

**DEFINIÇÃO 1** Sejam  $\sum a_n$  uma série convergente de termos estritamente positivos, e  $A \subset \omega$ . Seja  $\kappa_A$  a característica de  $A$ . Então definimos

$$(1) \quad \Sigma A = \sum_{i=0}^{\infty} \kappa_A(i)a_i.$$

Evidentemente  $\Sigma A$  é finito pois  $\sum a_n < \infty$ .

**LEMA 1** Sejam  $\sum a_n$  como na **DEFINIÇÃO 1** e  $A, B \in 2^\omega$ . Se  $A \subset B$ , então  $\Sigma A \leq \Sigma B$ .

**PROVA** É suficiente notar que para todo  $i \in \omega$  vale

$$(2) \quad \kappa_A(i)a_i \leq \kappa_B a_i,$$

a desigualdade requerida segue da comparação de séries. ■

**TEOREMA 1 (4.31 REMARK: Principles of Mathematical Analysis)** Seja  $E \subset ]a, b[$  enumerável, virtualmente denso. Sejam  $\sigma \in E^\omega$  uma bijeção,  $\sum a_n$  uma série convergente de termos estritamente positivos e  $x \in ]a, b[$ , definamos

$$(3) \quad [x] = \sigma^{-1}(]a, x[)$$

e

$$(4) \quad f = \{z : \exists x (x \in ]a, b[ \wedge z = (x, \Sigma[x]))\}.$$

Então  $f \in \mathbb{R}^{]a, b[}$  e tem as seguintes propriedades:

- (a)  $f$  é monotonicamente crescente em  $]a, b[$ ;
- (b)  $f$  é descontínua em todo ponto de  $E$ ; Em verdade,

$$(5) \quad f(\sigma_n+) - f(\sigma_n-) = a_n;$$

- (c)  $f$  é contínua em  $]a, b[ \setminus E$ .

**PROVA** Primeiramente, suponha que  $a < x < y < b$ . Evidentemente  $[x] \subset [y]$ , por conseguinte do **LEMA 1**  $f(x) \leq f(y)$ , segue-se, portanto, (a).

Seguidamente, provemos que para todo  $x \in ]a, b[$

$$(6) \quad f(x) = \sup\{f(t) : t \in ]a, x[\} = f(x-).$$

Para tanto seja  $\varepsilon > 0$ . De  $\sum \kappa_{[x]}(i)a_i < \infty$ , necessariamente existe  $i_\varepsilon \in \omega$ , tal que

$$(7) \quad 0 \leq \sum_{i=0}^{i_\varepsilon-1+n} \kappa_{[x]}(i)a_i - \sum_{i=0}^{i_\varepsilon-1} \kappa_{[x]}(i)a_i < \varepsilon.$$

para todo  $n \in \omega$ . Podemos a fortiori escolher  $t \in ]a, x[$ , tal que  $i_\varepsilon \cap [x] \subset [t]$ . Conformemente  $f(t) \leq f(x)$  e

$$(8) \quad \sum_{i=0}^{i_\varepsilon-1} \kappa_{[x]}(i)a_i \leq \sum_{i=0}^{\infty} \kappa_{[t]}(i)a_i = f(t).$$

Tomando o limite segundo  $n$  em (7) e comparando com (8) obtemos

$$(9) \quad 0 \leq f(x) - f(x-) \leq f(x) - f(t) \leq \varepsilon,$$

como  $\varepsilon > 0$  é arbitrário inferimos (6).

Em seguida observemos que

$$(10) \quad I_x \neq \emptyset \text{ se, e somente se, } x \in \Im\sigma.$$

Com efeito, como  $I_x \subset \Im\sigma$ , se  $I_x \neq \emptyset$ , existe  $n \in \omega$ , tal que  $\sigma_n \in I_x$ . Daí segue que  $\sigma_n \in [t]$ , para todo  $t \in ]x, b[$ , logo,  $\sigma_n \in ]x, t[$ , para todo  $t \in ]x, b[$ , consequentemente  $\sigma_n = x$ , i.e.,  $x \in \Im\sigma$ . Reciprocamente, se existir  $n \in \omega$  tal que  $x = \sigma_n$ , é evidente que  $\sigma_n = x \in [t]$ , para todo  $t \in ]x, b[$ , consequentemente  $\sigma_n \in I_x$ , i.e.,  $I_x \neq \emptyset$ .

Sejam  $x \notin \Im\sigma = E$ ,  $y \in ]x, b[$  e  $\varepsilon > 0$ . Como  $\sum \kappa_{[y]}(i)a_i < \infty$ , necessariamente existe  $i_\varepsilon$ , tal que

$$(11) \quad \sum_{i=i_\varepsilon}^{\infty} \kappa_{[y]}(i)a_i < \varepsilon.$$

Podemos escolher  $t \in ]x, y[$ , tal que  $i_\varepsilon^+ \subset \neg[t]$ . De fato, basta tomar  $t < \min\{\sigma_i : i \in i_\varepsilon^+\}$ . Ademais,

$$(12) \quad 0 \leq f(x+) - f(x) \leq f(t) - f(x) \leq \sum_{i=i_\varepsilon}^{\infty} \kappa_{[t]}(i)a_i \leq \sum_{i=i_\varepsilon}^{\infty} \kappa_{[y]}(i)a_i < \varepsilon,$$

como  $\varepsilon > 0$  é arbitrário segue-se que  $f(x+) = f(x) = f(-x)$ , consequentemente  $f$  é contínua em  $x$ . Em virtude de  $x \in ]a, b[ \setminus E$  ser arbitrário, provamos (c).

Agora sejam  $n \in \omega$  e  $y \in ]\sigma_n, b[$ . Analogamente, dado  $\varepsilon > 0$ , escolhamos  $i_\varepsilon > n$ , tal que

$$(13) \quad \sum_{i=i_\varepsilon}^{\infty} \kappa_{[y]}(i)a_i < \varepsilon.$$

Tomando  $t \in ]\sigma_n, y[$ , tal que  $i_\varepsilon^+ \subset \neg[t]$ ; temos em conformidade,

$$(14) \quad 0 \leq f(\sigma_n+) - f(\sigma_n) - a_n \leq f(t) - f(\sigma_n) - a_n \leq \sum_{i=i_\varepsilon}^{\infty} \kappa_{[t]}(i)a_i \leq \sum_{i=i_\varepsilon}^{\infty} \kappa_{[y]}(i)a_i < \varepsilon.$$

Da arbitrariedade de  $\varepsilon > 0$ , concluímos que

$$(15) \quad f(\sigma_n+) - f(\sigma_n) = f(\sigma_n+) - f(\sigma_n-) = a_n,$$

provando portanto o item (b). ■