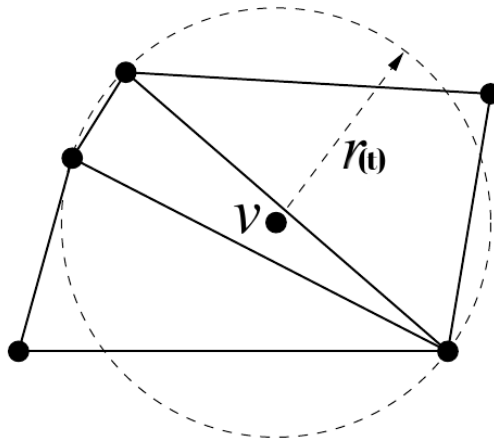


Abbildung 6.4.: Illustration, dass durch die Delaunay-Eigenschaft gewährleistet wird, dass neu eingefügte Knoten nicht zu nahe an bestehen Knoten liegen [30].

*Beweis.* Da  $M$  die Delaunay-Eigenschaft besitzt, gilt für alle Dreiecke  $t \in T$  die Delaunay-Eigenschaft, die besagt, dass im Umkreis von  $t$  keine Knoten liegen, die nicht zu  $t$  gehören. Nach dem Einfügen von  $v$  in  $M$  und dem Wiederherstellen der Delaunay-Eigenschaft gilt also für alle neu hinzugefügten regulären Kanten, dass sie inzident zu  $v$  (6.0.2) und somit mindestens  $r(t)$  lang sind.  $\square$

Der folgende Beweis vereint nun die in den Lemmata aufgestellten Längenrelationen und zeigt, dass der Algorithmus nur Kanten erzeugen kann, die eine, durch die Eingabe bestimmte, Mindestlänge haben.

**Lemma 6.0.7.** *Sei  $M = (V, E, T)$  eine Delaunay-Triangulierung einer geschlossenen StF-Oberfläche, sei  $d_{\min}$  die kürzeste Distanz zwischen zwei Knoten von  $M$ , sei  $g_{\min}$  der kürzeste Umfang von  $M$  und sei  $K_{\max}$  die größte leere Kreisscheibe von  $M$ .*

*Angenommen,  $M$  hat keine Kegelspitze  $s$  mit einem Gesamtwinkel  $\Theta_s \leq \frac{\pi}{3}$ .  
dann existiert ein*

$$\kappa^* = \frac{\min(d_{\min}, g_{\min})}{r(K_{\max})}$$

mit

$$\kappa^* \leq \kappa$$

für alle Dreiecke aus  $M$ .

*Beweis.* Laut Lemma 6.0.4 kann der Algorithmus keine Umkreisradien größer  $r(k_{\max})$  erzeugen.

Nehmen wir an, dass der Algorithmus *intrinsisches Delaunay-Refinement* eine Kante, die kürzer als  $\min(d_{\min}, g_{\min})$  ist, einfügt. Sei  $e_{(v,u)}$  die erste Kante dieser Art. Nach Lemma 6.0.2 ist  $e_{(v,u)}$  inzident zum zuletzt eingefügten Knoten. Sei dieser  $v$  und  $t_{bad}$  das zugehörige dünne Dreieck.

Da vor dem Einfügen von  $v$  keine Kante kürzer als  $\min(d_{\min}, g_{\min})$  existiert hat, gilt

$$d(t_{bad}) \geq d_{\min}.$$

Gemäß Lemma 6.0.5 und 6.0.6 gilt, wenn  $e_{(v,u)}$  eine reguläre Kante oder eine irreguläre Kante um eine Kegelspitze ist, die Abschätzung

$$d(e_{(v,u)}) \geq r(t_{bad}).$$

Da  $t_{bad}$  dünn ist, gilt nach Lemma 6.0.3

$$r(t_{bad}) \geq d(t_{bad}).$$

Daraus folgt

$$d(e_{(v,u)}) \geq d_{\min}.$$

Weiterhin gilt, wenn  $e_{(v,u)}$  eine Schleife um einen Bereich mit kurzem Umfang oder ein Loch ist, nach Definition

$$d(e_{(v,u)}) \geq g_{\min}.$$

Das steht jedoch im Widerspruch zu der Annahme, dass  $e_{(v,u)}$  kürzer ist als  $\min(d_{min}, g_{min})$ . Es folgt also, dass keine eingefügte Kante kürzer ist als  $\min(d_{min}, g_{min})$ . Somit kann der Algorithmus keine Dreiecke erzeugen, für die gilt

$$\kappa^* = \frac{\min(d_{min}, g_{min})}{r(k_{max})} \leq \kappa.$$

□

In Lemma 6.0.7 haben wir gezeigt, dass der Algorithmus nur Dreiecke erzeugt mit  $\kappa \geq \kappa^*$ . Nun wollen wir zeigen, dass das intrinsische Delaunay-Refinement aufgrund der begrenzten Fläche terminiert. Da die Fläche der Eingabetriangulierung endlich ist, der Algorithmus in jeder Iteration neue Dreiecke erzeugt und diese Dreiecke wiederum eine Mindestfläche  $A_{min}$  haben, folgt, dass der Algorithmus terminieren muss, sobald er die zur Verfügung stehende Gesamtfläche nicht mehr weiter aufteilen kann.

**Theorem 6.0.8.** *Sei  $M = (V, E, T)$  eine Triangulierung einer geschlossenen StF-Oberfläche. Angenommen,  $M$  hat keine Kegelspitze  $s$  mit einem Gesamtwinkel  $\Theta_s \leq \frac{\pi}{3}$  und sei  $\Theta_{min} \leq \frac{\pi}{6}$  ein Winkel-Schwellenwert.*

*Das intrinsische Delaunay-Refinement mit  $M$  und  $\Theta_{min}$  als Eingabe terminiert.*

*Beweis.* das Lemma 6.0.7 zeigt, dass es keine Kante kürzer ist als

$$D = \min(d_{min}, g_{min})$$

und eine Untergrenze

$$\kappa^* \leq \frac{\min(d_{min}, g_{min})}{r(k_{max})}$$

von  $\kappa$  existiert.

Aus dem Kreiswinkelsatz folgt, es existiert ebenfalls eine Winkeluntergrenze

$$A = \sin\left(\frac{\kappa^*}{2}\right)$$

für jedes Dreieck.

Aus dem Sinussatz folgt, dass jedes Dreieck eine Mindestfläche von

$$\frac{1}{2} \cdot \sin(A) D^2$$

hat.

Insgesamt ist die Fläche der Eingabetriangulierung begrenzt und jedes Dreieck hat eine Mindestfläche. Der Algorithmus erzeugt in jedem Schritt neue Dreiecke und da der Algorithmus nur Dreiecke mit endlich kleine Flächen erzeugen kann, muss er schließlich terminieren. □

## 7. Abschließende Beurteilung

### Fazit

In der vorliegenden Arbeit wurde gezeigt, dass das intrinsische Delaunay-Refinement für Eingaben mit Winkeldefekt kleiner als  $\frac{5}{3}\pi$  terminiert. Diese Nebenbedingung ist äquivalent zu der Bedingung, dass der Winkel zwischen zwei Segmenten (feste Kanten) größer als  $\frac{\pi}{3}$  ist, die von Shewchuk und Ruppert an die Eingabe Triangulierung des Delaunay-Refinements gestellt wird.

Die Auswertung einer Stichprobe des ABC-Datensatzes [15] an 100.000 dreidimensionalen Objekten zeigte, dass die obere Schranke von  $\frac{5}{3}\pi$  in der Praxis kaum zu Komplikation führt. Nur etwas weniger als einen Prozent der geprüften Objekte wiesen einen Winkeldefekt über der Schranke auf.

Die durchgeführten Experimente lassen darüber hinaus vermuten, dass die eigentliche Obergrenze bei  $2\pi - \Theta_{\min}$  liegen könnte.

### Ausblick

Leider bestehen noch folgende Lücken in der Betrachtung des Winkeldefekts und des intrinsischen Delaunay-Refinements und zwar

- die Einschränkung des Winkeldefekts auf  $2\pi - \Theta_{\min}$ ,
- der Umgang mit Segmenten
- und die Größen- und Abstufungs-optimalität.

Hier gibt es noch Möglichkeiten für weiterführende Forschung.

### Einschränkung Gesamtwinkel

In dieser Arbeit haben wir uns auf geschlossene Triangulierungen, welche nur Knoten enthalten, mit einem Winkeldefekt kleiner als  $\frac{5}{3}\pi$ , beschränkt. Vermutlich lässt sich diese Winkeldefektbedingung auf einen Winkeldefekt kleiner als  $2\pi - \Theta_{\min}$  erweitern. Die Ergebnisse einer Versuchsreihe mit den im ABC-Datensatz gefundenen Elementen mit einem Winkeldefekt größer als  $\frac{5}{3}\pi$  unterstreichen diese Behauptung.

### Segmentbehandlung, Größen- und Abstufungs-optimalität

Bisher wurde in dieser Arbeit nur gezeigt, dass der Algorithmus für einen maximalen Winkelschwellenwert von  $\frac{\pi}{6}$  sicher terminiert. Lemma 6.0.7 garantiert, dass nach der Terminierung alle vom Algorithmus erzeugten Kanten mindestens  $\min(d_{\min}, g_m)$  lang sind. Dieses Lemma garantiert jedoch lediglich, dass der Algorithmus im Worst Case nach der Terminierung eine uniformen Triangulierung erzeugt hat. Es besteht somit keine Garantie, dass die räumliche Abstufung der Dreiecke optimal ist.

In dieser Arbeit wird dies nicht mehr für das intrinsische Delaunay-Refinement gezeigt. Jedoch wird vermutet, dass mithilfe der hier aufgestellten Lemmata und Nebenbedingungen

sich Rupperts Beweise einfach übertragen lässt. Ähnliches gilt für den Umgang mit Segmenten. Bestärkt wird diese Vermutung durch Chews [8] Ergebnisse. Er zeigt ebenfalls für seinen zweiten Algorithmus ohne Garantien für eine optimale räumliche Abstufung, dass er bei einem Winkelschwellenwert von maximal  $\frac{\pi}{6}$  terminiert.

# Literaturverzeichnis

- [1] AURENHAMMER, Franz ; KLEIN, Rolf: Voronoi Diagrams. In: *Handbook of computational geometry* 5 (2000), Nr. 10, S. 201–290
- [2] BETKE, U ; GRITZMANN, P: Polyedrische 2-Mannigfaltigkeiten mit wenigen nicht-konvexen Ecken. In: *Monatshefte für Mathematik* 97 (1984), Nr. 1, S. 1–21
- [3] BOBENKO, Alexander I. ; SPRINGBORN, Boris A.: A Discrete Laplace–Beltrami Operator for Simplicial Surfaces. In: *Discrete & Computational Geometry* 38 (2007), Sep, Nr. 4, S. 740–756. – URL <http://dx.doi.org/10.1007/s00454-007-9006-1>. – ISSN 1432-0444
- [4] BORIS, N: Delaunay. Sur la sphere vide. In: *Izvestia Akademii Nauk SSSR, VII Seria, Otdelenie Matematicheskii i Estestvennykh Nauk* 7 (1934), S. 793–800
- [5] CHEN, Long: Mesh Smoothing Schemes Based on Optimal Delaunay Triangulations. In: *IMR Citeseer* (Veranst.), 2004, S. 109–120
- [6] CHEN, Long ; XU, Jin-chao: Optimal delaunay triangulations. In: *Journal of Computational Mathematics* (2004), S. 299–308
- [7] CHEW, L P.: Guaranteed-quality mesh generation for curved surfaces. In: *Proceedings of the ninth annual symposium on Computational geometry*, 1993, S. 274–280
- [8] CHEW, L P.: Guaranteed-quality mesh generation for curved surfaces. In: *Proceedings of the ninth annual symposium on Computational geometry*, 1993, S. 274–280
- [9] ERICKSON, Jeff ; WHITTLESEY, Kim: Greedy optimal homotopy and homology generators. In: *SODA* Bd. 5, 2005, S. 1038–1046
- [10] FISHER, Matthew ; SPRINGBORN, Boris ; SCHRÖDER, Peter ; BOBENKO, Alexander I.: An algorithm for the construction of intrinsic Delaunay triangulations with applications to digital geometry processing. In: *Computing* 81 (2007), Nr. 2-3, S. 199–213
- [11] FREY, William H.: Selective refinement: A new strategy for automatic node placement in graded triangular meshes. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 24 (1987), Nr. 11, S. 2183–2200. – URL <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/nme.1620241111>
- [12] GJACQUENOT: *File:Delaunay circumcircles vectorial.svg*. 2013. – URL [https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Delaunay\\_circumcircles.png](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Delaunay_circumcircles.png). – [Online; accessed 24-11-2021]
- [13] HFEREE: *File:Delaunay\_Voronoi.svg*. 2011. – URL [https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Delaunay\\_Voronoi.png](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Delaunay_Voronoi.png). – [Online; accessed 24-11-2021]
- [14] INDERMITTE, Claude ; LIEBLING, Th M. ; TROYANOV, Marc ; CLÉMENTÇON, Heinz: Voronoi diagrams on piecewise flat surfaces and an application to biological growth. In: *Theoretical Computer Science* 263 (2001), Nr. 1-2, S. 263–274



- [15] KOCH, Sebastian ; MATVEEV, Albert ; JIANG, Zhongshi ; WILLIAMS, Francis ; ARTEMOV, Alexey ; BURNAEV, Evgeny ; ALEXA, Marc ; ZORIN, Denis ; PANOZZO, Daniele: Abc: A big cad model dataset for geometric deep learning. In: *Proceedings of the IEEE/CVF Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*, 2019, S. 9601–9611
- [16] LAMBERT, Timothy: The Delaunay triangulation maximizes the mean inradius. In: *CCCG Citeseer (Veranst.)*, 1994, S. 201–206
- [17] LAWSON, Charles L.: Software for C1 surface interpolation. In: *Mathematical software*. Elsevier, 1977, S. 161–194
- [18] LEE, Der-Tsai ; LIN, Arthur K.: Generalized Delaunay triangulation for planar graphs. In: *Discrete & Computational Geometry* 1 (1986), Nr. 3, S. 201–217
- [19] LIU, Yong-Jin ; FAN, Dian ; XU, Chun-Xu ; HE, Ying: Constructing intrinsic Delaunay triangulations from the dual of geodesic Voronoi diagrams. In: *ACM Transactions on Graphics (TOG)* 36 (2017), Nr. 2, S. 1–15
- [20] MÄNTYLÄ, Martti: *An introduction to solid modeling*. Computer Science Press, Inc., 1987
- [21] MERKULOV, S: Hatcher, A. Algebraic topology (Cambridge University Press, 2002), 556 pp., 0 521 79540 0 (softback), £ 20.95, 0 521 79160 X (hardback), £ 60. In: *Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society* 46 (2003), Nr. 2, S. 511–512
- [22] MILLER, Gary L. ; TALMOR, Dafna ; TENG, Shang-Hua ; WALKINGTON, Noel: A Delaunay based numerical method for three dimensions: generation, formulation, and partition. In: *Proceedings of the twenty-seventh annual ACM symposium on Theory of computing*, 1995, S. 683–692
- [23] MULZER, Wolfgang ; ROTE, Günter: Minimum-weight triangulation is NP-hard. In: *Journal of the ACM (JACM)* 55 (2008), Nr. 2, S. 1–29
- [24] POLTHIER, Konrad ; SCHMIES, Markus: Straightest Geodesics on Polyhedral Surfaces. In: *ACM SIGGRAPH 2006 Courses*. New York, NY, USA : Association for Computing Machinery, 2006 (SIGGRAPH '06), S. 30–38. – URL <https://doi.org/10.1145/1185657.1185664>. – ISBN 1595933646
- [25] RAND, Alexander: Where and How Chew's Second Delaunay Refinement Algorithm Works. (2011)
- [26] RICHESON, David S.: *Euler's gem*. Princeton University Press, 2012
- [27] RUPPERT, Jim: A Delaunay refinement algorithm for quality 2-dimensional mesh generation. In: *Journal of algorithms* 18 (1995), Nr. 3, S. 548–585
- [28] SHARP, Nicholas ; SOLIMAN, Yousuf ; CRANE, Keenan: Navigating Intrinsic Triangulations. In: *ACM Trans. Graph.* 38 (2019), Nr. 4
- [29] SHEWCHUK, Jonathan R.: *Delaunay refinement mesh generation*. Carnegie Mellon University, 1997

- [30] SHEWCHUK, Jonathan R.: Delaunay refinement algorithms for triangular mesh generation. In: *Computational Geometry* 22 (2002), Nr. 1, S. 21–74. – URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0925772101000475>. – 16th ACM Symposium on Computational Geometry. – ISSN 0925-7721
- [31] ÜNGÖR, Alper: Off-Centers: A New Type of Steiner Points for Computing Size-Optimal Quality-Guaranteed Delaunay Triangulations. In: FARACH-COLTON, Martín (Hrsg.): *LATIN 2004: Theoretical Informatics*. Berlin, Heidelberg : Springer Berlin Heidelberg, 2004, S. 152–161
- [32] XIN, Shi-Qing ; CHEN, Shuang-Min ; HE, Ying ; WANG, Guo-Jin ; GU, Xianfeng ; QIN, Hong: Isotropic mesh simplification by evolving the geodesic delaunay triangulation. In: *2011 Eighth International Symposium on Voronoi Diagrams in Science and Engineering* IEEE (Veranst.), 2011, S. 39–47