Exemplo 1 (Exercício 16 do PMA) *Considere $\alpha \in \,]0,\infty[$ e a sequência $x : \omega \longrightarrow R$ tal que $x_0 > \sqrt{\alpha}$ e*

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\Big(x_n + \frac{\alpha}{x_n}\Big), \tag{1}$$

para todo $n \in \omega$. Primeiro, observemos que

$$\forall y\Bigg(y > \sqrt{\alpha} \longrightarrow \sqrt{\alpha} < \frac{1}{2}\Big(y + \frac{\alpha}{y}\Big) < y\Bigg). \tag{2}$$

Segue-se de manipulações das duas desigualdades, uma é trivialmente verdadeira,

$$(y - \sqrt{\alpha})^2 > 0 \longleftrightarrow \frac{1}{2}\Big(y + \frac{\alpha}{y}\Big) > \sqrt{\alpha}. \tag{3}$$

Desta forma, a sequência é trivialmente estritamente decrescente. Ademais, ela é limitada inferiormente por 0, como consequência é convergente. Certamente que pela própria definição $x_n \in \,]0,\infty[$, para todo n. Se $\lim_n x_n = 0$, teríamos

$$\alpha = \lim_n x_n^2 + \alpha = \lim_n (2x_{n+1}x_n) = 0$$

uma contradição com a suposição $\alpha > 0$. Destarte, $l = \lim_n x_n > 0$, daí obtemos

$$l = \lim_n x_{n+1} = \lim_n \frac{x_n^2 + \alpha}{2x_n} = \frac{l^2 + \alpha}{2l}$$

donde segue-se que $l = \sqrt{\alpha}$. ∎

Definição 1 *Sejam $\sum a_n$ uma série convergente de termos estritamente positivos, e $K \subset \omega$. Seja κ_K a característica de K. Então definimos*

$$\Sigma_K = \sum_{i=0}^{\infty} \kappa_K(i) a_i. \tag{4}$$

Evidentemente Σ_K é finito pois $\sum a_n < \infty$.

Lema 1 *Considere $\sum a_n$ como na* **Definição 1**. *Sejam $K, L \in 2^\omega$.*

I. *Se $K \cap L = \emptyset$, então*

$$\Sigma_K + \Sigma_L = \Sigma_{K\cup L}. \tag{5}$$

II. *Se $K \subset L$, então $\Sigma_K \leq \Sigma_L$;*

Prova Provar. ∎

Teorema 1 (4.31 Remark: *Principles of Mathematical Analysis***)** *Seja $E \subset \,]a,b[$ enumerável, virtualmente denso. Enumeremos E, digamos, por uma sequência $\sigma \in E^\omega$, neste caso a sequência é uma bijeção entre ω e E. Seja também $\sum a_n$ uma série convergente de termos estritamente positivos. Seguidamente seja $x \in \,]a,b[$ definamos*

$$K_x = \sigma^{-1}(]a,x[). \tag{6}$$

Seja

$$f = \Big\{z : \exists x\big(x \in \,]a,b[\ \wedge z = (x, \Sigma_{K_x})\big)\Big\} \tag{7}$$

Então $f \in \mathbb{R}^{]a,b[}$, tem as seguintes propriedades:

(a) *f é monotonicamente crescente em $]a,b[$;*

(b) *f é descontínua em todo ponto de E; Em verdade,*

$$f(\sigma_n+) - f(\sigma_n-) = a_n; \tag{8}$$

(c) *f é contínua em $]a,b[\,\neg\, E$.*

Prova Primeiramente, suponha que $a < x < y < b$. Evidentemente $K_x \subset K_y$, por conseguinte do **Lema 1** $f(x) \leq f(y)$, segue-se (a).

Seguidamente, provemos que para todo $x \in \,]a,b[$

$$f(x) = \sup\{f(t) : t \in \,]a,x[\} = f(x-). \tag{9}$$

Para tanto seja $\varepsilon > 0$, existe naturalmente $i_\varepsilon \in \omega$, tal que

$$0 \leq \sum_{i=0}^{i_\varepsilon - 1 + n} \kappa_{K_x}(i) a_i - \sum_{i=0}^{i_\varepsilon - 1} \kappa_{K_x}(i) a_i < \varepsilon. \tag{10}$$

para todo $n \in \omega$. Podemos escolher $t \in \,]a,x[$, tal que $i_\varepsilon \cap K_x \subset K_t$, temos que $f(t) \leq f(x)$ e

$$\sum_{i=0}^{i_\varepsilon - 1} \kappa_{K_x}(i) a_i \leq \sum_{i=0}^{\infty} \kappa_{K_t}(i) a_i = f(t). \tag{11}$$

Tomando o limite em (10) e comparando com (11) obtemos

$$0 \leq f(x) - f(x-) \leq f(x) - f(t) \leq \varepsilon, \tag{12}$$

como $\varepsilon > 0$ é arbitrário inferimos (9).

Em seguida observemos que

$$I = \bigcap \{K_t : t \in \,]x,b[\} \neq \emptyset \tag{13}$$

se, e somente se, existe $n \in \omega$, tal que $x = \sigma_n$. Com efeito, como $I \subset \Im\sigma$, se $I \neq \emptyset$, existe $n \in \omega$, tal que $\sigma_n \in I$. Daí segue que $\sigma_n \in K_t$, para todo $t \in \,]x,b[$, logo, $\sigma_n \in \,]x,t[$, para todo $t \in \,]x,b[$, consequentemente $\sigma_n = x$. A recíproca não é difícil[1].

Assim, se $x \notin \Im\sigma = E$, então $I = \emptyset$. Suponhamos que este seja o caso. Portanto, sejam $y \in \,]x,b[$ e $\varepsilon > 0$, como $\sum \kappa_{K_y}(i) a_i < \infty$, existe i_ε, tal que

$$\sum_{i=i_\varepsilon}^{\infty} \kappa_{K_y}(i) a_i < \varepsilon. \tag{14}$$

Podemos escolher $t \in \,]x,y[$, tal que $i_\varepsilon^+ \subset \neg K_t$. De fato, basta tomar $t < \min\{\sigma_i : i \in i_\varepsilon^+\}$. Ademais,

$$0 \leq f(x+) - f(x) \leq f(t) - f(x) \leq \sum_{i=i_\varepsilon}^{\infty} \kappa_{K_t}(i) a_i \leq \sum_{i=i_\varepsilon}^{\infty} \kappa_{K_y}(i) a_i < \varepsilon, \tag{15}$$

como $\varepsilon > 0$ é arbitrário segue-se que $f(x+) = f(x) = f(-x)$, consequentemente f é contínua em x. Como $x \in \,]a,b[\,\neg\, E$, é arbitrário provamos (c).

[1] Provar.

Agora seja, $y \in]\sigma_n, b[$, novamente dado $\varepsilon > 0$ escolhamos $i_\varepsilon > n$, tal que

$$\sum_{i=i_\varepsilon}^{\infty} \kappa_{K_y}(i) a_i < \varepsilon. \tag{16}$$

Escolhamos $t \in]\sigma_n, y[$, tal que $i_\varepsilon^+ \subset \neg K_t$. Temos em conformidade,

$$0 \leq f(\sigma_n+) - f(\sigma_n) - a_n \leq \sum_{i=i_\varepsilon}^{\infty} \kappa_{K_t}(i) a_i \leq \sum_{i=i_\varepsilon}^{\infty} \kappa_{K_y}(i) a_i < \varepsilon. \tag{17}$$

Da arbitrariedade de $\varepsilon > 0$, concluímos que

$$f(\sigma_n+) - f(\sigma_n) = f(\sigma_n+) - f(\sigma_n-) = a_n, \tag{18}$$

provando portanto o item (b). ∎