

SUMÁRIO

| | | |
|----------|--|-----------|
| 1 | Ciências formais | 3 |
| 1.1 | Geometria analítica | 3 |
| 1.2 | Álgebra linear | 6 |
| 1.2.1 | Espaços vetoriais | 6 |
| 2 | Ciências naturais | 8 |
| 2.1 | Equação de carga de um capacitor | 8 |
| 3 | Considerações finais | 10 |
| 4 | A fazer | 11 |

PRELÚDIO

O texto que segue trata-se de um compêndio de assuntos que acho relevantes; portanto, decerto, o texto reflete minha subjetividade. Desta forma, este texto estará em construção contínua, de maneira que não haverá versão final enquanto as circunstâncias da vida sobrepujarem o meu ímpeto de coleccionar tais informações. Alguns resultados são de minha autoria, mas certamente estão enviesados por alguma obra, de maneira que não descobri a roda, mas me sustentei sobre o trabalho de vários indivíduos perspicazes que pela primeira vez se depararam com tais problemas. Além disso, é impossível coleccionar tudo o que nos interessa; portanto, me ative aos que, ao menos, tive alguma ideia de demonstração.

1

CIÊNCIAS FORMAIS

1.1 GEOMETRIA ANALÍTICA

No que segue vamos tentar construir o conceito de vetor. A princípio era tratar axiomáticamente esta construção, mas tenho uma certa convicção que esta tarefa foge as minhas capacidades.

Primeiro vamos considerar um conjunto E chamado espaço, este espaço possui certos objetos indefinidos, como pontos denotados por letras maiúsculas do alfabeto latino A, \dots, Z ; retas denotadas por letras minúsculas do alfabeto latino a, \dots, z ; e planos denotados por letras do alfabeto grego α, \dots, ω .

Existem várias formas de se alcançar a geometria euclidiana, i.e., podemos partir de diferentes axiomas e intuitivamente alcançar o espaço euclidiano, i.e., construí-lo axiomáticamente.

Doravante explicitaremos os axiomas necessários e algumas definições auxiliares, ao progredirmos.

Axioma 1. *Dois pontos distintos A e B , determinam uma, e somente uma, reta. Tal reta será denotada por AB .*

Axioma 2. *Admitiremos uma noção primitiva, a noção de ‘estar entre’. Dados três pontos numa reta, somente um deles está entre os outros dois.*

Definição 1. *Ao conjunto de pontos entre dois pontos distintos A e B de uma reta r denotaremos por $]A, B[$. Também definiremos*

$$\begin{aligned}[A, B] &=]A, B[\cup \{A, B\}; \\ [A, B[&=]A, B[\cup \{A\}; \\]A, B] &=]A, B[\cup \{B\}.\end{aligned}$$

A qualquer um destes conjuntos chamaremos de seguimento. A e B são chamados extremos ou extremantes. Segundo esta definição $[A, B] = [B, A]$. Diremos que um seguimento com extremos A e B é nulo se, e somente se, $A = B$.

Definição 2. *Sejam A e B , dois pontos distintos definimos a semirreta com origem em A determinada por B , como sendo o conjunto*

$$s_{(A,B)} = \left\{ P \in AB : P \in [A, B] \vee B \in [A, P] \right\}$$

Definição 3. *Seja α um plano e $r, s \subset \alpha$ retas quaisquer, diremos que r e s são paralelas se, $r = s$ ou $r \cap s = \emptyset$.*

Axioma 3. *Seja r uma reta e $P \notin r$, existe uma única reta s paralela a r passando por P , i.e., $P \in s$. O plano fica dividido em dois conjuntos disjuntos. Defina no plano α a seguinte relação entre pontos $A \sim B$, se e somente se, $[A, B] \cap r = \emptyset$.*

Axioma 4. *Existe uma função $\mu : E \rightarrow R_+$, satisfazendo as seguintes propriedades:*

I. $\mu(S) = 0$ se, e somente se S é um seguimento nulo;

II. *Seja $\mathcal{F} = \{S_i \in \mathcal{P}(E) : i \in n+1\}$ uma família de seguimentos disjuntos aos pares. Então*

$$\mu\left(\bigcup_{i \in n+1} S_i\right) = \sum_{i=0}^n \mu(S_i);$$

III. *Para toda semirreta $s_{(A,B)}$ e todo $c \in R_+$, existe $C \in s_{(A,B)}$, tal que $\mu([A, C]) = c$.*

Definição 4. *Sejam α um plano e $r \subset \alpha$ uma reta*

Definição 5. *Sejam A e B dois pontos distintos definimos por seguimento orientado como sendo o par ordenado (A, B) . Diremos que o seguimento é nulo se, e somente se, $A = B$.*

Não confundir seguimento orientado que é um par ordenado (A, B) , com o seguimentos definidos anteriormente.

Definição 6. *Sejam (A, B) e (C, D) dois seguimentos não nulos.*

Seguimentos equipolentes. Na geometria analítica existe um conceito chamado **vetor**, cuja definição baseia-se na equipolência, uma relação de equivalência definida no conjunto dos seguimentos orientados. Seguiremos aqui a notação de P. Boulos e I. de Camargo dada no livro *Geometria Analítica um Tratamento Vetorial*. Seja E o espaço euclidiano, um seguimento orientado é um par de pontos de E , ou em outros termos, os seguimentos orientados são elementos de $E \times E$. Sobre $E \times E$ definimos a seguinte relação de equivalência $(A, B) \sim (C, D)$ se, e somente se

$$(\mathcal{E}) \quad ((A = C \longleftrightarrow B = D) \vee AC \parallel BD) \wedge ((A = B \longleftrightarrow C = D) \vee AB \parallel CD)$$

Aqui por conveniência AB denota a reta determinada por A e B , quando $A \neq B$ e, $AA = \{A\}$. Definimos a relação

$$AB \parallel CD \longleftrightarrow AB = CD \vee AB \cap CD = \emptyset,$$

assim a expressão (\mathcal{E}) é significativa. Nestas condições seguimentos nulos, isto é da forma (A, A) , são equivalentes somente a seguimentos nulos.

Doravante denotaremos tal relação de equivalência por **equipolência**. Assim, se dois seguimentos são equivalentes, são chamados por este motivo de **equipolentes**.

Teorema 1. *Seja (A, B) um seguimento não nulo, i.e., $A \neq B$, e $P \in E$, então existe um seguimento orientado $(P, P_{(A,B)}) \sim (A, B)$, i.e., um seguimento equipolente a (A, B) com origem em P .*

Prova. Primeiro suponhamos que $P \notin AB$, pelo axioma das paralelas na geometria euclidiana existe uma reta r paralela a AB passando por P . Note que $B \notin AP$, pois caso contrário $P \in AP = AB$, o que contradiz nossa hipótese inicial. Pelo mesmo axioma existe uma reta s paralela a AP passando por B . Afirimo que $s \cap r \neq \emptyset$, suponhamos por redução ao absurdo o contrário. Necessariamente $s \parallel r$, consequentemente $s \parallel AB$, como $B \in s \cap AB$, decorre que

$s = AB$, todavia $A \notin s$, pois s é uma reta paralela a AP , contendo $B \notin AP$. Esta contradição nos leva a concluir que existe $P_{(A,B)} \in r \cap s$. Seguidamente observemos que $AB \parallel r = PP_{(A,B)}$ e $AP \parallel s = BP_{(A,B)}$, consequentemente $(A, B) \sim (P, P_{(A,B)})$. Suponhamos agora que $P \in AB$, existe $(Q, Q_{(A,B)}) \sim (A, B)$, tal que $Q \notin AB$ assim $A \notin QQ_{(A,B)}$, pelo mesmo modo existe $(P, P_{(Q,Q_{(A,B)})}) \sim (Q, Q_{(A,B)})$, por transitividade $(P, P_{(Q,Q_{(A,B)})}) \sim (A, B)$. ■

Este teorema nos mostra que se (A, B) é não nulo e $(A, B) \sim (C, D)$ e $C \notin AB$, então $ABDC$ é um paralelogramo. Da geometria euclidiana tem-se uma noção básica de comprimento (medida), sabe-se que num paralelogramo lados paralelos têm o mesmo comprimento. Como consequência seguimentos equipolentes têm o mesmo comprimento.

Definição 7. *Sejam (A, B) e (C, D) seguimentos não nulos, diremos que eles possuem o mesmo sentido se $AB \parallel CD$ e existem $(E, F) \sim (A, B)$ $(G, H) \sim (C, D)$, tais que $EF \cap GH = \emptyset$ e $\overline{EG} \cap \overline{FH} = \emptyset$.*

Teorema 2. *Seguimentos equipolentes não nulos têm o mesmo sentido.*

Prova. Podemos sem perdas de generalidade supor que $(A, B) \sim (C, D)$, sejam tais que $AB \cap CD = \emptyset$. Necessariamente $AB \parallel CD$ e $AC \parallel BD$, como $B \notin AC$, decorre que $\overline{AC} \cap \overline{BD} = \emptyset$.

Corolário 1. *Seguimentos orientados são nulos ou têm o mesmo sentido e mesmo comprimento.*

Prova. Imediata à discussão anterior. ■

Note que a definição de equipolência (\mathcal{E}) implica o corolário anterior, mas a priori não é sabido se dois seguimentos não nulos que têm o mesmo sentido e comprimento são equipolentes. Para o que vamos fazer não é necessário provar a recíproca. A definição da relação de equipolência evita fazer comentários prévios sobre comprimentos, e também nos poupa de tratar os casos em que seguimentos são nulos ou não.

Definição 8. *Um vetor é o conjunto*

$$\overrightarrow{AB} = \{(C, D) \in E \times E : (C, D) \sim (A, B)\}$$

em outros termos, um vetor é uma classe de equivalência da relação de equipolência (\mathcal{E}).

Quando não se quiser fazer referência a um representante da classe, escolheremos uma letra do alfabeto latino comumente u, v, w, x, y, z e encimamos-la por uma flecha, e.g., \vec{x} .

Os vetores herdam as propriedades dos seguimentos orientados e não orientados dados por de seus representantes, neste caso, paralelismo, sentido e comprimento. Denotaremos o comprimento de um vetor \vec{x} , por $\|\vec{x}\|$ e a este número daremos o nome de norma. Observe que a noção de comprimento faz sentido para seguimentos nulos, neste caso trivialmente se \vec{x} possui representante nulo, então $\|\vec{x}\| = 0$. Ademais, nestas condições escreveremos $\vec{0}$ para denotar a classe de equivalência dos seguimentos orientados nulos. O conjunto das classes de equivalência será denotada por \mathcal{V} .

A seguir muniremos o conjunto \mathcal{V} de uma estrutura algébrica, a saber a adição $+$.

Definição 9. *Dados dois vetores \overrightarrow{AB} e \overrightarrow{CD} , definiremos o símbolo $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$ como sendo o vetor $\overrightarrow{AB_{(C,D)}}$, em outros termos a adição trata-se de construir um triângulo (possivelmente degenerado) com vértices A, B e $B_{(C,D)}$, em que $(B, B_{(C,D)}) \sim (C, D)$, e considerar o vetor (a classe) cujo representante seja o seguimento orientado $(A, B_{(C,D)})$.*

† Mostrar que a definição indepente do representante!

Teorema 3. *Sejam \overrightarrow{AB} e \overrightarrow{CD} dois vetores quaisquer. Então $(A, B_{(C,D)}) \sim (C, D_{(A,B)})$.*

1.2 ÁLGEBRA LINEAR

1.2.1 ESPAÇOS VETORIAIS

A seguir apresentarei alguns exercícios pertinentes de [Hoffman].

PROPOSIÇÃO 1 *Sejam V um espaço vetorial e $W_i \subset V$, com $i \in \{1, 2\}$, subespaços vetoriais tais que $W = W_1 \cup W_2$ é um subespaço de V . Então, existe um $i \in \{1, 2\}$, tal que $W_i \subset W_j$, com $i \neq j$.*

PROVA Suponhamos por *reductio ad absurdum* que

$$(1.1) \quad W_1 \setminus W_2 \neq \emptyset \wedge W_2 \setminus W_1 \neq \emptyset$$

Sejam $w_1 \in W_1 \setminus W_2$ e $w_2 \in W_2 \setminus W_1$, das hipóteses $w = w_1 + w_2 \in W$. Todavia, $w \notin W_1$ e $w \notin W_2$. Pois, digamos que $w \in W_1$, então $w_2 = w - w_1 \in W_1$, o que é uma contradição pois $w_2 \in W_2 \setminus W_1$. Agora se $w \in W_2$, então analogamente $w_1 = w - w_2 \in W_2$, outra contradição, pois $w_1 \in W_1 \setminus W_2$. Concluimos, portanto, que existe $i \in \{1, 2\}$, tal que $W_i \subset W_j$, com $i \neq j$. ■

PROPOSIÇÃO 2 *Seja K um corpo, W um espaço vetorial sobre K . Considere $V = W^K$, munido com a soma e produto por escalar usuais. Então*

$$(1.2) \quad V_i = \{f : f \in V \wedge f(-x) = -f(x)\}$$

e

$$(1.3) \quad V_p = \{f : f \in V \wedge f(-x) = f(x)\}$$

são subespaços de V , tais que

$$(1.4) \quad V_i \cap V_p = \{0\} \wedge V = V_i + V_p.$$

PROVA Primeiro é evidente que $0 \in V_i$. Sejam agora $f, g \in V_i$ e $\kappa \in K$, temos que para todo $x \in K$, vale

$$(1.5) \quad \begin{aligned} (\kappa f + g)(-x) &= \kappa f(-x) + g(-x) \\ &= -\kappa f(x) - g(x) \\ &= -(\kappa f(x) + g(x)) \\ &= -(\kappa f + g)(x), \end{aligned}$$

consequentemente V_i é um subespaço de V . O outro caso é ainda mais simples de ser provado, o argumento é inteiramente semelhante.

Seja agora $f \in V_i \cap V_p$, temos para todo $x \in K$

$$(1.6) \quad f(x) = f(-x) = -f(x),$$

logo $f = 0$ e, consequentemente $V_i \cap V_p = \{0\}$.

Por fim, seja $f \in V$. Note que $f_i, f_p \in V$ dadas por

$$(1.7) \quad f_i(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2} \quad \wedge \quad f_p(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}$$

são tais que, para todo $x \in K$ vale

$$(1.8) \quad f_i(-x) = \frac{f(-x) - f(x)}{2} = -\frac{f(x) - f(-x)}{2} = -f_i(x),$$

e.

$$(1.9) \quad f_p(-x) = \frac{f(-x) + f(x)}{2} = \frac{f(x) + f(-x)}{2} = f_p(x),$$

i.e., $(f_i, f_p) \in V_i \times V_p$. Ademais, $f = f_i + f_p$, consequentemente $V = V_i + V_p$. ■

PROPOSIÇÃO 3 *Sejam $V_i \subset V$, com $i \in \{1, 2\}$, subespaços do espaço vetorial V , tais que*

$$(1.10) \quad V = V_1 + V_2 \quad \wedge \quad V_1 \cap V_2 = \{0\}.$$

Então para todo $v \in V$ existe único $(v_1, v_2) \in V_1 \times V_2$, tais que $v = v_1 + v_2$.

PROVA A existência decorre da definição, provemos, portanto, a unicidade. Para tanto, sejam $v \in V$ e $v_i, w_i \in V_i$, com $i \in \{1, 2\}$, tais que

$$(1.11) \quad v = v_1 + v_2 = w_1 + w_2,$$

temos que

$$(1.12) \quad v_1 - w_1 = w_2 - v_2 \in V_1 \cap V_2 = \{0\}.$$

Decorre que

$$(1.13) \quad v_1 - w_1 = 0 = v_2 - w_2,$$

o que por sua vez acarreta $v_i = w_i$, com $i \in \{1, 2\}$. ■

2

CIÊNCIAS NATURAIS

2.1 EQUAÇÃO DE CARGA DE UM CAPACITOR

Teorema 4. *Seja um capacitor de capacitância C conectado em série com um resistor de resistência R e à uma bateria de tensão V_f . Admitindo-se que o capacitor esteja inicialmente descarregado a equação de carga do capacitor é dada por:*

$$V(t) = V_f(1 - e^{-\frac{t}{RC}}).$$

Prova. A corrente no capacitor $I(t)$ é a mesma que a corrente no resistor, conseqüentemente

$$(\ddagger) \quad \frac{V_f - V(t)}{R} = I(t) = \frac{dQ}{dt}(t) = C \frac{dV}{dt}(t)$$

em que $V(t)$ é a tensão no capacitor no instante t . Temos portanto de (\ddagger) que

$$\frac{1}{RC} = \frac{dV}{dt}(t) \frac{1}{V_f - V(t)} = -\frac{d}{dt}(V_f - V(t)) \frac{1}{V_f - V(t)}$$

em consequência do lema que vimos e multiplicando ambos membros por -1 , decorre que

$$-\frac{1}{RC} = \frac{d}{dt}(V_f - V(t)) \frac{1}{V_f - V(t)} = \frac{d}{dt}(\ln|V_f - V(t)|)$$

do teorema fundamental do cálculo vem

$$-\frac{T}{RC} = \int_0^T \frac{d}{dt}(\ln|V_f - V(t)|) dt = \ln|V_f - V(t)| \Big|_0^T$$

para $T \geq 0$.

Agora admitindo-se que $V(0) = 0$, e que $V_f - V(t) > 0$ para todo $t \in R_+$ obtemos

$$-\frac{T}{RC} = \ln(V_f - V(t)) \Big|_0^T = \ln \frac{V_f - V(T)}{V_f}$$

donde se conclui

$$\frac{V_f - V(T)}{V_f} = e^{-\frac{T}{RC}}$$

que por sua vez implica

$$V(T) = V_f(1 - e^{-\frac{T}{RC}})$$

como T é arbitrário podemos escrever sem perdas

$$V(t) = V_f(1 - e^{-\frac{t}{RC}})$$

para todo $t \geq 0$. ■

Como tratar adequadamente conversões entre grandezas, e.g., grandezas angulares? *Como explicar rigorosamente a igualdade que se encontra rotineiramente em livros:*

$$2\pi \text{ rad} = 360^\circ ?$$

Rigorosamente, os dois objetos são distintos, de maneira que a identidade não é significativa.

3

A FAZER

- I.** Geometria euclidiana;
- II.** Geometria analítica;
- III.** Álgebra Linear;
- IV.** Anel dos inteiros;
- V.** MMC e MDC;
- VI.** Anel dos polinômios;
- VII.** Anel das matrizes;
- VIII.** Espaços vetoriais;
- IX.** Módulos;
- X.** Regra de três simples e composta;
- XI.** Inconsistência de modelos LLM;
- XII.** Diferenciabilidade de funções reais inversas de variáveis reais;
- XIII.** Mudança de variáveis em integrais;
- XIV.** Definição de primitivas ou integrais indefinidas.