*FUNÇÕES*

Definição 1 $\Phi(f)$ *se, e somente se, $f$ é uma função.*

Teorema 2 (67 Theorem) $\mathrm{dom}(\mathcal{U}) = \mathcal{U}$ *e* $\mathrm{img}(\mathcal{U}) = \mathcal{U}$ .

*Prova* Note que para todo $x \in \mathcal{U}$, temos que $(x, x) \in \mathcal{U}$. ///

Definição 3 (68 Definition) $f(x) = \bigcap\{y : (x, y) \in f\}$.

A classe $f(x)$ é o *valor* de $f$ em $x$ ou a *imagem* de $x$ sob $f$. É importante ser observado que $x$ pode ser entendido como elemento do $\mathrm{dom}(f)$, e como classe. Vale deixar explícito que $f(x)$ é sempre interpretado na primeira acepção e não na segunda, ou seja

$$f(x) \neq \{y : \exists z(z \in x \wedge (z, y) \in f)\}.$$

Teorema 4 (69 Theorem) *Se* $x \notin \mathrm{dom}(f)$, *então* $f(x) = \mathcal{U}$; *se* $x \in \mathrm{dom}(f)$, *então* $f(x) \in \mathcal{U}$.

*Prova* Se $x \notin \mathrm{dom}(f)$, então $y : (x, y) \in f = \emptyset$, consequentemente

$$f(x) = \bigcap\{y : (x, y) \in f\} = \bigcap\emptyset = \mathcal{U}.$$

Agora se $x \in \mathrm{dom}(f)$, então $\{y : (x, y) \in f\} \neq \emptyset$, pelo **35 Theorem** concluímos que

$$f(x) = \bigcap\{y : (x, y) \in f\} \in \mathcal{U}.$$

///

Teorema 5 (70 Theorem) *Se $f$ é uma função, então* $f = \{(x, y) : y = f(x)\}$

*Prova* Se $f$ é uma função então para todo $x \in \mathrm{dom}(f)$, existe um $y$ tal que $(x, y) \in f$. Não obstante, $(x, z) \in f$ se, e somente se, $z = y$. Consequentemente,

$$\{z : (x, z) \in f\} = \{z : z = y\} = \{y\}$$

daí

$$f(x) = \bigcap\{z : (x, z) \in f\} = \bigcap\{y\} = y.$$

Assim, para todo $x \in \mathrm{dom}(f)$, vale $(x, f(x)) \in f$, particularmente

$$f = \{(x, y) : y = f(x)\}.$$

///

Imediatamente temos o

TEOREMA 6 (71 THEOREM*) *Se $f$ e $g$ são funções, então $f(x) = g(x)$, para todo $x$.*

*Prova* Imediata ao THEOREM 70. ///

AXIOMA 7 (V AXIOM OF SUBSTITUTION) *Se $f$ é uma função e $\operatorname{dom}(f) \in \mathcal{U}$, então $\operatorname{img}(f) \in \mathcal{U}$.*

AXIOMA 8 (VI AXIOM OF AMALGAMATION) *Se $x \in U$, então $\bigcup x \in \mathcal{U}$.*

DEFINIÇÃO 9 (72 DEFINITION) $x \times y = \{(u, v) : u \in x \wedge v \in y\}$.

A classe $x \times y$ é chamanda de produto cartesiano de $x$ e $y$.

TEOREMA 10 (73 THEOREM) *Se $u, y \in \mathcal{U}$, então $\{u\} \times y \in \mathcal{U}$.*

*Prova* Construamos a seguinte função

$$f = \{(x, (u, x)) : x \in y\}.$$

Como $\operatorname{dom}(f) = x \in \mathcal{U}$, pelo axioma V concluímos

$$\{u\} \times y = \{(u, x) : x \in y\} = \operatorname{img}(f) \in \mathcal{U}.$$

///

AXIOMA 11 (V-VI AXIOM) *Se $\operatorname{dom}(f) \in \mathcal{U}$, então $\bigcup \operatorname{img}(f) \in \mathcal{U}$.*

Este último axioma é a síntese dos axiomas V e VI, isto é elucidado pelo seguinte

TEOREMA 12 *Os axiomas* V *e* VI *são equivalentes ao axioma* V-VI.

*Prova* Adimitamos que $\operatorname{dom}(f) \in \mathcal{U}$, e os axiomas V e VI, segue naturalmente $\operatorname{img}(f) \in U$ por V e $\bigcup \operatorname{img}(f) \in \mathcal{U}$ por VI.

Reciprocamente, suponhamos que $\operatorname{dom}(f) \in \mathcal{U}$, pelo axioma V-VI, segue-se que $x = \bigcup \operatorname{img}(f) \in \mathcal{U}$, logo $2^x \in \mathcal{U}$, como $\operatorname{img}(f) \subset 2^x$, pelo III AXIOM OF SUBSETS, incorremos que $\operatorname{img}(f) \in \mathcal{U}$ o que prova V. Ademais, suponhamos que $x \in \mathcal{U}$, e considemos $i = \{(u, u) : u \in x\}$, por V segue-se que $\bigcup x = \bigcup \operatorname{img}(i) \in \mathcal{U}$, o que prova VI. ///

Teorema 13 (74 Theorem) *Se $x, y \in \mathcal{U}$, então $x \times y \in \mathcal{U}$.*

*Prova* Para tanto, consideremos

$$f = \big\{\big(z, \{z\} \times y\big) : z \in x\big\}$$

Atesta-se imediatamente que $f$ é uma função. Ora $x \in \mathcal{U}$, pelo V-VI Axiom, segue-se que $\bigcup \operatorname{img}(f) \in \mathcal{U}$, de sorte que se $w \in \bigcup \operatorname{img}(f)$, então existe $v \in \operatorname{img}(f)$, tal que $w \in v$. Pelo fato de $v \in \operatorname{img}(f)$, existe $z \in x$, tal que $v = \{z\} \times y$, logo $w \in v = \{z\} \times y$, i.e., $w \in x \times y$; assim $\bigcup \operatorname{img}(f) \subset x \times y$.

Por outro lado, dado $(u, v) \in x \times y$, existe $\{u\} \times y \in \operatorname{img}(f)$, tal que $(u, v) \in \{u\} \times y$, i.e., $x \times y \subset \bigcup \operatorname{img}(f)$.

Destarte, pelo 27 Theorem, incorremos que

$$x \times y = \bigcup \operatorname{img}(f).$$

///

Teorema 14 (75 Theorem) *Se $f$ é uma função* e $\operatorname{dom} f \in \mathcal{U}$, *então $f \in U$.*

*Prova* É suficiente notar que pelo 38 Theorem $2^{x \times y} \in U$, pois $x, y \in \mathcal{U}$. Daí fazendo $x = \operatorname{dom}(f)$ e $y = \operatorname{img}(f)$ concluímos do Axiom V-VI que $y \in \mathcal{U}$. Como $f \subset 2^{x \times y} \in U$, do 33 Theorem, segue-se que $f \in \mathcal{U}$. ///

Definição 15 (76 Definition)

$$y^x = \big\{f : \Phi(f) \wedge x = \operatorname{dom}(f) \wedge \operatorname{img}(f) \subset y\big\}.$$

Teorema 16 (77 Theorem) *Se $x, y \in \mathcal{U}$, então $y^x \in \mathcal{U}$.*

*Prova* Provar ///