

## S U M Á R I O

<b>1</b>	<b>Ciências formais</b>	<b>3</b>
1.1	Geometria analítica . . . . .	3
1.2	Álgebra linear . . . . .	6
1.2.1	Espaços vetoriais . . . . .	6
<b>2</b>	<b>Ciências naturais</b>	<b>8</b>
2.1	Equação de carga de um capacitor . . . . .	8
<b>3</b>	<b>Considerações finais</b>	<b>10</b>
<b>4</b>	<b>A fazer</b>	<b>11</b>

## PRÉLUDIO

O texto que segue trata-se de um compêndio de assuntos que acho relevantes; portanto, decerto, o texto reflete minha subjetividade. Desta forma, este texto estará em construção contínua, de maneira que não haverá versão final enquanto as circunstâncias da vida sobrepujarem o meu ímpeto de colecionar tais informações. Alguns resultados são de minha autoria, mas certamente estão enviesados por alguma obra, de maneira que não descobri a roda, mas me sustentei sobre o trabalho de vários indivíduos perspicazes que pela primeira vez se depararam com tais problemas. Além disso, é impossível colecionar tudo o que nos interessa; portanto, me ative aos que, ao menos, tive alguma ideia de demonstração.

# 1

## CIÊNCIAS FORMAIS

### 1.1 GEOMETRIA ANALÍTICA

No que segue vamos tentar construir o conceito de vetor. A princípio era tratar axiomaticamente esta construção, mas tenho uma certa convicção que esta tarefa foge as minhas capacidades.

Primeiro vamos considerar um conjunto  $E$  chamado espaço, este espaço possui certos objetos indefinidos, como pontos denotados por letras maiúsculas do alfabeto latino  $A, \dots, Z$ ; retas denotadas por letras minúsculas do alfabeto latino  $a, \dots, z$ ; e planos denotados por letras do alfabeto grego  $\alpha, \dots, \omega$ .

Existem várias formas de se alcançar a geometria euclidiana, i.e., podemos partir de diferentes axiomas e intuitivamente alcançar o espaço euclidiano, i.e., construí-lo axiomaticamente.

Doravante explicitaremos os axiomas necessários e algumas definições auxiliares, ao progredirmos.

**Axioma 1.** *Dois pontos distintos  $A$  e  $B$ , determinam uma, e somente uma, reta. Tal reta será denotada por  $AB$ .*

**Axioma 2.** *Admitiremos uma noção primitiva, a noção de ‘estar entre’. Dados três pontos numa reta, somente um deles está entre os outros dois.*

**Definição 1.** *Ao conjunto de pontos entre dois pontos distintos  $A$  e  $B$  de uma reta  $r$  denotaremos por  $]A, B[$ . Também definiremos*

$$\begin{aligned} [A, B] &= ]A, B[ \cup \{A, B\}; \\ ]A, B[ &= ]A, B[ \cup \{A\}; \\ ]A, B] &= ]A, B[ \cup \{B\}. \end{aligned}$$

*A qualquer um destes conjuntos chamaremos de seguimento.  $A$  e  $B$  são chamados extremos ou extremantes. Segundo esta definição  $[A, B] = [B, A]$ . Diremos que um seguimento com extremos  $A$  e  $B$  é nulo se, e somente se,  $A = B$ .*

**Definição 2.** *Sejam  $A$  e  $B$ , dois pontos distintos definimos a semirreta com origem em  $A$  determinada por  $B$ , como sendo o conjunto*

$$s_{(A,B)} = \left\{ P \in AB : P \in [A, B] \vee B \in [A, P] \right\}$$

**Definição 3.** *Seja  $\alpha$  um plano e  $r, s \subset \alpha$  retas quaisquer, diremos que  $r$  e  $s$  são paralelas se,  $r = s$  ou  $r \cap s = \emptyset$ .*

**Axioma 3.** Seja  $r$  uma reta e  $P \notin r$ , existe uma única reta  $s$  paralela a  $r$  passando por  $P$ , i.e.,  $P \in s$ . O plano fica dividido em dois conjuntos disjuntos. Defina no plano  $\alpha$  a seguinte relação entre pontos  $A \sim B$ , se e somente se,  $[A, B] \cap r = \emptyset$ .

**Axioma 4.** Existe uma função  $\mu : E \rightarrow R_+$ , satisfazendo as seguintes propriedades:

I.  $\mu(S) = 0$  se, e somente se  $S$  é um seguimento nulo;

II. Seja  $\mathcal{F} = \{S_i \in \mathcal{P}(E) : i \in n+1\}$  uma família de seguimentos disjuntos aos pares. Então

$$\mu\left(\bigcup_{i \in n+1} S_i\right) = \sum_{i=0}^n \mu(S_i);$$

III. Para toda semirreta  $s_{(A,B)}$  e todo  $c \in R_+$ , existe  $C \in s_{(A,B)}$ , tal que  $\mu([A, C]) = c$ .

**Definição 4.** Sejam  $\alpha$  um plano e  $r \subset \alpha$  uma reta

**Definição 5.** Sejam  $A$  e  $B$  dois pontos distintos definimos por seguimento orientado como sendo o par ordenado  $(A, B)$ . Diremos que o seguimento é nulo se, e somente se,  $A = B$ .

Não confundir seguimento orientado que é um par ordenado  $(A, B)$ , com os seguimentos definidos anteriormente.

**Definição 6.** Sejam  $(A, B)$  e  $(C, D)$  dois seguimentos não nulos.

**Seguimentos equipolentes.** Na geometria analítica existe um conceito chamado **vetor**, cuja definição baseia-se na equipolência, uma relação de equivalência definida no conjunto dos seguimentos orientados. Seguiremos aqui a notação de P. Boulos e I. de Camargo dada no livro *Geometria Analítica um Tratamento Vetorial*. Seja  $E$  o espaço euclidiano, um seguimento orientado é um par de pontos de  $E$ , ou em outros termos, os seguimentos orientados são elementos de  $E \times E$ . Sobre  $E \times E$  definimos a seguinte relação de equivalência  $(A, B) \sim (C, D)$  se, e somente se

$$(\mathcal{E}) \quad ((A = C \longleftrightarrow B = D) \vee AC // BD) \wedge ((A = B \longleftrightarrow C = D) \vee AB // CD)$$

Aqui por conveniência  $AB$  denota a reta determinada por  $A$  e  $B$ , quando  $A \neq B$  e,  $AA = \{A\}$ . Definimos a relação

$$AB // CD \longleftrightarrow AB = CD \vee AB \cap CD = \emptyset,$$

assim a expressão  $(\mathcal{E})$  é significativa. Nestas condições seguimentos nulos, isto é da forma  $(A, A)$ , são equivalentes somente a seguimentos nulos.

Doravante denotaremos tal relação de equivalência por **equipolência**. Assim, se dois seguimentos são equivalentes, são chamados por este motivo de **equipolentes**.

**Teorema 1.** Seja  $(A, B)$  um seguimento não nulo, i.e.,  $A \neq B$ , e  $P \in E$ , então existe um seguimento orientado  $(P, P_{(A,B)}) \sim (A, B)$ , i.e., um seguimento equipolente a  $(A, B)$  com origem em  $P$ .

*Prova.* Primeiro suponhamos que  $P \notin AB$ , pelo axioma das paralelas na geometria euclidiana existe uma reta  $r$  paralela a  $AB$  passando por  $P$ . Note que  $B \notin AP$ , pois caso contrário  $P \in AP = AB$ , o que contradiz nossa hipótese inicial. Pelo mesmo axioma existe uma reta  $s$  paralela a  $AP$  passando por  $B$ . Afirmo que  $s \cap r \neq \emptyset$ , suponhamos por redução ao absurdo o contrário. Necessariamente  $s // r$ , consequentemente  $s // AB$ , como  $B \in s \cap AB$ , decorre que

$s = AB$ , todavia  $A \notin s$ , pois  $s$  é uma reta paralela a  $AP$ , contendo  $B \notin AP$ . Esta contradição nos leva a concluir que existe  $P_{(A,B)} \in r \cap s$ . Seguidamente observemos que  $AB \parallel r = PP_{(A,B)}$  e  $AP \parallel s = BP_{(A,B)}$ , consequentemente  $(A, B) \sim (P, P_{(A,B)})$ . Suponhamos agora que  $P \in AB$ , existe  $(Q, Q_{(A,B)}) \sim (A, B)$ , tal que  $Q \notin AB$  assim  $A \notin QQ_{(A,B)}$ , pelo mesmo modo existe  $(P, P_{(Q,Q_{(A,B)})}) \sim (Q, Q_{(A,B)})$ , por transitividade  $(P, P_{(Q,Q_{(A,B)})}) \sim (A, B)$ . ■

Este teorema nos mostra que se  $(A, B)$  é não nulo e  $(A, B) \sim (C, D)$  e  $C \notin AB$ , então  $ABDC$  é um paralelogramo. Da geometria euclidiana tem-se uma noção básica de comprimento (medida), sabe-se que num paralelogramo lados paralelos têm o mesmo comprimento. Como consequência seguimentos equipolentes têm o mesmo comprimento.

**Definição 7.** Sejam  $(A, B)$  e  $(C, D)$  seguimentos não nulos, diremos que eles possuem o mesmo sentido se  $AB \parallel CD$  e existem  $(E, F) \sim (A, B)$   $(G, H) \sim (C, D)$ , tais que  $EF \cap GH = \emptyset$  e  $\overline{EG} \cap \overline{FH} = \emptyset$ .

**Teorema 2.** Seguimentos equipolentes não nulos têm o mesmo sentido.

*Prova.* Podemos sem perdas de generalidade supor que  $(A, B) \sim (C, D)$ , sejam tais que  $AB \cap CD = \emptyset$ . Necessariamente  $AB \parallel CD$  e  $AC \parallel BD$ , como  $B \notin AC$ , decorre que  $\overline{AC} \cap \overline{BD} = \emptyset$ .

**Corolário 1.** Seguimentos orientados são nulos ou têm o mesmo sentido e mesmo comprimento.

*Prova.* Imediata à discussão anterior. ■

Note que a definição de equipolência ( $\mathcal{E}$ ) implica o corolário anterior, mas a priori não é sabido se dois seguimentos não nulos que têm o mesmo sentido e comprimento são equipolentes. Para o que vamos fazer não é necessário provar a recíproca. A definição da relação de equipolência evita fazer comentários prévios sobre comprimentos, e também nos poupa de tratar os casos em que seguimentos são nulos ou não.

**Definição 8.** Um vetor é o conjunto

$$\overrightarrow{AB} = \left\{ (C, D) \in E \times E : (C, D) \sim (A, B) \right\}$$

em outros termos, um vetor é uma classe de equivalência da relação de equipolência ( $\mathcal{E}$ ).

Quando não se quiser fazer referência a um representante da classe, escolheremos uma letra do alfabeto latino comumente  $u, v, w, x, y, z$  e encimamos-la por uma flecha, e.g.,  $\vec{x}$ .

Os vetores herdam as propriedades dos seguimentos orientados e não orientados dados por de seus representantes, neste caso, paralelismo, sentido e comprimento. Denotaremos o comprimento de um vetor  $\vec{x}$ , por  $\|\vec{x}\|$  e a este número daremos o nome de norma. Observe que a noção de comprimento faz sentido para seguimentos nulos, neste caso trivialmente se  $\vec{x}$  possui representante nulo, então  $\|\vec{x}\| = 0$ . Ademais, nestas condições escreveremos  $\vec{0}$  para denotar a classe de equivalência dos seguimentos orientados nulos. O conjunto das classes de equivalência será denotada por  $\mathcal{V}$ .

A seguir muniremos o conjunto  $\mathcal{V}$  de uma estrutura algébrica, a saber a adição +.

**Definição 9.** Dados dois vetores  $\overrightarrow{AB}$  e  $\overrightarrow{CD}$ , definiremos o símbolo  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$  como sendo o vetor  $\overrightarrow{AB}_{(C,D)}$ , em outros termos a adição trata-se de construir um triângulo (possivelmente degenerado) com vértices  $A, B$  e  $B_{(C,D)}$ , em que  $(B, B_{(C,D)}) \sim (C, D)$ , e considerar o vetor (a classe) cujo representante seja o seguimento orientado  $(A, B_{(C,D)})$ .

† Mostrar que a definição independe do representante!

**Teorema 3.** Sejam  $\overrightarrow{AB}$  e  $\overrightarrow{CD}$  dois vetores quaisquer. Então  $(A, B_{(C,D)}) \sim (C, D_{(A,B)})$ .

## 1.2 ÁLGEBRA LINEAR

## 1.2.1 ESPAÇOS VETORIAIS

A seguir apresentarei alguns exercícios pertinentes de [Hoffman].

**PROPOSIÇÃO 1** *Sejam  $V$  um espaço vetorial e  $W_i \subset V$ , com  $i \in \{1, 2\}$ , subespaços vetoriais tais que  $W = W_1 \cup W_2$  é um subespaço de  $V$ . Então, existe um  $i \in \{1, 2\}$ , tal que  $W_i \subset W_j$ , com  $i \neq j$ .*

**PROVA** Suponhamos por *reductio ad absurdum* que

$$(1.1) \quad W_1 \setminus W_2 \neq \emptyset \wedge W_2 \setminus W_1 \neq \emptyset$$

Sejam  $w_1 \in W_1 \setminus W_2$  e  $w_2 \in W_2 \setminus W_1$ , das hipóteses  $w = w_1 + w_2 \in W$ . Todavia,  $w \notin W_1$  e  $w \notin W_2$ . Pois, digamos que  $w \in W_1$ , então  $w_2 = w - w_1 \in W_1$ , o que é uma contradição pois  $w_2 \in W_2 \setminus W_1$ . Agora se  $w \in W_2$ , então analogamente  $w_1 = w - w_2 \in W_2$ , outra contradição, pois  $W_1 \setminus W_2$ . Concluímos, portanto, que existe  $i \in \{1, 2\}$ , tal que  $W_i \subset W_j$ , com  $i \neq j$ . ■

**PROPOSIÇÃO 2** *Seja  $K$  um corpo,  $W$  um espaço vetorial sobre  $K$ . Considere  $V = W^K$ , munido com a soma e produto por escalar usuais. Então*

$$(1.2) \quad V_i = \{f : f \in V \wedge f(-x) = -f(x)\}$$

e

$$(1.3) \quad V_p = \{f : f \in V \wedge f(-x) = f(x)\}$$

são subespaços de  $V$ , tais que

$$(1.4) \quad V_i \cap V_p = \{0\} \wedge V = V_i + V_p.$$

**PROVA** Primeiro é evidente que  $0 \in V_i$ . Sejam agora  $f, g \in V_i$  e  $\varkappa \in K$ , temos que para todo  $x \in K$ , vale

$$(1.5) \quad \begin{aligned} (\varkappa f + g)(-x) &= \varkappa f(-x) + g(-x) \\ &= -\varkappa f(x) - g(x) \\ &= -(\varkappa f(x) + g(x)) \\ &= -(\varkappa f + g)(x), \end{aligned}$$

consequentemente  $V_i$  é um subespaço de  $V$ . O outro caso é ainda mais simples de ser provado, o argumento é inteiramente semelhante.

Seja agora  $f \in V_i \cap V_p$ , temos para todo  $x \in K$

$$(1.6) \quad f(x) = f(-x) = -f(x),$$

logo  $f = 0$  e, consequentemente  $V_i \cap V_p = \{0\}$ .

Por fim, seja  $f \in V$ . Note que  $f_i, f_p \in V$  dadas por

$$(1.7) \quad f_i(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2} \quad \wedge \quad f_p(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}$$

são tais que, para todo  $x \in K$  vale

$$(1.8) \quad f_i(-x) = \frac{f(-x) - f(x)}{2} = -\frac{f(x) - f(-x)}{2} = -f_i(x),$$

e.

$$(1.9) \quad f_p(-x) = \frac{f(-x) + f(x)}{2} = \frac{f(x) + f(-x)}{2} = f_p(x),$$

i.e.,  $(f_i, f_p) \in V_i \times V_p$ . Ademais,  $f = f_i + f_p$ , consequentemente  $V = V_i + V_p$ . ■

**PROPOSIÇÃO 3** *Sejam  $V_i \subset V$ , com  $i \in \{1, 2\}$ , subespaços do espaço vetorial  $V$ , tais que*

$$(1.10) \quad V = V_1 + V_2 \quad \wedge \quad V_1 \cap V_2 = \{0\}.$$

*Então para todo  $v \in V$  existe único  $(v_1, v_2) \in V_1 \times V_2$ , tais que  $v = v_1 + v_2$ .*

**PROVA** A existência decorre da definição, provemos, portanto, a unicidade. Para tanto, sejam  $v \in V$  e  $v_i, w_i \in V_i$ , com  $i \in \{1, 2\}$ , tais que

$$(1.11) \quad v = v_1 + v_2 = w_1 + w_2,$$

temos que

$$(1.12) \quad v_1 - w_1 = w_2 - v_2 \in V_1 \cap V_2 = \{0\}.$$

Decorre que

$$(1.13) \quad v_1 - w_1 = 0 = v_2 - w_2,$$

o que por sua vez acarreta  $v_i = w_i$ , com  $i \in \{1, 2\}$ . ■

# 2

## CIÊNCIAS NATURAIS

### 2.1 EQUAÇÃO DE CARGA DE UM CAPACITOR

**Teorema 4.** *Seja um capacitor de capacidade  $C$  conectado em série com um resistor de resistência  $R$  e à uma bateria de tensão  $V_f$ . Admitindo-se que o capacitor esteja inicialmente descarregado a equação de carga do capacitor é dada por:*

$$V(t) = V_f(1 - e^{-\frac{t}{RC}}).$$

*Prova.* A corrente no capacitor  $I(t)$  é a mesma que a corrente no resistor, consequentemente

$$(\ddagger) \quad \frac{V_f - V(t)}{R} = I(t) = \frac{dQ}{dt}(t) = C \frac{dV}{dt}(t)$$

em que  $V(t)$  é a tensão no capacitor no instante  $t$ . Temos portanto de  $(\ddagger)$  que

$$\frac{1}{RC} = \frac{dV}{dt}(t) \frac{1}{V_f - V(t)} = -\frac{d}{dt}(V_f - V(t)) \frac{1}{V_f - V(t)}$$

em consequência do lema que vimos e multiplicando ambos membros por  $-1$ , decorre que

$$-\frac{1}{RC} = \frac{d}{dt}(V_f - V(t)) \frac{1}{V_f - V(t)} = \frac{d}{dt}(\ln|V_f - V(t)|)$$

do teorema fundamental do cálculo vem

$$-\frac{T}{RC} = \int_0^T \frac{d}{dt}(\ln|V_f - V(t)|) dt = \ln|V_f - V(t)| \Big|_0^T$$

para  $T \geq 0$ .

Agora admitindo-se que  $V(0) = 0$ , e que  $V_f - V(t) > 0$  para todo  $t \in R_+$  obtemos

$$-\frac{T}{RC} = \ln(V_f - V(T)) \Big|_0^T = \ln \frac{V_f - V(T)}{V_f}$$

onde se conclui

$$\frac{V_f - V(T)}{V_f} = e^{-\frac{T}{RC}}$$

que por sua vez implica

$$V(T) = V_f(1 - e^{-\frac{T}{RC}})$$

como  $T$  é arbitrário podemos escrever sem perdas

$$V(t) = V_f(1 - e^{-\frac{t}{RC}})$$

para todo  $t \geq 0$ .

■

**Como tratar adequadamente conversões entre grandezas, e.g., grandezas angulares?** *Como explicar rigorosamente a igualdade que se encontra rotineiramente em livros:*

$$2\pi \text{ rad} = 360^\circ ?$$

*Rigorosamente, os dois objetos são distintos, de maneira que a identidade não é significativa.*

# 3

## A FAZER

- I.** Geometria euclidiana;
- II.** Geometria analítica;
- III.** Álgebra Linear;
- IV.** Anel dos inteiros;
- V.** MMC e MDC;
- VI.** Anel dos polinômios;
- VII.** Anel das matrizes;
- VIII.** Espaços vetoriais;
- IX.** Módulos;
- X.** Regra de três simples e composta;
- XI.** Inconsistência de modelos LLM;
- XII.** Diferencibilidade de funções reais inversas de variáveis reais;
- XIII.** Mudança de variáveis em integrais;
- XIV.** Definição de primitivas ou integrais indefinidas.