

## FUNÇÕES

TEOREMA 1 (67 THEOREM)  $\text{dom}(\mathcal{U}) = \mathcal{U}$  e  $\text{img}(\mathcal{U}) = \mathcal{U}$ .

*Prova* Note que para todo  $x \in \mathcal{U}$ , temos que  $(x, x) \in \mathcal{U}$ . ///

DEFINIÇÃO 2 (68 DEFINITION)  $f(x) = \bigcap \{y : (x, y) \in f\}$ .

A classe  $f(x)$  é o *valor* de  $f$  em  $x$  ou a *imagem* de  $x$  sob  $f$ . É importante ser observado que  $x$  pode ser entendido como elemento do  $\text{dom}(f)$ , e como classe. Vale deixar explícito que  $f(x)$  é sempre interpretado na primeira acepção e não na segunda, ou seja

$$f(x) \neq \{y : \exists z(z \in x \wedge (z, y) \in f)\}.$$

TEOREMA 3 (69 THEOREM) Se  $x \notin \text{dom}(f)$ , então  $f(x) = \mathcal{U}$ ; se  $x \in \text{dom}(f)$ , então  $f(x) \in \mathcal{U}$ .

*Prova* Se  $x \notin \text{dom}(f)$ , então  $y : (x, y) \in f = \emptyset$ , consequentemente

$$f(x) = \bigcap \{y : (x, y) \in f\} = \bigcap \emptyset = \mathcal{U}.$$

Agora se  $x \in \text{dom}(f)$ , então  $\{y : (x, y) \in f\} \neq \emptyset$ , pelo **35 Theorem** concluímos que

$$f(x) = \bigcap \{y : (x, y) \in f\} \in \mathcal{U}.$$

///

TEOREMA 4 (70 THEOREM) Se  $f$  é uma função, então  $f = \{(x, y) : y = f(x)\}$

*Prova* Se  $f$  é uma função então para todo  $x \in \text{dom}(f)$ , existe um  $y$  tal que  $(x, y) \in f$ . Não obstante,  $(x, z) \in f$  se, e somente se,  $z = y$ . Consequentemente,

$$\{z : (x, z) \in f\} = \{z : z = y\} = \{y\}$$

daí

$$f(x) = \bigcap \{z : (x, z) \in f\} = \bigcap \{y\} = y.$$

Assim, para todo  $x \in \text{dom}(f)$ , vale  $(x, f(x)) \in f$ , particularmente

$$f = \{(x, y) : y = f(x)\}.$$

///

Imediatamente temos o

TEOREMA 5 (71 THEOREM\*) Se  $f$  e  $g$  são funções, então  $f(x) = g(x)$ , para todo  $x$ .

*Prova* Imediata ao THEOREM 70. ///

AXIOMA 6 (V AXIOM OF SUBSTITUTION) Se  $f$  é uma função e  $\text{dom}(f) \in \mathcal{U}$ , então  $\text{img}(f) \in \mathcal{U}$ .

AXIOMA 7 (VI AXIOMA OF AMALGAMATION) Se  $x \in U$ , então  $\bigcup x \in U$ .

DEFINIÇÃO 8 (72 DEFINITION)  $x \times y = \{(u, v) : u \in x \wedge v \in y\}$ .

A classe  $x \times y$  é chamanda de produto cartesiano de  $x$  e  $y$ .

TEOREMA 9 (73 THEOREM) Se  $u, y \in \mathcal{U}$ , então  $\{u\} \times y \in \mathcal{U}$ .

*Prova* Construamos a seguinte função

$$f = \{(x, (u, x)) : x \in y\}.$$

Como  $\text{dom}(f) = x \in \mathcal{U}$ , pelo axioma V concluímos

$$\{u\} \times y = \{(u, x) : x \in y\} = \text{img}(f) \in \mathcal{U}.$$

///

AXIOMA 10 (V-VI AXIOM) Se  $\text{dom}(f) \in \mathcal{U}$ , então  $\bigcup \text{img}(f) \in \mathcal{U}$ .

Este último axioma é a síntese dos axiomas V e VI, isto é elucidado pelo seguinte

TEOREMA 11 Os axiomas V e VI são equivalentes ao axioma V-VI.

*Prova* Admitamos que  $\text{dom}(f) \in \mathcal{U}$ , e os axiomas V e VI, segue naturalmente  $\text{img}(f) \in U$  por V e  $\bigcup \text{img}(f) \in \mathcal{U}$  por VI.

Reciprocamente, suponhamos que  $\text{dom}(f) \in \mathcal{U}$ , pelo axioma V-VI, segue-se que  $x = \bigcup \text{img}(f) \in \mathcal{U}$ , logo  $2^x \in \mathcal{U}$ , como  $\text{img}(f) \subset 2^x$ , pelo III AXIOM OF SUBSETS, incorremos que  $\text{img}(f) \in \mathcal{U}$  o que prova V. Ademais, suponhamos que  $x \in \mathcal{U}$ , e considemos  $i = \{(u, u) : u \in x\}$ , por V segue-se que  $\bigcup x = \bigcup \text{img}(i) \in \mathcal{U}$ , o que prova VI. ///

TEOREMA 12 (74 THEOREM) Se  $x, y \in \mathcal{U}$ , então  $x \times y \in \mathcal{U}$ .

*Prova* Provar. ///