

Dedico o resultado destas anotações aos meus Senhores. Primeiro, a Deus, que, consoante o seu desígnio, me concede o discernimento e o pão de cada dia. Segundo, a Jesus, não menos importante, em cujas palavras tanto me comprazo, e ciente de que Ele é O Caminho e A Verdade.

SUMÁRIO

PARTE I • CIÊNCIAS FORMAIS

1	Geometria analítica	5
1.1	Cônicas	5
1.1.1	Eliminação dos termos lineares por translações	5
1.1.2	Eliminação do termo quadrático misto por rotações	7
1.1.2.1	Rotações de sistemas de coordenadas	7
2	Álgebra linear	10
2.1	Espaços vetoriais	10

PARTE II • CIÊNCIAS NATURAIS

3	Equação de carga de um capacitor	13
----------	---	-----------

PRELÚDIO

O texto que segue trata-se de um compêndio de assuntos que acho relevantes. Portanto, sem margem para dúvidas, o texto reflete minha subjetividade. Este texto estará em construção contínua, de maneira que não haverá versão final enquanto as circunstâncias da vida sobrepujarem o meu ímpeto de colecionar tais informações. Alguns resultados são de minha autoria, mas certamente estão enviesados por alguma obra, de maneira que não descobri a roda, mas me sustentei sobre o trabalho de vários indivíduos perspicazes. Além disso, é impossível colecionar tudo o que nos interessa. Destarte, me ative aos que, ao menos, tive alguma ideia de demonstração.

I

CIÊNCIAS FORMAIS

1

GEOMETRIA ANALÍTICA

1.1 CÔNICAS

DEFINIÇÃO 1 Consideremos g um polinômio de duas variáveis de grau 2 com coeficientes em \mathbb{R} dado por

$$(1.1) \quad g(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f.$$

Uma cônica C é o locus (lugar geométrico) ou conjunto de pontos

$$(1.2) \quad C = \{(x, y) : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \wedge g(x, y) = 0\}.$$

O objetivo das próximas seções é aplicar transformações ao sistema de coordenadas, de tal maneira que a cônica seja facilmente reconhecida.

1.1.1 ELIMINAÇÃO DOS TERMOS LINEARES POR TRANSLAÇÕES

Dados pontos $\Omega = (h, k)$ e (x, y) de \mathbb{R}^2 , as coordenadas (u, v) de (x, y) relativo ao sistema cuja origem é Ω , são simplesmente dadas pela identidade

$$(1.3) \quad (u, v) = (x, y) - (h, k).$$

Em verdade, o sistema de coordenadas é a transformação afim $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, dada por

$$(1.4) \quad T(v) = v - \Omega.$$

Em outros termos, estamos calculando as coordenadas dum ponto v relativo a um sistema de coordenadas cuja a origem é precisamente Ω .

A relação das coordenadas (u, v) do sistema transladado segundo o sistema antigo é expressa pelo sistema

$$(1.5) \quad \begin{cases} x = u + h \\ y = v + k \end{cases}$$

Em seguida, calculemos $G(u, v) = g(u + h, v + k)$. Conformemente,

$$(1.6) \quad \begin{aligned} G(u, v) &= a(u + h)^2 + b(u + h)(v + k) + c(v + k)^2 + d(u + h) + e(v + k) + f \\ &= au^2 + buv + cv^2 + u(2ah + bk + d) + v(bh + 2ck + e) \\ &\quad + \underbrace{ah^2 + bhk + ck^2 + dh + ek + f}_{g(h,k)} \\ &= au^2 + buv + cv^2 + u(2ah + bk + d) + v(bh + 2ck + e) + g(h, k) \end{aligned}$$

Nosso objetivo é eliminar os termos lineares segundo u e v . Para tanto, precisamos resolver o sistema

$$(1.7) \quad \begin{cases} 2ah + bk + d = 0 \\ bh + 2ck + e = 0 \end{cases}$$

que por sua vez, é equivalente ao sistema

$$(1.8) \quad \begin{cases} ah + \frac{b}{2}k = -\frac{d}{2} \\ \frac{b}{2}h + ck = -\frac{e}{2} \end{cases}$$

Cuja solubilidade é atestada pelo determinante

$$(1.9) \quad \begin{vmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{vmatrix} = ac - \frac{b^2}{4}.$$

É sabido que o sistema (1.8) admite uma única solução, i.e., é determinado, se, e somente se, $ac - b^2/4 \neq 0$. Caso contrário, o sistema admite infinitas soluções, neste caso diz-se que ele é indeterminado, ou não admite soluções, i.e., é impossível.

Destarte, temos um método pragmático para determinar se é possível eliminar os termos lineares do polinômio g , a saber, se, e somente se, o sistema (1.8) admite soluções.

A seguir está provado que no caso do sistema (1.8) admitir infinitas soluções, o termo independente de g no novo sistema de coordenadas é inexorável à escolha da solução do sistema (1.8).

TEOREMA 1 (EXERCÍCIO 23-10 - BOULOSCAMARGO 1) *Se o sistema (1.8) admite infinitas soluções, então g é constante no seu conjunto de soluções.*

PROVA Sejam (h, k) e (u, v) soluções do sistema (1.8). Em verdade não é difícil notar que $(h + k, u + v)$ também o é, bastando para isto substituir as respectivas coordenadas do par no sistema (1.8) e atestar as igualdades.

Notemos em seguida que qualquer solução (x, y) de (1.8), satisfaz

$$(1.10) \quad ax^2 + bxy + cy^2 + \frac{d}{2}x + \frac{e}{2}y = x\left(ax + \frac{b}{2}y + \frac{d}{2}\right) + y\left(\frac{b}{2}x + cy + \frac{e}{2}\right) = 0$$

e

$$(1.11) \quad \begin{aligned} g(x, y) &= ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f \\ &= x\left(ax + \frac{b}{2}y + \frac{d}{2}\right) + y\left(\frac{b}{2}x + cy + \frac{e}{2}\right) + \frac{d}{2}x + \frac{e}{2}y + f \\ &= \frac{d}{2}x + \frac{e}{2}y + f. \end{aligned}$$

Em conformidade, segue-se

$$(1.12) \quad 2\left[u\left(a(u+h) + \frac{b}{2}(k+v) + \frac{d}{2}\right) + v\left(\frac{b}{2}(u+h) + c(v+k) + \frac{e}{2}\right)\right] = 0$$

de (1.10) com $(x, y) = (u, v)$ e (1.12) podemos inferir

$$(1.13) \quad au^2 + buv + cv^2 + \frac{d}{2}u + \frac{e}{2}v + 2ahu + 2ckv + b hv + buk = 0.$$

Como consequência, de (1.10), (1.11) e (1.13) temos

$$\begin{aligned}
 g(h, k) &= ah^2 + bhk + ck^2 + dh + ck + f \\
 &= ah^2 + bhk + ck^2 + dh + ck + f + au^2 + buv + cv^2 \\
 &\quad + \frac{d}{2}u + \frac{e}{2}v + 2ahu + 2ckv + bhv + buk \\
 (1.14) \quad &= a(h+u)^2 + b(u+h)(v+k) + c(k+v)^2 \\
 &\quad + \frac{d}{2}(h+u) + \frac{e}{2}(k+v) + \frac{d}{2}u + \frac{e}{2}v + f \\
 &= \frac{d}{2}u + \frac{e}{2}v + f \\
 &= g(u, v)
 \end{aligned}$$

Em outros termos g é constante no conjunto de soluções do sistema (1.8). ■

1.1.2 ELIMINAÇÃO DO TERMO QUADRÁTICO MISTO POR ROTAÇÕES

1.1.2.1 ROTAÇÕES DE SISTEMAS DE COORDENADAS

Consideremos um sistema de coordenadas cartesianas e um sistema cujos eixos sejam obtidos do primeiro por uma rotação dum ângulo θ no sentido anti-horário em relação ao eixo das abscissas.

Figura 1.1: Rotação dum sistema de coordenadas cartesiano por um ângulo θ .

Consideremos um ponto $w = (u, v)_\theta$ cujas coordenadas são dadas em relação ao sistema rotacionado. Nossa objetivo é determinar as coordenadas de w relativo ao primeiro sistema. A título de exemplo, usaremos um método geométrico para um caso particular, que pode ser adaptado aos outros casos.

Observemos, pois, a figura seguinte

Figura 1.2: Rotação dum sistema de coordenadas cartesiano por um ângulo θ .

Em conformidade com a figura estamos supondo que $\theta \in]0, \pi/2[$. Uma análise geométrica nos fornece o seguinte sistema

$$(1.15) \quad \begin{cases} u = \frac{x}{\cos \theta} + v \tan \theta \\ y = \frac{v}{\cos \theta} + x \tan \theta \end{cases}$$

Donde, multiplicando a primeira por $\cos \theta$, obtemos

$$(1.16) \quad x = u \cos \theta - v \sin \theta,$$

Substituindo x na segunda equação de (1.15), deduz-se

$$\begin{aligned}
 (1.17) \quad y &= \frac{v}{\cos \theta} + \tan \theta(u \cos \theta - v \sin \theta) \\
 &= \frac{v}{\cos \theta} + u \sin \theta + \frac{v \sin^2 \theta}{\cos \theta} \\
 &= u \sin \theta + v \cos \theta.
 \end{aligned}$$

Assim, as coordenadas x e y de w relativas ao sistema canônico é dado pela identidade

$$(1.18) \quad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$$

Fazendo a substituição de (x, y) segundo (1.18) obtemos

$$(1.19) \quad \begin{aligned} G(u, v) &= (a \cos^2 \theta + b \cos \theta \sin \theta + c \sin^2 \theta)u^2 + ((a - c) \sin 2\theta + b \cos 2\theta)uv \\ &\quad + (a \sin^2 \theta - b \cos \theta \sin \theta + c \cos^2 \theta)v^2 + (d \cos \theta + e \sin \theta)u \\ &\quad + (e \cos \theta - d \sin \theta)v + f \end{aligned}$$

Por questões práticas, escreveremos

$$(1.20) \quad G(u, v) = \alpha u^2 + \beta uv + \gamma v^2 + \delta u + \varepsilon v + f,$$

o que pressupõe as igualdades

$$(1.21) \quad \begin{aligned} \alpha &= a \cos^2 \theta + b \cos \theta \sin \theta + c \sin^2 \theta \\ \beta &= (a - c) \sin 2\theta + b \cos 2\theta \\ \gamma &= a \sin^2 \theta - b \cos \theta \sin \theta + c \cos^2 \theta \\ \delta &= d \cos \theta + e \sin \theta \\ \varepsilon &= e \cos \theta - d \sin \theta \end{aligned}$$

Agora, nosso intento é que o termo misto se anule, para este fim devemos determinar θ , tal que $\beta = 0$. Notavelmente, estamos estipulando *a priori* que $b \neq 0$, pois do contrário a rotação do sistema de coordenadas não teria desígnio algum. Em conformidade com esta estipulação e com as notações anteriores segue-se o

TEOREMA 2 *Seja C uma cônica cujo o termo quadrático misto do polinômio subjacente g seja não nulo. Então existe uma rotação R_θ de um ângulo θ , segundo a qual o termo quadrático misto do polinômio subjacente $G = gR_\theta$ é nulo*

PROVA De (1.21) segue que

$$(1.22) \quad (a - c) \sin 2\theta = b \cos 2\theta$$

Daí vem necessariamente que $2\theta \neq n\pi$, para todo $n \in \mathbb{Z}$, consequentemente $\sin 2\theta \neq 0$. Com efeito, suponha que exista $n \in \mathbb{Z}$, tal que $2\theta = n\pi$, decorre de (1.22) que

$$(1.23) \quad b = b \cos 2\theta = (a - c) \sin 2\theta = 0,$$

o que contradiz nossa suposição. Portanto, podemos escrever

$$(1.24) \quad \cot 2\theta = \frac{\cos 2\theta}{\sin 2\theta} = \frac{a - c}{b}.$$

Conforme se sabe, cot tem restrições inversíveis em $\mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$. Se reduzirmos nossa escolha ao intervalo $[0, 2\pi[$, temos duas soluções para (1.24), uma no semicírculo superior e a outra no semicírculo inferior. ■

Escolhido θ conforme no **TEOREMA 2**, temos de (1.21) e (1.24) que

$$(1.25) \quad \alpha - \gamma = b \cot 2\theta \cos 2\theta + b \sin \theta = \frac{b}{\sin 2\theta}.$$

Em consonância com (1.21), podemos inferir

$$(1.26) \quad \alpha = \frac{1}{2} \left(a + c + \frac{b}{\sin 2\theta} \right) \quad \text{e} \quad \gamma = \frac{1}{2} \left(a + c - \frac{b}{\sin 2\theta} \right)$$

As identidades trigonométricas

$$(1.27) \quad \begin{aligned} \sin^2 2\theta &= \frac{1}{1 + \cot^2 2\theta} \\ \cos 2\theta &= \cot 2\theta \sin 2\theta \\ \cos^2 \theta &= \frac{1 + \cos 2\theta}{2} \\ \sin^2 \theta &= \frac{1 - \cos 2\theta}{2} \end{aligned}$$

nos permitem determinar uma solução do sistema

$$(1.28) \quad \begin{cases} \delta = d \cos \theta + e \sin \theta \\ \varepsilon = e \cos \theta - d \sin \theta \end{cases}$$

Em suma, o que podemos concluir é que dada uma cônica, podemos sempre supor sem perda de generalidade que o termo quadrático misto do polinômio subjacente seja nulo.

2

ÁLGEBRA LINEAR

2.1 ESPAÇOS VETORIAIS

A seguir apresentarei alguns exercícios pertinentes de [Hoffman].

PROPOSIÇÃO 1 *Sejam V um espaço vetorial e $W_i \subset V$, com $i \in \{1, 2\}$, subespaços vetoriais tais que $W = W_1 \cup W_2$ é um subespaço de V . Então, existe um $i \in \{1, 2\}$, tal que $W_i \subset W_j$, com $i \neq j$.*

PROVA Suponhamos por *reductio ad absurdum* que

$$(2.1) \quad W_1 \setminus W_2 \neq \emptyset \wedge W_2 \setminus W_1 \neq \emptyset$$

Sejam $w_1 \in W_1 \setminus W_2$ e $w_2 \in W_2 \setminus W_1$, das hipóteses $w = w_1 + w_2 \in W$. Todavia, $w \notin W_1$ e $w \notin W_2$. Pois, digamos que $w \in W_1$, então $w_2 = w - w_1 \in W_1$, o que é uma contradição pois $w_2 \in W_2 \setminus W_1$. Agora se $w \in W_2$, então analogamente $w_1 = w - w_2 \in W_2$, outra contradição, pois $W_1 \setminus W_2$. Concluímos, portanto, que existe $i \in \{1, 2\}$, tal que $W_i \subset W_j$, com $i \neq j$. ■

PROPOSIÇÃO 2 *Seja K um corpo, W um espaço vetorial sobre K . Considere $V = W^K$, munido com a soma e produto por escalar usuais. Então*

$$(2.2) \quad V_i = \{f : f \in V \wedge f(-x) = -f(x)\}$$

e

$$(2.3) \quad V_p = \{f : f \in V \wedge f(-x) = f(x)\}$$

são subespaços de V , tais que

$$(2.4) \quad V_i \cap V_p = \{0\} \wedge V = V_i + V_p.$$

PROVA Primeiro é evidente que $0 \in V_i$. Sejam agora $f, g \in V_i$ e $\alpha \in K$, temos que para todo $x \in K$, vale

$$(2.5) \quad \begin{aligned} (\alpha f + g)(-x) &= \alpha f(-x) + g(-x) \\ &= -\alpha f(x) - g(x) \\ &= -(\alpha f(x) + g(x)) \\ &= -(\alpha f + g)(x), \end{aligned}$$

consequentemente V_i é um subespaço de V . O outro caso é ainda mais simples de ser provado, o argumento é inteiramente semelhante.

Seja agora $f \in V_i \cap V_p$, temos para todo $x \in K$

$$(2.6) \quad f(x) = f(-x) = -f(x),$$

logo $f = 0$ e, consequentemente $V_i \cap V_p = \{0\}$.

Por fim, seja $f \in V$. Note que $f_i, f_p \in V$ dadas por

$$(2.7) \quad f_i(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2} \quad \wedge \quad f_p(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}$$

são tais que, para todo $x \in K$ vale

$$(2.8) \quad f_i(-x) = \frac{f(-x) - f(x)}{2} = -\frac{f(x) - f(-x)}{2} = -f_i(x),$$

e.

$$(2.9) \quad f_p(-x) = \frac{f(-x) + f(x)}{2} = \frac{f(x) + f(-x)}{2} = f_p(x),$$

i.e., $(f_i, f_p) \in V_i \times V_p$. Ademais, $f = f_i + f_p$, consequentemente $V = V_i + V_p$. ■

PROPOSIÇÃO 3 *Sejam $V_i \subset V$, com $i \in \{1, 2\}$, subespaços do espaço vetorial V , tais que*

$$(2.10) \quad V = V_1 + V_2 \quad \wedge \quad V_1 \cap V_2 = \{0\}.$$

Então para todo $v \in V$ existe único $(v_1, v_2) \in V_1 \times V_2$, tais que $v = v_1 + v_2$.

PROVA A existência decorre da definição, provemos, portanto, a unicidade. Para tanto, sejam $v \in V$ e $v_i, w_i \in V_i$, com $i \in \{1, 2\}$, tais que

$$(2.11) \quad v = v_1 + v_2 = w_1 + w_2,$$

temos que

$$(2.12) \quad v_1 - w_1 = w_2 - v_2 \in V_1 \cap V_2 = \{0\}.$$

Decorre que

$$(2.13) \quad v_1 - w_1 = 0 = v_2 - w_2,$$

o que por sua vez acarreta $v_i = w_i$, com $i \in \{1, 2\}$. ■

II

CIÊNCIAS NATURAIS

3

EQUAÇÃO DE CARGA DE UM CAPACITOR

Teorema 1. Seja um capacitor de capacidade C conectado em série com um resistor de resistência R e à uma bateria de tensão V_f . Admitindo-se que o capacitor esteja inicialmente descarregado a equação de carga do capacitor é dada por:

$$V(t) = V_f(1 - e^{-\frac{t}{RC}}).$$

Prova. A corrente no capacitor $I(t)$ é a mesma que a corrente no resistor, consequentemente

$$(\ddagger) \quad \frac{V_f - V(t)}{R} = I(t) = \frac{dQ}{dt}(t) = C \frac{dV}{dt}(t)$$

em que $V(t)$ é a tensão no capacitor no instante t . Temos portanto de (\ddagger) que

$$\frac{1}{RC} = \frac{dV}{dt}(t) \frac{1}{V_f - V(t)} = -\frac{d}{dt}(V_f - V(t)) \frac{1}{V_f - V(t)}$$

em consequência do lema que vimos e multiplicando ambos membros por -1 , decorre que

$$-\frac{1}{RC} = \frac{d}{dt}(V_f - V(t)) \frac{1}{V_f - V(t)} = \frac{d}{dt}(\ln|V_f - V(t)|)$$

do teorema fundamental do cálculo vem

$$-\frac{T}{RC} = \int_0^T \frac{d}{dt}(\ln|V_f - V(t)|) dt = \ln|V_f - V(t)| \Big|_0^T$$

para $T \geq 0$.

Agora admitindo-se que $V(0) = 0$, e que $V_f - V(t) > 0$ para todo $t \in R_+$ obtemos

$$-\frac{T}{RC} = \ln(V_f - V(T)) \Big|_0^T = \ln \frac{V_f - V(T)}{V_f}$$

onde se conclui

$$\frac{V_f - V(T)}{V_f} = e^{\frac{-T}{RC}}$$

que por sua vez implica

$$V(T) = V_f(1 - e^{-\frac{T}{RC}})$$

como T é arbitrário podemos escrever sem perdas

$$V(t) = V_f(1 - e^{-\frac{t}{RC}})$$

para todo $t \geq 0$. ■

Como tratar adequadamente conversões entre grandezas, e.g., grandezas angulares? *Como explicar rigorosamente a igualdade que se encontra rotineiramente em livros:*

$$2\pi \text{ rad} = 360^\circ ?$$

Rigorosamente, os dois objetos são distintos, de maneira que a identidade não é significativa.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] CAMARGO, IVAN DE; BOULOS, PAULO. *Geometria Analítica*. 3^a ed. rev. e ampl. São Paulo, 2005.