

PRÉLUDIO

O texto que segue trata-se de um compêndio de resultados que acho relevantes, portanto, o texto reflete, e muito, minha subjetividade. Não obstante, este texto estará em construção contínua, de maneira que não haverá versão final enquanto as circunstâncias da vida sobrepujarem o meu ímpeto de colecionar tais e tais resultados. Alguns, resultados são de minha autoria, mas certamente estão enviesados por uma ou outra obra, de maneira que não descobri a roda, mas me sustentei sobre o trabalho de vários indivíduos perspicazes que pela primeira vez se depararam com o problema, e talvez, eles próprios tenham o resolvido. Saliento também que, muitos—a maioria—dos resultados não são meus, de forma que talvez eu já os tenha visto em determinado momento de minha vida, e simplesmente os reproduzi aqui. Além disso, é impossível colecionar todos os resultados interessantes, portanto, me ative aos que ao menos tive alguma ideia de demonstração, talvez inspirada por outros.

1

CIÊNCIAS FORMAIS

1.1 LÓGICA

Para fins de nota parafraseio sem prova e duma maneira não formal o seguinte

TEOREMA 1 (TEOREMA DA DEDUÇÃO OU LEI DA DEDUÇÃO DE TARSKI) *Todo teorema de uma teoria dedutiva é satisfeito por qualquer modelo do sistema de axiomas desta teoria; além disso, a qualquer teorema corresponde uma sentença geral a qual pode ser formulada e provada dentro da estrutura da lógica e que estabelece o fato que o teorema em questão é satisfeito para um modelo qualquer do sistema de axiomas.*

■

DEFINIÇÃO 1 (SISTEMA DE AXIOMAS MUTUALMENTE INDEPENDENTE) *Um sistema de axiomas é dito MUTUALMENTE INDEPENDENTE se nenhum axioma do sistema pode ser derivado dos outros por métodos de inferência lógica, i.e., da lógica proposicional e de disciplinas precedentes¹.*

1.2 TEORIA DOS CONJUNTOS

Decidi abordar a construção dada no apêndice do livro *General Topology* de John L. Kelley (*vide pp. 250–281*). Conforme atestei, o sistema empregado por Kelley, é uma adaptação do sistema de A. P. Morse, como ele bem afirma em sua obra.

Nosso sistema axiomático constituirá além da lógica proposicional, de objetos indefinidos chamados **classes**, denotadas doravante por letras do alfabeto latino. Adicionalmente, com uma relação \in , chamada pertinência.

DEFINIÇÃO 2 (CONJUNTOS)

$$\forall x(\varsigma(x) \longleftrightarrow \exists y(x \in y)).$$

À cada classe x tal que $\varsigma(x)$, daremos o nome de conjunto. Desta maneira $\varsigma(x)$ se, e somente se, x é um conjunto.

AXIOMA 1 (II CLASSIFICATION AXIOM-SCHEME • AXIOMA-ESQUEMA DA CLASSIFICAÇÃO) *Seja ϕ uma função proposicional tendo como parâmetros as classes. Então*

$$\forall y(y \in \{x : \phi(x)\} \longleftrightarrow \varsigma(y) \wedge \phi(y)).$$

¹Isto está em conformidade segundo Tarski. Quais seriam estas disciplinas?

Enfatizo que os objetos da teoria de classes, resumem-se, como é esperado, à classes. Portanto, ‘ $\{x : \phi(x)\}$ ’ denota uma classe, daí o nome de *classifier* ou classificador.

DEFINIÇÃO 3 $\langle\phi\rangle = \{x : \phi(x)\}.$

AXIOMA 2 (I AXIOM OF EXTENT • AEx : AXIOMA DA EXTENSIONALIDADE)

$$\forall x, y (x = y \longleftrightarrow \forall z (z \in x \longleftrightarrow z \in y)).$$

Friso categoricamente que uma prova rigorosa da igualdade de classes, requer o uso explícito do axioma da extensionalidade **AEx**. Portanto, a rigor, uma cadeia de igualdades de classes dadas por classificadores, mesmo que óbvia para leitores maduros, não caracteriza, segundo minha visão, uma prova. Enfatizo este ponto, pois em estágios anteriores na confecção deste compêndio eu usei tais métodos.

TEOREMA 2

$$\forall x (x = \{y : y \in x\}).$$

PROVA

$$\forall z (z \in \{y : y \in x\} \longleftrightarrow z \in x).$$

■

DEFINIÇÃO 4 $x \cup y = \{z : z \in x \vee z \in y\}.$

DEFINIÇÃO 5 $x \cap y = \{z : z \in x \wedge z \in y\}.$

Aos símbolos $x \cup y$ e $x \cap y$, dá-se o nome de união e intersecção de x com y , respectivamente.

TEOREMA 3

$$\forall x, y, z (x \cap (y \cup z) = (x \cap y) \cup (x \cap z) \wedge x \cup (y \cap z) = (x \cup y) \cap (x \cup z))$$

PROVA Vamos provar a segunda proposição. Sejam x, y e z classes, notemos que

$$\begin{aligned} (1.1) \quad \forall w (w \in x \cup (y \cap z) &\longleftrightarrow w \in x \vee w \in y \cap z \\ &\longleftrightarrow w \in x \vee (w \in y \wedge w \in z) \\ &\longleftrightarrow (w \in x \vee w \in y) \wedge (w \in x \vee w \in z) \\ &\longleftrightarrow w \in (x \cup y) \wedge w \in (x \cup z) \\ &\longleftrightarrow w \in (x \cup y) \cap (x \cup z)). \end{aligned}$$

A outra prova é inteiramente análoga. De fato, decorre das propriedades dos conectivos ‘ \wedge ’ e ‘ \vee ’, a conjunção e disjunção lógica, respectivamente. ■

DEFINIÇÃO 6

$$\forall x, y (x \notin y \longleftrightarrow \neg(x \in y)).$$

DEFINIÇÃO 7 $\neg x = \{y : y \notin x\}.$

A classe $\neg x$ chama-se complemento absoluto de x .

TEOREMA 4 Seja ϕ uma função proposicional cujos parâmetros sejam classes. Então $\neg\langle\phi\rangle = \langle\neg\phi\rangle$.

PROVA

$$\forall x(x \in \neg\langle\phi\rangle \longleftrightarrow \varsigma(x) \wedge \neg\phi(x) \longleftrightarrow x \in \langle\neg\phi\rangle).$$

■

TEOREMA 5

$$\forall x(\neg(\neg x) = x).$$

PROVA

$$(1.2) \quad \forall y(y \in \neg(\neg x) \longleftrightarrow \neg(y \in \neg x) \longleftrightarrow \neg(\neg(y \in x)) \longleftrightarrow y \in x)$$

■

TEOREMA 6 (LEIS DE DE MORGAN)

$$\forall x, y(\neg(x \cup y) = \neg x \cap \neg y \wedge \neg(x \cap y) = \neg x \cup \neg y)$$

PROVA A prova segue diretamente da definição de \cup e \cap , e das leis de De Morgan para os conectivos \vee e \wedge .

■

DEFINIÇÃO 8 $x \setminus y = x \cap \neg y$.

Ao símbolo ‘ $x \setminus y$ ’ dá-se o nome de diferença de x e y ou complemento de y relativo a x .

TEOREMA 7

$$\forall x, y, z(x \cap (y \setminus z) = (x \cap y) \setminus z)$$

PROVA Provar.

■

DEFINIÇÃO 9 Seja ϕ uma contradição qualquer. Definimos $\emptyset = \langle\phi\rangle$.

Observe que esta definição independe da contradição. Com efeito, temos o

TEOREMA 8 Se ϕ e ψ são duas contradições, então $\langle\phi\rangle = \langle\psi\rangle$.

PROVA Com efeito,

$$(1.3) \quad \forall x(x \in \langle\phi\rangle \longleftrightarrow \varsigma(x) \wedge \phi(x) \longleftrightarrow \varsigma(x) \wedge \psi(x) \longleftrightarrow x \in \langle\psi\rangle),$$

pois ambos os membros da bicondicional são falsos, logo a equivalência é válida e, consequentemente a quantificação é verdadeira.

■

A classe \emptyset é chamada de classe nula ou vazia.

TEOREMA 9

$$(1.4) \quad \forall x(x \notin \emptyset).$$

PROVA

$$(1.5) \quad \forall x(x \in \emptyset \longleftrightarrow \varsigma(x) \wedge x \neq x).$$

Como o lado direito é trivialmente falso pela definição de igualdade, decorre que $\neg(x \in \emptyset)$, ou equivalentemente $x \notin \emptyset$ é verdadeira para todo x .

■

TEOREMA 10

$$(1.6) \quad \forall x(x \cup \emptyset = x \wedge x \cap \emptyset = \emptyset).$$

PROVA Seja x uma classe, temos em conformidade

$$(1.7) \quad \forall y(y \in x \cup \emptyset \longleftrightarrow \varsigma(y) \wedge (y \in x \vee y \in \emptyset) \longleftrightarrow \varsigma(y) \wedge y \in x \longleftrightarrow y \in x)$$

o que segundo o **AEx** segue-se a identidade.

Analogamente,

$$(1.8) \quad \forall y(y \in x \cap \emptyset \longleftrightarrow \varsigma(y) \wedge (y \in x \wedge y \in \emptyset) \longleftrightarrow \varsigma(y) \wedge y \in \emptyset \longleftrightarrow y \in \emptyset)$$

novamente pelo **AEx** infere-se a igualdade. ■

DEFINIÇÃO 10

$$(1.9) \quad \mathcal{U} = \neg\emptyset$$

TEOREMA 11

$$(1.10) \quad \forall x(x \in \mathcal{U} \longleftrightarrow \varsigma(x)).$$

PROVA

$$(1.11) \quad \forall x(x \in \mathcal{U} \longleftrightarrow \varsigma(x) \wedge x \notin \emptyset \longleftrightarrow \varsigma(x)).$$



TEOREMA 12 Seja ϕ uma tautologia. Então $\langle\phi\rangle = \mathcal{U}$.

PROVA Notemos que

$$(1.12) \quad \forall x(x \in \langle\phi\rangle \longleftrightarrow \varsigma(x) \wedge \phi(x) \longleftrightarrow \varsigma(x) \longleftrightarrow x \in \mathcal{U}),$$

de **AEx** decorre o teorema. Outra maneira seria usar a hipótese que $\neg\phi$ é uma contradição, e concluir de

$$(1.13) \quad \langle\phi\rangle = \neg\langle\neg\phi\rangle = \neg\emptyset = \mathcal{U}.$$


TEOREMA 13

$$(1.14) \quad \forall x(x \cup \mathcal{U} = \mathcal{U} \wedge x \cap \mathcal{U} = x)$$

PROVA

$$(1.15) \quad \forall y(y \in x \cup \mathcal{U} \longleftrightarrow y \in x \vee y \in \mathcal{U} \longleftrightarrow y \in \mathcal{U})$$

segue pelo **AEx**.

Seguidamente,

$$(1.16) \quad \forall y(y \in x \cap \mathcal{U} \longleftrightarrow y \in x \wedge y \in \mathcal{U} \longleftrightarrow y \in x)$$

novamente decorre por **AEx**. ■

DEFINIÇÃO 11

$$(1.17) \quad \cap x = \{z : \forall y(y \in x \longrightarrow z \in y)\}.$$

DEFINIÇÃO 12

$$(1.18) \quad \cup x = \{z : \exists y(y \in x \wedge z \in y)\}.$$

A classe $\cap x$ é a interseção dos membros de x e, a classe $\cup x$ é a união dos membros de x .

TEOREMA 14

$$(1.19) \quad \cap \emptyset = \mathcal{U} \wedge \cup \emptyset = \emptyset.$$

PROVA

$$(1.20) \quad \forall x \left(x \in \cap \emptyset \longleftrightarrow \varsigma(x) \wedge \forall y(y \in \emptyset \longleftrightarrow x \in y) \longleftrightarrow x \in \mathcal{U} \right),$$

pois ϕ definida por

$$(1.21) \quad \phi(x) \longleftrightarrow \forall y(y \in \emptyset \longleftrightarrow x \in y)$$

é uma tautologia.

Em seguida,

$$(1.22) \quad \forall x \left(x \in \cup \emptyset \longleftrightarrow \varsigma(x) \wedge \exists(y \in \emptyset \wedge x \in y) \longleftrightarrow x \in \emptyset \right),$$

porquanto, ψ definida por

$$(1.23) \quad \psi(x) \longleftrightarrow \exists y(y \in \emptyset \wedge x \in y)$$

é uma contradição. ■

DEFINIÇÃO 13

$$(1.24) \quad \forall x \left(x \subset y \longleftrightarrow \forall z(z \in x \longrightarrow z \in y) \right).$$

Uma classe x é uma subclasse de y , ou está contida em y , ou y contem x , se, e somente se, $x \subset y$.

TEOREMA 15 (26 THEOREM)

$$(1.25) \quad \forall x(\emptyset \subset x \wedge x \subset \mathcal{U})$$

PROVA Seja x uma classe. Temos primeiramente

$$(1.26) \quad \forall y(y \in \emptyset \longrightarrow y \in x),$$

pois o antecedente da condicional é sempre falso. O que prova a primeira inclusão.

Por outro, lado temos

$$(1.27) \quad \forall y(y \in x \longrightarrow \varsigma(y) \longrightarrow y \in \mathcal{U}).$$

o que conclui a prova. ■

TEOREMA 16 (27 THEOREM)

$$(1.28) \quad \forall x, y (x = y \longleftrightarrow x \subset y \wedge y \subset x).$$

PROVA Sejam x e y classes quaisquer

$$(1.29) \quad \begin{aligned} x \subset y \wedge y \subset x &\longleftrightarrow \forall z ((z \in x \rightarrow z \in y) \wedge (z \in y \rightarrow z \in x)) \\ &\longleftrightarrow \forall z (z \in x \longleftrightarrow z \in y) \\ &\longleftrightarrow x = y. \end{aligned}$$

■

TEOREMA 17 (28 THEOREM)

$$(1.30) \quad \forall x, y, z (x \subset y \wedge y \subset z \rightarrow x \subset z)$$

PROVA Sejam x, y, z classes quaisquer. Temos

$$(1.31) \quad \begin{aligned} (x \subset y \wedge y \subset z \rightarrow &\forall w (w \in x \rightarrow w \in y \wedge w \in y \rightarrow w \in z) \\ &\rightarrow \forall w (w \in x \rightarrow w \in z) \\ &\rightarrow x \subset z) \end{aligned}$$

■

TEOREMA 18

$$(1.32) \quad \forall x, y, z (x \subset y \rightarrow x \cap z \subset y \cap z \wedge x \cup z \subset y \cup z)$$

PROVA Sejam x, y, z classes quaisquer. Primeiramente,

$$(1.33) \quad \forall w (w \in x \cap z \rightarrow w \in x \wedge w \in z \rightarrow w \in y \wedge w \in z \rightarrow w \in y \cap z).$$

Segundo e, por fim,

$$(1.34) \quad \forall w (w \in x \cup z \rightarrow w \in x \vee w \in z \rightarrow w \in y \vee w \in z \rightarrow w \in y \cup z).$$

■

TEOREMA 19

$$(1.35) \quad \forall x, y (x \subset y \longleftrightarrow x \cup y = y)$$

PROVA Sejam x, y classes arbitrárias, segue-se

$$(1.36) \quad x \subset y \wedge y \subset x \cup y \longleftrightarrow x \cup y \subset y \wedge y \subset x \cup y \longleftrightarrow x \cup y = y.$$

■

TEOREMA 20 (30 THEOREM)

$$(1.37) \quad \forall x, y (x \subset y \longleftrightarrow x \cap y = x)$$

PROVA Dadas as classes x e y , temos

$$(1.38) \quad x \subset y \wedge x \cap y \subset x \longleftrightarrow x \subset x \cap y \wedge x \cap y \subset x \longleftrightarrow x \cap y = x.$$

■

TEOREMA 21 (31 THEOREM)

$$(1.39) \quad \forall x, y (x \subset y \longrightarrow \bigcup x \subset \bigcup y \wedge \bigcap y \subset \bigcap x).$$

PROVA Sejam x, y, z classes arbitrárias, tais que $x \subset y$. Primeiro temos

$$(1.40) \quad z \in \bigcup x \longrightarrow \exists w (w \in x \wedge z \in w) \longrightarrow \exists w (w \in y \wedge z \in w) \longrightarrow z \in \bigcup y.$$

Segundo,

$$(1.41) \quad z \in \bigcap y \longrightarrow \forall w (w \in y \longrightarrow z \in w) \longrightarrow \exists w (w \in x \longrightarrow z \in w) \longrightarrow z \in \bigcap x.$$

■

TEOREMA 22 (32 THEOREM)

$$(1.42) \quad \forall x, y (x \in y \longrightarrow x \subset \bigcup y \wedge \bigcap y \subset x)$$

PROVA Sejam x, y, z , classes aleatórias tais que $x \in y$. Inicialmente, temos

$$(1.43) \quad z \in x \longrightarrow \exists w (w \in y \wedge z \in w) \longrightarrow z \in \bigcup y.$$

Finalmente,

$$(1.44) \quad z \in \bigcap y \longrightarrow \forall w (w \in y \longrightarrow z \in w) \longrightarrow z \in x.$$

■

1.2.1 EXISTÊNCIA DE CONJUNTOS

AXIOMA 3 (III AXIOM • AS: AXIOMA DE SUBCONJUNTOS)

$$(1.45) \quad \forall x (\sigma(x) \longrightarrow \exists y (\sigma(y) \wedge \forall z (z \subset x \longrightarrow z \in y))).$$

TEOREMA 23 (33 THEOREM)

$$(1.46) \quad \forall x, z (\sigma(x) \wedge z \subset x \longrightarrow \sigma(z)).$$

PROVA Sejam as classes x e z , tais $\varsigma(x)$ e $z \subset x$, tem se

$$(1.47) \quad \varsigma(x) \xrightarrow{\text{AS}} \exists y (w \subset x \longrightarrow w \in y) \longrightarrow z \in w \longrightarrow \varsigma(z).$$

■

TEOREMA 24 (34 THEOREM)

$$(1.48) \quad \emptyset = \bigcap \mathcal{U} \wedge \mathcal{U} = \bigcup \mathcal{U}.$$

PROVA Primeiramente suponhamos por *reductio ad absurdum* que exista $x \in \bigcap \mathcal{U}$, então $\varsigma(x)$, pelo **TEOREMA 15** segue-se $\emptyset \subset x$; assim necessariamente $\varsigma(\emptyset)$, ou equivalentemente $\emptyset \in \mathcal{U}$. Pelo **TEOREMA 22** tem-se que $\bigcup \mathcal{U} \subset \emptyset$, novamente pelo **TEOREMA 15** temos $\emptyset \subset \bigcap \mathcal{U}$, logo, pelo **TEOREMA 16** e da suposição inicial decorre que $x \in \bigcap \mathcal{U} = \emptyset$, o que é uma contradição. Consequentemente, não é o caso que exista $x \in \bigcap \mathcal{U}$, i.e., $\bigcap \mathcal{U} = \emptyset$ ².

Agora, seja $x \in \mathcal{U}$, pelo AS existe $y \in \mathcal{U}$, tal que $x \in y$, pois $x \subset x$, pela definição de $\bigcup \mathcal{U}$, segue-se que $x \in \bigcup \mathcal{U}$, consequentemente $\mathcal{U} \subset \bigcup \mathcal{U}$. Por outro lado, pelo **TEOREMA 15**, temos $\bigcup \mathcal{U} \subset \mathcal{U}$, consequentemente pelo **TEOREMA 16**, $\bigcup \mathcal{U} = \mathcal{U}$. ■

TEOREMA 25 (35 THEOREM) *Para toda classe x , se $x \neq \emptyset$, então $\varsigma(\bigcap x)$.*

PROVA Se $x \neq \emptyset$, então existe $y \in x$, logo $\varsigma(y)$ e pelo **TEOREMA 22** tem-se $\bigcap x \subset y$, daí e do **TEOREMA 22**, decorre que $\varsigma(\bigcap x)$. ■

DEFINIÇÃO 14 $2^x = \{y : y \subset x\}$.

TEOREMA 26 (37 THEOREM) $2^{\mathcal{U}} = \mathcal{U}$.

PROVA Certamente pelo **TEOREMA 15** segue que $2^{\mathcal{U}} \subset \mathcal{U}$. Agora, dado $x \in \mathcal{U}$, então evidentemente $x \subset \mathcal{U}$, consequentemente $x \in 2^{\mathcal{U}}$. Pelo **TEOREMA 16**, concluímos que $2^{\mathcal{U}} = \mathcal{U}$. ■

TEOREMA 27 (38 THEOREM) *Se $\varsigma(x)$, então $\varsigma(2^x)$.*

PROVA Se $\varsigma(x)$, pelo AS existe $y \in \mathcal{U}$, tal que para todo z , se $z \subset y$, então $z \in y$. Como consequência, $2^x \subset y$, pelo **TEOREMA 23** segue-se que $\varsigma(2^x)$. ■

TEOREMA 28 (39 THEOREM) $\neg\varsigma(\mathcal{U})$.

PROVA Consideremos a classe $\mathcal{R} = \{x : x \notin x\}$ ³. Provemos que $\neg\varsigma(\mathcal{R})$, i.e., \mathcal{R} . Para tanto, suponhamos por *reductio ad absurdum* que $\varsigma(\mathcal{R})$, temos então a equivalência

$$(1.49) \quad \varsigma(\mathcal{R}) \wedge \mathcal{R} \in \mathcal{R} \quad \text{se, e somente se,} \quad \varsigma(\mathcal{R}) \wedge \mathcal{R} \notin \mathcal{R},$$

o que é uma inconsistência, i.e., uma contradição. Logo, $\neg\varsigma(\mathcal{R})$. Ademais, da própria definição de classificadores $\mathcal{R} \subset \mathcal{U}$, como \mathcal{R} é uma classe própria, necessariamente \mathcal{U} também o será. Com efeito, suponha por *reductio ad absurdum* que $\varsigma(\mathcal{U})$, pelo **TEOREMA 23**, inferiríamos que $\varsigma(\mathcal{R})$, o que é uma contradição com o argumento anterior. ■

²Segui a mesma linha de raciocínio de Kelley, mas com a minhas adaptações.

³O \mathcal{R} é em homenagem a Bertrand Russel, um dos primeiros a descobrir paradoxos na teoria ingênia dos conjuntos, criada pelo matemático eminent Georg Cantor.

Teorema 1 (Bernstein-Cantor-Schröder). Sejam X e Y conjuntos tais que existe uma injeção própria de X em Y e vice-versa. Então X é equivalente a Y .

Prova. Supomos que $f(X) \subset Y$ e $g(Y) \subset X$ (aqui \subset é a inclusão própria). Destas inclusões deriva-se facilmente a proposição

$$(\Delta) \quad \forall i \left(i \in N \longrightarrow (gf)^i(X) \supset (gf)^i(g(Y)) \supset (gf)^{i+1}(X) \right).$$

Para cada $i \in N$, façamos:

$$A_{2i} = (gf)^i(X) \quad \text{e} \quad A_{2i+1} = (gf)^i(g(Y))$$

em vista de (Δ) decorre que $\{A_i : i \in N\}$ é uma família de conjuntos estritamente decrescente.

Sejam agora

$$C_i = (gf)^i(X \setminus g(Y)) \quad \text{e} \quad D_i = (gf)^i g(Y \setminus f(X))$$

com $i \in N$.

Definamos

$$A = \bigcap_{i \in N} A_i, \quad C = \bigcup_{i \in N} C_i \quad \text{e} \quad D = \bigcup_{i \in N} D_i.$$

Estes são disjuntos aos pares. De fato, inicialmente provemos que $C \cap D = \emptyset$. Note que

$$\forall i, j (i, j \in N \longrightarrow C_i \cap D_j = \emptyset),$$

pois dados $i, j \in N$, temos

$$C_i \cap D_j = A_{2i} \cap A_{2j+1} \setminus (A_{2i+1} \cup A_{2(j+1)}) \subset A_a \setminus A_b = \emptyset,$$

sendo

$$a = \max\{2i, 2j\} \quad \text{e} \quad b = \min\{2(i+1), 2(j+1)\}.$$

uma vez que $A_b \subset A_a$, como consequência $C \cap D = \emptyset$.

Seguidamente, dados $i, j \in N$, obtem-se

$$A \cap (C_i \cup D_j) = A \setminus (A_{2i+1} \cup A_{2(j+1)}) = \emptyset,$$

consequentemente $A \cap (C \cup D) = \emptyset$.

Afirmo que

$$X = A \cup C \cup D$$

Decerto, observe que se $x \in X \setminus (C \cup D)$, então necessariamente $x \in A_i$ para todo $i \in N$, pois, se existir $i \in N$ tal que $x \notin A_i$, então consideremos $m = \min\{i \in N : x \notin A_i\}$, é certo que $m > 0$. Assim, existe $l \in N$, tal que $l + 1 = m$, e consequentemente $x \in A_l \setminus A_{l+1} \subset C \cup D$, uma contradição.

De maneira inteiramente análoga para cada $i \in N$, façamos:

$$B_{2i} = (fg)^i(Y) \quad \text{e} \quad B_{2i+1} = (fg)^i(f(X));$$

$$E_i = (fg)^i(Y \setminus f(X)) \quad \text{e} \quad F_i = (fg)^i f(X \setminus g(Y)).$$

Prova-se sem dificuldades que

$$Y = B \cup E \cup F,$$

em que

$$B = \bigcap_{i \in N} B_i, \quad E = \bigcup_{i \in N} E_i \quad \text{e} \quad F = \bigcup_{i \in N} F_i.$$

Em verdade, basta trocar os papéis de f com g e X com Y , concomitamente.

Agora observemos que por indução matemática decorre que

$$\forall i(i \in N \longrightarrow \phi(\gamma\phi)^i = (\phi\gamma)^i\phi).$$

para quaisquer que sejam as funções ϕ e γ , em que a composição faça sentido. Em verdade, para $i = 0$ temos necessariamente

$$\phi(\gamma\phi)^0 = \phi = (\phi\gamma)^0\phi.$$

Suponhamos por hipótese de indução que a propriedade seja válida para $i \in N$, notemos que

$$\phi(\gamma\phi)^{i+1} = \phi(\gamma\phi)^i(\gamma\phi) = (\phi\gamma)^i(\phi\gamma)\phi = (\phi\gamma)^{i+1}\phi$$

o que prova que é válida para $i + 1$, concluímos por indução matemática que a propriedade é válida para todo $i \in N$.

Posteriormente, em vista do resultado anterior observemos que para cada $i \in N$

$$A_{2i+1} = (gf)^i g(Y) = g(fg)^i(Y) = g(B_{2i})$$

e

$$B_{2i+1} = (fg)^i f(X) = f(gf)^i(X) = f(A_{2i}).$$

Em consequência para todo $i \in N$

$$B_{2i} = g^{-1}(A_{2i+1}) \quad \text{e} \quad B_{2i+1} = f(A_{2i}).$$

Em seguida, definamos $\varphi : X \rightarrow Y$ por

$$\varphi(x) = \begin{cases} f(x), & x \in A \cup C; \\ g^{-1}(x), & x \in D. \end{cases}$$

Pela própria definição φ é injetiva.

Imediatamente observe que para todo $i \in N$

$$\varphi(C_i) = f((gf)^i(X \setminus g(Y))) = (fg)^i f(X \setminus g(Y)) = F_i$$

e

$$\varphi(D_i) = g^{-1}((gf)^i g(Y \setminus f(X))) = (fg)^i(Y \setminus f(X)) = E_i.$$

Além do mais, para todo $i \in N$, temos

$$\varphi(A_{2i}) = f(A_{2i}) = f(gf)^i(X) = (fg)^i f(X) = B_{2i+1}$$

e

$$\varphi(A_{2i+1}) = f(A_{2i+1}) = f(gf)^i g(Y) = (fg)^i fg(Y) = B_{2(i+1)}.$$

Em suma,

$$\forall i(i \in N \longrightarrow \varphi(A_i) = B_{i+1} \wedge \varphi(C_i) = F_i \wedge \varphi(D_i) = E_i).$$

Conformemente

$$\varphi(A) = B, \quad \varphi(C) = F \quad \text{e} \quad \varphi(D) = E.$$

a fortiori

$$\varphi(X) = \varphi(A \cup C \cup D) = \varphi(A) \cup \varphi(C) \cup \varphi(D) = B \cup E \cup F = Y,$$

i.e., $X \sim Y$.



Lema 1. Sejam $f : X \rightarrow Y$ e $g : Y \rightarrow X$. Então existe um conjunto $A \subseteq X$, tal que

$$X \setminus A = g(Y \setminus f(A)).$$

Prova alternativa do teorema. Existe uma sugestão dada pelo Halmos que embora esteja errada, ela me sujeriu um processo simples de demonstração. Apesar de tudo, não consegui determinar quais propriedades mínimas f e g devem possuir para garantir o resultado auxiliar. Em vista desse impasse, nos ateremos ao caso em que ambas f e g sejam injetivas.

Digressão a respeito de álgebras de Boole. Segundo o livro *Introduction to Boolean Algebras* de Halmos e Givant, uma álgebra booleana é um conjunto B munido de duas operações binárias \cap e \cup , uma operação unária $'$ e dois elementos distintos 0 e 1, satisfazendo os seguintes axiomas:

- I. $0' = 1 \quad \wedge \quad 1' = 0;$
- II. $x \cap 0 \quad \wedge \quad x \cup 1 = 1;$
- III. $x \cap 1 = x \cup 0 = x;$
- IV. $x \cap x' = 0 \quad \wedge \quad x \cup x' = 1;$
- V. $x'' = x;$
- VI. $x \cap x = x \cup x = x;$
- VII. $(x \cap y)' = x' \cup y';$
- VIII. $x \cap y = y \cap x \quad \wedge \quad x \cup y = y \cup x;$
- IX. $x \cap (y \cap z) = (x \cap y) \cap z \quad \wedge \quad x \cup (y \cup z) = (x \cup y) \cup z;$
- X. $x \cap (y \cup z) = (x \cap y) \cup (x \cap z) \quad \wedge \quad x \cup (y \cap z) = (x \cup y) \cap (x \cup z);$

Teorema 2 (Álgebra de Boole dada na introdução do livro *Introduction to Mathematical Logic* de Elliot Mendelson, página xxiii). Sejam B um conjunto com pelo menos dois elementos, $\cap \in B^{B^2}$ uma operação binária e $' \in B^B$ uma operação unária.

Admitiremos que \cap e $'$ satisfazem os seguintes axiomas para quaisquer $x, y, z \in B$:

- 1. $x \cap y = y \cap x;$
- 2. $(x \cap y) \cap z \longleftrightarrow x \cap (y \cap z);$
- 3. $(x \cap y' = z \cap z') \longleftrightarrow x \cap y = x.$

Ademais defina

$$\forall x, y (x \cup y = (x' \cap y')') \quad \text{Def.}$$

Então $\langle B, \cap, \cup, '\rangle$ é uma álgebra booleana se, e somente se, os axiomas 1–3 forem satisfeitos.

Prova. Primeiramente, provemos que $x \cap x = x$, para todo $x \in B$. Suponhamos que existe $x \in B$ tal que $x \cap x \neq x$, da equivalência no item 3, fixado $y = x$ temos

$$\forall z (z \in B \longrightarrow (x \cap x \neq x \longleftrightarrow x \cap x' \neq z \cap z'))$$

o que é falso para $z = x$, consequentemente a identidade $x = x \cap x$ é válida para todo $x \in B$. Novamente, da equivalência no item 3 temos que fixados $x \in B$ e $y = x$, decorre que

$$\forall z (x \cap x = x \longleftrightarrow x \cap x' = z \cap z')$$

Definamos $0 = x \cap x'$.

Em seguida, observemos

$$\forall z (z \cap 0 = z \cap (z \cap z') = (z \cap z) \cap z' = z \cap z' = 0)$$

Seguidamente observemos, também em decorrência do 3 item do rol de axiomas, que dado z arbitrariamente temos

$$z''' = z' \cap z''' \longleftrightarrow z''' \cap z'' = 0,$$

$$(\Gamma) \quad z \cap z''' = z \cap (z' \cap z''') = (z \cap z') \cap z''' = 0 \longleftrightarrow z \cap z'' = z$$

e

$$(\Delta) \quad z' \cap z'' = 0 \longleftrightarrow z \cap z'' = z''$$

de (Γ) e (Δ) decorre que $z = z''$. Adicionalmente,

$$\forall z (z \cup z = (z' \cap z)' = (z')' = z'' = z)$$

Seguidamente provemos que para quaisquer $x, y, z \in B$ vale

$$x \cap (y \cup z) = (x \cap y) \cup (x \cap z)$$

em outros termos, queremos provar que

$$x \cap (y' \cap z')' = ((x \cap y)' \cap (x \cap z)')'$$

Antes provemos uma identidade auxiliar

$$(I) \quad \forall u, v (u, v \in B \implies u = u \cap (u' \cap v)')$$

mas do item 3 temos que

$$u \cap (u' \cap v)' = u \iff u \cap (u' \cap v) = 0.$$

Mas o segundo membro da bicondicional é trivialmente verdadeiro, em consequência a proposição (I) é verdadeira.

Proseguindo primeiro provemos que

$$x \cap (y' \cap z')' \cap ((x \cap y)' \cap (x \cap z)')' = x \cap (y' \cap z)'$$

do item 3 do rol de axiomas temos que a última identidade é equivalente a

$$x \cap (y' \cap z')' \cap (x \cap y)' \cap (x \cap z)' = 0$$

que por sua vez é equivalente a

$$x \cap y' \cap z' \cap (x \cap y)' \cap (x \cap z)' = x \cap (x \cap y)' \cap (x \cap z)'$$

Teorema 3 (Álgebra de Boole dada no livro de Hewitt e Stromberg *Real and Abstract Analysis*) [Huntington]. Seja B um conjunto munido com uma operação binária \cup e uma operação unária $'$ satisfazendo os seguintes axiomas:

- a) $a', a \cup b \in B$ (*Estabilidade de ' e \cup*);
- b) $a \cup b = b \cup a$ (*Comutatividade*);
- c) $a \cup a = a$ (*Idempotência*);
- d) $a \cup (b \cup c) = (a \cup b) \cup c$ (*Associatividade*);
- e) $a' = (a' \cup b')' \cup (a' \cup b)'$ (*Caracterização de '*).

Então $\langle B, \cup, ' \rangle$ é uma álgebra de Boole. Tais axiomas (ou postulados) são conhecidos como postulados de Huntington.

Resumo das propriedades encontradas até então:

Sejam $a, b \in B$, temos

$$\begin{aligned} a \cup a' &= ((a' \cup b'')' \cup (a' \cup b'))' \cup ((a'' \cup b'')' \cup (a'' \cup b'))' \\ &= ((b' \cup a'')' \cup (b' \cup a'))' \cup ((b'' \cup a'')' \cup (b'' \cup a'))' \\ &= b \cup b' \end{aligned}$$

Do resultado anterior trocando a e b , por a' e a'' respectivamente, obtemos $a' \cup a'' = a'' \cup a'''$, para todo $a \in B$, a fortiori para todo $a \in B$, vale

$$a'' = (a''' \cup a'')' \cup (a''' \cup a')' = (a' \cup a'')' \cup (a' \cup a''')' = a.$$

Definição. Um conjunto ordenado S é dito ter a propriedade da menor cota superior se, para todo conjunto não vazio E limitado superiormente admite a menor das cotas superiores de E , denotada por $\sup E$.

Teorema 4. Todo conjunto ordenado que tem a propriedade da menor cota superior tem a propriedade da maior cota superior.

Prova. Sejam $E \subseteq S$, não vazio limitado inferiormente e L o conjunto das cotas inferiores de E que, como sabemos é não vazio, pois E é limitado inferiormente. Em vista da hipótese de S ter a propriedade da menor cota superior existe $\sup L$. Seja agora $\gamma > \sup L$. Então γ não é cota inferior de E , pois do contrário $\gamma \leq \sup L$, desta forma $\sup L$ é a maior das cotas inferiores de E , como consequência $\inf E = \sup L$. Fica, portanto, completa a prova do teorema. ■

Teorema 5. Sejam $x, y \in \mathbb{R}$.

- a) Se $x > 0$, então existe $m \in \mathbb{Z}$, tal que $mx > y$;
- b) Existe $q \in \mathbb{Q}$ tal que $x < q < y$.

Prova. a) Suponhamos que a implicação é falsa, então existe $x > 0$, tal que para todo $m \in \mathbb{Z}$ vale $mx \leq y$.

Particularmente, $x/y > 0$, pois $x, y > 0$. Daí vem que o conjunto $M = \{m(x/y) \in \mathbb{R} : m \in \mathbb{Z}\}$ é limitado superiormente por 1, como aquele é não vazio, decorre da propriedade da menor cota superior de \mathbb{R} que existe $\varsigma = \sup M$. Temos, portanto, que para todo $m \in \mathbb{Z}$ vale

$$(m+1)\left(\frac{x}{y}\right) \leq \varsigma$$

como consequência para todo $m \in \mathbb{Z}$ vale

$$m\left(\frac{x}{y}\right) \leq \varsigma - \frac{x}{y} < \varsigma,$$

i.e., $\varsigma - x/y$ é uma cota superior de M o que contradiz a minimalidade de ς .

b) Primeiro, provaremos a seguinte

Afirmiação. Para todo $\varrho \in \mathbb{R}$, existe um único inteiro m , tal que $m \leq \varrho < m + 1$.

Prova. Suponha o contrário que para todo $m \in \mathbb{Z}$, se $m \leq \varrho$, então $m + 1 \leq \varrho$, note que esta última condicional é equivalente a $\neg(m \leq \varrho < m + 1)$. Mas, isto implica por indução matemática que para todo $m \in \mathbb{N}$ vale $m \leq \varrho$, o que contradiz o item a). Conformemente esta contradição nos leva a concluir de que nossa suposição inicial está incorreta, provando portanto a existência.

Sejam m_i ($i = 1, 2$), tais que $m_i \leq \varrho < m_i + 1$, da totalidade da ordem $<$ em \mathbb{R} e supondo por redução ao absurdo que $m_1 \neq m_2$, podemos supor sem perda de generalidade que $m_1 < m_2$. Daí, decorre imediatamente que $m_1 + 1 \leq m_2$, pois suponha por redução ao absurdo que $m_1 + 1 > m_2$, teríamos

$$0 < m_2 - m_1 < 1$$

o que é um absurdo, pois $m_2 - m_1 \in \mathbb{Z}$ e não existe inteiro entre 0 e 1. Por maior razão $m_1 + 1 \leq m_2$, mas isto por sua vez acarreta que

$$\varrho < m_1 + 1 \leq m_2 \leq \varrho$$

um outro absurdo. Estas contradições nos levam a concluir que a nossa suposição $m_1 \neq m_2$, é uma suposição inverídica. Destarte fica provada a unicidade. \heartsuit

Daí podemos inferir que dado $\varrho \in \mathbb{R}$, tomando m satisfazendo a afirmação anterior, decorre necessariamente que $m + 1 \leq \varrho + 1$, pois suponha o contrário, i.e., que $m + 1 > \varrho + 1$, disto decorre que

$$1 = (\varrho + 1) - \varrho < (m + 1) - m = 1$$

um absurdo. Concluimos, portanto, que $m + 1 \in (\varrho, \varrho + 1]$, provamos portanto a **Afirmiação**.

Para todo $\varrho \in \mathbb{R}$, existe um inteiro m , tal que $m \in (\varrho, \varrho + 1]$. \heartsuit

Consequentemente, usando o item a) existe $n \in \mathbb{N}$, tal que $(y - x)n > 1$ e da afirmação imediatamente anterior existe $m \in (nx, nx + 1]$, assim vale

$$nx < m \leq nx + 1 < ny,$$

logo, fazendo $q = m/n$, temos da cadeia anterior que $x < q < y$, concluindo portanto a prova do item b). \blacksquare

Vale também a **Afirmiação**. *Sejam $\varrho \in \mathbb{R}$, $n \leq \varrho$ e $m \in \mathbb{Z}$, tal que $m \leq \varrho < m + 1$. Então $n \leq m$.*

Prova. Ora, se $n > m$, então $n \geq m + 1$, daí vem

$$\varrho < m + 1 \leq n \leq \varrho$$

uma contradição. \blacksquare

Podemos inferir daí que m com aquela propriedade é o maior inteiro tal que $m \leq \varrho$.

Teorema 6 (Digressão relativa à representação decimal de um número real). *Seja $\varrho \in \mathbb{R}_+^*$, escolhamos $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que*

$$n_0 \leq \varrho < n_0 + 1.$$

Suponhamos escolhidos n_0, \dots, n_k , escolhamos $n_{k+1} \in \mathbb{N}$, tal que

$$(\Delta) \quad n_{k+1} \leq 10^{k+1}(\varrho - \alpha_k) < n_{k+1} + 1,$$

em que

$$\alpha_k = n_0 + \dots + \frac{n_k}{10^k},$$

podemos, portanto, por indução considerar o conjunto

$$A = \{\alpha_k : k \in \mathbb{N}\}.$$

Então nestas condições $\varrho = \sup A$.

Prova. De (Δ) segue necessariamente que

$$0 \leq \varrho - \alpha_{k+1} = \varrho - \alpha_k - \frac{n_{k+1}}{10^{k+1}} < \frac{1}{10^{k+1}},$$

para qualquer $k \in N$. Observemos que dado $\gamma < \varrho$, temos peremptoriamente que $\varrho - \gamma > 0$, dos teoremas anteriores existe $k \in N$ tal que

$$10^{k+1} > 2^{k+1} > k > \frac{1}{\varrho - \gamma} > 0$$

onde

$$\varrho - \alpha_{k+1} < \frac{1}{10^{k+1}} < \varrho - \gamma,$$

i.e., existe $\alpha \in A$, tal que $\alpha = \alpha_{k+1} > \gamma$, i.e., todo elemento $\gamma \in \mathbb{R}$, tal que $\gamma < \varrho$, não é cota superior de A . Além disso $\varrho \geq \alpha$, para todo $\alpha \in A$, i.e., ϱ é uma cota superior de A , que, conforme concluímos, é tal que $\varrho = \sup A$. ■

Quando $\varrho = \sup A$, representa-se ϱ por

$$n_0.n_1n_2n_3\dots$$

por exemplo

$$\pi = 3.141592\dots$$

A representação do número corresponde à uma sequência finita de seus primeiros dígitos seguido de reticências. Subentende-se que os outros dígitos sejam determinados indutivamente.

1.3 CONSTRUÇÃO DOS NÚMEROS REAIS

Doravante admitamos que letras gregas representem cortes e letras romanas representem números racionais, salvo quando for explicitamente dito o contrário. Dado um corte α , por conveniência definiremos que

DEFINIÇÃO 15 (SIMPLIFICAR) *Seja α um corte tal que $\alpha > 0^*$, i.e., um corte estritamente positivo⁴. Definimos*

$$(1.50) \quad \alpha^{-1} = \{r \in \mathbb{Q} : \exists s, t (s, t \in \mathbb{Q} \wedge t > 1 \wedge 1/st \notin \alpha \wedge r \leq s)\}.$$

Antes de prosseguirmos, precisaremos do

Lema 2 (Adaptado de [Spivak]). Sejam $\alpha > 0^*$ e $p \in Q$, tal que $p > 1$. Então existem $q, r \in Q$, tais que $q \in \alpha$, $1/r \in \alpha^{-1}$ e $p = r/q$.

Prova. Seja p como nas premissas, afirmo que existe $s \in Q$, tal que $0 < s < 1$, tal que $sp \in \alpha$, de fato tome $t \in \alpha$, tal que $t > 0$, o que é garantido pela nossa suposição de que $\alpha > 0^*$. Da propriedade arquimediana de Q , existe $n \in N$, tal que $n > p/t$, daí vem que $p/n < t$, fazendo $s = 1/n$, temos consequentemente $sp < t$, a fortiori $sp \in \alpha$, pois α é um corte e $t \in \alpha$. Observando que

$$sp^n = s(1 + (p - 1))^n \geq sn(p - 1)$$

⁴veja o [Rudin] ou [Spivak].

existe $n \in N$, tal que

$$sp^n \in \alpha \wedge sp^{n+1} \notin \alpha$$

consequentemente fazendo $q = sp^n$ e $r = sp^{n+1}$, temos $p = r/q$. Ademais, existe $t > 1$, tal que $rt \notin \alpha$ e $qt \in \alpha$, isto decorre do fato de α não possuir um maior elemento. De fato, tome $q' > q$ tal que $q' \in \alpha$ e faça $t = q'/q$, observe que $q' = qt$ e $r' = rt$ são tais que $r'/q' = p$. Daí existe $t > 1$ tal que $1/(t/r') = r'/t = r \notin \alpha$, portanto, podemos sem perdas admitir que $q \in \alpha$ e $1/r \in \alpha^{-1}$. ■

Teorema 7. Se $\alpha > 0^*$, então $\alpha\alpha^{-1} = 1^*$.

Prova. Primeiro provaremos que α^{-1} é um corte.

(I) seja $p \notin \alpha$ e $t > 1$, temos que existe $n \in N$, tal que $n > pt$, fazendo $s = 1/n$, obtemos que $pst < 1$, consequentemente $p < 1/st$, como $p \notin \alpha$ e este último é um corte $1/st \notin \alpha$, por maior razão infere-se que $s \in \alpha^{-1}$, provando que $\alpha \neq \emptyset$. Agora seja $q \in \alpha$, tomemos $r = 1/q$, notemos que para todo $t > 1$, tem-se $1/rt \in \alpha$, pois $1/t < 1$ e $q \in \alpha$, o que prova que $q \notin \alpha^{-1}$, provando que $\alpha^{-1} \neq Q$;

(II) Consideremos agora $p \in Q$ e $q \in \alpha^{-1}$, tais que $p < q$, segue evidentemente que existem $s \geq q > p$ e $t > 1$, tais que $1/st \notin \alpha$, consequentemente $p \in \alpha^{-1}$;

(III) Seja agora $p \in \alpha^{-1}$, então existem $s, t \in Q$, tais que $t > 1$ e $1/st \notin \alpha$, tome $t' \in Q$, tal que $1 < t' < t$, em seguida observemos que

$$\frac{1}{(st/t')t'} = \frac{1}{st} \notin \alpha$$

fazendo $q = st/t'$ temos evidentemente que $q > s \geq p$, o que prova que existe $q > p$, tal que $q \in \alpha^{-1}$.

Seguidamente provemos que $\alpha\alpha^{-1} = 1^*$, para tanto, seja $p \in \alpha$ e $q \in \alpha^{-1}$, temos que existe $s, t \in Q$, tais que $t > 1$ e $1/st \notin \alpha$, daí vem que $p < 1/st$, como consequência

$$pq \leq ps < pst < 1,$$

que por sua vez acarreta $\alpha\alpha^{-1} \subset 1^*$. Por outro lado seja $p \in 1^*$, i.e., $p < 1$, que podemos supor sem perda de generalidade $p > 0$, pois $1^* = (1^*)^2 > 0$. Segue do lema que existem $r \notin \alpha$ e $q \in \alpha$, tais que $1/p = r/q$ e $1/r \in \alpha^{-1}$, daí vem $p = q/r \in \alpha\alpha^{-1}$, o que prova a inclusão $1^* \subset \alpha\alpha^{-1}$. Decorre do axioma da extensionalidade $\alpha\alpha^{-1} = 1^*$. ■

Vale observar que em virtude da definição provisória do produto de cortes ser limitado apenas a R_+^* , não faz sentido $\alpha 0^*$, pois isto não está definido, uma vez que não existem elementos estritamente positivos em 0^* , *a fortiori*, muito menos estará definido $(0^*)^{-1}$.

Teorema 8 (Lei distributiva). Se $\alpha, \beta, \gamma > 0^*$, então

$$\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma.$$

Prova. Suponha que $p \in \delta$ com $\delta = \alpha(\beta + \gamma)$, da definição existe $(q, r) \in \alpha^\bullet \times (\beta + \gamma)^\bullet$ tal que $p \leq qr$, como $r \in \alpha + \beta$ existe $(s, t) \in \alpha \times \beta$, tal que $r \leq s + t \in \alpha + \beta$, portanto,

$$p \leq qr \leq q(s + t) = qs + qt \in \alpha\beta + \alpha\gamma.$$

como $\epsilon = \alpha\beta + \alpha\gamma$ é um corte decorre que $p \in \epsilon$, o que prova a inclusão $\delta \subset \epsilon$.

Seja agora $p \in \epsilon$ existem portanto $r, t \in \alpha^\bullet$ e $(s, u) \in \beta^\bullet \times \gamma^\bullet$, tais que $p \leq rs + tu$, tomado $v = \max\{r, t\}$, temos que $p \leq v(s + t) \in \delta$, o que prova a outra inclusão $\epsilon \subset \delta$. Do axioma da extensionalidade $\delta = \epsilon$, o que conclui a prova. ■

Conforme observado em [Rudin] se $\alpha < \beta$, então $\alpha + \gamma < \beta + \gamma$, para todo corte γ , como consequência se $\alpha > 0^*$, então $-\alpha < 0^*$. Podemos, portanto, definir a multiplicação em \mathbb{R}^* por

$$(II) \quad \alpha\beta = \begin{cases} -((-\alpha)\beta), & \alpha < 0^* \wedge \beta > 0^*; \\ -(\alpha(-\beta)), & \alpha > 0^* \wedge \beta < 0^*; \\ (-\alpha)(-\beta), & \alpha < 0^* \wedge \beta < 0^*. \end{cases}$$

Sabemos 0^* é o elemento neutro da adição em \mathbb{R} , espera-se naturalmente pelas propriedades de corpos que este seja tal que $\alpha 0^* = 0^* \alpha = 0^*$, para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ e, por este motivo define-se o produto com 0^* desta forma. Feito isto podemos neste estágio (seguido o roteiro dado em [Rudin]) afirmar categoricamente que \mathbb{R} tem todas as propriedades da adição e multiplicação satisfeitas, com exceção da propriedade distributiva.

Consideremos $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, observe que se alguns destes números reais for 0^* , então o produto é trivial. Desta forma, admitiremos que $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}^*$. Consideremos, a título de exemplo o caso em que $\alpha < 0$, $\beta + \gamma > 0$ e $\gamma < 0$, neste caso temos que $\beta > 0$ e

$$(-\alpha)(\beta + \gamma) + \alpha\gamma = (-\alpha)(\beta + \gamma) + (-\alpha)(-\gamma) = (-\alpha)\beta$$

onde vem

$$\alpha(\beta + \gamma) = -(-\alpha)(\beta + \gamma) = \alpha\gamma - (-\alpha)\beta = \alpha\beta + \alpha\gamma.$$

Os outros casos são tratados de maneira análoga.

Daqui podemos dizer que concluímos a construção de um corpo ordenado com a propriedade da menor cota superior, a saber, o conjunto \mathbb{R} dos cortes de Dedekind.

Refaço as suas demonstrações [Rudin] com adaptação e ponho as minhas no que segue para fins de documentação, que, existe um corpo ordenado Q^* em \mathbb{R} isomorfo ao conjunto dos números racionais.

Definição. Seja $q \in Q$ definamos

$$q^* = \{p \in Q : p < q\} \quad \text{Def.}$$

Teorema 9 (Identificação de Q em \mathbb{R}). Sejam $r, s \in Q$.

- a) $r^* \in \mathbb{R}$;
- b) $r^* + s^* = (r + s)^*$;
- c) $r^*s^* = (rs)^*$;
- d) $r^* < s^*$, se e somente se $r < s$.

Prova. a) Provar.

b) Suponha que $(t, u) \in r^* \times s^*$, certamente que $t + u < r + s$, consequentemente $t + u \in (r + s)^*$, o que prova a inclusão $r^* + s^* \subset (r + s)^*$.

Por outro lado suponhamos que $p \in (r + s)^*$, i.e., $p < r + s$, tomado $t \in Q$, tal que $p - s < t < r$ temos certamente que $u = p - t < s$, consequentemente

$$p = t + (p - t) = t + u \in r^* + s^*,$$

culminando a inclusão $(r + s)^* \subset r^* + s^*$, que, em conjunto com a outra pode-se inferir pelo axioma da extensionalidade a igualdade requerida, viz $r^* + s^* = (r + s)^*$.

c) Observe também que se $r = 0$ ou $s = 0$, a igualdade é, em verdade, trivial. Provado o item a) podemos inferir facilmente que $-(r)^* = (-r)^*$, portanto se provarmos que c) é válida para quaisquer $r, s > 0$, tanto será verdadeiro para r, s não nulos quaisquer. Destarte, nos ateremos ao caso em que $r, s > 0$. Seja $p \leq uv$, com $u, v > 0$ e $(u, v) \in r^* \times s^*$, é conspícuo que $p < rs$, consequentemente $r^*s^* \subset (rs)^*$.

Seja agora, $p < rs$, podemos supor sem perda de generalidade que $p > 0$, pois do contrário tome $p' \in Q$, tal que $\max\{0, p\} < p' < rs$. Escolhendo $u \in Q$, tal que $p/r < u < s$, decorre que $t = p/u < r$. Ademais

$$p = \left(\frac{p}{u}\right)u = tu \in r^*s^*,$$

consequentemente $(rs)^* \subset r^*s^*$. O que novamente deduz-se pelo axioma da extensionalidade a igualdade requerida.

d) Por fim, se $r^* < s^*$, então existe $p \in s^* \setminus r^*$, segue que $r \leq p < s$.

Por outro lado, se $r < s$ então $r^* \subset s^*$ e $r \in s^* \setminus r^*$. ■

O teorema anterior nos diz que o conjunto $Q^* = \{q^* \in \mathbb{R} : q \in Q\}$ é isomorfo a Q , desta forma podemos dizer que precipuamente $Q \subset \mathbb{R}$.

1.4 UNICIDADE DOS REAIS

Os cortes de Dedekind nos fornece um caminho para a construção de um corpo ordenado \mathbb{R} com a propriedade da menor cota superior. Existem certamente outros caminhos como usando as sequências de Cauchy, resultado devido a Cantor. Surgem as perguntas: O que individualiza o conjunto \mathbb{R} ? Será que este conjunto assim construído é de fato o conjunto numérico conhecido desde a escola primária? As construções mencionadas não resultam em dois objetos matemáticos aparentemente distintos? Em verdade, o conjunto dos números reais conhecidos na escola são na realidade somas parciais de séries numéricas, ao passo que aquele que construímos é uma coleção de subconjuntos de números racionais. Como bem observado em [Elon], intrinsecamente estes objetos são distintos, mas do ponto de vista de isomorfismos são idênticos. Para tratar bem do caso das séries deve-se concluir o exercício 2 do capítulo 29 de [Spivak]. A seguir empenhar-nos-emos a provar que \mathbb{R} é único a menos de isomorfismos, para tanto precisaremos de algumas construções auxiliares.

DEFINIÇÃO 16 Seja \mathbb{K} um corpo com zero $0_{\mathbb{K}}$, unidade $1_{\mathbb{K}}$ e $x \in \mathbb{K}$ definamos

$$(1.51) \quad 0 * x = 0_{\mathbb{K}}$$

e indutivamente

$$(1.52) \quad (n + 1) * x = n * x + x$$

para todo $n \in \omega$ ⁵.

TEOREMA 29 Seja \mathbb{K} um corpo, com zero $0_{\mathbb{K}}$. Então para quaisquer $m, n \in \omega$ e $x, y \in \mathbb{K}$ valem

- (a) $n * 0_K = 0_{\mathbb{K}}$;
- (b) $m * x + n * x = (m + n) * x$;
- (c) $n * x + n * y = n * (x + y)$;
- (d) $m * (n * x) = mn * x$;

⁵Esta definição requer uma prova da definição por recursão, um resultado muito famoso na teoria dos conjuntos.

$$(e) \quad (n * x)y = n * xy;$$

$$(f) \quad (m * x)(n * y) = mn * xy.$$

PROVA Sejam $m \in \omega$ e $x, y \in \mathbb{K}$.

(a) Definamos o conjunto

$$(1.53) \quad S = \{n : n \in \omega \wedge n * 0_{\mathbb{K}} = 0_{\mathbb{K}}\}.$$

Certamente que $0 \in S$, porquanto pela definição vale

$$(1.54) \quad 0 * 0_k = 0_{\mathbb{K}}.$$

Se $n \in S$, temos que

$$(1.55) \quad (n + 1) * 0_{\mathbb{K}} = n * 0_{\mathbb{K}} + 0_{\mathbb{K}} = 0_{\mathbb{K}} + 0_{\mathbb{K}} = 0_{\mathbb{K}}.$$

Consequentemente $n + 1 \in S$, donde pela minimalidade de ω , inferimos que $S = \omega$ ⁶.

(b) Consideremos o conjunto

$$(1.56) \quad S = \{n : n \in \omega \wedge m * x + n * x = (m + n) * x\}.$$

Primeiramente, observemos que $0 \in S$, pois

$$(1.57) \quad m * x + 0 * x = m * x + 0_{\mathbb{K}} = m * x = (m + 0) * x.$$

Em seguida, suponhamos que $n \in S$. Temos conformemente

$$(1.58) \quad \begin{aligned} m * x + (n + 1) * x &= m * x + n * x + x \\ &= (m + n) * x + x \\ &= (m + (n + 1)) * x. \end{aligned}$$

Portanto, $n + 1 \in S$. Pela minimalidade de ω decorre que $S = \omega$.

(c) Da mesma maneira seja

$$(1.59) \quad S = \{n : n \in \omega \wedge n * x + n * y = n * (x + y)\}.$$

Temos que $0 \in S$, pois

$$(1.60) \quad 0 * x + 0 * y = 0_{\mathbb{K}} = 0 * (x + y).$$

Se $n \in S$, então

$$(1.61) \quad \begin{aligned} (n + 1) * x + (n + 1) * y &= (n * x + x) + (n * y + y) \\ &= (n * x + n * y) + (x + y) \\ &= n * (x + y) + (x + y) \\ &= (n + 1) * (x + y), \end{aligned}$$

i.e., $n + 1 \in S$. Consequentemente, $S = \omega$.

⁶Esta é simplesmente a consequência da definição de ω como o conjunto sucessor minimal, seguindo a terminologia de Halmos.

(d) Consideremos novamente

$$(1.62) \quad S = \{n : n \in \omega \wedge m * (n * x) = mn * x\}.$$

Notemos que $0 \in S$, uma vez que

$$(1.63) \quad m * (0 * x) = m * 0_{\mathbb{K}} = 0_{\mathbb{K}} = 0 * x = m0 * x.$$

Se $n \in S$, então

$$(1.64) \quad \begin{aligned} m * ((n + 1) * x) &= m * (n * x + x) \\ &= mn * x + m * x \\ &= (mn + m) * x \\ &= (m(n + 1)) * x. \end{aligned}$$

Portanto, $n + 1 \in S$, logo $S = \omega$.

(e) Seja

$$(1.65) \quad S = \{n : n \in \omega \wedge (n * x) * y = n * xy\}.$$

Primeiro, $0 \in S$, pois

$$(1.66) \quad (0 * x)y = 0_{\mathbb{K}}y = 0_{\mathbb{K}};$$

Segundo, se $n \in S$, então

$$(1.67) \quad \begin{aligned} ((n + 1) * x)y &= (n * x + x)y \\ &= (n * x)y + xy \\ &= n * xy + xy \\ &= (n + 1) * xy. \end{aligned}$$

Portanto, $n + 1 \in S$ e consequentemente $S = \omega$.

(f) Defina

$$(1.68) \quad S = \{n : n \in \omega \wedge (m * x)(n * y) = mn * xy\}.$$

Note primeiramente que $0 \in S$, porque

$$(1.69) \quad (m * x)(0 * y) = (m * x)0_{\mathbb{K}} = 0_{\mathbb{K}}.$$

Se $n \in S$, então

$$(1.70) \quad \begin{aligned} (m * x)((n + 1) * y) &= (m * x)(n * y) + (m * x)y \\ &= mn * xy + m * xy \\ &= (mn + m) * xy \\ &= (m(n + 1)) * xy. \end{aligned}$$

Logo, $n + 1 \in S$ e, portanto, $S = \omega$.



DEFINIÇÃO 17 Definamos $\sigma : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{K}$, por

$$(1.71) \quad \sigma(n) = \begin{cases} 1_{\mathbb{K}}, & n > 0 \\ 0_{\mathbb{K}}, & n = 0 \\ -1_{\mathbb{K}}, & n < 0. \end{cases}$$

Além disso, para $n \in \mathbb{Z}$ definamos

$$(1.72) \quad n^* = |n| * \sigma(n)$$

e

$$(1.73) \quad n * x = n^* \cdot x.$$

LEMÁ 1 Sejam \mathbb{K} um corpo com unidade $1_{\mathbb{K}}$. Então valem

(a)

$$(1.74) \quad \forall n (n \in \mathbb{Z} \longrightarrow \sigma(-n) = -\sigma(n));$$

(b)

$$(1.75) \quad \forall m, m (m, m \in \mathbb{Z} \longrightarrow \sigma(mn) = \sigma(m)\sigma(n)).$$

PROVA Sejam $m, n \in \omega$.

(a) Se $n \in \omega$, então

$$(1.76) \quad \sigma(-n) = -1_{\mathbb{K}} = -\sigma(n).$$

Caso contrário, $-n \in \omega$, daí

$$(1.77) \quad \sigma(-(-n)) = -\sigma(-n) \longrightarrow \sigma(-n) = -\sigma(n).$$

(b) Sejam $m, n \in \omega$. É suficiente notar que

$$(1.78) \quad \begin{aligned} \sigma(m)\sigma(n) &= \sigma(mn) \\ &= \sigma((-m)(-n)) \\ &= -\sigma(-mn) \\ &= -\sigma((-m)n) \end{aligned}$$



1.4.1 CARACTERÍSTICA DE CORPOS

DEFINIÇÃO 18 Seja \mathbb{K} um corpo com unidade $1_{\mathbb{K}}$ e zero $0_{\mathbb{K}}$. Definimos a característica de \mathbb{K} por

$$(1.79) \quad X(\mathbb{K}) = \bigcap \{n : n \in \omega \setminus \{0\} \wedge n^* = 0_{\mathbb{K}}\}.$$

Observe que $X(\mathbb{K})$ é sempre um número natural, podendo inclusive ser $0 = \emptyset$.

TEOREMA 30 Seja \mathbb{K} um corpo tal que $X(\mathbb{K}) = 0$. Então existe um $\mathbb{Z}^* \subset \mathbb{K}$ isomorfo a \mathbb{Z} .

PROVA De posse da definição 17, podemos definir uma função $\zeta : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{K}$ dada por

$$(1.80) \quad \zeta(m) = m^*.$$

Doravante, nosso objetivo limitar-se-a à prova de que ζ é um isomorfismo de anéis.

Para todo $n \in \mathbb{Z}$, temos

$$(1.81) \quad \begin{aligned} \zeta(n) + \zeta(-n) &= |n| * \sigma(n) + |n| * \sigma(-n) \\ &= |n| * (\sigma(n) + \sigma(-n)) \\ &= |n| * (\sigma(n) - \sigma(n)) \\ &= 0_{\mathbb{K}}, \end{aligned}$$

i.e.,

$$(1.82) \quad \forall n \in \mathbb{Z} \longrightarrow \zeta(-n) = -\zeta(n)$$

Sejam $m, n \in \mathbb{Z}$. Se $m + n = 0$, então é imediato que

$$(1.83) \quad \zeta(m + n) = \zeta(m) + \zeta(n).$$

Com efeito, se $m + n = 0$, então vimos que $-\zeta(m) = \zeta(-m) = \zeta(n)$, daí vem

$$(1.84) \quad \zeta(m + n) = 0_{\mathbb{K}} = \zeta(m) - \zeta(m) = \zeta(m) + \zeta(-m) = \zeta(m) + \zeta(n)$$

Agora suponhamos que $m + n \neq 0$. Se m e n têm o mesmo sinal, então

$$(1.85) \quad \zeta(m + n) = |m + n| * \sigma(m + n) = |m| * \sigma(m) + |n| * \sigma(n) = \zeta(m) + \zeta(n),$$

porquanto, $\sigma(m) = \sigma(n) = \sigma(m + n)$.

Suponhamos que m e n , não tenham o mesmo sinal. Então $m + n$ tem o mesmo sinal de $-m$ ou $-n$. Pois se, $m + n$ tem um sinal e este difere dos de $-m$ e $-n$, então estes, por sua vez, terão o mesmo sinal e consequentemente m e n também. Em conformidade, e sem perda de generalidade suponhamos que $m + n$ e $-m$ tenham o mesmo sinal, conforme vimos

$$(1.86) \quad \zeta(m + n) + \zeta(-m) = \zeta((m + n) - m) = \zeta(n)$$

o que por sua vez acarreta

$$(1.87) \quad \zeta(m + n) = \zeta(m) + \zeta(n).$$

Em seguida, observemos que para quaisquer $m, n \in \mathbb{Z}$, vale

$$(1.88) \quad \begin{aligned} \zeta(mn) &= (mn)^* \\ &= |mn| * \sigma(mn) \\ &= (|m||n|) * (\sigma(m)\sigma(n)) \\ &= (|m| * \sigma(m))(|n| * \sigma(n)) \\ &= m^* n^* \\ &= \zeta(m)\zeta(n). \end{aligned}$$

Por fim, seja $n \in \ker \zeta$, temos que $\zeta(n) = n^* = 0_{\mathbb{K}}$. Se $n \neq 0$, podemos sempre supor que $n > 0$, bastando para isso considerar $-n$. Conformemente incorreríamos na existência de um $n \in \omega \setminus \{0\}$ tal que $n^* = 0_{\mathbb{K}}$, a fortiori $X(\mathbb{K}) \neq 0$, o que é uma contradição. Isto implica por sua vez que $\ker \zeta = \{0\}$, confirmando que ζ é um isomorfismo. Assim, para concluirmos basta tomar $\mathbb{Z}^* = \zeta(\mathbb{Z})$. ■

Sob as condições do teorema anterior temos a

DEFINIÇÃO 19 *Seja \mathbb{K} um corpo e $X(\mathbb{K}) = 0$. Então definimos $\mathbb{Z}^* = \zeta(\mathbb{Z})$.*

TEOREMA 31 *Se \mathbb{K} é um corpo tal que $X(\mathbb{K}) = 0$, então existe $\mathbb{Q}^* \subset \mathbb{K}$ isomorfo ao conjunto dos números racionais \mathbb{Q} .*

PROVA Em $\mathbb{Z}^* \times (\mathbb{Z}^* \setminus \{0_{\mathbb{K}}\})$ definimos a seguinte relação

$$(1.89) \quad (m^*, n^*) \sim^* (p^*, q^*) \longleftrightarrow m^* q^* = n^* p^*.$$

Doravante, admitamos que $m, n, p, q, r, s \in \mathbb{Z}$.

Primeiramente, observemos

$$(1.90) \quad (m^*, n^*) \sim^* (m^*, n^*) \longleftrightarrow m^* n^* = n^* m^*.$$

Portanto, \sim^* é reflexiva.

Em seguida,

$$(1.91) \quad (m^*, n^*) \sim^* (p^*, q^*) \longleftrightarrow m^* q^* = n^* p^* \longleftrightarrow p^* n^* = q^* m^* \longleftrightarrow (p^*, q^*) \sim^* (m^*, n^*).$$

Logo, \sim^* é simétrica.

E por fim, suponhamos que

$$(1.92) \quad (m^*, n^*) \sim^* (p^*, q^*) \wedge (p^*, q^*) \sim^* (r^*, s^*).$$

Segue portanto que

$$(1.93) \quad m^* q^* s^* = n^* p^* s^* = n^* q^* r^* \longrightarrow m^* s^* = n^* r^* \longleftrightarrow (m^*, n^*) \sim^* (r^*, s^*).$$

Consequentemente, \sim^* é transitiva, a fortiori, \sim^* é uma relação de equivalência.

Podemos construir uma bijeção natural $\rho : \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\}) \rightarrow \mathbb{Z}^* \times (\mathbb{Z}^* \setminus \{0_{\mathbb{K}}\})$, dada por

$$(1.94) \quad \rho((m, n)) = (m^*, n^*).$$

Esta bijeção por sua vez, nos fornece um isomorfismo natural definido em

$$(1.95) \quad \mathbb{Q} = \frac{\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})}{\sim}$$

com imagens em

$$(1.96) \quad \mathbb{Q}^* = \frac{\mathbb{Z}^* \times (\mathbb{Z}^* \setminus \{0_{\mathbb{K}}\})}{\sim^*}$$

Com efeito, sejam $m, n \in \mathbb{Z}$, denotaremos a classe cujo representante é (m, n) por m/n , e a classe de representante (m^*, n^*) por m^*/n^* . Agora, basta definir $\varrho : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}^*$ por

$$(1.97) \quad \varrho\left(\frac{m}{n}\right) = \frac{m^*}{n^*}.$$

A prova de que ϱ preserva a adição e a multiplicação é imediata ao isomorfismo $\zeta : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}^*$; além disso, é trivialmente sobrejetiva. Suponha que

$$(1.98) \quad \frac{m^*}{n^*} = \varrho\left(\frac{m}{n}\right) = \varrho\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{p^*}{q^*}$$

Daí vem

$$(1.99) \quad m^* q^* = n^* p^* \longleftrightarrow mq = \zeta^{-1}(m^* q^*) = \zeta^{-1}(n^* p^*) = np,$$

por conseguinte $m/n = p/q$ e consequentemente ϱ é injetiva, portanto, bijetiva, *a fortiori*, um isomorfismo de \mathbb{Q} em \mathbb{Q}^* .

Finalmente, observemos que \mathbb{Q}^* pode ser observado como subconjunto de \mathbb{K}^* , bastando para isso considerar a identificação $\iota : \mathbb{Q}^* \rightarrow \mathbb{K}$ dada por $\iota(m/n) = m^*(n^*)^{-1}$. Em verdade, sejam (m, n) e (p, q) dois representantes de m/n , temos em conformidade

$$(1.100) \quad m^* q^* = n^* p^* \longleftrightarrow m^*(n^*)^{-1} = p^*(q^*)^{-1},$$

i.e., a definição de ι não é ambígua. Com um raciocínio análogo, vê-se que ι é injetiva. Destarte, sem perdas podemos identificar \mathbb{Q}^* com $\iota(\mathbb{Q}^*) \subset K$, e abusar da notação escrevendo $\mathbb{Q}^* \subset \mathbb{K}$. ■

DEFINIÇÃO 20 Seja \mathbb{K} um corpo e $X(\mathbb{K}) = 0$. Então definimos \mathbb{Q}^* como no teorema 31. Ademais, da identificação podemos sem ambiguidade supor

$$(1.101) \quad \frac{m^*}{n^*} = m^*(n^*)^{-1}.$$

TEOREMA 32 Seja \mathbb{K} um corpo ordenado com a propriedade da menor cota superior tal que $X(\mathbb{K}) = 0$. Então \mathbb{K} é arquimediano e o conjunto \mathbb{Q}^* é denso em \mathbb{K} .

PROVA Sejam $x > 0_{\mathbb{K}}$ e $y \in \mathbb{K}$, consideremos o conjunto

$$(1.102) \quad M = \{n * x : n \in \omega\}$$

Afirmo que existe $n \in \omega$ tal que $n * x > y$. De fato, suponha que y seja um majorante do conjunto M , decorre de \mathbb{K} ter a propriedade da menor cota superior que existe $\sigma = \sup M$, daí vem que para todo $n \in \omega$

$$(1.103) \quad n * x \leq \sigma$$

por maior razão, para todo $n \in \omega$, segue-se

$$(1.104) \quad (n + 1) * x \leq \sigma,$$

onde para todo $n \in \omega$ vale

$$(1.105) \quad n * x = (n + 1) * x - x \leq \sigma - x < \sigma,$$

contradizendo o fato de σ ser a menor cota superior do conjunto M .

Imediatamente, suponhamos que $x, y \in \mathbb{R}$ sejam tais que $x < y$, da propriedade arquimediana de \mathbb{K} existe $n \in \omega$, tal que $n * (y - x) > 1^*$. Seja m o maior inteiro tal que $m^* \leq n * x$. Destarte, de

$$(1.106) \quad m^* \leq n * x < (m + 1)^* = m^* + 1^*,$$

concluímos que

$$(1.107) \quad (m+1)^* \leq n*x + 1^*$$

pois do contrário teríamos

$$(1.108) \quad 1^* = m^* + 1^* - m^* > n*x + 1^* - n*x = 1^*,$$

um absurdo. Logo,

$$(1.109) \quad n^* \cdot x = n*x < (m+1)^* \leq n*x + 1^* < n*y = n^* \cdot y$$

onde

$$(1.110) \quad x < \frac{(m+1)^*}{n^*} < y.$$

Em outros termos \mathbb{Q}^* é denso em \mathbb{K} . ■

TEOREMA 33 *Sejam \mathbb{K} e \mathbb{Q}^* como no teorema 32. Então*

$$(1.111) \quad \mathbb{Q}^* = \{q^* : q^* = m^*/n^* \in \mathbb{Q}^* \wedge m^* \geq 0^*\},$$

e

$$(1.112) \quad \frac{m}{n} < \frac{p}{q} \longleftrightarrow \frac{m^*}{n^*} < \frac{p^*}{q^*}.$$

PROVA É suficiente observar que vale

$$(1.113) \quad \frac{m^*}{n^*} = \frac{-m^*}{-n^*}$$

e

$$(1.114) \quad \frac{m}{n} < \frac{p}{q} \longleftrightarrow mq < np \longleftrightarrow m^*q^* < n^*p^* \longleftrightarrow \frac{m^*}{n^*} < \frac{p^*}{q^*}. ■$$

A construções a seguir foram motivadas por alguns exercícios do livro do [Elon] *Curso de Análise* Volume 1.

TEOREMA 34 (UNICIDADE DE \mathbb{R} A MENOS DE ISOMORFISMO) *Seja \mathbb{K} um corpo e \mathbb{Q}^* como teorema 32. Então \mathbb{R} é ordenadamente isomorfo a \mathbb{K} .*

PROVA Seja $\rho : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}^*$ um isomorfismo, doravante quando for conveniente denotaremos $\rho(q)$ por q^* . Defina a aplicação $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}$, da seguinte maneira

$$(1.115) \quad \varphi(x) = \sup \rho(\mathbb{Q} \cap]-\infty, x[).$$

Afirmo que φ é um isomorfismo. É o que nos empenharemos a demonstrar doravante.

Inicialmente, observemos que φ está bem definida pois o supremo é único e o conjunto sobre o qual se toma o supremo é não vazio e limitado superiormente em \mathbb{Q}^* . Efetivamente, basta tomar $q \in \mathbb{Q} \cap [x, \infty[,$ daí e do teorema 33 segue que q^* é um majorante de $\rho(\mathbb{Q} \cap]-\infty, x[)$.

Em seguida, provemos que φ é injetiva. Ora, se $x < y$ então existem $p, q \in \mathbb{Q}$ tais que $x < p < q < y$, consequentemente

$$\varphi(x) \leq p^* < q^* \leq \varphi(y),$$

observe que isto também prova que φ é estritamente crescente.

Imediatamente, Seja $\beta \in \mathbb{K}$, consideremos

$$(1.116) \quad x = \sup \rho^{-1}(\mathbb{Q}^* \cap]\infty, \beta[).$$

Observe que faz sentido considerarmos o supremo uma vez que existe $q^* \in \mathbb{K}$, tal que $q^* > \beta$, logo o conjunto sobre o qual toma-se o supremo é limitado superiormente, pois q é um majorante de tal conjunto; além disso, tal conjunto é trivialmente não vazio. Queremos provar que $\beta = \varphi(x)$. Para tanto, observemos que se $q < x$, necessariamente $q^* < \beta$, pois se $q^* \geq \beta$, então q seria uma cota superior do conjunto $\rho^{-1}(\mathbb{Q}^* \cap]\infty, \beta[)$, logo $q \geq x$, uma contradição. Desta forma, $\beta \geq \varphi(x)$.

Seja agora $\alpha < \beta$, do teorema 33 podemos considerar $p^*, q^* \in \mathbb{K}$, tais que

$$(1.117) \quad \alpha < p^* < q^* < \beta$$

segue-se que $p < q \leq x$, i.e., existe $p < x$, tal que $p^* > \alpha$, portanto α não é cota superior do conjunto $\varphi(x)$, em consequência $\varphi(x) = \beta$, ou seja, provamos que dado $\beta \in K$ existe $x \in \mathbb{R}$, tal que $\varphi(x) = \beta$, i.e., φ é sobrejetiva.

Consideremos $p < x + y$, daí vem que $p - x < y$, da densidade de \mathbb{Q} em \mathbb{R} existe $q \in \mathbb{Q}$, tal que

$$(1.118) \quad p - x < q < y,$$

como consequência

$$(1.119) \quad p - q < x \wedge q^* \leq \varphi(y),$$

dai decorre que

$$(1.120) \quad p^* - q^* \leq \varphi(x),$$

portanto,

$$(1.121) \quad p^* = (p^* - q^*) + q^* \leq \varphi(x) + \varphi(y),$$

como $p < x + y$ é arbitrário temos

$$(1.122) \quad \varphi(x + y) \leq \varphi(x) + \varphi(y).$$

Seja agora $\alpha < \varphi(x) + \varphi(y)$, segue-se que $\alpha - \varphi(y) < \varphi(x)$, como $\varphi(x)$ é a menor cota superior existe $q < x$ tal que

$$(1.123) \quad \alpha - \varphi(y) < q^* \leq \varphi(x).$$

Por outro lado, como $\alpha - q^* < \varphi(y)$, pelo mesmo motivo existe $p < y$, tal que

$$(1.124) \quad \alpha - q^* < p^* \leq \varphi(y),$$

onde podemos inferir que existe

$$(1.125) \quad r = p + q < x + y,$$

tal que $\alpha < r^*$, i.e., α não é cota superior do conjunto $\varphi(x + y)$, conformemente $\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y)$. Podemos, portanto, concluir que para todo $x \in \mathbb{R}$ vale

$$(1.126) \quad \varphi(-x) = \varphi(-x) + \varphi(x) - \varphi(x) = \varphi(x - x) - \varphi(x) = -\varphi(x).$$

Desta forma, é suficiente provarmos que

$$(1.127) \quad \varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$$

para $x, y > 0$, pois se ao menos um deles for nulo a identidade é imediata. Caso, digamos $x < 0 < y$, basta considerar $-x$, pois

$$(1.128) \quad \varphi(-xy) = \varphi(-x)\varphi(y) \longrightarrow -\varphi(xy) = -\varphi(x)\varphi(y)$$

como consequência

$$(1.129) \quad \varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y).$$

Dessarte, consideremos $x, y > 0$. Seja $p < xy$, podemos sem perda de generalidade supor que $p > 0$. Tome $q \in \mathbb{Q}$, tal que

$$(1.130) \quad \frac{p}{y} < q < x$$

como $p/q < y$, temos necessariamente que

$$(1.131) \quad p^* = q^* \frac{p^*}{q^*} \leq \varphi(x)\varphi(y)$$

como consequência

$$(1.132) \quad \varphi(xy) \leq \varphi(x)\varphi(y).$$

Seja $\alpha < \varphi(x)\varphi(y)$, podemos supor sem perda de generalidade que $\alpha > 0^*$, pois $\varphi(x), \varphi(y) > 0^*$. Existe, portanto, $p < x$, tal que

$$\frac{\alpha}{\varphi(x)} < p^* \leq \varphi(y)$$

dai também encontramos $q < x$, tal que

$$\frac{\alpha}{p^*} < q^* \leq \varphi(x)$$

onde

$$r^* = p^*q^*$$

é tal que $r < xy$ e $\alpha < r^*$, provando que α não é cota superior do conjunto $\varpi(xy)$, concluindo portanto que $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$. O que conclui a prova do teorema.

Ademais, vale observar que em particular

$$(1.133) \quad \varphi(q) = q^*.$$

Com efeito, seja $\sigma = \varphi(q)$ evidentemente $\sigma \leq q^*$. Se $\sigma < q^*$, então existe $p^* \in Q^*$, tal que

$$(1.134) \quad \sigma < p^* < q^*$$

como \mathbb{Q} é ordenadamente isomorfo a \mathbb{Q}^* , então $p < q$, mas isto contradiria o fato de σ ser uma cota superior de $\varphi(q)$, segue, portanto, a igualdade mencionada. ■

TEOREMA 35 Se $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é um isomorfismo, então $\psi = \iota$, em que ι é a aplicação identidade. Em particular, se \mathbb{K} e \mathbb{L} são dois corpos ordenados com a propriedade da menor cota superior, então existe um único isomorfismo de \mathbb{K} sobre \mathbb{L} .

Prova. Se ψ é um isomorfismo, então $\psi(1) = 1$, donde conclui-se $\psi(m) = m$, para todo $m \in \mathbb{Z}$, que por sua vez implica $\psi(q) = q$, para todo $q \in \mathbb{Q}$.

Se $x < \varphi(x)$, então existe $p \in \mathbb{Q}$, tal que

$$x < p = \varphi(p) < \varphi(x)$$

onde se conclui

$$x < p < x$$

uma contradição. Uma prova análoga pode ser dada para o caso em que $\varphi(x) < x$. Podemos portanto concluir que $\varphi = \iota$.

Em seguida observemos que se $\varrho, \varsigma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}$, são dois isomorfismos de \mathbb{R} sobre \mathbb{K} , então $\varsigma^{-1}\varrho = \iota$, consequentemente $\varrho = \varsigma$, i.e., existe um único isomorfismo de \mathbb{R} sobre \mathbb{K} .

Seja agora um isomorfismo arbitrário $\tau : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{L}$ e, $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}$ e $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{L}$ os únicos isomorfismos então $\psi^{-1}\tau\varphi = \iota$, logo $\tau = \psi\varphi^{-1}$, desta forma τ é único. ■

A seguir relembremos de alguns exercícios interessantes de [Rudin], quanto a construção de potências qualquer e da construção do logaritmo, ambos de base $b > 0$ qualquer.

Teorema 10. *Sejam $m/n, p/q \in Q$, tais que $m/n = p/q$ (podemos supor que $n, q > 0$ sem perda de generalidade) e $b > 1$. Então*

$$(b^m)^{1/n} = (b^p)^{1/q}.$$

Desta forma podemos definir

$$b^{m/n} = (b^m)^{1/n}$$

sem nos preocupar com a fração representante do número racional.

Notado isto, vale

$$\forall r, s (r, s \in Q \longrightarrow b^{r+s} = b^r b^s).$$

Para $x \in \mathbb{R}$, definindo

$$B(x) = \{b^r \in \mathbb{R} : r \leq x \wedge r \in Q\},$$

vale,

$$\forall r (r \in Q \longrightarrow b^r = \sup B(r)).$$

Assim, faz sentido definir

$$b^x = \sup B(x)$$

para $x \in \mathbb{R}$. Além disso, vale também

$$b^{x+y} = b^x b^y.$$

Prova. Primeiro, se $m/n = p/q$, então $mq = np$. Desta maneira,

$$((b^m)^{1/n})^q = (b^{mq})^{1/n} = (b^{np})^{1/n} = b^p,$$

da unicidade da raiz temos necessariamente que

$$(b^m)^{1/n} = (b^p)^{1/q}.$$

Segundo,

$$\begin{aligned} b^{m/n+p/q} &= b^{(mq+np)/nq} \\ &= (b^{mq+np})^{1/nq} \\ &= (b^{mq})^{1/nq} (b^{np})^{1/nq} \\ &= ((b^{1/n})^{mnq})^{1/nq} ((b^{1/q})^{npq})^{1/nq} \\ &= (b^{1/n})^m (b^{1/q})^p \\ &= (b^m)^{1/n} (b^p)^{1/q} \\ &= b^{m/n} b^{p/q}. \end{aligned}$$

Terceiro, as potências de expoente racional e base fixa $b > 1$ preservam a ordem. Assim, se $r < s$, então $b^r < b^s$. De fato, suponha que $m/n > p/q$, como $n, q > 0$, necessariamente $mq > np$, donde $b^{mq} > b^{np}$. Observando que

$$(b^{1/n})^{1/q} = b^{1/nq},$$

pois

$$((b^{1/n})^{1/q})^{nq} = b,$$

a fortiori

$$b^{m/n} = (b^{mq})^{1/nq} > (b^{np})^{1/nq} = b^{p/q},$$

como afirmamos. Destarte, $b^r \geq \sup B(r)$, mas como $b^r \in B(r)$, obrigatoriamente $b^r = \sup B(r)$, conforme dissemos.

Quarto, devemos considerar dois casos, a saber, $x+y \in Q$ e $x+y \notin Q$. Antes de prosseguirmos para os casos, provemos inicialmente que nenhum $y < b^x b^y$ é cota superior do conjunto $B(x+y)$. De fato, suponha que $y < b^x b^y$, daí vem que $y/b^y < b^x$, existe, portanto, $r \leq x$, tal que $y/b^y < b^r \leq b^x$. Analogamente existe $s \leq y$, tal que $y/b^r < b^s \leq b^y$, em consequência existe $t = r+s \leq x+y$, tal que $y < b^t$, provando que y não pode ser cota superior de $B(x+y)$, particularmente, temos $b^x b^y \leq b^{x+y}$. Suponhamos primeiramente que $x+y \notin Q$, dado $s \in Q$, tal que $s \leq x+y$, necessariamente $s < x+y$, podemos portanto tomar $t \in Q$, tal que $s-x < t < y$, donde vem que

$$b^s = b^{s-t} b^t \leq b^x b^y$$

como $s \leq x+y$ é arbitrário necessariamente $b^{x+y} \leq b^x b^y$, como concluímos que $b^x b^y \leq b^{x+y}$, conclusivamente $b^{x+y} = b^x b^y$. Por outro lado, suponhamos que $x+y = r \in Q$. Antes, sabe-se que para $u, v \in \mathbb{R}$ é bem conhecida a identidade

$$v^n - u^n = (v-u) \sum_{i=0}^{n-1} u^i v^{n-1-i}$$

onde fazendo $v = 1$ e $u = (1/b)^{1/n}$ obtemos

$$1 - \frac{1}{b} = \left(1 - \frac{1}{b^{1/n}}\right) \sum_{i=0}^{n-1} b^{i+1} > n \left(1 - \frac{1}{b^{1/n}}\right)$$

onde deriva-se

$$1 - \frac{1}{b^{1/n}} < \frac{b-1}{bn}.$$

Portanto,

$$b^r - b^{r-1/n} = b^r (1 - b^{-1/n}) < \frac{b^{r-1}(b-1)}{n}.$$

Com isto em mãos, dado $\varepsilon > 0$ existe $s < r$, tal que $b^r - b^s < \varepsilon$. De fato, tome $n > b^{r-1}(b-1)/\varepsilon$, temos necessariamente que existe $s = r - 1/n < r$, tal que

$$b^r - b^s \leq \frac{b^{r-1}(b-1)}{n} < \varepsilon$$

Desta forma, dado $\varepsilon > 0$ existe $s < r = x+y$, tal que

$$b^r - \varepsilon < b^s < b^r$$

Consideremos $t \in Q$ tal que $s-x < t < y$, assim $s-t < x$ e

$$b^s = b^{s-t} b^t \leq b^x b^y,$$

logo,

$$b^r - \varepsilon < b^s \leq b^x b^y \leq b^{x+y} = b^r$$

como ε é arbitrário, decorre que $b^{x+y} = b^r = b^x b^y$. ■

É interessante indagar se uma definição análoga funcionaria para $0 < b < 1$. Primeiro devemos observar as potências de expoente racional r . Como é fácil de se observar, para $0 < b < 1$, quanto maior for $s \leq r$ menor será a potência b^s , isto decorre naturalmente observando

as potências do recíproco de b , já tratadas. De fato, suponha que $s < t$, logo $-t < -s$, que por sua vez acarreta

$$b^t = \left(\frac{1}{b}\right)^{-t} < \left(\frac{1}{b}\right)^{-s} = b^s.$$

A seguir provaremos que ao invés de tormarmos o supremo para a definição de b^x , poderíamos sem problemas considerar o ínfimo.

Definamos para $b \in \mathbb{R}_+$ e $x \in \mathbb{R}$, os conjuntos

$$L(b, x) = \{b^t \in \mathbb{R} : t \leq x \wedge t \in Q\} \quad \text{Def.}$$

e

$$U(b, x) = \{b^t \in \mathbb{R} : t \geq x \wedge t \in Q\} \quad \text{Def.}$$

Conformemente temos o

Teorema 11. *Para $0 < b < 1$, vale*

$$\inf L(b, x) = \sup U(b, x),$$

e para $b > 1$, vale

$$\sup L(b, x) = \inf U(b, x).$$

Prova. Com efeito, seja $0 < b < 1$, dado $\varepsilon > 0$, tomemos $n > (1 - b)/b\varepsilon$. Fazendo $v = 1/b^{1/n}$ e $u = 1$ na identidade

$$v^n - u^n = (v - u) \sum_{i=0}^{n-1} v^i u^{n-1-i}$$

obtemos

$$\frac{1}{b} - 1 = \left[\left(\frac{1}{b} \right)^{1/n} - 1 \right] \sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{1}{b} \right)^{i/n}$$

sabendo que $1/b > 1$ temos em consequência

$$\frac{1-b}{b} > \left[\left(\frac{1}{b} \right)^{1/n} - 1 \right] n$$

donde

$$\frac{1}{b^{1/n}} - 1 < \frac{1-b}{bn}.$$

Desta forma, tomando $s, r \in Q$, tais que $r \leq x \leq s$ e $s - r < 1/n$ temos

$$b^{r-s} - 1 < b^{-1/n} - 1 < \frac{1-b}{bn} < \varepsilon$$

donde

$$0 \leq \inf L(b, x) - \sup U(b, x) \leq b^r - b^s < b^s \varepsilon < \varepsilon.$$

Como $\varepsilon > 0$ é arbitrário, necessariamente

$$\inf L(b, x) = \sup U(b, x).$$

Seguidamente, seja $b > 1$, dado $\varepsilon > 0$, tomemos

$$n > \frac{(b-1) \sup L(b, x)}{\varepsilon}.$$

Tomando $r, s \in Q$, tais que $r \leq x \leq s$ e $s - r < 1/n$ obtemos

$$0 < b^{s-r} - 1 < b^{1/n} - 1 < \frac{b-1}{n} < \frac{\varepsilon}{\sup L(b, x)}$$

onde segue que

$$0 \leq \inf U(b, x) - \sup L(b, x) \leq b^s - b^r < \frac{\varepsilon b^r}{\sup L(b, x)} \leq \varepsilon.$$

Visto que $\varepsilon > 0$, é arbitrário decorrerá que

$$\inf U(b, x) = \sup L(b, x).$$

■

Agora relebremos que no teorema fizemos

$$b^x = \sup B(x) = \sup L(b, x).$$

Além disso, vimos que se $x \in Q$, então

$$b^x = \sup L(b, x).$$

Nesta altura, definimos o símbolo b^x para $x \in \mathbb{R}$ e $0 < b < 1$ ou $1 < b$, não é difícil ver que para $b \in \{0, 1\}$ temos $L(b, x) = U(b, x) = \{b\}$. Assim, é natural definir $b^x = b$, nestes casos. Desta forma, ficam definidas as potências de base $b \in \mathbb{R}_+$ qualquer.

Em seguida, provemos o

Teorema 12. *Se $b > 0$, então*

$$b^x \left(\frac{1}{b} \right)^x = 1.$$

Prova. Para tanto, provemos que as desigualdades $b^x(1/b)^x < 1$ e $b^x(1/b)^x > 1$ geram contradições. Provaremos apenas para o caso $0 < b < 1$, pois o caso $b > 1$ pode ser provado analogamente considerando-se $a = 1/b$ e conforme mencionado $1^x = 1$.

Se $b^x(1/b)^x < 1$, então $(1/b)^x < 1/b^x$, existe portanto $r \in Q$, tal que $r \geq x$ e

$$\left(\frac{1}{b} \right)^x \leq \left(\frac{1}{b} \right)^r < \frac{1}{b^x},$$

onde $b^x < b^r$. Segue igualmente que existe $s \in Q$ tal que $s \leq x$ e $b^x \leq b^s < b^r$, daí vem $b^{r-s} > 1$, contradizendo a hipótese $b < 1$. Analogamente, se $b^x(1/b)^x > 1$, então existe $r \in Q$, tal que $r \leq x$ e

$$\frac{1}{b^x} < \left(\frac{1}{b} \right)^r \leq \left(\frac{1}{b} \right)^x.$$

Destarte, existe $s \in Q$ tal que $s \geq x$ e $b^r < b^s \leq b^x$, donde inferimos que $b^{s-r} > 1$, outra contradição com o fato de $b < 1$. ■

Teorema 13 (Uma definição de logaritmo). *Se $b > 1$ e*

$$x = \sup \{w \in \mathbb{R} : b^w < y\},$$

então $b^x = y$. Além disso, x é o único número real tal que $b^x = y$.

Prova.

Exercício 20 do capítulo 1 de [Rudin]. *Provisoriamente diremos que $\alpha \subset Q$ é um corte se os seguintes axiomas são satisfeitos*

- I. $\emptyset \neq \alpha \neq Q$;
- II. $\forall p, q (p \in \alpha \wedge q \in Q \wedge q < p \rightarrow q \in \alpha)$.

Seja R a coleção de todos os cortes, provemos que R munido com a ordem

$$\alpha < \beta \longleftrightarrow \alpha \subset \beta \quad \text{Def.}$$

(em que \subset é a inclusão própria) tem a propriedade da menor cota superior. Ademais, se

$$\alpha + \beta = \{p + q \in Q : (p, q) \in \alpha \times \beta\} \quad \text{Def.}$$

então A1–A4 são satisfeitas, mas A5 falha.

Prova. Seja $S \subseteq R$ um conjunto não vazio limitado superiormente, façamos $\varsigma = \bigcup S$, provemos que ς é a menor das cotas superiores de S . Com efeito, primeiro provemos que ς satisfaz I e II. De fato, sabendo que $S \neq \emptyset$, existe $\alpha \subset S$ tal que $\alpha \neq \emptyset$, em consequência $\varsigma \neq \emptyset$. Seja β uma cota superior de S que é garantida das hipóteses. Dado $\alpha \in S$, inferimos que $\alpha \subseteq \beta$, desta maneira $\varsigma \subseteq \beta$. Assim, basta notar $Q \setminus \varsigma \supseteq Q \setminus \beta \neq \emptyset$, em outros termos $\varsigma \neq Q$, logo vale I. Seja agora, $p \in \varsigma$ e $q \in Q$ com $q < p$, segue que existe $\alpha \in S$, tal que $p \in \alpha$, como este último é um corte $q \in \alpha$, como $\alpha \subseteq \varsigma$, segue que $q \in \varsigma$, fica portanto provada II. Como ς esta contida em toda cota superior de S , decorre que $\sup S = \varsigma$. Consequentemente R tem a propriedade da menor cota superior.

Dados $\alpha, \beta \neq \emptyset$, necessariamente $\alpha + \beta \neq \emptyset$. Agora se $r \notin \alpha$ e $s \notin \beta$, então $r + s$ majora estritamente todo elemento de $\alpha + \beta$, consequentemente $r + s \notin \alpha + \beta$, e portanto $\alpha + \beta \neq Q$, fica provado portanto que a soma satisfaz I. Sejam agora $r \in \alpha + \beta$ e $s \in Q$ com $s < r$, segue que existe $(p, q) \in \alpha \times \beta$, tal que $r = p + q$. Assim, $s < p + q$, logo $s - p < q$, isto é, $s - p \in \beta$, daí vem que

$$s = p + (s - p) \in \alpha + \beta.$$

o que prova II. Isto prova que adição de cortes é estável, em outros termos A1.

Trivialmente valem A2 e A3.

Cosideremos agora

$$0^* = \{p \in Q : p \leq 0\} \quad \text{Def.}$$

Provemos que 0^* é um corte. De fato, trivialmente $\emptyset \neq 0^* \neq Q$. E, se $p \in 0^*$ e $q \in Q$ com $q < p$, então $q \leq 0$, i.e., $q \in 0^*$, portanto, 0^* é um corte.

Seja $\alpha \in R$ e $(p, q) \in 0^* \times \alpha$ temos que $p + q \leq q \in \alpha$, consequentemente $p + q \in \alpha$, i.e., $0^* + \alpha \subseteq \alpha$. Por outro lado, seja $p \in \alpha$, trivialmente $p = 0 + p \in 0^* + \alpha$, i.e., $\alpha \subseteq 0^* + \alpha$. Destarte $\alpha = 0^* + \alpha$, como α é arbitrário segue que 0^* é o elemento neutro para adição.

Dado p , não é difícil ver que

$$\alpha = \{p \in Q : p < q\}$$

é um corte. Suponhamos que existisse $\beta \in R$, tal que $\alpha + \beta = 0^*$, então necessariamente existiria $(r, s) \in \alpha \times \beta$, tal que $r + s = 0$, daí $s = -r \in \beta$. Consideremos $t \in Q$ tal que $r < t < q$, temos

que $t \in \alpha$, mas $s + t > 0$, i.e., existe $(t, s) \in \alpha \times \beta$, tal que $t + s \notin 0^*$, contradizendo a igualdade $\alpha + \beta = 0^*$. ■

Lema 3. seja π uma função sentencial cujo universo de discurso é o subconjunto dos números naturais i tais que $i \leq n + 1$. Ademais, suponha que

- I. $\pi(0)$ é verdadeira;
- II. Se $i \leq n$ e $\pi(i)$ é verdadeira, então $\pi(i + 1)$ é verdadeira.

Então π é verdadeira para todo natural $i \leq n + 1$.

Prova. Use o fato de N ser bem ordenado. ■

Exercício 24 do livro Calculus de M. Spivak. Consideremos dada uma sequência de números $\{a_n\}$, denotaremos uma soma qualquer dos $n \geq 1$ primeiros termos, aparacendo na ordem natural, por $s(a_1, \dots, a_n)$, em outras palavras, a_i vem antes de a_{i+1} na expressão da soma.

Definiremos indutivamente,

$$S_0 = 0 \quad \text{e} \quad S_{k+1} = a_{n-k} + S_k.$$

Desta forma, intuitivamente podemos considerar definida a soma

$$a_1 + (a_2 + (a_3 + (\dots + (a_{n-1} + a_n)))),$$

tal soma é na realidade S_n . Denotaremos tal soma por $S(a_1, \dots, a_n)$, para indicar quais termos a soma depende. No seu livro, *Calculus*, Spivak define

$$a_1 + \dots + a_n = S(a_1, \dots, a_n) \quad \text{Def.}$$

e prossegue o exercício usando esta simbologia. No entanto, nos ateremos à notação $S(a_1, \dots, a_n)$ para se referir aquela soma.

Afirmo que para todo $n \in N$

$$S(a_1, \dots, a_{n+2} + a_{n+3}) = S(a_1, \dots, a_{n+3}).$$

A soma no membro esquerdo da última igualdade pode ser reescrita como

$$S(b_1, \dots, b_{n+2})$$

em que $b_i = a_i$, para todo $i \leq n + 1$ e $b_{n+2} = a_{n+2} + a_{n+3}$. Esta soma por sua vez é dada indutivamente por

$$S_0 = 0 \quad \text{e} \quad S_{j+1} = b_{n+2-j} + S_j.$$

E a soma $S(a_1, \dots, a_{n+2})$ é dada indutivamente por

$$S'_0 = 0 \quad \text{e} \quad S'_{j+1} = a_{n+3-j} + S'_j.$$

Seguidamente, provemos indutivamente que

$$S'_{j+2} = S_{j+1},$$

para todo $j \leq n + 1$.

Primeiro, para $j = 0$ temos

$$S'_2 = a_{n+2} + S'_1 = a_{n+2} + a_{n+3} = b_{n+2} = S_1.$$

Portanto, a propriedade é válida para $j = 0$. Suponhamos que ela seja válida para $j \leq n$. Temos em seguida que

$$S'_{j+3} = a_{n+1-j} + S'_{j+2}$$

e

$$S_{j+2} = b_{n+1-j} + S_{j+1}.$$

Como sabemos por hipótese de indução que $S'_{j+2} = S_{j+1}$ e também sabemos que $a_{n+1-j} = b_{n+1-j}$, para $0 \leq j \leq n$, temos em conformidade

$$S'_{j+3} = a_{n+1-j} + S'_{j+2} = b_{n+1-j} + S_{j+1} = S_{j+2}$$

portanto a propriedade é válida para $j + 1$. Pelo princípio de indução matemática (sob a forma do lema anterior) a propriedade é válida para todo $j \leq n + 1$. Em particular,

$$S(a_1, \dots, a_{n+3}) = S'_{n+3} = S_{n+2} = S(a_1, \dots, a_{n+2} + a_{n+3}).$$

Em seguida, provemos indutivamente que para todo $n \in N$

$$S(a_1, \dots, a_{n+1}) + a_{n+2} = S(a_1, \dots, a_{n+2}).$$

Inicialmente, verifiquemos que

$$S(a_1) + a_2 = a_1 + a_2 = S(a_1, a_2),$$

i.e., a propriedade é válida para $n = 0$. Suponhamos por hipótese de indução que ela seja válida para n , temos em conformidade

$$\begin{aligned} S(a_1, \dots, a_{n+2}) + a_{n+3} &= (S(a_1, \dots, a_{n+1}) + a_{n+2}) + a_{n+3} \\ &= S(a_1, \dots, a_{n+1}) + (a_{n+2} + a_{n+3}) \\ &\stackrel{\dagger}{=} S(b_1, \dots, b_{n+2}) \\ &\stackrel{\ddagger}{=} S(a_1, \dots, a_{n+3}) \end{aligned}$$

(†) Fazendo $b_k = a_k$, para $k \leq n + 1$ e $b_{n+2} = a_{n+2} + a_{n+3}$;

(‡) Pelo que já foi provado.

Fica portanto provado que a propriedade é válida para $n + 1$, novamente pelo princípio de indução matemática segue que a propriedade é válida para todo $n \in N$.

Imediatamente provemos que para todo $l \in N$ tal que $l \geq 1$ e para todo $n \geq l + 1$

$$S(a_1, \dots, a_l) + S(a_{l+1}, \dots, a_n) = S(a_1, \dots, a_n).$$

Para $l = 1$ e $n \geq 2$ certamente

$$S(a_1) + S(a_2, \dots, a_n) = a_1 + S(a_2, \dots, a_n) = S(a_1, \dots, a_n)$$

Suponhamos por hipótese de indução que a propriedade é válida para l , temos para $n \geq l + 2$

$$\begin{aligned} S(a_1, \dots, a_{l+1}) + S(a_{l+2}, \dots, a_n) &= (S(a_1, \dots, a_l) + a_{l+1}) + S(a_{l+2}, \dots, a_n) \\ &= S(a_1, \dots, a_l) + (a_{l+1} + S(a_{l+2}, \dots, a_n)) \\ &= S(a_1, \dots, a_l) + S(a_{l+1}, \dots, a_n) \\ &= S(a_1, \dots, a_n), \end{aligned}$$

i.e., a propriedade é válida para $l + 1$, em consequência pelo princípio de indução matemática ela será válida para todo $l \in N$.

Consideremos uma soma arbitrária com pelo menos dois elementos $s(a_1, \dots, a_n)$, conforme estipulado no início da resolução do problema. Para esta soma arbitrária temos duas possibilidades

I. A soma começa ou termina com um termo, neste caso temos

$$s(a_1, \dots, a_n) = a_1 + s(a_2, \dots, a_n)$$

ou

$$s(a_1, \dots, a_n) = s(a_1, \dots, a_{n-1}) + a_n.$$

Antes de exibirmos o outro caso, estipularemos que se um parêntese ocorre entre parênteses correspondentes, então o seu correspondente ocorrerá entre os parênteses correspondentes.

II. A soma começa e termina com parênteses digamos ' $(_1)$ ' e ' $(_2)$ ', respectivamente. Seja ' $(_1)$ ' e ' $(_2)$ ' os correspondentes de ' $(_1)$ ' e ' $(_2)$ ', respectivamente. Após ' $(_1)$ ' deve vir necessariamente um símbolo '+', pois a outra possibilidade seria um parêntese ' $)_3$ ', em conformidade com nossa estipulação ' $(_1)$ ' deve vir entre ' $(_3)$ ' e ' $)_3$ ', mas isto contradiria o fato de que ' $(_1)$ ' é o primeiro parêntese. Após '+' deve vir um parêntese ' $(_3)$ ', este parêntese deve coincidir com ' $(_2)$ ', pois do contrário ' $(_2)$ ' e ' $)_2$ ' viriam entre ' $(_3)$ ' e ' $)_3$ ' contradizendo o fato de ' $)_2$ ' ser o último parêntese.

Em qualquer caso antes existe um símbolo '+' que separa a primeira soma em duas somas. Seja m menor natural tal que a_m está do lado direito do símbolo '+', decerto que $2 \leq m \leq n$, logo existe $l \in N$, tal que $l + 1 = m$; assim

$$s(a_1, \dots, a_n) = s(a_1, \dots, a_l) + s(a_{l+1}, \dots, a_n).$$

Seguidamente provemos que para todo $n \in N$ tal que $n \geq 2$ vale

$$\pi(n) \equiv s(a_1, \dots, a_n) = S(a_1, \dots, a_n).$$

Certamente que $\pi(2)$ é verdadeira. Suponhamos que π seja verdadeira para todo $2 \leq i \leq n$, pelo que vimos, para algum $l \leq n$

$$\begin{aligned} s(a_1, \dots, a_{n+1}) &= s(a_1, \dots, a_l) + s(a_{l+1}, \dots, a_{n+1}) \\ &= S(a_1, \dots, a_l) + S(a_{l+1}, \dots, a_{n+1}) \\ &= S(a_1, \dots, a_{n+1}) \end{aligned}$$

Em consequência a propriedade é válida para $n + 1$, consequentemente pelo princípio de indução matemática π é válida para todo $n \in N$ tal que $n \geq 2$. ■

Definição 1. Um conjunto C é finito se existe um $n \in \omega$, tal que $C \sim n$. Denotaremos o natural n , tal que $n \sim C$, por $\#C$.

Teorema 14. Para todo $n \in \omega$, se $C \subseteq n$, então $\#C \leq n$.

Prova. Trivialmente válida para $n = 0$. Suponhamos que seja válida para n , provemos que será válida para $n + 1$. Temos duas possibilidades a considerar, $n \notin C$ ou $n \in C$. No primeiro caso temos $C \subseteq n$, daí pela hipótese de indução $\#C \leq n$. Se $n \in C$, então $C \setminus \{n\} \subseteq n$, daí $\#(C \setminus \{n\}) \leq n$, donde $\#C \leq n + 1$, como queríamos provar. Do princípio de indução matemática vale a condicional para todo $n \in \omega$. ■

Teorema 15. Nenhum conjunto finito é equivalente a um subconjunto próprio.

Prova. Suponhamos que existe um conjunto finito C que é equivalente a um subconjunto próprio S . Sabemos que existe $n \in \omega$, tal que $n + 1 = \#C$, pois C , deve conter ao menos um elemento para possuir subconjuntos próprios. Existe $a \in C \setminus S$, donde vem que $S \subseteq C \setminus \{a\}$, que por sua vez implica $\#S \leq \#(C \setminus \{a\}) = n$, mas por outro lado $\#S = \#C = n + 1$, daí vem a desigualdade

$$n + 1 = \#S \leq n$$

o que é um absurdo.

Corolário 1. *Uma condição suficiente para que um conjunto C seja infinito, i.e., não existir $n \in \omega$, tal que $C \sim n$, é que ele seja equivalente a um subconjunto próprio.*

Prova. Trivial. ■

Nas condições do corolário o conjunto C é dito Dedekind-infinito. Usando o axioma da escolha é possível provar que todo conjunto infinito no primeiro sentido é Dedekind-infinito, portanto sob o axioma da escolha ser infinito no primeiro sentido é indiferente de ser Dedekind-infinito.

Teorema 16. *Sejam C um conjunto infinito e $f : \omega \rightarrow C$ uma sobrejeção. Então C é contável.*

Prova. Para todo $c \in C$, podemos escolher $\eta(c) \in f^{-1}(c)$. Sabemos que $A = \{\eta(c) \in \omega : c \in C\} \sim C$, pois $f|_A$ é uma bijeção. Como C é infinito, A também o é. Dessarte, A é contável pois $A \subseteq \omega$, consequentemente C é contável.

Teorema 17. $\omega \times \omega \sim \omega$.

Prova. Defina $\phi : \omega \times \omega \rightarrow \omega$ por $\phi(m, n) = 2^m(2n + 1)$. É sabido que todo número pode ser fatorado num produto de números primos, e fatores que não são 2 são ímpares e produto de ímpares é ímpar, consequentemente o produto de fatores que não são 2 é um número da forma $2n + 1$, para $n \in \omega$. Portanto, para todo l existe $(m, n) \in \omega \times \omega$ tal que $l = 2^m(2n + 1)$. Assim, ϕ é sobrejetiva. A injetividade não é difícil, basta supor que $2^m(2n + 1) = 2^p(2q + 1)$, sem perdas suponhamos que $m < p$, daí vem $2n + 1 = 2^{p-m}(2p + 1)$, donde concluiríamos que $1 = 2r$ para $r \in \omega$, o que é impossível em ω . Daí $m = p$ e consequentemente $n = q$, logo ϕ é injetiva, portanto bijetiva, fica, portanto, provado o teorema. ■

Corolário 2. *Uma reunião de uma família contável com membros contáveis é contável.*

Prova. Podemos supor que nossa família é $\{E_n : n \in \omega\}$, para cada n existe uma função $f_n : \omega \rightarrow E_n$. Agora basta definirmos $f : \omega \times \omega \rightarrow U$, por $f(m, n) = f_m(n)$, com $U = \bigcup_{n \in \omega} E_n$. Como $f \circ \phi^{-1} : \omega \rightarrow U$ (ϕ dada no teorema anterior) é sobrejetiva e U infinito, então U é contável.

Teorema 18. *Seja \mathcal{A} uma coleção no máximo contável de membros no máximo contáveis. Então $\bigcup \mathcal{A}$ é no máximo contável.*

Prova. Das hipóteses existe $I \in \omega \cup \{\omega\}$ e uma bijeção $\kappa : I \rightarrow \mathcal{A}$, digamos que $A_i = \kappa(i)$. Para cada $i \in I$, existe uma bijeção $f_i : B_i \rightarrow A_i$, com $B_i \in \omega \cup \{\omega\}$. Definamos $f \subseteq (\omega \times \omega) \times A$, com $A = \bigcup \mathcal{A}$ por

$$((m, n), a) \in f \leftrightarrow a = f_m(n)$$

Então f é uma função. De fato, suponhamos que $((m, n), a), ((m, n), b) \in f$, então da definição $a = f_m(n) = b$. Assim, $f : \text{dom } f \rightarrow A$, é uma sobrejeção. Em verdade, dado $a \in A$, existe $i \in I$, tal que $a \in A_i$, como f_i é uma bijeção existe $m \in B_i$, tal que $f_i(m) = a$, consequentemente $f(i, m) = a$. Usando o axioma da escolha podemos construir um conjunto $C \subseteq \omega \times \omega$ tal que $f|_C : C \rightarrow A$ é uma bijeção. Como todo conjunto de $\omega \times \omega$ é no máximo contável decorrerá por maior razão que $A = \bigcup \mathcal{A}$ também o será.

Teorema 19. *Sejam \mathcal{O} um conjunto com pelo menos dois elementos, linearmente (totalmente) ordenado segundo $<$ (uma ordem estrita), e \mathcal{B} uma coleção de elementos da forma:*

- I. $(a, b) = \{x \in \mathcal{O} : a < x < b\}$;
- II. $[l, b) = \{x \in \mathcal{O} : l \leq x < b\}$;
- III. $(a, g] = \{x \in \mathcal{O} : a < x \leq g\}$;

em que $a < b$ e $l = \min \mathcal{O}$ e $g = \max \mathcal{O}$, se houverem. Caso contrário, os respectivos conjuntos II–III não figuram na coleção \mathcal{B} . Então \mathcal{B} é uma base para uma topologia em \mathcal{O} .

Prova. Seja $x \in \mathcal{O}$, temos duas possibilidades $x \in \{l, g\}$, neste caso é evidente que existe um elemento básico contendo x . Caso contrário, devem existir $a, b \in \mathcal{O}$, tais que $a < x < b$, i.e., $x \in (a, b)$. Sejam $B_i \in \mathcal{O}$, $i = 1, 2$ e $x \in B_1 \cap B_2$, tome $a = \max_{i=1,2} a_i$ e $b = \min_{i=1,2} b_i$, em que a_i é o extremante inferior de B_i e b_i o extremante superior de B_i , temos três possibilidades mutualmente excludentes $a, b \notin \{l, g\}$ ou $a = l$ ou $b = g$. No primeiro caso $x \in B = (a, b)$, no segundo $x \in B = [l, b)$ e no terceiro $x \in B = (a, g]$ e em todos os casos $B \subseteq B_1 \cap B_2$ com $x \in B \in \mathcal{B}$. Diante do que foi discorrido, \mathcal{B} é uma base de \mathcal{O} .

Tal topologia em um conjunto totalmente ordenado com pelo menos dois elementos \mathcal{O} , é chamada de **topologia da ordem**, ou simplesmente **topologia ordem**.

Corolário 3. *Seja $R^\# = R \cup \{-\infty, \infty\}$, munido com a ordem $<$ satisfazendo $-\infty < \infty$, $-\infty < a < \infty$ para todo $a \in R$ e tal que $<$ restrita a R é a ordem usual em R é um espaço topológico.*

Prova. Primeiro verifiquemos que a ordem é linear (ou total). Trata-se de um ordem estrita, portanto devemos atestar que vale a não reflexividade, a transitividade e a comparabilidade. Pela construção $a < a$, para todo $a \in R^\#$. Suponhamos que $a < b$ e $b < c$ se $a = -\infty$ ou $c = \infty$ é imediato que $a < c$. Caso contrário $a, c \in R$ e daí segue da transitividade da ordem em R que $a < c$. Pela própria construção $<$ é total. Como consequência $<$ induz a topologia ordem sobre $R^\#$. ■

Não é difícil ver para quaisquer dois elementos $x \neq y$, existem vizinhanças V_x e V_y de x e y , respectivamente, tais que $V_x \cap V_y = \emptyset$, i.e., $R^\#$ tem a propriedade de Hausdorff ou satisfaz o axioma T_1 . Como consequência disto podemos formular o limite de sequências em $R^\#$.

Definição 2. *Sejam X um espaço topológico e $x \in X^\omega$, vamos fazer $x(n) = x_n$ e designar x pela família $\{x_n \in X : n \in \omega\}$, denotaremos-la por $\{x_n\}$. Diremos que $\{x_n\}$ converge para $p \in X$, se e somente se, para toda vizinhança V de p , existe $n_V \in \omega$, tal que se $n \geq n_V$, então $x_n \in V$.*

Teorema 20. *Seja X um espaço topológico Hausdorff. Então, se $\{x_n\}$ converge, então convegirá para um único elemento $p \in X$.*

Prova. Suponha que $\{x_n\}$ converge para $p \in X$, e $q \in X$ com $q \neq p$, existem vizinhanças V_p e V_q , de p e q respectivamente, tais que $V_p \cap V_q = \emptyset$. Evidentemente o conjunto $\{n \in \omega : x_n \notin V_q\}$ é infinito, consequentemente $\{x_n\}$, não converge para q .

Uma outra maneira de verificar isto, é supor que $\{x_n\}$ convirga para p e q , concomitamente. Tomemos V_p e V_q como anteriormente. Da definição, existe $n \in \omega$, tal que $x_n \in V_p \cap V_q = \emptyset$, o que é um absurdo. ■

Definição 3. *Seja X um espaço topológico Hausdorff. Se $\{x_n\}$ converge para $p \in X$, então escreveremos*

$$\lim_n x_n = p.$$

Teorema 21. *Sejam X um espaço topológico qualquer, $E = \{x_n\} \subseteq X$, e $p \in X$ um ponto limite de E , tal que existe um sistema de vizinhanças $\mathcal{S} = \{V_n : n \in \omega\}$ de p , com as seguintes propriedades:*

- I. $\forall n (n \in \omega \longrightarrow V_{n+1} \subset V_n)$;

II. Para toda vizinhança V de p , existe um $n \in \omega$, tal que $V_n \subset V$.

Então existe uma subsequência $\{x_{n_k}\}$ convergindo para p .

Prova. Seja $n_1 = \min\{n \in \omega : x_n \in V_1\}$, suponha que $n_i, i = 1, \dots, k$, estejam construídos seja $n_{k+1} = \min\{n \in \omega : x_n \in V_{k+1} \wedge n > n_k\}$. Desta forma $\{x_{n_k}\}$ converge a p . De fato, seja V uma vizinhança de p , consideremos $K \in \omega$, tal que $V_K \subset V$, é evidente que $x_{n_k} \in V_k \subseteq V_K \subset V$, para todo $k \geq K$. Portanto, $\{x_{n_k}\}$ converge a p . ■

Corolário 4. *Sejam X um espaço topológico Hausdorff, tal que todo ponto admite um sistema de vizinhanças satisfazendo as duas condições do teorema anterior. Se $\{x_n\} \subseteq X$, então o conjunto S dos limites subsequenciais é fechado.*

Prova. Há duas possibilidades S tem ou não tem pontos limites. No primeiro caso S é trivialmente fechado. Se S tem pontos limites, seja p um deles. Seja V_p uma vizinhança de p , da hipótese existe $q \in V_p \cap S$, com $q \neq p$, da hipótese do espaço ser Hausdorff existe uma vizinhança V_q de q tal que $p \notin V_q$, podemos supor sem perda de generalidade que $V_q \subset V_p$, pois basta tomar $V_p \cap V_q$. Necessariamente existe $n \in \omega$ tal que $x_n \in V_q$, pois q é um limite subsequencial de $\{x_n\}$, consequentemente $x_n \in V_p \setminus \{p\}$. Como V_p é uma vizinhança arbitrária de p , decorre que p é um ponto limite de $\{x_n\}$. Do teorema anterior, $p \in S$. Assim, provamos que $\overline{S} \subseteq S$, consequentemente $S = \overline{S}$. ■

Corolário 5. *Seja $\{x_n\} \subseteq R^\#$. Então o conjunto S dos limites subsequenciais de $\{x_n\}$ é um conjunto fechado.*

Prova. Não é difícil ver que para todo ponto de $R^\#$ existe um sistema de vizinhanças com aquela propriedade. ■

Teorema 22. *Sejam $\{x_n\} \subset R^\#$ e S o conjunto dos limites subsequenciais de $\{x_n\}$. Então $S \neq \emptyset$.*

Prova. Consideremos os conjuntos $A = \{n \in \omega : x_n = -\infty\}$, $B = \{n \in \omega : x_n = \infty\}$ e $C = \{n \in \omega : x_n \in R\}$. Um deles é infinito, se A ou B o forem, então é evidente que $-\infty \in S$ ou $\infty \in S$. No caso restante C é limitado ou não, caso C seja limitado, ele está num conjunto compacto, consequentemente uma subsequência convergirá para l . Caso contrário, $-\infty$ ou ∞ são pontos limites de C portanto de $\{x_n\}$. Assim, em qualquer caso $S \neq \emptyset$. ■

Aqui cabe uma digressão. Este teorema pode ser provado diretamente. Primeiro $R^\#$ é compacto, este fato com alguns casos especiais de sequências com imagem finita, garantem que toda sequência de $R^\#$ admite uma subsequência convergente. Portanto sempre $S \neq \emptyset$. Ademais, se considerarmos um espaço topológico compacto Hausdorff, com um sistemas de vizinhanças satisfazendo as condições I-II de um dos teoremas anteriores, podemos inferir que S o conjunto dos limites subsequenciais é sempre não vazio. Precipuamente este resultado se baseia na proposição de que um conjunto infinito em um espaço topológico compacto, sempre admite um ponto limite.

Após escrever as demonstrações dos teoremas eu consultei o GPT e um livro de topologia, a saber, o *Topology* de James R. Munkres, e percebi que um espaço topológico com um sistema de vizinhanças com aquelas propriedades é essencialmente um espaço que satisfaz o **primeiro axioma de contabilidade** também chamado de **primeiro-contável**. Este axioma diz que todo ponto admite um sistema de vizinhanças contável, como consequência, podemos construir um sistema de vizinhanças contável descendente, como no teorema.

Definição 4. Sejam $\{x_n\} \subset R^\#$ e S o conjunto dos limites subsequenciais de $\{x_n\}$. Então definimos

$$\liminf x_n = \inf S \quad e \quad \limsup x_n = \sup S.$$

Teorema 23. Uma sequência $\{x_n\}$ em $R^\#$ é convergente, se e somente se, $\liminf x_n = \limsup x_n$.

Prova. A condição do espaço ser Hausdorff é suficiente para que o conjunto S dos limite subsequenciais degenera a um único ponto caso a sequência convirja. Se $\liminf x_n = \limsup x_n$ então S é necessariamente unitário, logo toda subsequência converge para um único ponto $l \in S$, em particular a própria sequência converge para l . ■

Teorema 24. Se $\emptyset \neq E \subseteq R^\#$, então $\inf E, \sup E \in \overline{E}$.

Prova. Seja $\varsigma = \sup E$, temos duas possibilidades $\varsigma \in E$ ou $\varsigma \notin E$. Se $\varsigma \in E$, então $\varsigma \in \overline{E}$. Se $\varsigma \notin E$, consideremos um elemento básico B contendo ς , existe $a < \varsigma$, pois $E \neq \emptyset$, tal que $\emptyset \neq (a, \varsigma) \cap E \subset B \cap E$. Como B é arbitrário decorre que ς é um ponto limite. Portanto, $\varsigma \in \overline{E}$. Com um argumento simétrico prova-se que $\inf E \in \overline{E}$. ■

Em particular, nas condições dos teoremas anteriores

$$\liminf x_n, \limsup x_n \in S.$$

Teorema 25. Se $\{x_n\} \subset R^\#$, então

$$\liminf x_n = \sup_{n \in \omega} \inf_{k \geq n} x_k \quad e \quad \limsup x_n = \inf_{n \in \omega} \sup_{k \geq n} x_k.$$

Prova. Provemos a primeira igualdade, para tanto façamos $b_n = \inf_{k \geq n} x_k$ e $\iota = \sup_n b_n$, daí segue imediatamente que qualquer limite subsequencial é maior que ou igual a b_n , portanto $b_n \leq \liminf x_n$, para todo $n \in \omega$, consequentemente $\iota \leq \liminf x_n$. Suponhamos por redução ao absurdo que exista $p \in R$, tal que $\iota < p < \liminf x_n$. Seja $n_0 = \min\{n \in \omega : x_n < p\}$ e supondo definidos n_i , com $i \in k + 1$, defina $n_{k+1} = \min\{n \in \omega : x_n < p \wedge n_k < n\}$, observe que estes conjuntos onde tomamos o mínimo são não vazios pois $b_n < p$, para todo $n \in \omega$. Podemos supor sem perda de generalidade que $\{x_{n_k}\}$ converge para algum ponto de $R^\#$, pois em $R^\#$ toda sequência admite uma subsequência convergente. Todavia como $x_{n_k} < p$, para todo $k \in \omega$, decorrerá que $\lim_k x_{n_k} \leq p$, como consequência $\liminf x_n \leq p < \liminf x_n$, o que é um absurdo. A outra igualdade demonstra-se usando um argumento simétrico. ■

Corolário 6. Seja $\{x_n\} \subset R^\#$. Se $\kappa < \liminf x_n$ ($\limsup x_n < \kappa$), então existe $n_\kappa \in \omega$, tal que se $n \geq n_\kappa$, então $x_n > \kappa$ ($x_n < \kappa$).

Prova. Basta saber que $\liminf x_n = \sup_n \inf_{k \geq n} x_k > \kappa$, daí vem que existe um $n_\kappa \in \omega$ tal que $\inf_{k \geq n_\kappa} x_k > \kappa$, como consequência $x_n > \kappa$, para todo $n \geq n_\kappa$. O outro caso pode ser demonstrado com um argumento simétrico. ■

Corolário 7. Se $\{x_n\}, \{y_n\} \subset R^\#$, são tais que existe $m \in \omega$, tal que para todo $n \geq m$, temos $x_n \leq y_n$, então

$$\liminf x_n \leq \liminf y_n \quad e \quad \limsup x_n \leq \limsup y_n.$$

Prova. Suponha que $\liminf y_n < \liminf x_n$ e derive uma contradição com as hipóteses. O mesmo pode ser feito para provar a outra desigualdade. ■

Teorema 26. *Sejam $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ sequências em $R^\#$. Então*

$$\begin{aligned}\liminf a_n + \liminf b_n &\leq \liminf(a_n + b_n) \\ &\leq \limsup(a_n + b_n) \\ &\leq \limsup a_n + \limsup b_n.\end{aligned}$$

Prova. Sejam $\alpha_n = \sup A_n$ com $A_n = \{a_k \in R^\# : k \geq n\}$ e $\beta_n = \sup B_n$ com $\{b_k \in R^\# : k \geq n\}$. Provemos que $\{\alpha_n\}$ e $\{\beta_n\}$ são monótonas decrescentes. Basta provar que uma é, pois a outra segue por um raciocínio análogo. Em verdade, dados $A, B \subseteq R^\#$, toda cota inferior de B também é de A , consequentemente $\inf B \leq \inf A$. Como $\{A_n\}$ é monótona decrescente em $\mathcal{P}(R^\#)$ com a ordem induzida por \subset , decorre que

$$\alpha_{n+1} = \sup A_{n+1} \leq \sup A_n = \alpha_n,$$

para todo $n \in \omega$. Ademais, $\lim_n \alpha_n = \inf\{a_n \in R^\# : n \in \omega\}$, isto se deve ao fato de que há somente dois casos a serem considerados para uma sequência monótona em $R^\#$, ou $\{\alpha_n\}$ admite uma cota inferior em R , ou não. Dependendo do caso $\{a_n\}$ converge para um elemento de R ou para $-\infty$.

Agora note que para todo $n \in \omega$,

$$\alpha_n + \beta_n \leq a_n + b_n,$$

daí vem

$$\begin{aligned}\liminf a_n + \liminf b_n &= \lim_n \alpha_n + \lim_n \beta_n \\ &= \lim_n (\alpha_n + \beta_n) \\ &= \liminf (\alpha_n + \beta_n) \\ &\leq \liminf (a_n + b_n).\end{aligned}$$

Admiti tacitamente o resultado

$$\lim_n \alpha_n + \lim_n \beta_n = \lim_n (\alpha_n + \beta_n),$$

cuja demonstração é corriqueira para sequências monótonas em $R^\#$, considerando a adição estendida de R à $R^\#$ com as definições usuais. A demonstração da outra desigualdade é um argumento simétrico dual. ■

Definição 5. *Seja X um espaço topológico e $A, B \subseteq X$, diremos que A e B são separados (ou formam uma separação) se, e somente se,*

$$\overline{A} \cap B = A \cap \overline{B} = \emptyset.$$

*Diremos que um conjunto $Y \subseteq X$, é **conexo** quando não for o caso que $X = A \cup B$, com $A, B \neq \emptyset$ separados. Uma cisão de um conjunto Y é uma decomposição $Y = A \cup B$, tais que A, B são abertos e disjuntos em Y . Conforme veremos, Y é conexo se, e somente se, a cisão for trivial, isto é, um dos operantes da união é vazio.*

Teorema 27. *Seja X um espaço topológico e $Y \subseteq X$. Então Y é conexo, se e somente se, toda cisão de Y é trivial. Em verdade, uma cisão de Y é uma separação de Y .*

Prova. Suponhamos que $Y = A \cup B$, uma cisão de Y . Observemos que

$$A \cap B \subset \overline{A} \cap B \wedge A \cap B \subset A \cap \overline{B}.$$

Isto nos diz que se $A \cap B \neq \emptyset$, a fortiori,

$$\overline{A} \cap B \neq \emptyset \vee A \cap \overline{B} \neq \emptyset.$$

Dessarte A e B formam uma separação de Y .

Agora suponhamos que $Y = A \cup B$, uma separação de Y , observe que

$$\overline{A} \cap Y = A \wedge \overline{B} \cap Y = B,$$

consequentemente, A e B são fechados em Y , também inferimos que $A \cap B = \emptyset$. Assim $A = Y \setminus B$ e $B = Y \setminus A$, são abertos em Y . Portanto, A e B , formam uma cisão.

Concluindo, a separação implica na cisão, e vice-versa e, conforme vimos, na realidade são a mesma coisa. Concluimos por negação dos membros de uma equivalência o requerido. ■

Teorema 28. *Seja X um espaço topológico munido com a topologia ordem. Então todo conjunto conexo Y com pelos dois pontos, tem a seguinte propriedade*

$$\forall x, z \exists y \left(x, y, z \in Y \wedge (x < z \longrightarrow x < y < z) \right).$$

Prova. É suficiente notar que se existem $x, z \in Y$, tais que $(x, z) \cap Y = \emptyset$, então $Y = A \cup B$, em que $A = \{y \in Y : y \leq x\}$ e $B = \{y \in Y : y \geq z\}$, observe que $A, B \neq \emptyset$, pois $x \in A$ e $z \in B$. Ademais, A e B são ambos fechados e disjuntos em Y , consequentemente, Y é desconexo. A prova decorre por contrapositiva. ■

Corolário 8. *Seja $f : X \rightarrow Y$, contínua⁷ e X conexo, com Y munido da topologia ordem, então f satisfaz a propriedade do valor intermediário. Em outros termos, se $f(x) < f(z)$, então existe $y \in X$ tal que $f(x) < f(y) < f(z)$.*

Prova. Decorre de um fato conhecido, que talvez eu o demonstre posteriormente⁸: *funções contínuas preservam conexos.* ■

Um outro fato interessante é o seguinte, cuja prova pode ser vista no livro do Munkres.

Teorema 29. *Seja $f : X \rightarrow Y$, contínua, X compacto e Y munido da topologia ordem. Então existem a, b , tais que, se $x \in X$, então $f(a) \leq f(x) \leq f(b)$.*

Prova. O caminho para a prova deste teorema é *reductio ad absurdum*. Suponha por absurdo que não existam a e b , com tais propriedades, construamos $\mathcal{C} = \{]f(x), f(y)[\in 2^Y : x, y \in X\}$. Afirmamos que, \mathcal{C} é uma cobertura aberta de $f(X)$. Com efeito, seja $f(z) \in Y$, como não existe um menor elemento em $f(X)$, segue que existe $x \in X$, tal que $f(x) < f(z)$. Analogamente como $f(z)$ não pode ser o maior elemento de $f(X)$, existe $y \in X$ tal que $f(z) < f(y)$. Portanto, $f(X) \subseteq \bigcup \mathcal{C}$, como afirmamos. Da premissa que X é compacto e f contínua, decorre que $f(X)$ é compacto, consequentemente existe uma subcobertura finita de \mathcal{C} , digamos,

⁷Pressupõe-se obviamente uma topologia sobre X .

⁸Em verdade, este resultado é bastante trivial quando se conhece que imagens inversas de intersecções é a intersecção de imagens inversas, e daí, basta supor por redução ao absurdo uma cisão não trivial da imagem e, como conseguinte deduzir uma contradição.

$\mathcal{D} = \{[f(x_i), f(y_i)] \in 2^X : i \in n\}$ com $n \in \omega$. Em virtude, da ordem em Y ser linear existem $i, j \in n$, tais que $f(X) = \bigcup \mathcal{D} = [f(x_i), f(y_j)]$, mas isto acarretaria $f(x_i), f(y_j) \notin f(X)$, o que é uma contradição. Esta contradição foi obtida supondo-se que não existiam a e b com aquelas propriedades. Desta contradição a condicional é necessariamente verdadeira, pois sua negação acarreta num absurdo. ■

EXEMPLO 1 (FUNÇÃO QUE SATISFAZ O TEOREMA DO VALOR INTERMEDIÁRIO, MAS NÃO É CONTÍNUA) Considere $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $f = \iota\chi_{]0,1[} + (1 - \iota)\chi_{\{0,1\}}$ ⁹.

PROVA É suficiente notar que $f([0, 1]) = [0, 1]$. No entanto, f é descontínua em 0 e 1. ■

Este exemplo, apesar de inócuo, nos diz que nem toda função que preserva conexos é contínua, o mesmo pode ser inferido a respeito de compactos e perfeitos.

Definição 6. Seja $f : X \rightarrow Y$, em que X e Y sejam espaços topológicos satisfazendo o axioma T_1 e $a \in X'$, i.e., a é um ponto limite (de acumulação) de X . Diremos que $f(x)$ converge (tende) a $l \in Y$, quando x converge (tende) a a , quando para toda vizinhança V_y de y existir uma vizinhança V_a de a tal que

$$x \in V_a \setminus \{a\} \longrightarrow f(x) \in V_y.$$

Quando dispomos de bases \mathcal{B}_X e \mathcal{B}_Y , das respectivas topologias sobre X e Y , podemos verificar que a definição é equivalente a

$$\forall V \exists U \left((U, V) \in \mathcal{B}_X \times \mathcal{B}_Y \wedge (a, l) \in U \times V \wedge (x \in U \setminus \{a\} \longrightarrow f(x) \in V) \right).$$

Sob estas condições estipulamos a simbologia

$$\lim_a f := l .$$

Esta notação é significativa, pois estamos considerando espaços T_1 . Chamaremos o símbolo $\lim_a f$ de limite de f quando o parâmetro da função tende a a , é comum escrever tal símbolo por $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$, que conforme notado por M. Spivak em seu livro *Calculus*, é mais conveniente do ponto de vista pragmático, por exemplo quando se dá uma lei para f , e.g. $f(x) = e^{-x}/x^n$, escreve-se

$$\lim_{\infty} f = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{-x}}{x^n}.$$

OBSERVAÇÃO 1 (TEOREMA 3.54 P. 77 DO PMA) Foi afirmado que, as somas parciais da soma construída não podem ter limites subsequenciais menores que α e maiores que β . Antes de prosseguirmos, há um fato que deve ser observado, embora quase evidente, quando não mencionado conjectura-se, se as sequências $\{P_n\}$ e $\{Q_n\}$, podem ser construídas. De fato, devem necessariamente existir uma infinidade de termos tanto estritamente positivos como negativos na série $\sum a_n$. Se só existissem uma quantidade finita de termos negativos, ela convergiria absolutamente e a construção não teria significado. Em verdade, conforme se vê no teorema posterior, qualquer reordenação converge para mesma soma. O mesmo fato ocorreria se a série possuísse uma quantidade finita de termos positivos, em virtude de ser convergente, seria absolutamente convergente, recaindo no mesmo caso. Logo, é peremptório que os conjuntos de termos positivos e o de negativos sejam ambos infinitos.

Seja $\{r_n\}$ uma subsequência da sequência das somas parciais $\{s_n\}$ da série construída no teorema. Então, para todo $n \in \omega$, $A_n = \{p \in \omega : y_p \leq r_n \leq x_p\} \neq \emptyset$. Com efeito, o último termo

⁹Aqui, χ é a função característica e ι a identidade.

de r_n é da forma $-Q_k$ ou P_m , isto, é evidente da própria construção da soma, pois seus termos são de tais formas. Evidentemente, como o número de termos de r_n cresce, necessariamente k e m crescem. Observe que $\{k_n\}$ é uma sequência estritamente crescente, o mesmo ocorre com $\{m_n\}$, para facilitar meu argumento, suponha que $m_0 = k_0 = 0$. Suponhamos, que o último termo de r_n seja $-Q_k$, certamente $k \in (k_{i_n-1}, k_{i_n}] \cap \omega$ para algum $i_n \in \omega$, pois

$$\omega \setminus \{0\} = \omega \cap \bigcup_{n \in \omega} (k_n, k_{n+1}],$$

Daí, vem $y_{i_n} \leq r_n \leq x_{i_n}$. Um argumento análogo pode ser aplicado ao caso que o último termo de r_n é da forma P_m . Assim, concluímos que $A_n \neq \emptyset$ para todo $n \in \omega$.

Seguidamente, seja $p_n = \max A_n$, a sequência $\{x_{p_n}\}$, potencialmente possui termos iguais. Ademais, $\{p_n\}$ é monótona não decrescente com imagem infinita, pois os índices dos últimos temos de r_n crescem com n . Dessarte, é evidente que $\lim_n x_{p_n} = \beta$ e $\lim_n y_{p_n} = \alpha$. Em virtude do fato $y_{p_n} \leq r_n \leq x_{p_n}$, para todo $n \in \omega$, decorre que

$$\alpha = \liminf_n y_{p_n} \leq \liminf_n r_n \leq \limsup_n r_n \leq \limsup_n x_{p_n} = \beta.$$

■

EXEMPLO 2 (ITEM (D) DO EXERCÍCIO 11 DO PMA) *Há uma pergunta que me deu bastante trabalho. Supondo que $\{a_n\}$ seja uma sequência de números reais, em $]0, \infty[$, tal que $\sum a_n = \infty$, o que se pode dizer sobre*

$$(1.135) \quad \sum \frac{a_n}{1 + na_n}?$$

Isto é, converge ou diverge?

Não obstante, há uma soma ao lado desta, cuja convergência é trivial pelo critério da comparação, a saber

$$\sum \frac{a_n}{1 + n^2 a_n},$$

bastando para isto comparar com a série

$$\sum \frac{1}{n^2}.$$

Para responder à esta pergunta eu percorri o caminho mais difícil. Primeiro provei o seguinte:

PROPOSIÇÃO 1 *Sejam $\{a_n\}$ uma sequência em $]0, \infty[$ tal que $\sum a_n = \infty$ e $n_0 \in \omega$, tal que*

$$(1.136) \quad \forall n \left(n \geq n_0 \longrightarrow a_n \in]0, 1[\right)$$

ou

$$(1.137) \quad \forall n \left(n \geq n_0 \longrightarrow a_n \in [1, \infty[\right).$$

Então

$$\sum \frac{a_n}{1 + na_n} = \infty.$$

PROVA Suponhemos que valha (1.136) então temos

$$(1.138) \quad \left(\frac{a_n}{1 + a_n} \right)^n = \frac{a_n^n}{(1 + a_n)^n} < \frac{a_n}{1 + na_n},$$

onde segue-se que

$$(1.139) \quad \sqrt[n]{\frac{a_n}{1 + a_n}} < \sqrt[n^2]{\frac{a_n}{1 + na_n}} < \frac{a_n}{1 + na_n}.$$

Todavia, provamos no item (a) que

$$(1.140) \quad \sum \frac{a_n}{1 + a_n} = \infty,$$

consequentemente

$$(1.141) \quad 1 \leq \limsup \sqrt[n]{\frac{a_n}{1 + a_n}}$$

de (1.139) e de (1.141) concluimos que

$$(1.142) \quad 1 \leq \limsup \sqrt[n]{\frac{a_n}{1 + a_n}} \leq \limsup \frac{a_n}{1 + na_n},$$

por conseguinte

$$(1.143) \quad \sum \frac{a_n}{1 + na_n} = \infty,$$

pois é uma soma de termos positivos, se não converge tende a ∞ .

Agora consideremos o segundo caso (1.137), basta notar que

$$(1.144) \quad \frac{1}{1 + n} = \frac{a_n}{a_n + na_n} \leq \frac{a_n}{1 + na_n}$$

para todo $n \geq n_0$. Em conformidade com o critério de comparação, concluímos

$$(1.145) \quad \sum \frac{a_n}{1 + na_n} = \infty.$$

■

Isto me fez atinar que, se queremos que (1.135) converga então $\{a_n\}$ tem infinitos termos, tanto em $]0, 1[$, quanto em $[1, \infty[$. Daí eu fiz meu chute

PROPOSIÇÃO 2 Sejam

$$(1.146) \quad A = \{n : \exists m (m \in \omega \wedge n = 2^m)\}$$

e $\{a_n\}$ definida por

$$(1.147) \quad a_n = \begin{cases} n, & n \in A \\ 2^{-n}, & n \notin A. \end{cases}$$

Então

$$(1.148) \quad \sum a_n = \infty$$

e

$$(1.149) \quad \sum \frac{a_n}{1 + na_n} < \infty.$$

PROVA Observe primeiramente que para todo $n \in \omega$, vale

$$(1.150) \quad \sum_{k=1}^{2^n} a_k \geq 2^n,$$

consequentemente

$$(1.151) \quad \sum a_n = \infty.$$

O próximo passo é averiguar por indução matemática que para todo $n \in \omega$, vale

$$(1.152) \quad \sum_{k=1}^{2^n} \frac{a_k}{1+ka_k} \leq \sum_{k=0}^n 2^{-k} + \sum_{k=1}^{2^n} 2^{-k}.$$

e concluir

$$(1.153) \quad \sum \frac{a_n}{1+na_n} < \infty.$$

Doravante para todo $n \in \omega$ façamos

$$(1.154) \quad b_n = \frac{a_n}{1+na_n}.$$

Primeiro,

$$(1.155) \quad \sum_{k=1}^{2^0} b_k = 1 \leq 1 + \frac{1}{2} = \sum_{k=0}^0 2^{-k} + \sum_{k=1}^{2^0} 2^{-k}.$$

Portanto, a propriedade é válida para $n = 0$. Suponhamos por hipótese que ela seja para n , observemos em seguida

$$\begin{aligned} (1.156) \quad \sum_{k=1}^{2^{n+1}} b_k &= \sum_{k=1}^{2^n} b_k + \sum_{k=2^n+1}^{2^{n+1}} b_k \\ &\leq \left(\sum_{k=0}^n 2^{-k} + \sum_{k=1}^{2^n} 2^{-k} \right) + 2^{-(n+1)} + \sum_{k=2^n+1}^{2^{n+1}} 2^{-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} 2^{-k} + \sum_{k=1}^{2^{n+1}} 2^{-k}. \end{aligned}$$

Concluímos que é válida para $n + 1$. Por indução matemática provamos o requerido. ■

EXEMPLO 3 (EXERCÍCIO 16 DO PMA) Considere $\alpha \in]0, \infty[$ e a sequência $x : \omega \longrightarrow R$ tal que $x_0 > \sqrt{\alpha}$ e

$$(1.157) \quad x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{\alpha}{x_n} \right),$$

para todo $n \in \omega$. Primeiro, observemos que

$$(1.158) \quad \forall y \left(y > \sqrt{\alpha} \longrightarrow \sqrt{\alpha} < \frac{1}{2} \left(y + \frac{\alpha}{y} \right) < y \right).$$

Segue-se de manipulações das duas desigualdades, uma é trivialmente verdadeira,

$$(1.159) \quad (y - \sqrt{\alpha})^2 > 0 \longleftrightarrow \frac{1}{2} \left(y + \frac{\alpha}{y} \right) > \sqrt{\alpha}.$$

Desta forma, a sequência é trivialmente estritamente decrescente. Ademais, ela é limitada inferiormente por 0, como consequência é convergente. Certamente que pela própria definição $x_n \in]0, \infty[$, para todo n . Se $\lim_n x_n = 0$, teríamos

$$\alpha = \lim_n x_n^2 + \alpha = \lim_n (2x_{n+1}x_n) = 0$$

uma contradição com a suposição $\alpha > 0$. Destarte, $l = \lim_n x_n > 0$, daí obtemos

$$l = \lim_n x_{n+1} = \lim_n \frac{x_n^2 + \alpha}{2x_n} = \frac{l^2 + \alpha}{2l}$$

onde segue-se que $l = \sqrt{\alpha}$. ■

DEFINIÇÃO 21 Sejam $\sum a_n$ uma série convergente de termos não negativos, e $A \subset \omega$. Seja κ_A a característica de A . Então definimos

$$(1.160) \quad \Sigma A = \sum_{i=0}^{\infty} \kappa_A(i) a_i.$$

Evidentemente ΣA é finito pois $\sum a_n < \infty$.

LEMA 2 Sejam $\sum a_n$ como na **DEFINIÇÃO 21** e $A, B \in 2^\omega$. Se $A \subset B$, então $\Sigma A \leq \Sigma B$.

PROVA É suficiente notar que para todo $i \in \omega$ vale

$$(1.161) \quad \kappa_A(i) a_i \leq \kappa_B a_i,$$

a desigualdade requerida segue da comparação de séries. ■

TEOREMA 36 (4.31 REMARK: Principles of Mathematical Analysis) Seja $E \subset]a, b[$ enumerável, virtualmente denso. Sejam $\sigma \in E^\omega$ uma bijeção, $\sum a_n$ uma série convergente de termos estritamente positivos e $x \in]a, b[$, definamos

$$(1.162) \quad [x] = \sigma^{-1}(]a, x[)$$

e

$$(1.163) \quad f = \{z : \exists x (x \in]a, b[\wedge z = (x, \Sigma[x]))\}.$$

Então $f \in \mathbb{R}^{]a, b[}$ e tem as seguintes propriedades:

- (a) f é monotonicamente crescente em $]a, b[$;
- (b) f é descontínua em todo ponto de E ; Em verdade,

$$(1.164) \quad f(\sigma_n+) - f(\sigma_n-) = a_n;$$

- (c) f é contínua em $]a, b[\setminus E$.

PROVA Primeiramente, suponha que $a < x < y < b$. Evidentemente $[x] \subset [y]$, por conseguinte, do **LEMÁ 2** $f(x) \leq f(y)$, segue-se, portanto, o item (a).

Seguidamente, provemos que para todo $x \in]a, b[$, tem-se

$$(1.165) \quad f(x) = \sup\{f(t) : t \in]a, x[\} = f(x-).$$

Para tanto seja $\varepsilon > 0$. De $\sum \kappa_{[x]}(i)a_i < \infty$, necessariamente existe $i_\varepsilon \in \omega$, tal que

$$(1.166) \quad 0 \leq \sum_{i=0}^{i_\varepsilon-1+n} \kappa_{[x]}(i)a_i - \sum_{i=0}^{i_\varepsilon-1} \kappa_{[x]}(i)a_i < \varepsilon.$$

para todo $n \in \omega$. Podemos *a fortiori* escolher $t \in]a, x[$, tal que $i_\varepsilon \cap [x] \subset [t]$. Conformemente $f(t) \leq f(x)$ e

$$(1.167) \quad \sum_{i=0}^{i_\varepsilon-1} \kappa_{[x]}(i)a_i \leq \sum_{i=0}^{\infty} \kappa_{[t]}(i)a_i = f(t).$$

Tomando o limite segundo n em (1.166) e comparando com (1.167) obtemos

$$(1.168) \quad 0 \leq f(x) - f(x-) \leq f(x) - f(t) \leq \varepsilon,$$

como $\varepsilon > 0$ é arbitrário inferimos (1.165).

Em seguida observemos que

$$(1.169) \quad I_x \neq \emptyset \text{ se, e somente se, } x \in \Im\sigma.$$

Com efeito, como $I_x \subset \Im\sigma$, se $I_x \neq \emptyset$, existe $n \in \omega$, tal que $\sigma_n \in I_x$. Daí segue que $\sigma_n \in [t]$, para todo $t \in]x, b[$, logo, $\sigma_n \in]x, t[$, para todo $t \in]x, b[$, consequentemente $\sigma_n = x$, i.e., $x \in \Im\sigma$. Reciprocamente, se existir $n \in \omega$ tal que $x = \sigma_n$, é evidente que $\sigma_n = x \in [t]$, para todo $t \in]x, b[$, consequentemente $\sigma_n \in I_x$, i.e., $I_x \neq \emptyset$.

Sejam $x \notin \Im\sigma = E$, $y \in]x, b[$ e $\varepsilon > 0$. Como $\sum \kappa_{[y]}(i)a_i < \infty$, necessariamente existe i_ε , tal que

$$(1.170) \quad \sum_{i=i_\varepsilon}^{\infty} \kappa_{[y]}(i)a_i < \varepsilon.$$

Podemos escolher $t \in]x, y[$, tal que $i_\varepsilon^+ \subset \neg[t]$. De fato, basta tomar $t < \min\{\sigma_i : i \in i_\varepsilon^+\}$. Ademais,

$$(1.171) \quad 0 \leq f(x+) - f(x) \leq f(t) - f(x) \leq \sum_{i=i_\varepsilon}^{\infty} \kappa_{[t]}(i)a_i \leq \sum_{i=i_\varepsilon}^{\infty} \kappa_{[y]}(i)a_i < \varepsilon,$$

como $\varepsilon > 0$ é arbitrário segue-se que $f(x+) = f(x) = f(-x)$, consequentemente f é contínua em x . Em virtude de $x \in]a, b[\setminus E$ ser arbitrário, provamos (c).

Agora sejam $n \in \omega$ e $y \in]\sigma_n, b[$. Analogamente, dado $\varepsilon > 0$, escolhamos $i_\varepsilon > n$, tal que

$$(1.172) \quad \sum_{i=i_\varepsilon}^{\infty} \kappa_{[y]}(i)a_i < \varepsilon.$$

Tomando $t \in]\sigma_n, y[$, tal que $i_\varepsilon^+ \subset \neg[t]$; temos em conformidade,

$$(1.173) \quad 0 \leq f(\sigma_n+) - f(\sigma_n) - a_n \leq f(t) - f(\sigma_n) - a_n \leq \sum_{i=i_\varepsilon}^{\infty} \kappa_{[t]}(i)a_i \leq \sum_{i=i_\varepsilon}^{\infty} \kappa_{[y]}(i)a_i < \varepsilon.$$

Da arbitrariedade de $\varepsilon > 0$, concluímos que

$$(1.174) \quad f(\sigma_n+) - f(\sigma_n) = f(\sigma_n+) - f(\sigma_n-) = a_n,$$

provando portanto o item (b). ■