Laboratorium z podstaw fizyki Wydziału EIiT na AGH.

Podsumowanie do obliczeń.

Laboratorium 3. Rezonans Akustyczny

1 Opis eksperymentu

Generator daje napięcie sinusoidalne

$$U(t)=U_0 sin(2\pi f t)=10 sin(2\pi \frac{1000}{sek} t)[V]$$

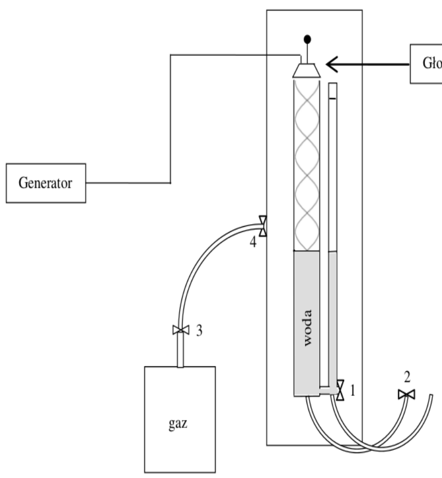
Napięcie to jest podawane na elektromagnes głośnika, powodując drganie membrany z częstotliwością f

Głośnik generuje falę dźwiękową. Fala dźwiękowa jest falą podłużną, czyli drgania poszczególnych części ośrodka składających się w ruch falowy, mają taki kierunek jak kierunek rozchodzenia się fali. Kierunek rozchodzenia się fali płaskiej ($sin(kx-\omega t)$) jest to kierunek przepływu energi.

Fala dźwiękowa w transmitującym medium powoduje odchylenie (ciśnienie akustyczne, dynamiczne ciśnienie) w lokalnym niezależnym ciśnieniu, ciśnieniu statycznym. Ciśnienie dźwiękowe oznaczone jako p (mierzone np. przez mikrofon) można zdefiniować następująco:

$$p_{total}=p_{stat}+p$$

gdzie: $ptotal$ to całkowite ciśnienie, $pstat$ to statyczne ciśnienie (np. odczytane z barometru). Jednostką SI są paskale Pa.



1.1 Równanie fali dźwiękowej

Równanie fali dźwiękowej opisuje sposób propagacji fal dźwiękowych. Równanie fali akustycznej dla ciśnienia dźwiękowego w jednym wymiarze jest dane poprzez:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}=0$$

gdzie: p to ciśnienie dźwięku w [Pa], x to przemieszczenie cząsteczki (np. tlenu) w [m], c to prędkość dźwięku w [m/s], t to czas w [sek]

Równanie fali akustycznej dla prędkości cząsteczek ma podobną postać:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=0$$

gdzie u jest prędkością cząsteczki w [m/s].

1.2 Rozwiązanie równania fali dźwiękowej - fala płaska

Rozwiązaniami tych równań różniczkowych są funkcje postaci:

$$p(x,t)=p_0 cos(\omega t-kx)[Pa]$$

$$x(x,t)=x_0 sin(\omega t-kx)[m]$$

$$u(x,t)=u_0 cos(\omega t-kx)[m/sek]$$

Czyli głośnik emituję falę dźwiękową, czyli zaburzenie ciśnienia $p(t,x)$ albo ruch cząsteczki powietrza z prędkością $u(x,t)$.

1.3 Rezonans akustyczny - fala stojąca

Wygenerowana fala przez głośnik to fala dźwiękowa biegnąca, która napotykając lustro wody zostaje odbita. Fale dźwiękowe mogą ze sobą interferować, tworząc fale o nowym kształcie. Tutaj w wynikiu interferencji powstaje fala stojąca: Czyli tuba z wodą jest w tym przypadku pudłem rezonansowym.

Mamy dwie fale, jedną z głośnika poruszającą się w kierunku osi X (stąd $-\omega t$)

$$p_1(x,t)=p_0 \sin\,(kx-\omega t)$$

i drugą odbitą od powierzchni wody, która porusza się w przeciwnym kierunku do X (stąd $+\omega t$). W naszym przypadku nie wiemy jaką ona będzie miała fazę. Faza fali odbitej jest związana z drogą jaką przebyła fala z głośnika do powierzchni wody, jeżeli ta długość (czyli efektywna długość tuby rezonansowej) będzie równa wielokrotności długości fali λ, to φ = 0, czyli zmieniając efektywną długość tuby rezonansowej zmieniamy φ (robiliśmy to w tym ćwiczeniu).

$$p_2(x,t)=p_0 \sin\,(kx+\omega t+\varphi)$$

gdzie: $\omega=2\pi f$ to częstotliwość kołowa [rad/sek], $k=2\pi\lambda$ to liczba falowa [rad/m], λ to długość fali [m].

Fala wynikowa p będzie sumą fal p1 i p2:

$$p(x,t)=p_0 \sin\,(kx-\omega t)+p_0 \sin\,(kx+\omega t+\varphi).\ [Pa]$$

Używając zależności trygonometrycznej (suma do iloczynu) dla 'sin(u) + sin(v)' możemy uprościć powyższe równanie do:

$$p(x,t)=2\,p_0\cos\left(\omega t+\frac{\varphi}{2}\right)\sin\left(kx+\frac{\varphi}{2}\right).\ [Pa]$$

Równanie to opisuje falę, która oscyluje z upływem czasu t (cos(ωt)), a jej zależność od położenia x jest stacjonarna (nie zależy od czasu - sin(kx)).

W punktach x = 0, λ/2, λ, 3λ/2, ... (φ=0) nazywanych węzłami amplituda p jest zawsze zero, natomiast w punktach x = λ/4, 3λ/4, 5λ/4, ... (φ=0) nazywanych strzałkami, amplituda jest maksymalna.

Odległość pomiędzy dwoma sąsiednimi węzłami albo strzałkami wynosi λ/2.

W naszym przypadku nie wiemy jakie fala z głośnika p1 i fala odbita p2 będą miały fazy, dlatego zmieniamy długość tuby rezonansowej (zmieniając poziom lustra wody), ponieważ zmienia to fazę fali odbitej.

Amplituda drgań osiąga największe wartości (równe $2p0$) dla położeń x spełniających warunek

$$kx+\frac{\varphi}{2}=n\pi$$

gdzie n=0,1,2,... W tych miejscach ośrodek drga najsilniej (powstają strzałki). Położenie węzłów można znaleźć z równania:

$$kx+\frac{\varphi}{2}=n\pi+\frac{\pi}{2}$$

2 Pomiary

2.1 Odczytujemy częstotliwość fali

robimy to poprzez zadanie częstotliwości na generatorze napięcia np.:

- 800 Hz,
- 900 Hz,
- 1100 Hz.

2.2 Mierzymy położenie węzłów fali stojącej

Mierzymy wysokości słupa wody dla których była cisza, np.:

- 800 Hz - 25.9, 47, 69, 87 cm
- 900 Hz - 45, 64, 85 cm
- 1100 Hz - 18, 34, 50, 67 cm

2.2.1 Wyznaczamy odległości między węzłami

- 800 Hz – 21, 22, 19 cm
- 900 Hz – 19, 21 cm
- 1100 Hz - 16, 16, 17 cm

2.2.2 Wyznaczamy średnią odległość pomiędzy węzłami

Średnia (https://en.wikipedia.org/wiki/Standard_deviation#Discrete_random_variable):

$$\mu=\frac{1}{N}(x_1+\cdots+x_N)$$

- 800 Hz – 21cm
- 900 Hz – 20 cm
- 1100 Hz – 16 cm

2.2.3 Wyznaczamy błąd średniej odległości pomiędzy węzłami

Odchylenie standardowe (https://en.wikipedia.org/wiki/Standard_deviation#Discrete_random_variable):

$$\sigma=\sqrt{\frac{1}{N}[(x_1-\mu)^2+(x_2-\mu)^2+\cdots+(x_N-\mu)^2]}$$

- 800 Hz – 1cm
- 900 Hz – 2 cm
- 1100 Hz – 1 cm

2.3 Wniosek - długość fali

Odległość pomiędzy węzłami fali stojącej to połowa długości fali. Długość fali:

- 800 Hz – 41cm
- 900 Hz – 40 cm
- 1100 Hz – 33 cm

2.4 Wniosek - prędkość fali

Teoretyczna prędkość fali dźwiękowej w powietrzu wynosi 340 [m/s], w CO_2 259 [m/s]

Prędkość fali v [m/s] to stosunek długości fali λ [m] do okresu fali T [s]. Wyznaczyliśmy długość fali, natomiast okres fali to odwrotność częstotliwości, stąd prędkość fali:

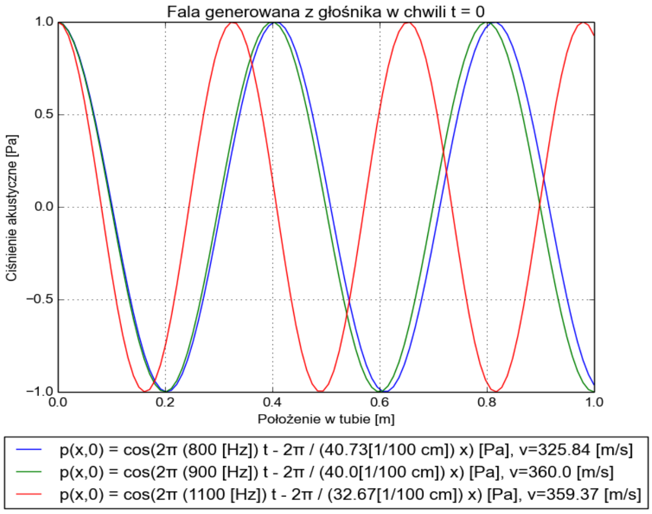
- 800 Hz – 325 m/s

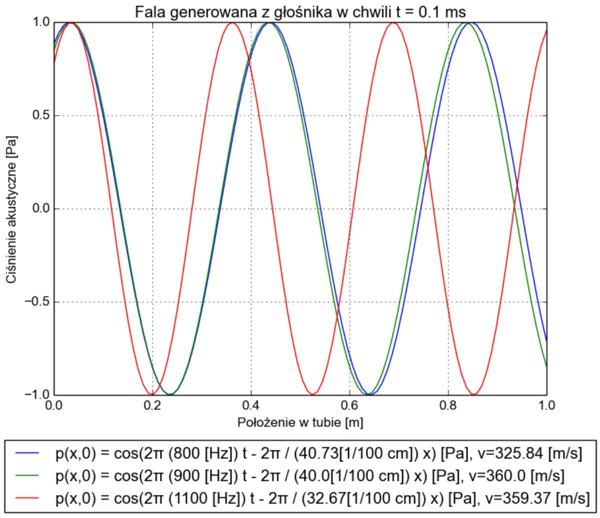
- 900 Hz – 360 m/s
- 1100 Hz – 360 m/s

2.5 Wizualizacja fal

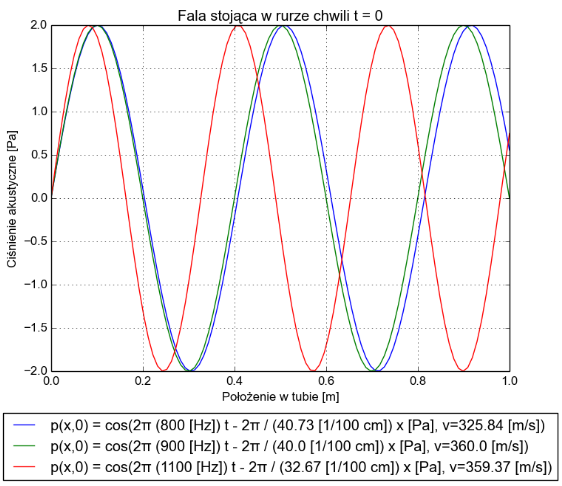
Dla pomiarów w powietrzu lub CO_2

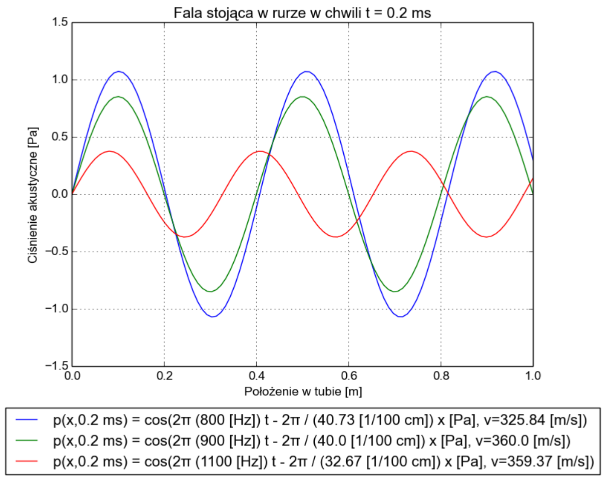
2.5.1 Należy narysować falę biegnącą z głośnika w chwili t=0 oraz chwili t_1, tak aby zobrazować przesuwanie się fali





2.5.2 Należy narysować falę stojącą w rurze w chwili t=0 oraz chwili t_1, tak aby zobrazować „drganie" fali





2.6 Wyznaczenie średniej prędkości fal

2.6.1 Regresja liniowa jednoparametrowa

Równanie funkcji dopasowującej:

$$y = ax$$

Sumy:

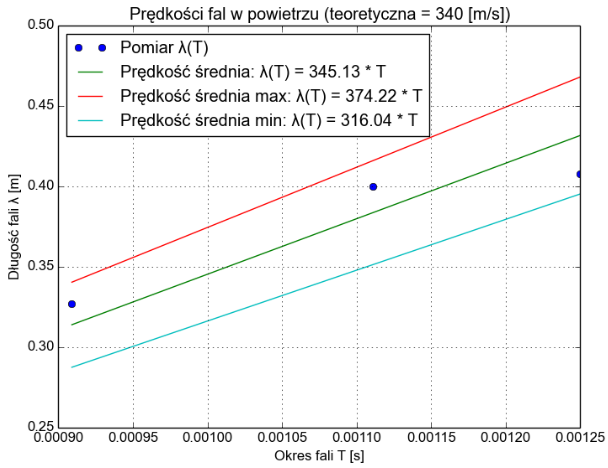
$$S_x=\sum_{i=1}^{n} x_i, \quad S_{xx}=\sum_{i=1}^{n} x_i^2, \quad S_{xy}=\sum_{i=1}^{n} x_i y_i,$$

Współczynnki a, suma błędów, Błąd kwadratowy a:

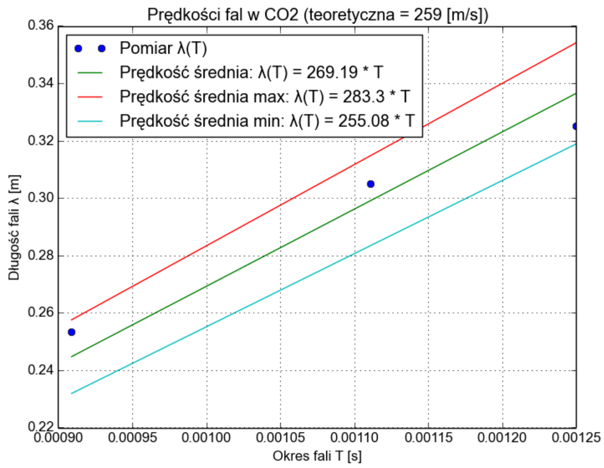
$$a=\frac{S_{xy}}{S_{xx}}, \quad \sigma_y^2=\sum_{i=1}^{n}(y_i-a x_i)^2, \quad \sigma_a^2=\frac{S}{S-2}\frac{\sigma_y^2}{S_{xx}},$$

2.6.2 Średnia prędkość fal i błędy średniej

2.6.2.1 Wykres prędkości fal w powietrzu



2.6.2.2 Wykres prędkości fal w CO2



2.7 Prawo przenoszenia błędów

Mamy z zadanie oszacować błąd wielkości y, która jest funkcją zmierzonych (lub obliczonych) wartości x1, x2, x3 ... i ich błędów Δx1, Δx2, Δx3:

$$y(x1,x2,x3)$$

Błąd wielkości Δy obliczamy z prawa przenoszenia błędów:

$$\Delta y(x_1,x_2,x_3;\Delta x_1,\Delta x_2,\Delta x_3)=\sqrt{\left(\frac{\partial y}{\partial x_1}\Delta x_1\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial x_2}\Delta x_2\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial x_3}\Delta x_3\right)^2}$$

2.8 Wyznaczanie adiabaty κ molekuł powietrza i CO2 na podstawie prędkości dźwięku

2.8.1 Adiabata i prędkość fali

Związek łączący prędkość fali z parametrami gazu

$$v^2 = \frac{\kappa R T}{\mu}$$

Gdzie v - prędkość fali

$$\kappa = \frac{C_p}{C_v}$$

adiabata (również oznaczana γ) - stosunki ciepła właściwego przy stałym ciśnieniu do ciepła właściwego przy stałej objętości, gdzie Cp i Cv oznaczają ciepła molowe.

2.8.2 Adiabata powietrza i CO2

- Adiabata powietrza - 1.415
- adiabata CO2 - 1.308

2.8.3 Błąd adiabaty powietrza i CO2

- Adiabata powietrza błąd - 0.24
- adiabata CO2 błąd – 0.14

2.9 Wyznaczenie liczby stopni swobody na podstawie adiabaty

Adiabata jest również związana z liczbą stopni swobody i molekuł gazu w następujący sposób:

$$\kappa = \frac{i+2}{i}$$

Wartości tablicowe dla wybranych gazów: http://en.wikipedia.org/wiki/Heat_capacity_ratio

$$T = t + 273.15 [K]$$

temperatura bezwzględna, t jest w °C.

$$R = 8.3144621 [J mol \cdot K]$$

$$\mu [kg / mol]$$

masa molowa medium

2.9.1 Stopnie swobody

Liczba stopni swobody:

$$i(v, \mu, T) = \frac{2}{\frac{v^2 \mu}{R T} - 1}$$

2.9.2 Stopnie swobody cząsteczek powietrza i CO2

- Stopnie swobody powietrza - 4.8
- stopnie swobody CO2 - 6.4

2.10 Błędy obliczania stopni swobody

Przyjmujemy, że mierzymy temperaturę z dokładnością do 5 °C

$$\Delta T = 5[K]$$

Stałą gazową przyjmujemy bez błędu:

$$\Delta R = 0[J/(mol \cdot K)]$$

Bład masy molowej przyjmujemy:

$$\Delta \mu Air = 1[g/mol] = 0.001[kg/mol]$$

Błąd prędkości dźwięku Δv bierzemy z wcześniejszych obliczeń.

$$i(v,\mu,T) = \frac{2}{\kappa - 1}$$

$$\Delta\kappa(v,\mu,T;\Delta v,\Delta\mu,\Delta T) = \sqrt{\left[\frac{\partial\left(\frac{v^2\mu}{RT}\right)}{\partial v}\Delta v\right]^2 + \left[\frac{\partial\left(\frac{v^2\mu}{RT}\right)}{\partial \mu}\Delta \mu\right]^2 + \left[\frac{\partial\left(\frac{v^2\mu}{RT}\right)}{\partial T}\Delta T\right]^2}$$

$$\sqrt{\left[\frac{2v\mu}{RT}\Delta v\right]^2 + \left[\frac{v^2}{RT}\Delta\mu\right]^2 + \left[-\frac{v^2}{RT^2}\Delta T\right]^2}$$

$$\Delta i(\kappa,\Delta\kappa) = \frac{2}{(\kappa-1)^2}\Delta\kappa$$

2.10.1 Błąd stopni swobody cząsteczek powietrza i CO2

- Stopnie swobody powietrza błąd - 2.78
- stopnie swobody CO2 błąd – 2.93

3 Wnioski

Wyznaczona prędkość dźwięku w powietrzu = 345 +- 29 [m/s], wartość tablicowa = 340 [m/s]

Wyznaczona prędkość dźwięku w CO2 = 269 +- 14 [m/s], wartość tablicowa = 259 [m/s]

Wyznaczono liczbę stopni swobody cząsteczek powietrza: 4.8 +- 2.78, wartość teoretyczna wynosi 5.

Wyznaczono liczbę stopni swobody cząsteczek CO2: 6.47 +- 2.93, wartość teoretyczna wynosi 6.

Metoda wyznaczania liczby stopni swobody prze drobnych wahaniach parametrów nie jest dokładna.