FUNÇÕES

Teorema 1 (67 Theorem) $\mathrm{dom}(\mathcal{U}) = \mathcal{U}$ *e* $\mathrm{img}(\mathcal{U}) = \mathcal{U}$.

Prova Note que para todo $x \in \mathcal{U}$, temos que $(x, x) \in \mathcal{U}$. ///

Definição 2 (68 Definition) $f(x) = \bigcap\{y : (x, y) \in f\}$.

A classe $f(x)$ é o *valor* de f em x ou a *imagem* de x sob f. É importante ser observado que x pode ser entendido como elemento do $\mathrm{dom}(f)$, e como classe. Vale deixar explícito que $f(x)$ é sempre interpretado na primeira acepção e não na segunda, ou seja

$$f(x) \neq \{y : \exists z(z \in x \wedge (z, y) \in f)\}.$$

Teorema 3 (69 Theorem) *Se* $x \notin \mathrm{dom}(f)$, *então* $f(x) = \mathcal{U}$; *se* $x \in \mathrm{dom}(f)$, *então* $f(x) \in \mathcal{U}$.

Prova Se $x \notin \mathrm{dom}(f)$, então $y : (x, y) \in f = \emptyset$, consequentemente

$$f(x) = \bigcap\{y : (x, y) \in f\} = \bigcap \emptyset = \mathcal{U}.$$

Agora se $x \in \mathrm{dom}(f)$, então $\{y : (x, y) \in f\} \neq \emptyset$, pelo **35 Theorem** concluímos que

$$f(x) = \bigcap\{y : (x, y) \in f\} \in \mathcal{U}.$$

///

Teorema 4 (70 Theorem) *Se* f *é uma função, então* $f = \{(x, y) : y = f(x)\}$

Prova Se f é uma função então para todo $x \in \mathrm{dom}(f)$, existe um y tal que $(x, y) \in f$. Não obstante, $(x, z) \in f$ se, e somente se, $z = y$. Consequentemente,

$$\{z : (x, z) \in f\} = \{z : z = y\} = \{y\}$$

daí

$$f(x) = \bigcap\{z : (x, z) \in f\} = \bigcap\{y\} = y.$$

Assim, para todo $x \in \mathrm{dom}(f)$, vale $(x, f(x)) \in f$, particularmente

$$f = \{(x, y) : y = f(x)\}.$$

///

Imediatamente temos o

Teorema 5 (71 Theorem*) *Se f e g são funções, então $f(x) = g(x)$, para todo x.*

Prova Imediata ao Theorem 70. ///

Axioma 6 (V Axiom of substitution) *Se f é uma função e $\operatorname{dom}(f) \in \mathcal{U}$, então $\operatorname{img}(f) \in \mathcal{U}$.*

Axioma 7 (VI Axioma of amalgamation) *Se $x \in U$, então $\bigcup x \in \mathcal{U}$.*

Definição 8 (72 Definition) $x \times y = \{(u, v) : u \in x \wedge v \in y\}$.

A classe $x \times y$ é chamanda de produto cartesiano de x e y.

Teorema 9 (73 Theorem) *Se $u, y \in \mathcal{U}$, então $\{u\} \times y \in \mathcal{U}$.*

Prova Construamos a seguinte função

$$f = \{(x, (u, x)) : x \in y\}.$$

Como $\operatorname{dom}(f) = x \in \mathcal{U}$, pelo axioma V concluímos

$$\{u\} \times y = \{(u, x) : x \in y\} = \operatorname{img}(f) \in \mathcal{U}.$$

///

Axioma 10 (V-VI Axiom) *Se $\operatorname{dom}(f) \in \mathcal{U}$, então $\bigcup \operatorname{img}(f) \in \mathcal{U}$.*

Este último axioma é a síntese dos axiomas V e VI, isto é elucidado pelo seguinte

Teorema 11 *Os axiomas* V *e* VI *são equivalentes ao axioma* V-VI.

Prova Adimitamos que $\operatorname{dom}(f) \in \mathcal{U}$, e os axiomas V e VI, segue naturalmente $\operatorname{img}(f) \in U$ por V e $\bigcup \operatorname{img}(f) \in \mathcal{U}$ por VI.

eciprocamente, suponhamos que $\operatorname{dom}(f) \in \mathcal{U}$, pelo axioma V-VI, segue-se que $x = \bigcup \operatorname{img}(f) \in \mathcal{U}$, logo $2^x \in \mathcal{U}$, como $\operatorname{img}(f) \subset 2^x$, pelo III Axiom of subsets, incorremos que $\operatorname{img}(f) \in \mathcal{U}$ o que prova V. Ademais, suponhamos que $x \in \mathcal{U}$, e considemos $i = \{(u, u) : u \in x\}$, por V segue-se que $\bigcup x = \bigcup \operatorname{img}(i) \in \mathcal{U}$, o que prova VI. ///

Teorema 12 (74 Theorem) *Se $x, y \in \mathcal{U}$, então $x \times y \in \mathcal{U}$.*

Prova Provar. ///