Dedico o resultado destas anotações aos meus Senhores. Primeiro, a Deus, que, consoante o seu desígnio, me concede o discernimento e o pão de cada dia. Segundo, a Jesus, não menos importante, em cujas palavras tanto me comprazo, e ciente de que Ele é O Caminho e A Verdade.

S U M Á R I O

PRELÚDIO

O texto que segue trata-se de um compêndio de assuntos que acho relevantes. Portanto, sem margem para dúvidas, o texto reflete minha subjetividade. Este texto estará em construção contínua, de maneira que não haverá versão final enquanto as circunstâncias da vida sobrepujarem o meu ímpeto de colecionar tais informações. Alguns resultados são de minha autoria, mas certamente estão enviesados por alguma obra, de maneira que não descobri a roda, mas me sustentei sobre o trabalho de vários indivíduos perspicazes. Além disso, é impossível colecionar tudo o que nos interessa. Destarte, me ative aos que, ao menos, tive alguma ideia de demonstração.

I

CIÊNCIAS FORMAIS

1

LÓGICA

Para fins de nota parafraseio sem prova e duma maneira não formal o seguinte

TEOREMA 1 (TEOREMA DA DEDUÇÃO OU LEI DA DEDUÇÃO DE TARSKI) *Todo teorema de uma teoria dedutiva é satisfeito por qualquer modelo do sistema de axiomas desta teoria*; *além disso, a qualquer teorema corresponde uma sentença geral a qual pode ser formulada e provada dentro da estrutura da lógica e que estabelece o fato que o teorema em questão é satisfeito para um modelo qualquer do sistema de axiomas.*

∎

DEFINIÇÃO 1 (SISTEMA DE AXIOMAS MUTUALMENTE INDEPENDENTE) *Um sistema de axiomas é dito* MUTUALMENTE INDEPENDENTE *se nenhum axioma do sistema pode ser derivado dos outros por métodos de inferência lógica, i.e., da lógica proposicional e de disciplinas precedentes*[1].

[1] Isto está em conformidade segundo Tarski. Quais seriam estas disciplinas?

2

TEORIA DOS CONJUNTOS

Decidi abordar a construção dada no apêndice do livro *General Topology* de John L. Kelley (*vide* pp. 250–281). Conforme atestei, o sistema empregado por Kelley, é uma adaptação do sistema de A. P. Morse, como ele bem afirma em sua obra.

Nosso sistema axiomático constituirá além da lógica proposicional, de objetos indefinidos chamados **classes**, denotadas doravante por letras do alfabeto latino. Adicionalmente, com uma relação $\in$, chamada pertinência.

Definição 2 (Conjuntos)

$$\forall x\big(\varsigma(x) \longleftrightarrow \exists y(x \in y)\big).$$

À cada classe x tal que $\varsigma(x)$, daremos o nome de conjunto. Desta maneira $\varsigma(x)$ se, e somente se, x é um conjunto.

Axioma 1 (II Classification axiom-scheme • Axioma-esquema da classificação) *Seja ϕ uma função proposicional tendo como parâmetros as classes. Então*

$$\forall y\big(y \in \{x : \phi(x)\} \longleftrightarrow \varsigma(y) \wedge \phi(y)\big).$$

Enfatizo que os objetos da teoria de classes, resumem-se, como é esperado, à classes. Portanto, '$\{x : \phi(x)\}$' denota uma classe, daí o nome de *classifier* ou classificador.

Definição 3 $\langle\phi\rangle = \{x : \phi(x)\}$.

Axioma 2 (I Axiom of extent • AEx : Axioma da extensionalidade)

$$\forall x, y\big(x = y \longleftrightarrow \forall z(z \in x \longleftrightarrow z \in y)\big).$$

Friso categoricamente que uma prova rigorosa da igualdade de classes, requer o uso explícito do axioma da extensionalidade **AEx** . Portanto, a rigor, uma cadeia de igualdades de classes dadas por classificadores, mesmo que óbvia para leitores maduros, não caracteriza, segundo minha visão, uma prova. Enfatizo este ponto, pois em estágios anteriores na confecção deste compêndio eu usei tais métodos.

Teorema 2

$$\forall x\big(x = \{y : y \in x\}\big).$$

Prova

$$\forall z\big(z \in \{y : y \in x\} \longleftrightarrow z \in x\big).$$

∎

Definição 4 $x \cup y = \{z : z \in x \vee z \in y\}$.

Definição 5 $x \cap y = \{z : z \in x \wedge z \in y\}$.

Aos símbolos $x \cup y$ e $x \cap y$, dá-se o nome de união e intersecção de x com y, respectivamente.

Teorema 3

$$\forall x, y, z\Big(x \cap (y \cup z) = (x \cap y) \cup (x \cap z) \ \wedge \ x \cup (y \cap z) = (x \cup y) \cap (x \cup z)\Big)$$

Prova Vamos provar a segunda proposição. Sejam x, y e z classes, notemos que

$$\begin{aligned} \forall w\big(w \in x \cup (y \cap z) &\longleftrightarrow w \in x \vee w \in y \cap z \\ &\longleftrightarrow w \in x \vee (w \in y \wedge w \in z) \\ &\longleftrightarrow (w \in x \vee w \in y) \wedge (w \in x \vee w \in z) \\ &\longleftrightarrow w \in (x \cup y) \wedge w \in (x \cup z) \\ &\longleftrightarrow w \in (x \cup y) \cap (x \cup z)\big). \end{aligned} \tag{2.1}$$

A outra prova é inteiramente análoga. De fato, decorre das propriedades dos conectivos '$\wedge$' e '$\vee$', a conjunção e disjunção lógica, respectivamente. ∎

Definição 6

$$\forall x, y(x \notin y \longleftrightarrow \neg(x \in y)).$$

Definição 7 $\neg x = \{y : y \notin x\}$.

A classe $\neg x$ chama-se complemento absoluto de x.

Teorema 4 *Seja ϕ uma função proposicional cujos parâmetros sejam classes. Então $\neg\langle\phi\rangle = \langle\neg\phi\rangle$.*

Prova

$$\forall x\big(x \in \neg\langle\phi\rangle \longleftrightarrow \varsigma(x) \wedge \neg\phi(x) \longleftrightarrow x \in \langle\neg\phi\rangle\big).$$

∎

Teorema 5

$$\forall x\big(\neg(\neg x) = x\big).$$

Prova

$$\forall y\big(y \in \neg(\neg x) \longleftrightarrow \neg(y \in \neg x) \longleftrightarrow \neg\big(\neg(y \in x)\big) \longleftrightarrow y \in x\big) \tag{2.2}$$

∎

Teorema 6 (Leis de De Morgan)

$$\forall x, y\big(\neg(x \cup y) = \neg x \cap \neg y \ \wedge \ \neg(x \cap y) = \neg x \cup \neg y\big)$$

Prova A prova segue diretamente da definição de $\cup$ e $\cap$, e das leis de De Morgan para os conectivos $\vee$ e $\wedge$. ∎

Definição 8 $x \neg y = x \cap \neg y$.

Ao símbolo '$x \neg y$' dá-se o nome de diferença de x e y ou complemento de y relativo a x.

Teorema 7

$$\forall x, y, z\big(x \cap (y \neg z) = (x \cap y) \neg z\big)$$

Prova Provar. ∎

Definição 9 *Seja ϕ uma contradição qualquer. Definimos $\emptyset = \langle \phi \rangle$.*

Observe que esta definição independe da contradição. Com efeito, temos o

Teorema 8 *Se ϕ e ψ são duas contradições, então $\langle \phi \rangle = \langle \psi \rangle$.*

Prova Com efeito,

$$\forall x\big(x \in \langle \phi \rangle \longleftrightarrow \varsigma(x) \wedge \phi(x) \longleftrightarrow \varsigma(x) \wedge \psi(x) \longleftrightarrow x \in \langle \psi \rangle\big), \tag{2.3}$$

pois ambos os membros da bicondicional são falsos, logo a equivalência é válida e, consequentemente o quantificação é verdadeira. ∎

A classe $\emptyset$ é chamada de classe nula ou vazia.

Teorema 9

$$\forall x(x \notin \emptyset). \tag{2.4}$$

Prova

$$\forall x(x \in \emptyset \longleftrightarrow \varsigma(x) \wedge x \neq x). \tag{2.5}$$

Como o lado direito é trivialmente falso pela definição de igualdade, decorre que $\neg(x \in \emptyset)$, ou equivalentemente $x \notin \emptyset$ é verdadeira para todo x. ∎

Teorema 10

$$\forall x(x \cup \emptyset = x \ \wedge \ x \cap \emptyset = \emptyset). \tag{2.6}$$

Prova Seja x uma classe, temos em conformidade

$$\forall y\big(y \in x \cup \emptyset \longleftrightarrow \varsigma(y) \wedge (y \in x \vee y \in \emptyset) \longleftrightarrow \varsigma(y) \wedge y \in x \longleftrightarrow y \in x\big) \tag{2.7}$$

o que segundo o **AEx** segue-se a identidade.

Analogamente,

$$\forall y\big(y \in x \cap \emptyset \longleftrightarrow \varsigma(y) \wedge (y \in x \wedge y \in \emptyset) \longleftrightarrow \varsigma(y) \wedge y \in \emptyset \longleftrightarrow y \in \emptyset\big) \tag{2.8}$$

novamente pelo **AEx** infere-se a igualdade. ∎

Definição 10

$$\mathcal{U} = \neg\emptyset \tag{2.9}$$

Teorema 11

$$\forall x\big(x \in \mathcal{U} \longleftrightarrow \varsigma(x)\big). \tag{2.10}$$

Prova

$$\forall x\big(x \in \mathcal{U} \longleftrightarrow \varsigma(x) \wedge x \notin \emptyset \longleftrightarrow \varsigma(x)\big). \tag{2.11}$$

∎

Teorema 12 *Seja ϕ uma tautologia. Então $\langle\phi\rangle = \mathcal{U}$.*

Prova Notemos que

$$\forall x\big(x \in \langle\phi\rangle \longleftrightarrow \varsigma(x) \wedge \phi(x) \longleftrightarrow \varsigma(x) \longleftrightarrow x \in \mathcal{U}\big), \tag{2.12}$$

de **AEx** decorre o teorema. Outra maneira seria usar a hipótese que $\neg\phi$ é uma contradição, e concluir de

$$\langle\phi\rangle = \neg\langle\neg\phi\rangle = \neg\emptyset = \mathcal{U}. \tag{2.13}$$

∎

Teorema 13

$$\forall x\big(x \cup \mathcal{U} = \mathcal{U} \wedge x \cap \mathcal{U} = x\big) \tag{2.14}$$

Prova

$$\forall y\big(y \in x \cup \mathcal{U} \longleftrightarrow y \in x \ \vee \ y \in \mathcal{U} \longleftrightarrow y \in \mathcal{U}\big) \tag{2.15}$$

segue pelo **AEx** .

Seguidamente,

$$\forall y\big(y \in x \cap \mathcal{U} \longleftrightarrow y \in x \wedge y \in \mathcal{U} \longleftrightarrow y \in x\big) \tag{2.16}$$

novamente decorre por **AEx** . ∎

Definição 11

$$\bigcap x = \big\{z : \forall y(y \in x \longrightarrow z \in y)\big\}. \tag{2.17}$$

Definição 12

$$\bigcup x = \big\{z : \exists y(y \in x \wedge z \in y)\big\}. \tag{2.18}$$

A classe $\bigcap x$ é a interseção dos membros de x e, a classe $\bigcup x$ é a união dos membros de x.

Teorema 14

$$\bigcap \emptyset = \mathcal{U} \wedge \bigcup \emptyset = \emptyset. \tag{2.19}$$

Prova

$$\forall x\Big(x \in \bigcap \emptyset \longleftrightarrow \varsigma(x) \wedge \forall y(y \in \emptyset \longleftrightarrow x \in y) \longleftrightarrow x \in \mathcal{U}\Big), \tag{2.20}$$

pois ϕ definida por

$$\phi(x) \longleftrightarrow \forall y(y \in \emptyset \longleftrightarrow x \in y) \tag{2.21}$$

é uma tautologia.

Em seguida,

$$\forall x\big(x \in \bigcup \emptyset \longleftrightarrow \varsigma(x) \wedge \exists(y \in \emptyset \wedge x \in y) \longleftrightarrow x \in \emptyset\big), \tag{2.22}$$

porquanto, ψ definida por

$$\psi(x) \longleftrightarrow \exists y(y \in \emptyset \wedge x \in y) \tag{2.23}$$

é uma contradição. ∎

Definição 13

$$\forall x\big(x \subset y \longleftrightarrow \forall z(z \in x \longrightarrow z \in y)\big). \tag{2.24}$$

Uma classe x é uma subclasse de y, ou está contida em y, ou y contem x, se, e somente se, $x \subset y$.

Teorema 15 (26 Theorem)

$$\forall x(\emptyset \subset x \wedge x \subset \mathcal{U}) \tag{2.25}$$

Prova Seja x uma classe. Temos primeiramente

$$\forall y(y \in \emptyset \longrightarrow y \in x), \tag{2.26}$$

pois o antecedente da condicional é sempre falso. O que prova a primeira inclusão.

Por outro, lado temos

$$\forall y(y \in x \longrightarrow \varsigma(y) \longrightarrow y \in \mathcal{U}). \tag{2.27}$$

o que conclui a prova. ∎

Teorema 16 (27 Theorem)

$$\forall x, y(x = y \longleftrightarrow x \subset y \wedge y \subset x). \tag{2.28}$$

Prova Sejam x e y classes quaisquer

$$\begin{aligned} x \subset y \wedge y \subset x &\longleftrightarrow \forall z\big((z \in x \longrightarrow z \in y) \wedge (z \in y \longrightarrow z \in x)\big) \\ &\longleftrightarrow \forall z(z \in x \longleftrightarrow z \in y) \\ &\longleftrightarrow x = y. \end{aligned} \tag{2.29}$$

∎

Teorema 17 (28 Theorem)

$$\forall x, y, z(x \subset y \wedge y \subset z \longrightarrow x \subset z) \tag{2.30}$$

Prova Sejam x, y, z classes quaisquer. Temos

$$\begin{aligned}\big(x \subset y \wedge y \subset z &\longrightarrow \forall w(w \in x \longrightarrow w \in y \wedge w \in y \longrightarrow w \in z)\\ &\longrightarrow \forall w(w \in x \longrightarrow w \in z)\\ &\longrightarrow x \subset z\big)\end{aligned} \tag{2.31}$$

∎

Teorema 18

$$\forall x, y, z(x \subset y \longrightarrow x \cap z \subset y \cap z \wedge x \cup z \subset y \cup z) \tag{2.32}$$

Prova Sejam x, y, z classes quaisquer. Primeiramente,

$$\forall w(w \in x \cap z \longrightarrow w \in x \wedge w \in z \longrightarrow w \in y \wedge w \in z \longrightarrow w \in y \cap z). \tag{2.33}$$

Segundo e, por fim,

$$\forall w(w \in x \cup z \longrightarrow w \in x \ \vee \ w \in z \longrightarrow w \in y \ \vee \ w \in z \longrightarrow w \in y \cup z). \tag{2.34}$$

∎

Teorema 19

$$\forall x, y(x \subset y \longleftrightarrow x \cup y = y) \tag{2.35}$$

Prova Sejam x, y classes arbitrárias, segue-se

$$x \subset y \wedge y \subset x \cup y \longleftrightarrow x \cup y \subset y \wedge y \subset x \cup y \longleftrightarrow x \cup y = y. \tag{2.36}$$

∎

Teorema 20 (30 Theorem)

$$\forall x, y(x \subset y \longleftrightarrow x \cap y = x) \tag{2.37}$$

Prova Dadas as classes x e y, temos

$$x \subset y \wedge x \cap y \subset x \longleftrightarrow x \subset x \cap y \wedge x \cap y \subset x \longleftrightarrow x \cap y = x. \tag{2.38}$$

∎

Teorema 21 (31 Theorem)

$$\forall x, y\Big(x \subset y \longrightarrow \bigcup x \subset \bigcup y \wedge \bigcap y \subset \bigcap x\Big). \tag{2.39}$$

Prova Sejam x, y, z classes arbitrárias, tais que $x \subset y$. Primeiro temos

$$z \in \bigcup x \longrightarrow \exists w(w \in x \wedge z \in w) \longrightarrow \exists w(w \in y \wedge z \in w) \longrightarrow z \in \bigcup y. \tag{2.40}$$

Segundo,

$$z \in \bigcap y \longrightarrow \forall w(w \in y \longrightarrow z \in w) \longrightarrow \exists w(w \in x \longrightarrow z \in w) \longrightarrow z \in \bigcap x. \tag{2.41}$$

∎

Teorema 22 (32 Theorem)

$$\forall x, y\Big(x \in y \longrightarrow x \subset \bigcup y \wedge \bigcap y \subset x\Big) \tag{2.42}$$

Prova Sejam x, y, z, classes aleatórias tais que $x \in y$. Inicialmente, temos

$$z \in x \longrightarrow \exists w(w \in y \wedge z \in w) \longrightarrow z \in \bigcup y. \tag{2.43}$$

Finalmente,

$$z \in \bigcap y \longrightarrow \forall w(w \in y \longrightarrow z \in w) \longrightarrow z \in x. \tag{2.44}$$

∎

2.1 EXISTÊNCIA DE CONJUNTOS

Axioma 3 (III Axiom • AS: Axioma de subconjuntos)

$$\forall x\Big(\varsigma(x) \longrightarrow \exists y\big(\varsigma(y) \wedge \forall z(z \subset x \longrightarrow z \in y)\big)\Big). \tag{2.45}$$

Teorema 23 (33 Theorem)

$$\forall x, z\big(\varsigma(x) \wedge z \subset x \longrightarrow \varsigma(z)\big). \tag{2.46}$$

Prova Sejam as classes x e z, tais $\varsigma(x)$ e $z \subset x$, tem se

$$\varsigma(x) \xrightarrow{\textbf{AS}} \exists y(w \subset x \longrightarrow w \in y) \longrightarrow z \in w \longrightarrow \varsigma(z). \tag{2.47}$$

∎

Teorema 24 (34 Theorem)

$$\emptyset = \bigcap \mathcal{U} \wedge \mathcal{U} = \bigcup \mathcal{U}. \tag{2.48}$$

Prova Primeiramente suponhamos por *reductio ad absurdum* que exista $x \in \bigcap \mathcal{U}$, então $\varsigma(x)$, pelo **Teorema 15** segue-se $\emptyset \subset x$; assim necessariamente $\varsigma(\emptyset)$, ou equivalentemente $\emptyset \in \mathcal{U}$. Pelo **Teorema 22** tem-se que $\bigcup \mathcal{U} \subset \emptyset$, novamente pelo **Teorema 15** temos $\emptyset \subset \bigcap \mathcal{U}$, logo, pelo **Teorema 16** e da suposição inicial decorre que $x \in \bigcap \mathcal{U} = \emptyset$, o que é uma contradição. Consequentemente, não é o caso que exista $x \in \bigcap \mathcal{U}$, i.e., $\bigcap \mathcal{U} = \emptyset$[1].

Agora, seja $x \in \mathcal{U}$, pelo **AS** existe $y \in \mathcal{U}$, tal que $x \in y$, pois $x \subset x$, pela definição de $\bigcup \mathcal{U}$, segues-se que $x \in \bigcup \mathcal{U}$, consequentemente $\mathcal{U} \subset \bigcup \mathcal{U}$. Por outro lado, pelo **Teorema 15**, temos $\bigcup \mathcal{U} \subset \mathcal{U}$, consequentemente pelo **Teorema 16**, $\bigcup \mathcal{U} = \mathcal{U}$. ∎

Teorema 25 (35 Theorem) *Para toda classe x, se $x \neq \emptyset$, então $\varsigma(\bigcap x)$.*

Prova Se $x \neq \emptyset$, então existe $y \in x$, logo $\varsigma(y)$ e pelo **Teorema 22** tem-se $\bigcap x \subset y$, daí e do **Teorema 22**, decorre que $\varsigma(\bigcap x)$. ∎

Definição 14 $2^x = \{y : y \subset x\}$.

Teorema 26 (37 Theorem) $2^{\mathcal{U}} = \mathcal{U}$.

Prova Certamente pelo **Teorema 15** segue que $2^{\mathcal{U}} \subset \mathcal{U}$. Agora, dado $x \in \mathcal{U}$, então evidentemente $x \subset \mathcal{U}$, consquentemente $x \in 2^{\mathcal{U}}$. Pelo **Teorema 16**, concluímos que $2^{\mathcal{U}} = \mathcal{U}$. ∎

Teorema 27 (38 Theorem) *Se $\varsigma(x)$, então $\varsigma(2^x)$.*

Prova Se $\varsigma(x)$, pelo **AS** existe $y \in \mathcal{U}$, tal que para todo z, se $z \subset y$, então $z \in y$. Como consequêcnia, $2^x \subset y$, pelo **Teorema 23** segue-se que $\varsigma(2^x)$. ∎

Teorema 28 (39 Theorem) $\neg\varsigma(\mathcal{U})$.

Prova Consideremos a classe $\mathcal{R} = \{x : x \notin x\}$[2]. Provemos que $\neg\varsigma(\mathcal{R})$, i.e., $\mathcal{R}$. Para tanto, suponhamos por *reductio ad absurdum* que $\varsigma(\mathcal{R})$, temos então a equivalência

$$\varsigma(\mathcal{R}) \wedge \mathcal{R} \in \mathcal{R} \text{ se, e somente se, } \varsigma(\mathcal{R}) \wedge \mathcal{R} \notin \mathcal{R}, \tag{2.49}$$

o que é uma inconsistência, i.e., uma contradição. Logo, $\neg\varsigma(\mathcal{R})$. Ademais, da própria definição de classificadores $\mathcal{R} \subset \mathcal{U}$, como $\mathcal{R}$ é uma classe própria, necessariamente $\mathcal{U}$ também o será. Com efeito, suponha por *reductio ad absurdum* que $\varsigma(\mathcal{U})$, pelo **Teorema 23**, inferiríamos que $\varsigma(\mathcal{R})$, o que é uma contradição com o argumento anterior. ∎

Teorema 29 (Definição por indução) *Sejam X um conjunto e $a \in X$. Suponha que exista uma função $F : \bigcup_{p\in\omega} X^{p+1} \longrightarrow X$. Então existe uma única função $f \in X^{\omega}$, tal que $f(0) = a$ e $f(p+1) = F(f|_{p+1})$, para todo $p \in \omega$.*

Prova Primeiramente, para cada $p \in \omega$, definamos

$$\mathfrak{F}_p = \{g : g \in X^{p+2} \wedge g(0) = a \wedge \forall q(q \in p+1 \longrightarrow g(q+1) = F(g|_{q+1}))\}. \tag{2.50}$$

Seguidamente definamos,

$$C = \{p : p \in \omega \wedge \exists! g(g \in \mathfrak{F}_p)\}. \tag{2.51}$$

[1] Segui a mesma linha de raciocínio de Kelley, mas com a minhas adaptações.

[2] O $\mathcal{R}$ é em homenagem a Bertrand Russel, um dos primeiros a descobrir paradoxos na teoria ingênia dos conjuntos, criada pelo matemático eminente Georg Cantor.

Primeiro, considere $g \in X^2$, tal que $g(0) = a$ e $g(1) = F(g|_1)$. Naturalmente se $\gamma \in \mathfrak{F}_0$, então $\gamma(0) = a = g(0)$, logo, $\gamma|_1 = g|_1$ e consequentemente $\gamma(1) = F(\gamma|_1) = F(g|_1) = g(1)$, o que prova que $0 \in C$. Em seguida, suponhamos que $p \in \omega$, segue que existe uma única $h \in \mathfrak{F}_p$, defina $g \in X^{p+3}$, tal que $g|_{p+2} = h$ e $g(p+2) = F(g|_{p+2})$. Seja agora $\gamma \in \mathfrak{F}_{p+1}$, pela unicidade de h segue-se que $\gamma|_{p+2} = h = g|_{p+2}$, por conseguinte $\gamma(p+2) = F(h) = g(p+2)$, que por sua vez, acarreta $\gamma = g$, o que prova a unicidade de g. Destarte, $p+1 \in C$. Como ω é o conjunto sucessor (indutivo) minimal segue-se que $C = \omega$.

Em verdade provamos que $\mathfrak{F}_p$ é unitário para todo $p \in \omega$. Digamos que $f_p \in \mathfrak{F}_p$ e definamos $f = \bigcup_{p \in \omega} f_p$. Suponhamos que $(a,b), (a,c) \in f$. Naturalmente, existem $p, q \in \omega$ tais que $(a,b) \in f_p$ e $(a,c) \in f_q$, os quais sem perda de generalidade podemos supor $p \leq q$. Como $f_q|_{p+2} \in \mathfrak{F}_p$, podemos inferir que $f_q|_{p+2} = f_p$; assim $b = f_p(a) = f_q(a) = c$, o que prova que $f \in X^\omega$. Agora seja $p \in \omega$, notemos que $f|_{p+2} = f_p$, consequentemente $f(0) = a$ e $f(p+1) = F(f|_{p+1})$, portanto f satisfaz as hipóteses do teorema, i.e., provamos a existência. Ademais, seja $\phi \in X^\omega$ uma outra função que satisfaz as estipulações do teorema, temos que para todo $p \in \omega$, vale $f|_{p+2}, \phi|_{p+2} \in \mathfrak{F}_p$, por conseguinte $f|_{p+2} = f_p = \phi|_{p+2}$, que por sua vez implica que $f = \phi$, pois $p \in \omega$ é arbitrário, provando portanto a unicidade de f. ∎

Teorema 30 (Bernstein-Cantor-Schröder [Revisar]) *Sejam X e Y conjuntos tais que existe uma injeção própria de X em Y e vice-versa. Então X é equivalente a Y.*

Prova Supomos que $f(X) \subset Y$ e $g(Y) \subset X$ (aqui $\subset$ é a inclusão própria). Destas inclusões deriva-se facilmente a proposição

$$(\Delta) \qquad \forall i\Big(i \in N \longrightarrow (gf)^i(X) \supset (gf)^i\big(g(Y)\big) \supset (gf)^{i+1}(X)\Big).$$

Para cada $i \in N$, façamos:

$$A_{2i} = (gf)^i(X) \quad \text{e} \quad A_{2i+1} = (gf)^i\big(g(Y)\big)$$

em vista de (Δ) decorre que $\{A_i : i \in N\}$ é uma família de conjuntos estritamente decrescente.

Sejam agora

$$C_i = (gf)^i\big(X \setminus g(Y)\big) \quad \text{e} \quad D_i = (gf)^i g\big(Y \setminus f(X)\big)$$

com $i \in N$.

Definamos

$$A = \textstyle\bigcap_{i\in N} A_i, \quad C = \bigcup_{i\in N} C_i \quad e \quad D = \bigcup_{i\in N} D_i.$$

Estes são disjuntos aos pares. De fato, inicialmente provemos que $C \cap D = \emptyset$. Note que

$$\forall i, j\big(i, j \in N \longrightarrow C_i \cap D_j = \emptyset\big),$$

pois dados $i, j \in N$, temos

$$C_i \cap D_j = A_{2i} \cap A_{2j+1} \setminus \big(A_{2i+1} \cup A_{2(j+1)}\big) \subset A_a \setminus A_b = \emptyset,$$

sendo

$$a = \max\{2i, 2j\} \quad \text{e} \quad b = \min\{2(i+1), 2(j+1)\}.$$

uma vez que $A_b \subset A_a$, como consequência $C \cap D = \emptyset$.

Seguidamente, dados $i, j \in N$, obtem-se

$$A \cap (C_i \cup D_j) = A \setminus \big(A_{2i+1} \cap A_{2(j+1)}\big) = \emptyset,$$

consequentemente $A \cap (C \cup D) = \emptyset$.

Afirmo que

$$X = A \cup C \cup D$$

Decerto, observe que se $x \in X \setminus (C \cup D)$, então necessariamente $x \in A_i$ para todo $i \in N$, pois, se existir $i \in N$ tal que $x \notin A_i$, então consideremos $m = \min\{i \in N : x \notin A_i\}$, é certo que $m > 0$. Assim, existe $l \in N$, tal que $l + 1 = m$, e consequentemente $x \in A_l \setminus A_{l+1} \subset C \cup D$, uma contradição.

De maneira inteiramente análoga para cada $i \in N$, façamos:

$$B_{2i} = (fg)^i(Y) \quad \text{e} \quad B_{2i+1} = (fg)^i\big(f(X)\big);$$

$$E_i = (fg)^i\big(Y \setminus f(X)\big) \quad \text{e} \quad F_i = (fg)^i f\big(X \setminus g(Y)\big).$$

Prova-se sem dificuldades que

$$Y = B \cup E \cup F,$$

em que

$$B = \textstyle\bigcap_{i\in N} B_i, \quad E = \bigcup_{i\in N} E_i \quad e \quad F = \bigcup_{i\in N} F_i.$$

Em verdade, basta trocar os papéis de f com g e X com Y, concomitamente.

Agora observemos que por indução matemática decorre que

$$\forall i\big(i \in N \longrightarrow \phi(\gamma\phi)^i = (\phi\gamma)^i\phi\big).$$

para quaisquer que sejam as funções ϕ e γ, em que a composição faça sentido. Em verdade, para $i = 0$ temos necessariamente

$$\phi(\gamma\phi)^0 = \phi = (\phi\gamma)^i\phi.$$

Suponhamos por hipótese de indução que a propriedade seja válida para $i \in N$, notemos que

$$\phi(\gamma\phi)^{i+1} = \phi(\gamma\phi)^i(\gamma\phi) = (\phi\gamma)^i(\phi\gamma)\phi = (\phi\gamma)^{i+1}\phi$$

o que prova que é válida para $i + 1$, concluímos por indução matemática que a propriedade é válida para todo $i \in N$.

Posteriormente, em vista do resultado anterior observemos que para cada $i \in N$

$$A_{2i+1} = (gf)^i g(Y) = g(fg)^i(Y) = g(B_{2i})$$

e

$$B_{2i+1} = (fg)^i f(X) = f(gf)^i(X) = f(A_{2i}).$$

Em consequência para todo $i \in N$

$$B_{2i} = g^{-1}(A_{2i+1}) \quad \text{e} \quad B_{2i+1} = f(A_{2i}).$$

Em seguida, definamos $\varphi : X \to Y$ por

$$\varphi(x) = \begin{cases} f(x), & x \in A \cup C; \\ g^{-1}(x), & x \in D. \end{cases}$$

Pela própria definição φ é injetiva.

Imediatamente observe que para todo $i \in N$

$$\varphi(C_i) = f\Big((gf)^i\big(X \setminus g(Y)\big)\Big) = (fg)^i f\big(X \setminus g(Y)\big) = F_i$$

e

$$\varphi(D_i) = g^{-1}\Big((gf)^i g\big(Y \setminus f(X)\big)\Big) = (fg)^i\big(Y \setminus f(X)\big) = E_i.$$

Além do mais, para todo $i \in N$, temos

$$\varphi(A_{2i}) = f(A_{2i}) = f(gf)^i(X) = (fg)^i f(X) = B_{2i+1}$$

e

$$\varphi(A_{2i+1}) = f(A_{2i+1}) = f(gf)^i g(Y) = (fg)^i fg(Y) = B_{2(i+1)}.$$

Em suma,

$$\forall i\big(i \in N \longrightarrow \varphi(A_i) = B_{i+1} \wedge \varphi(C_i) = F_i \wedge \varphi(D_i) = E_i\big).$$

Conformemente

$$\varphi(A) = B, \quad \varphi(C) = F \quad \text{e} \quad \varphi(D) = E.$$

a fortiori

$$\varphi(X) = \varphi(A \cup C \cup D) = \varphi(A) \cup \varphi(C) \cup \varphi(D) = B \cup E \cup F = Y,$$

i.e., $X \sim Y$. ∎

Teorema 31 (Exercício - HalmosNaive ?) *Sejam $f : X \to Y$ e $g : Y \to X$. Então existem subconjuntos $A \subset X$ e $B \subset Y$, tais que $f(A) = B$ e $X \neg A = g(Y \neg B)$.*

Prova Consideremos o conjunto

$$A = \{x : x \in X \ \wedge \ g\big(Y \neg f(\{x\})\big) \subset X \neg \{x\}\}. \tag{2.52}$$

Seja $x \in X \neg A$, segue necessariamente que $\emptyset \neq g(Y \setminus f(\{x\})) \subset \{x\}$, logo,

∎