ЛАБОРАТОРНА РОБОТА № 2
МОДЕЛЮВАННЯ ЛІНІЙНИХ СИСТЕМ

Мета роботи – оволодіння засобами пакету ***scipy*** для імітаційного моделювання лінійних неперервних систем.

https://docs.scipy.org/doc/scipy/reference/signal.html#module-scipy.signal

2.1. Завдання до лабораторної роботи

2.1.1. Передатні функції лінійних ланок

Виберіть передатну функцію за варіантом що відповідає Вашому номеру у списку групи.

1. $G(p) = (p^2 – p + 1)/(5p^3 +7p^2 + p + 1)$;
2. $G(p) = (p^3 + 3p)/(8p^3 + 2p + 1)$;
3. $G(p) = (p^2 – 7p + 3)/(11p^4 +5p + 1)$;
4. $G(p) = (p^3 – p^2 + 1)/(p^4 + p + 3)$;
5. $G(p) = (p^3 – p^2 + p – 1)/(p^3 + p + 4)$;
6. $G(p) = (p^2 + 3p –2) /(p^4 + p + 5)$;
7. $G(p) = (3p^2 – p +3) /(2p^3 + 2)$;
8. $G(p) = (p^3 – 2)/(4p^3 + p^2 + 2p + 3)$;
9. $G(p) = (2p^2 – 5p +2)/(2p^3 + p^2 + 12p + 1)$;
10. $G(p) = (7p^2 – 3)/(4p^3 + 5p^2 + 21p + 1)$;
11. $G(p) = (4p – 1)/(5p^3 + 7p^2 + 2p + 3)$;
12. $G(p) = (11p^2 – p – 3)/(15p^3 + 6p + 4)$;
13. $G(p) = (7p^4 – 4p^3 +3) /(5p^4 + 21p + 13)$;
14. $G(p) = (3p^2 + 3p – 2) /(4p^3 + 3p + 3)$.

За допомогою функцій ***tf2zpk*** пакету *Signal processing* знайти вираз для передатної функції в zpk-формі (шляхом завдання нулів, полюсів та коефіцієнту підсилення). Зробити висновок щодо стійкості системи.

Якщо система не є стійкою, потрібно побудувати стійку, за схемою, вказаною на Рис.5, але зі своєю ПФ, *підшукавши* коефіцієнт посилення k_u у відповідної замкненої системі з від'ємним оберненим зв'язком, і далі працювати саме з нею.

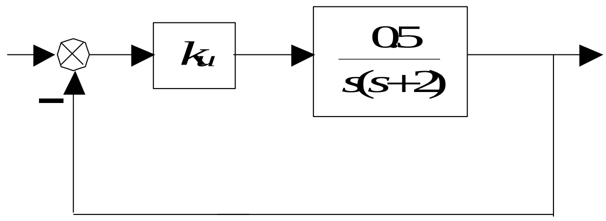

Рис. 5. Схема слідкуючої системи

Побудувати модель відповідної лінійної ланки. Побудувати її імпульсну характеристику та перехідну функцію. Дослідити відгук системи на гармонічний вхідний сигнал, знайти відповідні коефіцієнт посилення та зсув фази.

Побудувати модель для отримання годографу Найквіста та частотних характеристик (АЧХ & ФЧХ) системи. Прокоментуйте отримані криві: чи існують у системі резонанси та явища замкнення (запирания/рус.)? Як резонанси співвідносяться зі стійкістю? Чи є зв'язок між кривими АЧХ & ФЧХ?

Побудувати модель диференційного рівняння, що відповідає обраній передатній функції. Переконайтеся, що система залишається та сама за властивостями відображення вхід-вихід.

2.1.2. Задача реалізації

Побудувати модель системи, що відповідає канонічним формам керованості та спостережуваності. Переконайтеся порівнянням результатів відображення вхід-вихід що вони ідентичні початковій.

Побудуйте відповідні КФК та КФС лінійні системи керування в просторі станів, вкажіть їх матриці А, В і С, переконайтеся в тотожності їх матричних передатних функцій.

2.2. Теоретичні положення

Сенс керування полягає в тому, щоб, впливаючи на деякий об'єкт, змінювати процеси, які в ньому протікають задля досягнення певної мети. Таким чином обрати керуючий вплив, щоб об'єкт вів себе бажаним чином. Керування, що відбувається без участі людини, за допомогою пристрою – автоматичне. Розробка принципів створення таких пристроїв – основна задача теорії автоматичного керування.

Автоматичні пристрої складаються з елементів різної природи. Для аналізу їх взаємодії необхідно мати їх стандартний опис. Скористуємось загальним підходом декомпозиції, який є широко розповсюдженим в інженерні практиці:

а) реальний елемент системи розглядається як *ланка*, що перетворює *вхідний вплив* у *вихідну реакцію*, що реалізує деяке відображення «вхід–вихід»;

б) взаємодія ланок задається описом зв'язків між їх виходами та входами, цей опис задає *структуру* системи.

Ланка називається *лінійною*, якщо для неї виконується *принцип суперпозиції*: реакція на лінійну комбінацію вхідних сигналів є така ж лінійна комбінація відповідних вихідних. Лінійна ланка може представляти собою результат лінеаризації реальної нелінійної. Лінійне перетворення «вхід-вихід», що відповідає такій ланці задається лінійним диференціальним рівнянням із постійними коефіцієнтами:

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + \ldots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = b_m \frac{d^m u}{dt^m} + \ldots + b_1 \frac{du}{dt} + b_0 u \,, \qquad (*)$$

де a_i, b_j – постійні величини, параметри ланки, $u(t)$ – вхід, $y(t)$ – вихід, n, $m \in Z$, n – порядок ланки; початкові умови (якщо не вказано інше) звичайно передбачаються рівними нулю.

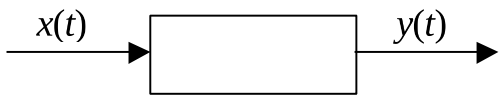

Рис. 6. Схема лінійної ланки: $x(t) \in U$ – простір вхідних сигналів;
$y(t) \in Y$ – простір вихідних сигналів

Рівняння (*) задає модель лінійної ланки в *просторі сигналів*.

Перетворення Лапласа функції $f(t)$ (її L – образ) є така функція $F(p)$:

$$F(p) = \int_0^{+\infty} t(t) e^{-pt} dt = L\{f(t)\}.$$

З $F(p)$ однозначно відновлюється $f(t)$, якщо $f(t) = 0$ при $t < 0$, та при цьому виконується – важливіша властивість перетворення Лапласа, що дозволяє зводити розв'язання диференціальних рівнянь до розв'язання алгебраїчних. Застосуємо L - перетворення до рівняння лінійної ланки (*). Отримаємо:

$$\left(a_n p^n + \ldots + a_1 p + a_0\right) Y(p) = \left(b_m p^m + \ldots + b_1 p + b_0\right) U(p)$$

$$Y(p) = H(p)U(p). \qquad (**)$$

Тут $H(p) = \dfrac{b_m p^m + \ldots + b_1 p + b_0}{a_n p^n + \ldots + a_1 p + a_0}$ – передатна функція (ПФ) ланки, яка зв'язує образи по Лапласу входу та виходу. Нехай $h(t)$ – оригінал ПФ $H(p)$. Тоді

$$H(p)U(p) = L\left\{\int_0^t h(\tau)u(t-\tau)d\tau\right\}, \qquad y(t) = \int_0^t h(\tau)u(t-\tau)d\tau, \qquad (***)$$

де $h(t)$ – вагова функція ланки, так звана імпульсна перехідна функція, реакція системи на δ-імпульс. Поведінка системи при поданні на її вхід довільного сигналу повністю визначається її імпульсною перехідною функцією (чому?). Отже, існує декілька описів ланки: (*), (***) – моделі в часовій області (*time–domain model*), (**) – модель у частотній області (*frequency–domain model*).

Що обумовлює останню назву? Нехай вхідний сигнал задано гармонічним впливом. В комплексній формі це $u(t)=e^{i\,\omega t}$, та вихід, як легко бачити, буде $y(t)=H(i\omega)e^{i\,\omega t}$.

Діаграма Найквіста, чи *Амплітудно-фазова частотна характеристика* (АФЧХ) — являє собою годограф кінця вектора $H(i\omega)$ на комплексній площині при різних значеннях частоти $\boldsymbol{\omega}$, яка змінюється в межах від 0 до нескінченності. Це лінія, що з'єднує кінці радіус-векторів, довжина яких дорівнює відношенню амплітуди вихідної і вхідної величин, а кут, утворений з додатним напрямком дійсної осі дорівнює різниці фаз вихідної і вхідної величин для частот, що змінюються від 0 до $+\infty$.

Таким чином, амплітудна зміна вхідного сигналу визначається $|H(i\omega)|$ – *амплітудно-частотной характеристикою* ланки, а відповідний фазовий зсув – $\mathrm{Arg}H(i\omega)$ – *фазово-частотной характеристикой*. Максимальне значення амплітудно-частотної характеристики $M_{p\varpi}$ має місце на резонансній частоті ω_r. *Смуга пропускання* ω_B визначає здатність системи правильно відтворювати вхідний сигнал. Смуга пропускання визначається частотою ω_B, на якій амплітудно-частотна характеристика системи зменшується на 3 дБ відносно її значення на низьких частотах (тобто в $10^{0,15}$ раз).

<u>Приклад 1</u>. *RC – ланцюг*

Рівняння підсилювача: $u_2 = ku_1$. Рівняння RC – ланцюга:

$$u_2 = IR+Q/c,\ Q/c = u_3, \qquad \begin{matrix} \dot{Q}=\dot{u}_3 C, \\ ¿ \\ I= \ ¿ \\ ¿ \end{matrix} \qquad u_2=\dot{u}_3CR+u_3,\ T\dot{u}_3+u_3=u_2=ku_1,$$

де $T=RC$ – стала часу. Виконується принцип суперпозиції.

$$L\{u_i(t)\}=U_i(p),\quad U_3(p)=\frac{k}{Tp+1}U_1(p),\quad H(p)=\frac{k}{Tp+1}.$$

Отримаємо так званий *аперіодичний ланцюг*: $h(t) = (ke^{-t/T})/T$.

<u>Приклад 2</u>. *Коливальна ланка* (*LRC-ланцюг*) $\xi < 1$.

Рівняння ланки виводиться з попереднього з урахуванням загасання:

$$T^2\frac{d^2y}{dt^2}+2\xi T\frac{dy}{dt}+y=ku\,.$$

Звідки маємо: $H(p)=\dfrac{k}{T^2p^2+2\xi Tp+1};\ \Rightarrow\ h(t)=\dfrac{\exp(-\xi t/t)}{T\sqrt{1-\xi^2}}\sin\dfrac{\sqrt{1-\xi^2}}{T}t$.

Динамічні характеристики ланки визначаються по реакції системи на типові зовнішні впливи. До них, звичайно, відносяться:

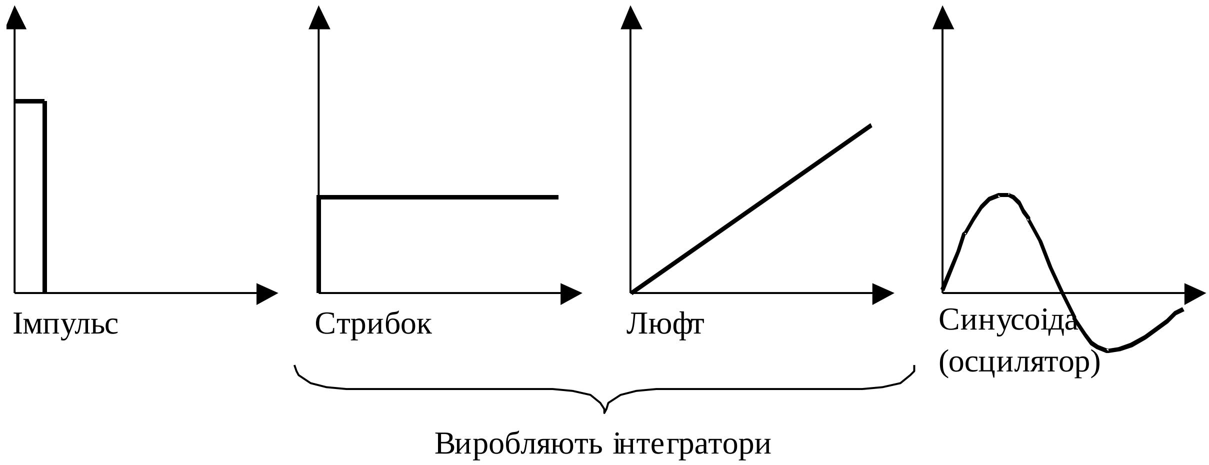

Рис. 7. Типові (еталонні) вхідні сигнали.

Перехідна функція системи – реакція на одиничну сходинку (стрибок).

Для $H(s) = k/(rs+1)$ (ланка І-го порядку) перехідна функція $c(t) = k(1 - e^{t/\tau})$, де r – стала часу (міра швидкодії системи), k – скінчене, усталене значення реакції. Коефіцієнт підсилення – коефіцієнт пропорційності між постійним вхідним сигналом та усталеним значенням вихідного сигналу, визначається значенням ПФ у нулі.

Розглянемо стандартну форму ланки ІІ порядку: $G(s)=\omega_n^2\big/\left(s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2\right)$, де ω_n – власна частота коливань, ξ – коефіцієнт загасання. Реакція на одиничну сходинку: $1-\exp(-\xi\omega_n t)\sin(\beta\omega_n t+\theta)/\beta$, де $\beta=(1-\xi^2)^{0,5}$, $\theta=\mathrm{arctg}(\beta/\xi)$, $r=1/\xi\omega$ – стала часу експоненти, що характеризує загасання. Кажуть, що система при $0<\xi<1$ недодемпфована, при $\xi=0$ недемпфована, при $\xi=1$ має критичне демпфування, та при $\xi>1$ передемпфована.

Розглянемо вигляд типової перехідної функції – реакції системи другого порядку на стрибок, нормований по усталеному значенню. В доповнення до розглянутих частотних, введемо часові характеристики ланки (так звані показники якості):

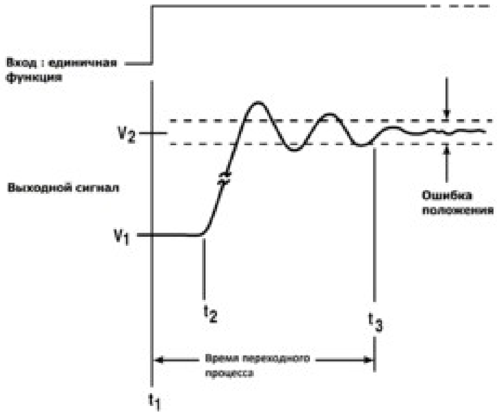

Рис. 8. Типова перехідна функція

Вираз для характеристик: час усталення $T_p = \pi\left(1-\xi^2\right)^{-0,5} / \omega_n$, максимальне відносне перерегулювання $\exp\left(-\xi\pi / \sqrt{1-\xi^2}\right)\times 100\%$.

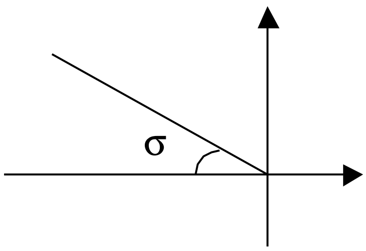

Рис. 9. ...

Розглянемо полюса ПФ $G(s)$: $-\xi\omega_n \pm i\omega_n\sqrt{1-\xi^2}$

Час усталення є зворотно пропорційним дійсній частині полюсів:

$T_s = k\tau = k/(\xi\omega_n)$. З формули $\alpha = \mathrm{arctg}\left(\sqrt{1-\xi^2}/\xi\right)$/$\xi$arccos$\xi$ отримаємо відносне перерегулювання. Зменшення «полюсного» куту α зменшує перерегулювання.

Розгляд систем більш високого порядку, нажаль, є менш наглядним. Однак, можна показати, що такі системи завжди можна представити у вигляді паралельного з'єднання систем першого та другого порядків. Крім того, можна скористатися тією обставиною, що довільну фізичну систему завжди можна описати моделлю порівняно невисокого порядку, зневажаючи деякими її характеристиками.

2.3. Контрольні питання

2.3.1. Навіщо вводиться та розглядається таке різноманіття моделей лінійної поведінки?
2.3.2. Якім є критерій фізичної реалізованості передатної функції?