Exemplo 1 (Exercício 16 do PMA) *Considere $\alpha \in \,]0,\infty[$ e a sequência $x : \omega \longrightarrow R$ tal que $x_0 > \sqrt{\alpha}$ e*

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\Big(x_n + \frac{\alpha}{x_n}\Big), \tag{1}$$

para todo $n \in \omega$. Primeiro, observemos que

$$\forall y\Bigg(y > \sqrt{\alpha} \longrightarrow \sqrt{\alpha} < \frac{1}{2}\Big(y + \frac{\alpha}{y}\Big) < y\Bigg). \tag{2}$$

Segue-se de manipulações das duas desigualdades, uma é trivialmente verdadeira,

$$(y - \sqrt{\alpha})^2 > 0 \longleftrightarrow \frac{1}{2}\Big(y + \frac{\alpha}{y}\Big) > \sqrt{\alpha}. \tag{3}$$

Desta forma, a sequência é trivialmente estritamente decrescente. Ademais, ela é limitada inferiormente por 0, como consequência é convergente. Certamente que pela própria definição $x_n \in \,]0,\infty[$, para todo n. Se $\lim_n x_n = 0$, teríamos

$$\alpha = \lim_n x_n^2 + \alpha = \lim_n (2x_{n+1}x_n) = 0$$

uma contradição com a suposição $\alpha > 0$. Destarte, $l = \lim_n x_n > 0$, daí obtemos

$$l = \lim_n x_{n+1} = \lim_n \frac{x_n^2 + \alpha}{2x_n} = \frac{l^2 + \alpha}{2l}$$

donde segue-se que $l = \sqrt{\alpha}$. ∎

Teorema 1 (4.31 Remark: *Principles of Mathematical Analysis***)** *Seja $E \subset \,]a,b[$ enumerável, virtualmente denso. Enumeremos E, digamos, por uma sequência $\sigma \in E^\omega$, neste caso a sequência é uma bijeção entre ω e E. Seja também $\sum a_n$ uma série convergente de termos estritamente positivos. Seguidamente seja $x \in \,]a,b[$ definamos*

$$\kappa_x = \sigma^{-1}(]a,x[). \tag{4}$$

e $\alpha_x \in (\kappa_x)^\omega$ uma função qualquer satisfazendo a condição: se κ_x for finito, então existe $n_x \in \omega$, tal que $\alpha_x(n_x) = \varkappa_x$ e $\alpha_x(\neg n_x) = \{0\}$. Então

$$\Sigma_x = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{xk} < \infty. \tag{5}$$

E o número Σ_x independe da função α_x.

Então $f \in \mathbb{R}^{]a,b[}$, tal que $f(x) = \Sigma_x$ tem as seguintes propriedades:

(*a*) *f é monotonicamente crescente em $]a,b[$;*

(*b*) *f é descontínua em todo ponto de E; Em verdade,*

$$f(x_n+) - f(x_n-) = a_n; \tag{6}$$

(*c*) *f é contínua em $]a,b[\, \neg E$.*

Prova Primeiramente, suponha que $a < x < y < b$. Sabe-se que $\varkappa_x \subset \varkappa_y$. Temos duas possibilidades a considerar $\varkappa_y$ é finito ou infinito. Se $\varkappa_y$ for finito, então $\varkappa_x$ e

$$\delta = \varkappa_y \neg \varkappa_x, \tag{7}$$

também o é serão. Logo $f(x) \leq f(y)$, segue da manipulação de somas finitas.

Agora, suponhamos que $\varkappa_y$ seja infinito. Se δ for finito, podemos reordenar $\sum_{k\in\varkappa_y} a_k$ de tal maneira que os seus primeiros termos coincidam com os de δ. Caso δ