Teorema 1 (67 Theorem) $\mathrm{dom}(\mathcal{U}) = \mathcal{U}$ *e* $\mathrm{img}(\mathcal{U}) = \mathcal{U}$ *.*

Prova Note que para todo $x \in \mathcal{U}$, temos que $(x, x) \in \mathcal{U}$. ∎

Definição 2 (68 Definition) $f(x) = \bigcap\{y : (x, y) \in f\}$.

A classe $f(x)$ é o *valor* de f em x ou a *imagem* de x sob f. É importante ser observado que x pode ser entendido como elemento do $\mathrm{dom}(f)$, e como classe. Vale deixar explícito que $f(x)$ é sempre interpretado na primeira acepção e não na segunda, ou seja

$$f(x) \neq \big\{y : \exists z(z \in x \,\wedge\, (z, y) \in f)\big\}.$$

Teorema 3 (69 Theorem) *Se* $x \notin \mathrm{dom}(f)$*, então* $f(x) = \mathcal{U}$*; se* $x \in \mathrm{dom}(f)$*, então* $f(x) \in \mathcal{U}$*.*

Prova Se $x \notin \mathrm{dom}(f)$, então $y : (x, y) \in f = \emptyset$, consequentemente

$$f(x) = \bigcap\{y : (x, y) \in f\} = \bigcap \emptyset = \mathcal{U}.$$

Agora se $x \in \mathrm{dom}(f)$, então $\{y : (x, y) \in f\} \neq \emptyset$, pelo **35 Theorem** concluímos que

$$f(x) = \bigcap\{y : (x, y) \in f\} \in \mathcal{U}.$$

∎

Teorema 4 (70 Theorem) *Se f é uma função, então* $f = \{(x, y) : y = f(x)\}$

Prova Se f é uma função então para todo $x \in \mathrm{dom}(f)$, existe um y tal que $(x, y) \in f$. Não obstante, $(x, z) \in f$ se, e somente se, $z = y$. Consequentemente,

$$\{z : (x, z) \in f\} = \{z : z = y\} = \{y\}$$

daí

$$f(x) = \bigcap\{z : (x, z) \in f\} = \bigcap\{y\} = y.$$

Assim, para todo $x \in \mathrm{dom}(f)$, vale $(x, f(x)) \in f$, particularmente

$$f = \{(x, y) : y = f(x)\}.$$

∎