SUMÁRIO

PRELÚDIO

O texto que segue trata-se de um compêndio de assuntos que acho relevantes; portanto, decerto, o texto reflete minha subjetividade. Desta forma, este texto estará em construção contínua, de maneira que não haverá versão final enquanto as circunstâncias da vida sobrepujarem o meu ímpeto de colecionar tais informações. Alguns resultados são de minha autoria, mas certamente estão enviesados por alguma obra, de maneira que não descobri a roda, mas me sustentei sobre o trabalho de vários indivíduos perspicazes que pela primeira vez se depararam com tais problemas. Além disso, é impossível colecionar tudo o que nos interessa; portanto, me ative aos que, ao menos, tive alguma ideia de demonstração.

I

CIÊNCIAS FORMAIS

1

GEOMETRIA ANALÍTICA

No que segue vamos tentar construir o conceito de vetor. A princínpio era tratar axiomaticamente esta construção, mas tenho uma certa convicção que esta tarefa foge as minhas capacidades.

Primeiro vamos considerar um conjunto E chamado espaço, este espaço possui certos objetos indefinidos, como pontos denotados por letras maiúsculas do alfabeto latino $A, \ldots, Z$; retas denotadas por letras minúsculas do alfabeto latino $a, \ldots, z$; e planos denotados por letras do alfabeto grego $\alpha, \ldots, \omega$.

Existem várias formas de se alcançar a geometria euclidiana, i.e., podemos partir de diferentes axiomas e intuitivamente alcançar o espaço euclidiano, i.e., construí-lo axiomaticamente.

Doravante explicitaremos os axiomas necessários e algumas definições auxiliares, ao progredirmos.

Axioma 1. *Dois pontos distintos A e B, determinam uma, e somente uma, reta. Tal reta será denotada por AB.*

Axioma 2. *Admitiremos uma noção primitiva, a noção de 'estar entre'. Dados três pontos numa reta, somente um deles está entre os outros dois.*

Definição 1. *Ao conjunto de pontos entre dois pontos distintos A e B de uma reta r denotaremos por $]A, B[$. Também definiremos*

$$\begin{aligned} [A, B] &= \,]A, B[\cup \{A, B\}; \\ [A, B[&= \,]A, B[\cup \{A\}; \\ ]A, B] &= \,]A, B[\cup \{B\}. \end{aligned}$$

A qualquer um destes conjuntos chamaremos de seguimento. A e B são chamados extremos ou extremantes. Segundo esta definição $[A, B] = [B, A]$. Diremos que um seguimento com extremos A e B é nulo se, e somente se, $A = B$.

Definição 2. *Sejam A e B, dois pontos distintos definimos a semirreta com origem em A determinada por B, como sendo o conjunto*

$$s_{(A,B)} = \Big\{ P \in AB : P \in [A, B] \vee B \in [A, P] \Big\}$$

Definição 3. *Seja α um plano e $r, s \subset \alpha$ retas quaisquer, diremos que r e s são paralelas se, $r = s$ ou $r \cap s = \emptyset$.*

Axioma 3. *Seja r uma reta e $P \notin r$, existe uma única reta s paralela r passando por P, i.e., $P \in s$. O plano fica dividido em dois conjuntos disjuntos. Defina no plano α a seguinte relação entre pontos $A \sim B$, se e somente se, $[A, B] \cap r = \emptyset$.*

Axioma 4. *Existe uma função $\mu : E \to R_+$, satisfazendo as seguintes propriedades:*

I. $\mu(S) = 0$ *se, e somente se S é um seguimento nulo*;

II. Seja $\mathcal{F} = \{S_i \in \mathscr{P}(E) : i \in n + 1\}$ uma família de seguimentos disjuntos aos pares. Então

$$\mu\Big(\bigcup_{i \in n+1} S_i\Big) = \sum_{i=0}^{n} \mu(S_i);$$

III. Para toda semirreta $s_{(A,B)}$ e todo $c \in R_+$, existe $C \in s_{(A,B)}$, tal que $\mu([A, C]) = c$.

Definição 4. *Sejam α um plano e $r \subset \alpha$ uma reta*

Definição 5. *Sejam A e B dois pontos distintos definimos por seguimento orientado como sendo o par ordenado (A, B). Diremos que o seguimento é nulo se, e somente se, $A = B$.*

Não confundir seguimento orientado que é um par ordenado (A, B), com o seguimentos definidos anteriormente.

Definição 6. *Sejam (A, B) e (C, D) dois seguimentos não nulos.*

Seguimentos equipolentes. Na geometria analítica existe um conceito chamado **vetor**, cuja definição baseia-se na equipolência, uma relação de equivalência definida no conjunto dos seguimentos orientados. Seguiremos aqui a notação de P. Boulos e I. de Camargo dada no livro *Geometria Analítica um Tratamento Vetorial*. Seja E o espaço euclidiano, um seguimento orientado é um par de pontos de E, ou em outros termos, os seguimentos orientados são elementos de $E \times E$. Sobre $E \times E$ definimos a seguinte relação de equivalência $(A, B) \sim (C, D)$ se, e somente se

$$(\mathcal{E}) \quad \big((A = C \longleftrightarrow B = D) \vee AC \parallel BD\big) \wedge \big((A = B \longleftrightarrow C = D) \vee AB \parallel CD\big)$$

Aqui por conveniência AB denota a reta determinada por A e B, quando $A \neq B$ e, $AA = \{A\}$. Definimos a relação

$$AB \parallel CD \longleftrightarrow AB = CD \ \vee \ AB \cap CD = \emptyset,$$

assim a expressão $(\mathcal{E})$ é significativa. Nestas condições seguimentos nulos, isto é da forma (A, A), são equivalentes somente a seguimentos nulos.

Doravante denotaremos tal relação de equivalência por **equipolência**. Assim, se dois seguimentos são equivalentes, são chamados por este motivo de **equipolentes**.

Teorema 1. *Seja (A, B) um seguimento não nulo, i.e., $A \neq B$, e $P \in E$, então existe um seguimento orientado $(P, P_{(A,B)}) \sim (A, B)$, i.e., um seguimento equipolente a (A, B) com origem em P.*

Prova. Primeiro suponhamos que $P \notin AB$, pelo axioma das paralelas na geometria euclidiana existe uma reta r paralela a AB passando por P. Note que $B \notin AP$, pois caso contrário $P \in AP = AB$, o que contradiz nossa hipótese inicial. Pelo mesmo axioma existe uma reta s paralela a AP passando por B. Afirmo que $s \cap r \neq \emptyset$, suponhamos por redução ao absurdo o contrário. Necessariamente $s \parallel r$, consequentemente $s \parallel AB$, como $B \in s \cap AB$, decorre que

$s = AB$, todavia $A \notin s$, pois s é uma reta paralela a AP, contendo $B \notin AP$. Esta contradição nos leva a concluir que existe $P_{(A,B)} \in r \cap s$. Seguidamente observemos que $AB \,/\!/\, r = PP_{(A,B)}$ e $AP \,/\!/\, s = BP_{(A,B)}$, consequentemente $(A, B) \sim (P, P_{(A,B)})$. Suponhamos agora que $P \in AB$, existe $(Q, Q_{(A,B)}) \sim (A, B)$, tal que $Q \notin AB$ assim $A \notin QQ_{(A,B)}$, pelo mesmo modo existe $(P, P_{(Q,Q_{(A,B)})}) \sim (Q, Q_{(A,B)})$, por transitividade $(P, P_{(Q,Q_{(A,B)})}) \sim (A, B)$. ∎

Este teorema nos mostra que se (A, B) é não nulo e $(A, B) \sim (C, D)$ e $C \notin AB$, então $ABDC$ é um paralelogramo. Da geometria euclidiana tem-se uma noção básica de comprimento (medida), sabe-se que num paralelogramo lados paralelos têm o mesmo comprimento. Como consequência seguimentos equipolentes têm o mesmo comprimento.

Definição 7. *Sejam (A, B) e (C, D) seguimentos não nulos, diremos que eles possuem o mesmo sentido se $AB \,/\!/\, CD$ e existem $(E, F) \sim (A, B)$ $(G, H) \sim (C, D)$, tais que $EF \cap GH = \emptyset$ e $\overline{EG} \cap \overline{FH} = \emptyset$.*

Teorema 2. Seguimentos equipolentes não nulos têm o mesmo sentido.

Prova. Podemos sem perdas de generalidade supor que $(A, B) \sim (C, D)$, sejam tais que $AB \cap CD = \emptyset$. Necessariamente $AB \,/\!/\, CD$ e $AC \,/\!/\, BD$, como $B \notin AC$, decorre que $\overline{AC} \cap \overline{BD} = \emptyset$.

Corolário 1. *Seguimentos orientados são nulos ou têm o mesmo sentido e mesmo comprimento.*

Prova. Imediata à discussão anterior. ∎

Note que a definição de equipolência $(\mathcal{E})$ implica o corolário anterior, mas a priori não é sabido se dois seuigmentos não nulos que têm o mesmo sentido e comprimento são equipolentes. Para o que vamos fazer não é necessário provar a recíproca. A definição da relação de equipolência evita fazer comentários prévios sobre comprimentos, e também nos poupa de tratar os casos em que seguimentos são nulos ou não.

Definição 8. *Um vetor é o conjunto*

$$\overrightarrow{AB} = \Big\{(C, D) \in E \times E : (C, D) \sim (A, B)\Big\}$$

em outros termos, um vetor é uma classe de equivalência da relação de equipolência $(\mathcal{E})$.

Quando não se quiser fazer referência a um representante da classe, escolheremos uma letra do alfabeto latino comumente u, v, w, x, y, z e encimamos-la por uma flecha, e.g., $\vec{x}$.

Os vetores herdam as propriedades dos seguimentos orientados e não orientados dados por de seus representantes, neste caso, paralelismo, sentido e comprimento. Denotaremos o comprimento de um vetor $\vec{x}$, por $\|\vec{x}\|$ e a este número daremos o nome de norma. Observe que a noção de comprimento faz sentido para seguimentos nulos, neste caso trivialmente se $\vec{x}$ possui representante nulo, então $\|\vec{x}\| = 0$. Ademais, nestas condições escreveremos $\vec{0}$ para denotar a classe de equivalência dos seguimentos orientados nulos. O conjunto das classes de equivalência será denotada por $\mathcal{V}$.

A seguir muniremos o conjunto $\mathcal{V}$ de uma estrutura algébrica, a saber a adição $+$.

Definição 9. *Dados dois vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$, definiremos o símbolo $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$ como sendo o vetor $\overrightarrow{AB_{(C,D)}}$*, em outros termos a adição trata-se de construir um triângulo (possivelmente degenerado) com vértices A, B e $B_{(C,D)}$, em que $(B, B_{(C,D)}) \sim (C, D)$, e considerar o vetor (a classe) cujo representante seja o seguimento orientado $(A, B_{(C,D)})$.

† Mostrar que a definição indepente do representante!

Teorema 3. *Sejam $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ dois vetores quaisquer. Então $(A, B_{(C,D)}) \sim (C, D_{(A,B)})$.*

1.1 Cônicas

Definição 1 *Consideremos g um polinômio de duas variáveis de grau 2 com coeficientes em $\mathbb{R}$ dado por*

$$g(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f. \tag{1.1}$$

Uma cônica C é o locus (lugar geométrico) ou conjunto de pontos

$$C = \{(x, y) : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \ \wedge \ g(x, y) = 0\}. \tag{1.2}$$

O objetivo das próximas seções é aplicar transformações ao sistema de coordenadas, de tal maneira que a cônica seja facilmente reconhecida. Doravante, a menos da menção explícita em contrário, sempre quando referirmos a g, estaremos considerando um polinômio como estipulado na **Definição 1**.

Teorema 1 (Exercício 23-10 [Boulos e Camargo])

Prova Primeiramente consideremos o sistema

$$\begin{cases} ax + \frac{b}{2}y + \frac{d}{2} = 0 \\ \frac{b}{2}x + cy + \frac{e}{2} = 0 \end{cases} \tag{1.3}$$

Sejam (h, k) e (u, v) soluções de do sistema (1.3). Em verdade não é difícil notar que $(h + k, u + v)$ também o é, bastando para isto substituir as respectivas coordenadas no sistema (1.3) e atestar as igualdades.

Notemos em seguida que qualquer solução (x, y) de (1.3), satisfaz

$$ax^2 + bxy + cy^2 + \frac{d}{2}x + \frac{e}{2}y = x(ax + \frac{b}{2}y + \frac{d}{2}) + y(\frac{b}{2}x + cy + \frac{e}{2}) = 0; \tag{1.4}$$

além disso, para uma tal solução (x, y), vale

$$g(x, y) = \frac{d}{2}x + \frac{e}{2}y + f. \tag{1.5}$$

Em conformidade, segue-se

$$2\Big(u\big(a(u + h) + \frac{b}{2}(k + v) + \frac{d}{2}\big) + v\big(\frac{b}{2}(u + h) + c(v + k) + \frac{e}{2}\big)\Big) = 0 \tag{1.6}$$

de (1.4) com $(x, y) = (u, v)$ e (1.6) podemos inferir

$$au^2 + buv + cv^2 + \frac{d}{2}u + \frac{e}{2}v + 2ahu + 2ckv + bhv + buk = 0. \tag{1.7}$$

Como consequência, de (1.4), (1.5) e (1.7) temos

$$\begin{aligned} g(h, k) &= ah^2 + bhk + ck^2 + dh + ck + f \\ &= ah^2 + bhk + ck^2 + dh + ck + f + au^2 + buv + cv^2 \\ &\quad + \frac{d}{2}u + \frac{e}{2}v + 2ahu + 2ckv + bhv + buk \\ &= a(h + u)^2 + b(u + h)(v + k) + c(k + v)^2 \\ &\quad + \frac{d}{2}(h + u) + \frac{e}{2}(k + v) + \frac{d}{2}u + \frac{e}{2}v + f \\ &= \frac{d}{2}u + \frac{e}{2}v + f \\ &= g(u, v) \end{aligned} \tag{1.8}$$

Em outros termos g é constante nas soluções de (1.3). ∎

1.1.1 Rotações de sistema de coordenadas

Podemos enxergar algrebica e isometricamente $\mathbb{R}^2$ como $\mathbb{C}^2$, daí a base canônica é simplesmente $\mathcal{B} = \{1, i\}$. Como é sabido uma rotação da base por um ângulo θ em relação ao eixo gerado por 1 no sentido anti-horário é simplesmente uma multiplicação complexa por $e^{i\theta}$, a nova base é simplesmente $\mathcal{B}_\theta = \{e^{i\theta}, e^{i(\theta+\pi/2)}\}$. Destarte, dado w, existem $u, v \in \mathbb{R}$, tais que $w = (u, b)_{\mathcal{B}_\theta}$, evidentemente

$$w = (u\cos\theta - v\,\mathrm{sen}\,\theta) + i(u\,\mathrm{sen}\,\theta + v\cos\theta). \tag{1.9}$$

Assim, as coordenadas x e y de w relativas ao sistema canônico é dado pela identidade

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\,\mathrm{sen}\,\theta \\ \mathrm{sen}\,\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \tag{1.10}$$

1.1.2 Eliminação do termo quadrático misto por rotações

2

ÁLGEBRA LINEAR

2.1 Espaços vetoriais

A seguir apresentarei alguns exercícios pertinentes de [Hoffman].

Proposição 1 *Sejam V um espaço vetorial e $W_i \subset V$, com $i \in \{1,2\}$, subespaços vetoriais tais que $W = W_1 \cup W_2$ é um subespaço de V. Então, existe um $i \in \{1,2\}$, tal que $W_i \subset W_j$, com $i \neq j$.*

Prova Suponhamos por *reductio ad absurdum* que

$$W_1 \setminus W_2 \neq \emptyset \ \wedge \ W_2 \setminus W_1 \neq \emptyset \tag{2.1}$$

Sejam $w_1 \in W_1 \setminus W_2$ e $w_2 \in W_2 \setminus W_1$, das hipóteses $w = w_1 + w_2 \in W$. Todavia, $w \notin W_1$ e $w \notin W_2$. Pois, digamos que $w \in W_1$, então $w_2 = w - w_1 \in W_1$, o que é uma contradição pois $w_2 \in W_2 \setminus W_1$. Agora se $w \in W_2$, então analogamente $w_1 = w - w_2 \in W_2$, outra contradição, pois $W_1 \setminus W_2$. Concluímos, portanto, que existe $i \in \{1,2\}$, tal que $W_i \subset W_j$, com $i \neq j$. ∎

Proposição 2 *Seja K um corpo, W um espaço vetorial sobre K. Considere $V = W^K$, munido com a soma e produto por escalar usuais. Então*

$$V_i = \{f : f \in V \ \wedge \ f(-x) = -f(x)\} \tag{2.2}$$

e

$$V_p = \{f : f \in V \ \wedge \ f(-x) = f(x)\} \tag{2.3}$$

são subespaços de V, tais que

$$V_i \cap V_p = \{0\} \ \wedge \ V = V_i + V_p. \tag{2.4}$$

Prova Primeiro é evidente que $0 \in V_i$. Sejam agora $f, g \in V_i$ e $\varkappa \in K$, temos que para todo $x \in K$, vale

$$\begin{aligned}(\varkappa f + g)(-x) &= \varkappa f(-x) + g(-x)\\ &= -\varkappa f(x) - g(x)\\ &= -(\varkappa f(x) + g(x))\\ &= -(\varkappa f + g)(x),\end{aligned} \tag{2.5}$$

consequentemente V_i é um subespaço de V. O outro caso é ainda mais simples de ser provado, o argumento é inteiramente semelhante.

Seja agora $f \in V_i \cap V_p$, temos para todo $x \in K$

$$f(x) = f(-x) = -f(x), \tag{2.6}$$

logo $f = 0$ e, consequentemente $V_i \cap V_p = \{0\}$.

Por fim, seja $f \in V$. Note que $f_i, f_p \in V$ dadas por

$$f_i(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2} \quad \wedge \quad f_p(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} \tag{2.7}$$

são tais que, para todo $x \in K$ vale

$$f_i(-x) = \frac{f(-x) - f(x)}{2} = -\frac{f(x) - f(-x)}{2} = -f_i(x), \tag{2.8}$$

e.

$$f_p(-x) = \frac{f(-x) + f(x)}{2} = \frac{f(x) + f(-x)}{2} = f_p(x), \tag{2.9}$$

i.e., $(f_i, f_p) \in V_i \times V_p$. Ademais, $f = f_i + f_p$, consequentemente $V = V_i + V_p$. ∎

Proposição 3 *Sejam $V_i \subset V$, com $i \in \{1, 2\}$, subespaços do espaço vetorial V, tais que*

$$V = V_1 + V_2 \quad \wedge \quad V_1 \cap V_2 = \{0\}. \tag{2.10}$$

Então para todo $v \in V$ existe único $(v_1, v_2) \in V_1 \times V_2$, tais que $v = v_1 + v_2$.

Prova A existência decorre da definição, provemos, portanto, a unicidade. Para tanto, sejam $v \in V$ e $v_i, w_i \in V_1$, com $i \in \{1, 2\}$, tais que

$$v = v_1 + v_2 = w_1 + w_2, \tag{2.11}$$

temos que

$$v_1 - w_1 = w_2 - v_2 \in V_1 \cap V_2 = \{0\}. \tag{2.12}$$

Decorre que

$$v_1 - w_1 = 0 = v_2 - w_2, \tag{2.13}$$

o que por sua vez acarreta $v_i = w_i$, com $i \in \{1, 2\}$. ∎

II

CIÊNCIAS NATURAIS

3

EQUAÇÃO DE CARGA DE UM CAPACITOR

Teorema 4. *Seja um capacitor de capacitância C conectado em série com um resistor de resistência R e à uma bateira de tensão V_f. Admitindo-se que o capacitor esteja inicialmente descarregado a equação de carga do capacitor é dada por*:

$$V(t) = V_f(1 - e^{-\frac{t}{RC}}).$$

Prova. A corrente no capacitor $I(t)$ é a mesma que a corrente no resistor, consequentemente

$$(\ddagger) \qquad \frac{V_f - V(t)}{R} = I(t) = \frac{dQ}{dt}(t) = C\frac{dV}{dt}(t)$$

em que $V(t)$ é a tensão no capacitor no instante t. Temos portanto de $(\ddagger)$ que

$$\frac{1}{RC} = \frac{dV}{dt}(t)\frac{1}{V_f - V(t)} = -\frac{d}{dt}\big(V_f - V(t)\big)\frac{1}{V_f - V(t)}$$

em consequência do lema que vimos e multiplicando ambos membros por -1, decorre que

$$-\frac{1}{RC} = \frac{d}{dt}\big(V_f - V(t)\big)\frac{1}{V_f - V(t)} = \frac{d}{dt}\Big(\ln\big|V_f - V(t)\big|\Big)$$

do teorema fundamental do cálculo vem

$$-\frac{T}{RC} = \int_0^T \frac{d}{dt}\Big(\ln\big|V_f - V(t)\big|\Big)\,dt = \ln\big|V_f - V(t)\big|\Big|_0^T$$

para $T \geq 0$.

Agora admitindo-se que $V(0) = 0$, e que $V_f - V(t) > 0$ para todo $t \in R_+$ obtemos

$$-\frac{T}{RC} = \ln\big(V_f - V(t)\big)\Big|_0^T = \ln\frac{V_f - V(T)}{V_f}$$

donde se conclui

$$\frac{V_f - V(T)}{V_f} = e^{\frac{-T}{RC}}$$

que por sua vez implica

$$V(T) = V_f(1 - e^{-\frac{T}{RC}})$$

como T é arbitrário podemos escrever sem perdas

$$V(t) = V_f(1 - e^{-\frac{t}{RC}})$$

para todo $t \geq 0$. ∎

Como tratar adequadamente conversões entre grandezas, e.g., grandezas angulares? *Como explicar rigorosamente a igualdade que se encontra rotineiramente em livros*:

$$2\pi \text{ rad} = 360^\circ \text{ ?}$$

Rigorosamente, os dois objetos são distintos, de maneira que a identidade não é siginificativa.

III

A FAZER

I. Geometria euclidiana;

II. Geometria analítica;

III. Álgebra Linear;

IV. Anel dos inteiros;

V. MMC e MDC;

VI. Anel dos polinômios;

VII. Anel das matrizes;

VIII. Espaços vetoriais;

IX. Módulos;

X. Regra de três simples e composta;

XI. Inconsistência de modelos LLM;

XII. Diferencibilidade de funções reais inversas de variáveis reais;

XIII. Mudança de variáveis em integrais;

XIV. Definição de primitivas ou integrais indefinidas.