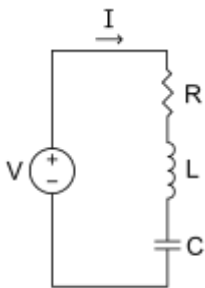


# Laboratorium 10 - Drgania tłumione w obwodzie RLC

## 1 Opis eksperymentu

### 1.1 Opis obwodu RLC

[http://pl.wikipedia.org/wiki/Drgania\\_t%C5%82umione](http://pl.wikipedia.org/wiki/Drgania_t%C5%82umione) [http://pl.wikipedia.org/wiki/Obw%C3%B3d\\_RLC](http://pl.wikipedia.org/wiki/Obw%C3%B3d_RLC)



Powyższy rysunek można opisać korzystając z napięciowego prawa Kirhoff'a:

$$v_R + v_L + v_C = v(t)$$

Podstawiając spadki napięć na elementach otrzymujemy równanie:

$$Ri(t) + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int_{-\infty}^{\tau=t} i(\tau) d\tau = v(t)$$

Jeżeli źródło jest źródłem napięcia stałego, zróżniczkowanie po czasie obu stron równania i podzielenie przez L doprowadzi do równania różniczkowego drugiego rzędu:

$$\frac{d^2 i(t)}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{LC} i(t) = 0$$

Równanie to można wyrazić w bardziej przyjaznej postaci:

$$\frac{d^2 i(t)}{dt^2} + 2\beta \frac{di(t)}{dt} + \omega_0^2 i(t) = 0$$

Tłumienie  $\beta$  oraz częstotliwość drgań  $\omega_0$ , są w jednostkach częstotliwości kątowej.  $\beta$  mierzy jak

szybko odpowiedź chwilowa układu zniknie po usunięciu wymuszenia (napięcia  $v$ ).  $\omega_0$ , jest częstotliwością kołową rezonansu.

Parametr tłumienia  $\beta$  oraz częstotliwość drgań  $\omega$  dane są następująco:

$$\beta = \frac{R}{2L}, \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

W ćwiczeniu obserwujemy napięcie na kondensatorze w czasie, które odpowiada ładunkowi ( $U=Q/C$ ) na kondensatorze w czasie, a to z kolei odpowiada prądowi w czasie.

$$\frac{d^2 Q(t)}{dt^2} + \frac{L}{R} \frac{dQ(t)}{dt} + \frac{1}{LC} Q(t) = 0$$

## 1.2 Napięcie na kondensatorze

Rozwiązanie powyższego równania (przy małym tłumieniu):

$$Q = Q_m e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi)$$

Zmiana napięcia na kondensatorze:

$$U = \frac{Q_m}{C} e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi) = U_m e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi)$$

Przy czym:

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}$$

A warunek małego tłumienia jest następujący (pierwiastek ma być rzeczywisty):

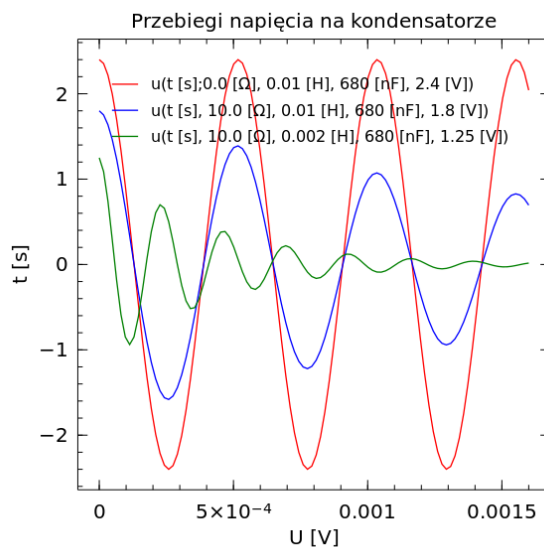
$$\beta^2 < \omega_0^2 \Rightarrow \frac{R^2}{4L^2} < \frac{1}{LC}$$

## 2 Pomiary

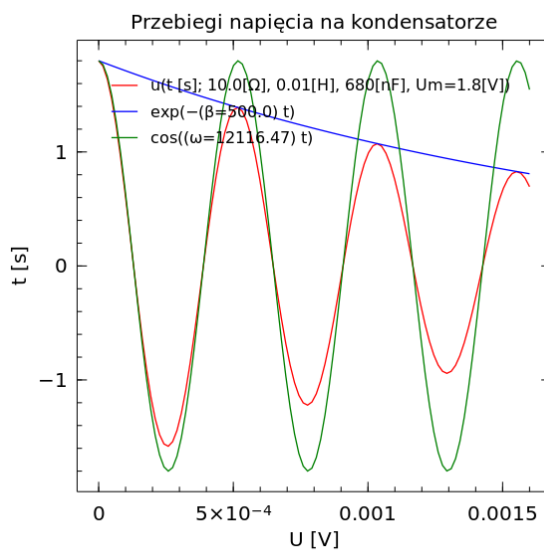
### 2.1 Zadane parametry R, L, C

- $L_0 = 0.01 \text{ # [H]}, R_0 = 0.0 \text{ [\Omega]}, C_{0\_teor} = 680 \text{ # [nF]}$
- $L_1 = 0.01 \text{ # [H]}, R_1 = 10.0 \text{ [\Omega]}$
- $L_2 = 0.002 \text{ # [H]}, R_2 = 0.0 \text{ [\Omega]},$
- $L_2 = 0.002 \text{ # [H]}, R_3 = 10.0 \text{ [\Omega]}.$

## 2.1.1 Ilustracja przebiegów teoretycznych w obwodzie RLC – skrajne parametry tłumienia ( $R=0$ , $R \neq 0$ )



## 2.1.2 Ilustracja przebiegów teoretycznych w obwodzie RLC – rozbiór odpowiedzi na część tłumiącą i oscylującą



## 2.2 Graficzny pomiar ekstremów napięcia i okresów drgań

### 2.2.1 Zmierzone ekstrema napięcia $U$

```
"Us_0R_01L [V]" => [3.4, 2.4, 1.6]
"Us_0R_001L [V]" => [1.6, 1.2, 0.9]
"Us_20R_01L [V]" => [6.2, 2.6, 1.0]
"Us_20R_001L [V]" => [3.7, 0.6, 0.2]
```

### 2.2.2 Zmierzone okresy drgań $T$

```
("T_0R_001L [s]", 5.5e-5)
("T_0R_01L [s]", 0.000185)
```

("T\_20R\_001L [s]", 6.0e-5)  
("T\_20R\_01L [s]", 0.00018)

### 2.2.3 Błąd pomiaru napięcia $\Delta U$

"Błąd pomiaru napięcia  $\Delta U$  [V]", 0.2

### 2.2.4 Błąd pomiaru okresu $\Delta T$

Błąd pomiaru okresu  $\Delta T$  [s]", 1.0e-5

## 2.3 Graficzne wyznaczenie współczynnika tłumienia $\beta$ funkcji $U_m e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi)$

Mając do dyspozycji przebiegi napięcia na kondensatorze, ponieważ są one wyświetlane na oscyloskopie, oraz mając możliwość mierzenia ich na oscyloskopie, możemy spróbować wyznaczyć parametry układu RLC w sposób graficzny.

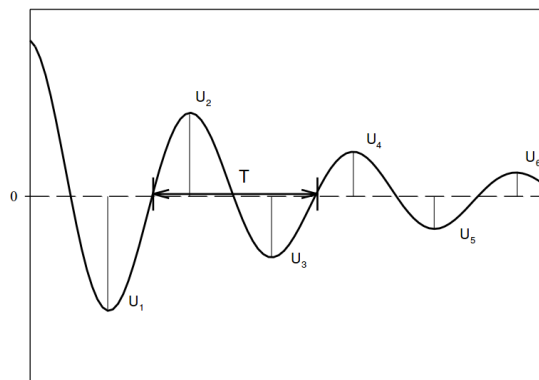
Dzieląc równania:

$$U_m e^{-\beta t} = U_1$$

$$U_m e^{-\beta(t+T)} = U_3$$

Możemy wyznaczyć  $\beta$  na podstawie:

$$\beta = \frac{1}{T} \ln\left(\frac{U_i}{U_{i+2}}\right)$$



$$\beta(T, u_i) = \frac{1}{T} \log\left(\frac{u_i}{u_{i+2}}\right)$$

$u_i$ ,  $u_{i+2}$  to kolejne maksima napięcia obserwowane na oscyloskopie,  $T$  to okres drgań obserwowany na oscyloskopie.

Z drugiej strony wiemy, że

$$\beta = \frac{R}{2L}$$

gdzie  $R$  to całkowity opór obwodu, a  $L$  całkowita indukcyjność. **Wynika z tego, że dla różnych  $R$  i  $L$ , współczynniki tłumienia  $\beta$  powinny być różne.**

### 2.3.1 Współczynniki tłumienia w zależności od zadanych (i ukrytych) parametrów RLC

```
("βs_0R_001L [rad/s]", [5231.0, 5231.0])  
("βs_0R_01L [rad/s]", [1883.0, 2192.0])  
("βs_20R_001L [rad/s]", [30319.0, 18310.0])  
("βs_20R_01L [rad/s]", [4828.0, 5308.0])
```

## 2.4 Błąd wyznaczania współczynnika tłumienia $\Delta\beta$

Do wyznaczenia współczynnika tłumienia możemy się posłużyć aproksymacją liniową (metodą różniczki zupełnej) albo wprost przeliczyć odchylenie dla odchyżeń argumentów. Załóżmy że mamy jakąś funkcję  $g$  i chcemy oszacować jej błąd na podstawie błędów jej parametrów, możemy do tego problemu podejść wprost:

$$\Delta\hat{g} = \hat{g}(L + \Delta L, T + \Delta T, \theta + \Delta\theta) - \hat{g}(L, T, \theta)$$

Błąd względny  $g$  możemy zapisać następująco:

$$\frac{\Delta\hat{g}}{\hat{g}} = \frac{\hat{g}(L + \Delta L, T + \Delta T, \theta + \Delta\theta) - \hat{g}(L, T, \theta)}{\hat{g}(L, T, \theta)}$$

Dla różnych  $R$  i  $L$ , błędy współczynników tłumienia  $\beta$  (mamy dwa pomiary dla każdego  $\beta$  odpowiadające parom maksimów napięcia, z których wyznaczamy  $\beta$ ) są następujące:

### 2.4.1 Błędy współczynnika tłumienia $\Delta\beta$

```
("βs_0R_001L_bledy [rad/s]", [1365.0, 1521.0])  
("βs_20R_001L_bledy [rad/s]", [7689.0, 8408.0])  
("βs_0R_01L_bledy [rad/s]", [214.0, 306.0])  
("βs_20R_01L_bledy [rad/s]", [477.0, 849.0])
```

## 2.5 Wyznaczanie średnich współczynników tłumienia $\beta^-$

Średnia pomiarów z błędami:

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i / \sigma_i^2}{\sum 1 / \sigma_i^2}$$

czyli w naszym przypadku:

$$\bar{\beta} = \frac{\sum \beta_i / \Delta\beta_i}{\sum 1 / \Delta\beta_i}$$

Dla różnych  $R$  i  $L$  wyznaczamy odpowiednie średnie współczynniki tłumienia  $\beta^-$

### 2.5.1 Średnie współczynniki tłumienia

```
("βs_mean_0R_001L [rad/s]", 5231.0)  
("βs_mean_20R_001L [rad/s]", 24582.7)  
("βs_mean_0R_01L [rad/s]", 2010.17)  
("βs_mean_20R_01L [rad/s]", 5000.67)
```

## 2.6 Wyznaczenie błędów średnich współczynników tłumienia $\Delta\beta^-$

Błąd średniej ważonej można przedstawić jako:

$$\Delta\beta^- = \frac{\sum \Delta\beta_i}{n}$$

Dla różnych R i L wyznaczamy odpowiednie błędy średnich współczynników tłumienia  $\Delta\beta^-$

### 2.6.1 Błędy średnich współczynników tłumienia

```
("βs_mean_0R_001L_bład [rad/s]", 1443.0)
("βs_mean_20R_001L_bład [rad/s]", 8048.5)
("βs_mean_0R_01L_bład [rad/s]", 260.0)
("βs_mean_20R_01L_bład [rad/s]", 663.0)
```

## 2.7 Wyznaczanie oporu pasożytniczego $RL$ obwodu

$$RL = 2\beta L$$

Opór pasożytniczy obwodu powinien być taki sam niezależnie od ustawień opornika dekadowego R i indukcyjności dekadowej L, jednak możemy zauważyć, że opór pasożytniczy zmienia się wraz ze zmianą L!

Gdyby tak się nie działo, policzylibyśmy średni opór pasożytniczy, ponieważ jednak tak się nie dzieje, do dalszych obliczeń będziemy się posługiwali oporami pasożytniczymi w zależności od średnich współczynników tłumienia  $RL(\beta^-)$ :

### 2.7.1 Opór pasożytniczy

```
("R_L_0R_001L [Ω]", 10.46)
("R_L_0R_01L [Ω]", 40.2)
("R_L_20R_001L [Ω]", 49.17)
("R_L_20R_01L [Ω]", 100.01)
```

## 2.8 Wyznaczanie błędu oporu pasożytniczego $\Delta RL$ obwodu

$$\Delta RL = RL(\beta + \Delta\beta, L + \Delta L) - RL(\beta, L) = 2((\beta + \Delta\beta)(L + \Delta L) - \beta L)$$

Konsekwentnie wyznaczamy błędy poszczególnych oporów pasożytniczych:

### 2.8.1 Błędy oporu pasożytniczego $\Delta RL$

```
("R_L_0R_001L_bład [Ω]", 2.89)
("R_L_20R_001L_bład [Ω]", 16.1)
("R_L_0R_01L_bład [Ω]", 5.2)
("R_L_20R_01L_bład [Ω]", 13.26)
```

## 2.9 Wyznaczenie pojemności kondensatora C z przebiegów na oscyloskopie

Równanie zawierające pojemność kondensatora:

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}$$

Przekształcamy:

$$\omega^2 + \frac{R^2}{4L^2} = \frac{1}{LC}$$

Otrzymując równanie na pojemność kondensatora:

$$C = \frac{1}{L(\omega^2 + \frac{R^2}{4L^2})}$$

Korzystając ze zmierzonego okresu drgań na oscyloskopie T, zadanych oporności R oraz odpowiednich oporności pasywnych  $RL(\beta^-)$  wyznaczamy pojemności kondensatora:

### 2.9.1 Pojemności kondensatora

```
("C_0R_001L [nF]", 480.0)
("C_0R_01L [nF]", 540.0)
("C_20R_001L [nF]", 570.0)
("C_20R_01L [nF]", 520.0)
```

## 2.10 Wyznaczenie błędu pojemności kondensatora $\Delta C$ z przebiegów na oscyloskopie

Błąd możemy wyznaczyć następująco:

$$\Delta C = C(L + \Delta L, R + \Delta R, T + \Delta T) - C(L, R, T)$$

Dla odpowiednich ustawień na oporniku dekadowym R i indukcji dekadowej L błędy pojemności kondensatora wynoszą:

### 2.10.1 Błędy pojemności kondensatora

```
("C_0R_001L_blad [nF]", 190.0)
("C_0R_01L_blad [nF]", 60.0)
("C_20R_001L_blad [nF]", 210.0)
("C_20R_01L_blad [nF]", 60.0)
```

## 2.11 Średnia pojemność kondensatora $\bar{C}$

$$\bar{C} = \frac{\sum C_i / \Delta C_i}{\sum 1 / \Delta C_i}$$

Pojemność nie zmienia się znacznie przy zmianach ustawień na oporniku dekadowym i indukcji dekadowej (teoretycznie nie powinna), w związku z tym liczymy średnią pojemność  $\bar{C}$ :

```
("C_mean [nF]", 528.32)
```

## 2.12 Błąd średniej pojemności kondensatora $\Delta C$

Błąd średniej ważonej można przedstawić jako:

$$\Delta C = \frac{\sum \Delta C_i}{n}$$

("C\_mean\_blad [nF]", 130.0)

## 2.13 Wyznaczanie rezystancji krytycznych $R_c$

Czyli dla danych L i C, jeżeli opór układu (zadany+pasowy) jest większy od  $R_c$  to na oscyloskopie powinniśmy zaobserwować przebiegi aperiodyczne (rozwiązaniem równania różniczkowego układu RLC jest funkcja wykładnicza bez członu oscylacyjnego cos)

$$R_c = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$$

Posłużymy się pojemnością średnią, opory krytyczne  $R_c$  dla odpowiednich indukcyjności L wynoszą:

("R\_C\_001L [Ω]", 87.01)  
("R\_C\_01L [Ω]", 275.16)

## 2.14 Wyznaczanie błędu rezystancji krytycznych $\Delta R_c$

Błąd możemy wyznaczyć następująco:

$$\Delta R_c = R_c(L + \Delta L, C + \Delta C) - R_c(L, C)$$

Dla odpowiednich ustawień na indukcyjności dekadowej L błędy rezystancji krytycznych  $\Delta R_c$  wynoszą:

("R\_C\_001L\_blad [Ω]", -9.06)  
("R\_C\_01L\_blad [Ω]", -28.66)

## 3 Wnioski

Graficzny pomiar współczynnika tłumienia był obarczony dosyć dużym błędem. Wyznaczono współczynniki dla odpowiednich ustawień R i L:

("βs\_mean\_0R\_001L [rad/s]", 5231.0 +- 1443.0)  
("βs\_mean\_20R\_001L [rad/s]", 24582.7 +- 8048.5)  
("βs\_mean\_0R\_01L [rad/s]", 2010.17 +- 260.0)  
("βs\_mean\_20R\_01L [rad/s]", 5000.67 +- 663.0)

Wyznaczono opory pasytywne:

("R\_L\_0R\_001L [Ω]", 10.46 +- 2.89)  
("R\_L\_0R\_01L [Ω]", 40.2 +- 16.1)  
("R\_L\_20R\_001L [Ω]", 49.17 +- 5.2)  
("R\_L\_20R\_01L [Ω]", 100.01 +- 13.26)



opór pasożytniczy powinien być taki sam, lecz zmienia się przy przełączaniu opornika lub indukcji dekadowej, może to być z powodów mechanicznych, w każdym razie jest to faktem, dlatego nie obliczano średniego oporu pasożytniczego tylko posługiwano się wartościami odpowiednimi dla ustawienia R i L.

Wyznaczono średnią pojemność kondensatora:

("C\_mean [nF]", 528.32 +- 130)

Wyznaczono teoretyczne wartości rezystancji krytycznej dla odpowiednich wartości L:

("R\_C\_001L [Ω]", 87.01 +- 9)  
("R\_C\_01L [Ω]", 275.16 +- 28)

Zilustrowano jak teoretycznie powinny wyglądać przebiegi napięcia na kondensatorze.