

## FUNÇÕES

DEFINIÇÃO 1  $\Phi(f)$  se, e somente se,  $f$  é uma função.

TEOREMA 2 (67 THEOREM)  $\text{dom}(\mathcal{U}) = \mathcal{U}$  e  $\text{img}(\mathcal{U}) = \mathcal{U}$ .

*Prova* Note que para todo  $x \in \mathcal{U}$ , temos que  $(x, x) \in \mathcal{U}$ . ///

DEFINIÇÃO 3 (68 DEFINITION)  $f(x) = \bigcap \{y : (x, y) \in f\}$ .

A classe  $f(x)$  é o *valor* de  $f$  em  $x$  ou a *imagem* de  $x$  sob  $f$ . É importante ser observado que  $x$  pode ser entendido como elemento do  $\text{dom}(f)$ , e como classe. Vale deixar explícito que  $f(x)$  é sempre interpretado na primeira acepção e não na segunda, ou seja

$$f(x) \neq \{y : \exists z(z \in x \wedge (z, y) \in f)\}.$$

TEOREMA 4 (69 THEOREM) Se  $x \notin \text{dom}(f)$ , então  $f(x) = \mathcal{U}$ ; se  $x \in \text{dom}(f)$ , então  $f(x) \in \mathcal{U}$ .

*Prova* Se  $x \notin \text{dom}(f)$ , então  $y : (x, y) \in f = \emptyset$ , consequentemente

$$f(x) = \bigcap \{y : (x, y) \in f\} = \bigcap \emptyset = \mathcal{U}.$$

Agora se  $x \in \text{dom}(f)$ , então  $\{y : (x, y) \in f\} \neq \emptyset$ , pelo **35 Theorem** concluímos que

$$f(x) = \bigcap \{y : (x, y) \in f\} \in \mathcal{U}.$$

///

TEOREMA 5 (70 THEOREM) Se  $f$  é uma função, então  $f = \{(x, y) : y = f(x)\}$

*Prova* Se  $f$  é uma função então para todo  $x \in \text{dom}(f)$ , existe um  $y$  tal que  $(x, y) \in f$ . Não obstante,  $(x, z) \in f$  se, e somente se,  $z = y$ . Consequentemente,

$$\{z : (x, z) \in f\} = \{z : z = y\} = \{y\}$$

daí

$$f(x) = \bigcap \{z : (x, z) \in f\} = \bigcap \{y\} = y.$$

Assim, para todo  $x \in \text{dom}(f)$ , vale  $(x, f(x)) \in f$ , particularmente

$$f = \{(x, y) : y = f(x)\}.$$

///

Imediatamente temos o

TEOREMA 6 (71 THEOREM\*) *Se  $f$  e  $g$  são funções, então  $f(x) = g(x)$ , para todo  $x$ .*

*Prova* Imediata ao THEOREM 70.

///

AXIOMA 7 (V AXIOM OF SUBSTITUTION) *Se  $f$  é uma função e  $\text{dom}(f) \in \mathcal{U}$ , então  $\text{img}(f) \in \mathcal{U}$ .*

AXIOMA 8 (VI AXIOM OF AMALGAMATION) *Se  $x \in U$ , então  $\bigcup x \in \mathcal{U}$ .*

DEFINIÇÃO 9 (72 DEFINITION)  $x \times y = \{(u, v) : u \in x \wedge v \in y\}$ .

A classe  $x \times y$  é chamanda de produto cartesiano de  $x$  e  $y$ .

TEOREMA 10 (73 THEOREM) *Se  $u, y \in \mathcal{U}$ , então  $\{u\} \times y \in \mathcal{U}$ .*

*Prova* Construamos a seguinte função

$$f = \{(x, (u, x)) : x \in y\}.$$

Como  $\text{dom}(f) = x \in \mathcal{U}$ , pelo axioma V concluimos

$$\{u\} \times y = \{(u, x) : x \in y\} = \text{img}(f) \in \mathcal{U}.$$

///

AXIOMA 11 (V-VI AXIOM) *Se  $\text{dom}(f) \in \mathcal{U}$ , então  $\bigcup \text{img}(f) \in \mathcal{U}$ .*

Este último axioma é a síntese dos axiomas V e VI, isto é elucidado pelo seguinte

TEOREMA 12 *Os axiomas V e VI são equivalentes ao axioma V-VI.*

*Prova* Admitamos que  $\text{dom}(f) \in \mathcal{U}$ , e os axiomas V e VI, segue naturalmente  $\text{img}(f) \in U$  por V e  $\bigcup \text{img}(f) \in \mathcal{U}$  por VI.

Reciprocamente, suponhamos que  $\text{dom}(f) \in \mathcal{U}$ , pelo axioma V-VI, segue-se que  $x = \bigcup \text{img}(f) \in \mathcal{U}$ , logo  $2^x \in \mathcal{U}$ , como  $\text{img}(f) \subset 2^x$ , pelo III AXIOM OF SUBSETS, incorremos que  $\text{img}(f) \in \mathcal{U}$  o que prova V. Ademais, suponhamos que  $x \in \mathcal{U}$ , e considemos  $i = \{(u, u) : u \in x\}$ , por V segue-se que  $\bigcup x = \bigcup \text{img}(i) \in \mathcal{U}$ , o que prova VI.

///

TEOREMA 13 (74 THEOREM) Se  $x, y \in \mathcal{U}$ , então  $x \times y \in \mathcal{U}$ .

*Prova* Para tanto, consideremos

$$f = \{(z, \{z\} \times y) : z \in x\}$$

Atesta-se imediatamente que  $f$  é uma função. Ora  $x \in \mathcal{U}$ , pelo V-VI AXIOM, segue-se que  $\bigcup \text{img}(f) \in \mathcal{U}$ , de sorte que se  $w \in \bigcup \text{img}(f)$ , então existe  $v \in \text{img}(f)$ , tal que  $w \in v$ . Pelo fato de  $v \in \text{img}(f)$ , existe  $z \in x$ , tal que  $v = \{z\} \times y$ , logo  $w \in v = \{z\} \times y$ , i.e.,  $w \in x \times y$ ; assim  $\bigcup \text{img}(f) \subset x \times y$ .

Por outro lado, dado  $(u, v) \in x \times y$ , existe  $\{u\} \times y \in \text{img}(f)$ , tal que  $(u, v) \in \{u\} \times y$ , i.e.,  $x \times y \subset \bigcup \text{img}(f)$ .

Destarte, pelo 27 THEOREM, incorremos que

$$x \times y = \bigcup \text{img}(f).$$

///

TEOREMA 14 (75 THEOREM) Se  $f$  é uma função e  $\text{dom } f \in \mathcal{U}$ , então  $f \in \mathcal{U}$ .

*Prova* É suficiente notar que pelo 38 THEOREM  $2^{x \times y} \in \mathcal{U}$ , pois  $x, y \in \mathcal{U}$ . Daí fazendo  $x = \text{dom}(f)$  e  $y = \text{img}(f)$  concluimos do AXIOM V-VI que  $y \in \mathcal{U}$ . Como  $f \subset 2^{x \times y} \in \mathcal{U}$ , do 33 THEOREM, segue-se que  $f \in \mathcal{U}$ .  
///

DEFINIÇÃO 15 (76 DEFINITION)

$$y^x = \{f : \Phi(f) \wedge x = \text{dom}(f) \wedge \text{img}(f) \subset y\}.$$

TEOREMA 16 (77 THEOREM) Se  $x, y \in \mathcal{U}$ , então  $y^x \in \mathcal{U}$ .

*Prova* Provar.

///