

## PRELÚDIO

O texto que segue trata-se de um compêndio de resultados que acho relevantes, portanto, o texto reflete, e muito, minha subjetividade. Não obstante, este texto estará em construção contínua, de maneira que não haverá versão final enquanto as circunstâncias da vida sobrepujarem o meu ímpeto de colecionar tais e tais resultados. Alguns, resultados são de minha autoria, mas certamente estão enviesados por uma ou outra obra, de maneira que não descobri a roda, mas me sustentei sobre o trabalho de vários indivíduos perspicazes que pela primeira vez se depararam com o problema, e talvez, eles próprios tenham o resolvido. Saliento também que, muitos—a maioria—dos resultados não são meus, de forma que talvez eu já os tenha visto em determinado momento de minha vida, e simplesmente os reproduzi aqui. Além disso, é impossível colecionar todos os resultados interessantes, portanto, me ative aos que ao menos tive alguma ideia de demonstração, talvez inspirada por outros.

# 1

## CIÊNCIAS FORMAIS

### 1.1 LÓGICA

Para fins de nota parafraseio sem prova e duma maneira não formal o seguinte

**TEOREMA 1 (TEOREMA DA DEDUÇÃO OU LEI DA DEDUÇÃO DE TARSKI)** *Todo teorema de uma teoria dedutiva é satisfeito por qualquer modelo do sistema de axiomas desta teoria; além disso, a qualquer teorema corresponde uma sentença geral a qual pode ser formulada e provada dentro da estrutura da lógica e que estabelece o fato que o teorema em questão é satisfeito para um modelo qualquer do sistema de axiomas.*

■

**DEFINIÇÃO 1 (SISTEMA DE AXIOMAS MUTUALMENTE INDEPENDENTE)** *Um sistema de axiomas é dito MUTUALMENTE INDEPENDENTE se nenhum axioma do sistema pode ser derivado dos outros por métodos de inferência lógica, i.e., da lógica proposicional e de disciplinas precedentes<sup>1</sup>.*

### 1.2 TEORIA DOS CONJUNTOS

Decidi abordar a construção dada no apêndice do livro *General Topology* de John L. Kelley (vide pp. 250–281). Conforme atestei, o sistema empregado por Kelley, é uma adaptação do sistema de A. P. Morse, como ele bem afirma em sua obra.

Nosso sistema axiomático constituirá além da lógica proposicional, de objetos indefinidos chamados **classes**, denotadas doravante por letras do alfabeto latino. Adicionalmente, com uma relação  $\in$ , chamada pertinência.

**DEFINIÇÃO 2 (CONJUNTOS)**

$$\forall x(\zeta(x) \longleftrightarrow \exists y(x \in y)).$$

À cada classe  $x$  tal que  $\zeta(x)$ , daremos o nome de conjunto. Desta maneira  $\zeta(x)$  se, e somente se,  $x$  é um conjunto.

**AXIOMA 1 (II CLASSIFICATION AXIOM-SCHEME • AXIOMA-ESQUEMA DA CLASSIFICAÇÃO)** *Seja  $\phi$  uma função proposicional tendo como parâmetros as classes. Então*

$$\forall y(y \in \{x : \phi(x)\} \longleftrightarrow \zeta(y) \wedge \phi(y)).$$

---

<sup>1</sup>Isto está em conformidade segundo Tarski. Quais seriam estas disciplinas?

Enfatizo que os objetos da teoria de classes, resumem-se, como é esperado, às classes. Portanto, ‘ $\{x : \phi(x)\}$ ’ denota uma classe, daí o nome de *classifier* ou classificador.

**DEFINIÇÃO 3**  $\langle \phi \rangle = \{x : \phi(x)\}$ .

**AXIOMA 2 (I AXIOM OF EXTENT • AEx : AXIOMA DA EXTENSIONALIDADE)**

$$\forall x, y (x = y \longleftrightarrow \forall z (z \in x \longleftrightarrow z \in y)).$$

Friso categoricamente que uma prova rigorosa da igualdade de classes, requer o uso explícito do axioma da extensionalidade **AEx**. Portanto, a rigor, uma cadeia de igualdades de classes dadas por classificadores, mesmo que óbvia para leitores maduros, não caracteriza, segundo minha visão, uma prova. Enfatizo este ponto, pois em estágios anteriores na confecção deste compêndio eu usei tais métodos.

**TEOREMA 2**

$$\forall x (x = \{y : y \in x\}).$$

**PROVA**

$$\forall z (z \in \{y : y \in x\} \longleftrightarrow z \in x).$$

■

**DEFINIÇÃO 4**  $x \cup y = \{z : z \in x \vee z \in y\}$ .

**DEFINIÇÃO 5**  $x \cap y = \{z : z \in x \wedge z \in y\}$ .

Aos símbolos  $x \cup y$  e  $x \cap y$ , dá-se o nome de união e intersecção de  $x$  com  $y$ , respectivamente.

**TEOREMA 3**

$$\forall x, y, z (x \cap (y \cup z) = (x \cap y) \cup (x \cap z) \quad \wedge \quad x \cup (y \cap z) = (x \cup y) \cap (x \cup z))$$

**PROVA** Vamos provar a segunda proposição. Sejam  $x, y$  e  $z$  classes, notemos que

$$\begin{aligned} \forall w (w \in x \cup (y \cap z) &\longleftrightarrow w \in x \vee w \in y \cap z \\ &\longleftrightarrow w \in x \vee (w \in y \wedge w \in z) \\ (1.1) \quad &\longleftrightarrow (w \in x \vee w \in y) \wedge (w \in x \vee w \in z) \\ &\longleftrightarrow w \in (x \cup y) \wedge w \in (x \cup z) \\ &\longleftrightarrow w \in (x \cup y) \cap (x \cup z)). \end{aligned}$$

A outra prova é inteiramente análoga. De fato, decorre das propriedades dos conectivos ‘ $\wedge$ ’ e ‘ $\vee$ ’, a conjunção e disjunção lógica, respectivamente. ■

**DEFINIÇÃO 6**

$$\forall x, y (x \notin y \longleftrightarrow \neg(x \in y)).$$

**DEFINIÇÃO 7**  $\neg x = \{y : y \notin x\}$ .

A classe  $\neg x$  chama-se complemento absoluto de  $x$ .

**TEOREMA 4** Seja  $\phi$  uma função proposicional cujos parâmetros sejam classes. Então  $\neg\langle \phi \rangle = \langle \neg\phi \rangle$ .

**PROVA**

$$\forall x (x \in \neg\langle\phi\rangle \longleftrightarrow \zeta(x) \wedge \neg\phi(x) \longleftrightarrow x \in \langle\neg\phi\rangle).$$

**TEOREMA 5**

$$\forall x (\neg(\neg x) = x).$$

**PROVA**

$$(1.2) \quad \forall y (y \in \neg(\neg x) \longleftrightarrow \neg(y \in \neg x) \longleftrightarrow \neg(\neg(y \in x)) \longleftrightarrow y \in x)$$

**TEOREMA 6 (LEIS DE DE MORGAN)**

$$\forall x, y (\neg(x \cup y) = \neg x \cap \neg y \wedge \neg(x \cap y) = \neg x \cup \neg y)$$

**PROVA** A prova segue diretamente da definição de  $\cup$  e  $\cap$ , e das leis de De Morgan para os conectivos  $\vee$  e  $\wedge$ .

**DEFINIÇÃO 8**  $x \neg y = x \cap \neg y$ .

Ao símbolo ' $x \neg y$ ' dá-se o nome de diferença de  $x$  e  $y$  ou complemento de  $y$  relativo a  $x$ .

**TEOREMA 7**

$$\forall x, y, z (x \cap (y \neg z) = (x \cap y) \neg z)$$

**PROVA** Provar.**DEFINIÇÃO 9** *Seja  $\phi$  uma contradição qualquer. Definimos  $\emptyset = \langle\phi\rangle$ .*

Observe que esta definição independe da contradição. Com efeito, temos o

**TEOREMA 8** *Se  $\phi$  e  $\psi$  são duas contradições, então  $\langle\phi\rangle = \langle\psi\rangle$ .***PROVA** Com efeito,

$$(1.3) \quad \forall x (x \in \langle\phi\rangle \longleftrightarrow \zeta(x) \wedge \phi(x) \longleftrightarrow \zeta(x) \wedge \psi(x) \longleftrightarrow x \in \langle\psi\rangle),$$

pois ambos os membros da bicondicional são falsos, logo a equivalência é válida e, consequentemente a quantificação é verdadeira.

A classe  $\emptyset$  é chamada de classe nula ou vazia.

**TEOREMA 9**

$$(1.4) \quad \forall x (x \notin \emptyset).$$

**PROVA**

$$(1.5) \quad \forall x (x \in \emptyset \longleftrightarrow \zeta(x) \wedge x \neq x).$$

Como o lado direito é trivialmente falso pela definição de igualdade, decorre que  $\neg(x \in \emptyset)$ , ou equivalentemente  $x \notin \emptyset$  é verdadeira para todo  $x$ .

**TEOREMA 10**

$$(1.6) \quad \forall x(x \cup \emptyset = x \wedge x \cap \emptyset = \emptyset).$$

**PROVA** Seja  $x$  uma classe, temos em conformidade

$$(1.7) \quad \forall y(y \in x \cup \emptyset \longleftrightarrow \zeta(y) \wedge (y \in x \vee y \in \emptyset) \longleftrightarrow \zeta(y) \wedge y \in x \longleftrightarrow y \in x)$$

o que segundo o **AEx** segue-se a identidade.

Analogamente,

$$(1.8) \quad \forall y(y \in x \cap \emptyset \longleftrightarrow \zeta(y) \wedge (y \in x \wedge y \in \emptyset) \longleftrightarrow \zeta(y) \wedge y \in \emptyset \longleftrightarrow y \in \emptyset)$$

novamente pelo **AEx** infere-se a igualdade. ■

**DEFINIÇÃO 10**

$$(1.9) \quad \mathcal{U} = \neg\emptyset$$

**TEOREMA 11**

$$(1.10) \quad \forall x(x \in \mathcal{U} \longleftrightarrow \zeta(x)).$$

**PROVA**

$$(1.11) \quad \forall x(x \in \mathcal{U} \longleftrightarrow \zeta(x) \wedge x \notin \emptyset \longleftrightarrow \zeta(x)).$$
■

**TEOREMA 12** *Seja  $\phi$  uma tautologia. Então  $\langle \phi \rangle = \mathcal{U}$ .*

**PROVA** Notemos que

$$(1.12) \quad \forall x(x \in \langle \phi \rangle \longleftrightarrow \zeta(x) \wedge \phi(x) \longleftrightarrow \zeta(x) \longleftrightarrow x \in \mathcal{U}),$$

de **AEx** decorre o teorema. Outra maneira seria usar a hipótese que  $\neg\phi$  é uma contradição, e concluir de

$$(1.13) \quad \langle \phi \rangle = \neg\langle \neg\phi \rangle = \neg\emptyset = \mathcal{U}.$$
■

**TEOREMA 13**

$$(1.14) \quad \forall x(x \cup \mathcal{U} = \mathcal{U} \wedge x \cap \mathcal{U} = x)$$

**PROVA**

$$(1.15) \quad \forall y(y \in x \cup \mathcal{U} \longleftrightarrow y \in x \vee y \in \mathcal{U} \longleftrightarrow y \in \mathcal{U})$$

segue pelo **AEx**.

Seguidamente,

$$(1.16) \quad \forall y(y \in x \cap \mathcal{U} \longleftrightarrow y \in x \wedge y \in \mathcal{U} \longleftrightarrow y \in x)$$

novamente decorre por **AEx**. ■

**DEFINIÇÃO 11**

$$(1.17) \quad \cap x = \{z : \forall y(y \in x \longrightarrow z \in y)\}.$$

**DEFINIÇÃO 12**

$$(1.18) \quad \cup x = \{z : \exists y(y \in x \wedge z \in y)\}.$$

A classe  $\cap x$  é a interseção dos membros de  $x$  e, a classe  $\cup x$  é a união dos membros de  $x$ .

**TEOREMA 14**

$$(1.19) \quad \cap \emptyset = \mathcal{U} \wedge \cup \emptyset = \emptyset.$$

**PROVA**

$$(1.20) \quad \forall x(x \in \cap \emptyset \longleftrightarrow \zeta(x) \wedge \forall y(y \in \emptyset \longleftrightarrow x \in y) \longleftrightarrow x \in \mathcal{U}),$$

pois  $\phi$  definida por

$$(1.21) \quad \phi(x) \longleftrightarrow \forall y(y \in \emptyset \longleftrightarrow x \in y)$$

é uma tautologia.

Em seguida,

$$(1.22) \quad \forall x(x \in \cup \emptyset \longleftrightarrow \zeta(x) \wedge \exists(y \in \emptyset \wedge x \in y) \longleftrightarrow x \in \emptyset),$$

porquanto,  $\psi$  definida por

$$(1.23) \quad \psi(x) \longleftrightarrow \exists y(y \in \emptyset \wedge x \in y)$$

é uma contradição. ■

**DEFINIÇÃO 13**

$$(1.24) \quad \forall x(x \subset y \longleftrightarrow \forall z(z \in x \longrightarrow z \in y)).$$

Uma classe  $x$  é uma subclasse de  $y$ , ou está contida em  $y$ , ou  $y$  contem  $x$ , se, e somente se,  $x \subset y$ .

**TEOREMA 15 (26 THEOREM)**

$$(1.25) \quad \forall x(\emptyset \subset x \wedge x \subset \mathcal{U})$$

**PROVA** Seja  $x$  uma classe. Temos primeiramente

$$(1.26) \quad \forall y(y \in \emptyset \longrightarrow y \in x),$$

pois o antecedente da condicional é sempre falso. O que prova a primeira inclusão.

Por outro lado temos

$$(1.27) \quad \forall y(y \in x \longrightarrow \zeta(y) \longrightarrow y \in \mathcal{U}).$$

o que conclui a prova. ■

**TEOREMA 16 (27 THEOREM)**

$$(1.28) \quad \forall x, y (x = y \longleftrightarrow x \subset y \wedge y \subset x).$$

**PROVA** Sejam  $x$  e  $y$  classes quaisquer

$$(1.29) \quad \begin{aligned} x \subset y \wedge y \subset x &\longleftrightarrow \forall z ((z \in x \longrightarrow z \in y) \wedge (z \in y \longrightarrow z \in x)) \\ &\longleftrightarrow \forall z (z \in x \longleftrightarrow z \in y) \\ &\longleftrightarrow x = y. \end{aligned}$$

**TEOREMA 17 (28 THEOREM)**

$$(1.30) \quad \forall x, y, z (x \subset y \wedge y \subset z \longrightarrow x \subset z)$$

**PROVA** Sejam  $x, y, z$  classes quaisquer. Temos

$$(1.31) \quad \begin{aligned} (x \subset y \wedge y \subset z &\longrightarrow \forall w (w \in x \longrightarrow w \in y \wedge w \in y \longrightarrow w \in z)) \\ &\longrightarrow \forall w (w \in x \longrightarrow w \in z) \\ &\longrightarrow x \subset z) \end{aligned}$$

**TEOREMA 18**

$$(1.32) \quad \forall x, y, z (x \subset y \longrightarrow x \cap z \subset y \cap z \wedge x \cup z \subset y \cup z)$$

**PROVA** Sejam  $x, y, z$  classes quaisquer. Primeiramente,

$$(1.33) \quad \forall w (w \in x \cap z \longrightarrow w \in x \wedge w \in z \longrightarrow w \in y \wedge w \in z \longrightarrow w \in y \cap z).$$

Segundo e, por fim,

$$(1.34) \quad \forall w (w \in x \cup z \longrightarrow w \in x \vee w \in z \longrightarrow w \in y \vee w \in z \longrightarrow w \in y \cup z).$$

**TEOREMA 19**

$$(1.35) \quad \forall x, y (x \subset y \longleftrightarrow x \cup y = y)$$

**PROVA** Sejam  $x, y$  classes arbitr rias, segue-se

$$(1.36) \quad x \subset y \wedge y \subset x \cup y \longleftrightarrow x \cup y \subset y \wedge y \subset x \cup y \longleftrightarrow x \cup y = y.$$

**TEOREMA 20 (30 THEOREM)**

$$(1.37) \quad \forall x, y (x \subset y \longleftrightarrow x \cap y = x)$$

**PROVA** Dadas as classes  $x$  e  $y$ , temos

$$(1.38) \quad x \subset y \wedge x \cap y \subset x \longleftrightarrow x \subset x \cap y \wedge x \cap y \subset x \longleftrightarrow x \cap y = x.$$

**TEOREMA 21 (31 THEOREM)**

$$(1.39) \quad \forall x, y (x \subset y \longrightarrow \bigcup x \subset \bigcup y \wedge \bigcap y \subset \bigcap x).$$

**PROVA** Sejam  $x, y, z$  classes arbitrárias, tais que  $x \subset y$ . Primeiro temos

$$(1.40) \quad z \in \bigcup x \longrightarrow \exists w (w \in x \wedge z \in w) \longrightarrow \exists w (w \in y \wedge z \in w) \longrightarrow z \in \bigcup y.$$

Segundo,

$$(1.41) \quad z \in \bigcap y \longrightarrow \forall w (w \in y \longrightarrow z \in w) \longrightarrow \exists w (w \in x \longrightarrow z \in w) \longrightarrow z \in \bigcap x.$$

**TEOREMA 22 (32 THEOREM)**

$$(1.42) \quad \forall x, y (x \in y \longrightarrow x \subset \bigcup y \wedge \bigcap y \subset x)$$

**PROVA** Sejam  $x, y, z$ , classes aleatórias tais que  $x \in y$ . Inicialmente, temos

$$(1.43) \quad z \in x \longrightarrow \exists w (w \in y \wedge z \in w) \longrightarrow z \in \bigcup y.$$

Finalmente,

$$(1.44) \quad z \in \bigcap y \longrightarrow \forall w (w \in y \longrightarrow z \in w) \longrightarrow z \in x.$$

## 1.2.1 EXISTÊNCIA DE CONJUNTOS

**AXIOMA 3 (III AXIOM • AS: AXIOMA DE SUBCONJUNTOS)**

$$(1.45) \quad \forall x (\zeta(x) \longrightarrow \exists y (\zeta(y) \wedge \forall z (z \subset x \longrightarrow z \in y))).$$

**TEOREMA 23 (33 THEOREM)**

$$(1.46) \quad \forall x, z (\zeta(x) \wedge z \subset x \longrightarrow \zeta(z)).$$



**PROVA** Sejam as classes  $x$  e  $z$ , tais  $\varsigma(x)$  e  $z \subset x$ , tem-se

$$(1.47) \quad \varsigma(x) \xrightarrow{\text{AS}} \exists y (w \subset x \longrightarrow w \in y) \longrightarrow z \in w \longrightarrow \varsigma(z).$$

■

**TEOREMA 24 (34 THEOREM)**

$$(1.48) \quad \emptyset = \bigcap \mathcal{U} \wedge \mathcal{U} = \bigcup \mathcal{U}.$$

**PROVA** Primeiramente suponhamos por *reductio ad absurdum* que exista  $x \in \bigcap \mathcal{U}$ , então  $\varsigma(x)$ , pelo **TEOREMA 15** segue-se  $\emptyset \subset x$ ; assim necessariamente  $\varsigma(\emptyset)$ , ou equivalentemente  $\emptyset \in \mathcal{U}$ . Pelo **TEOREMA 22** tem-se que  $\bigcup \mathcal{U} \subset \emptyset$ , novamente pelo **TEOREMA 15** temos  $\emptyset \subset \bigcap \mathcal{U}$ , logo, pelo **TEOREMA 16** e da suposição inicial decorre que  $x \in \bigcap \mathcal{U} = \emptyset$ , o que é uma contradição. Consequentemente, não é o caso que exista  $x \in \bigcap \mathcal{U}$ , i.e.,  $\bigcap \mathcal{U} = \emptyset$ <sup>2</sup>.

Agora, seja  $x \in \mathcal{U}$ , pelo **AS** existe  $y \in \mathcal{U}$ , tal que  $x \in y$ , pois  $x \subset x$ , pela definição de  $\bigcup \mathcal{U}$ , segue-se que  $x \in \bigcup \mathcal{U}$ , consequentemente  $\mathcal{U} \subset \bigcup \mathcal{U}$ . Por outro lado, pelo **TEOREMA 15**, temos  $\bigcup \mathcal{U} \subset \mathcal{U}$ , consequentemente pelo **TEOREMA 16**,  $\bigcup \mathcal{U} = \mathcal{U}$ . ■

**TEOREMA 25 (35 THEOREM)** Para toda classe  $x$ , se  $x \neq \emptyset$ , então  $\varsigma(\bigcap x)$ .

**PROVA** Se  $x \neq \emptyset$ , então existe  $y \in x$ , logo  $\varsigma(y)$  e pelo **TEOREMA 22** tem-se  $\bigcap x \subset y$ , daí e do **TEOREMA 22**, decorre que  $\varsigma(\bigcap x)$ . ■

**DEFINIÇÃO 14**  $2^x = \{y : y \subset x\}$ .

**TEOREMA 26 (37 THEOREM)**  $2^{\mathcal{U}} = \mathcal{U}$ .

**PROVA** Certamente pelo **TEOREMA 15** segue que  $2^{\mathcal{U}} \subset \mathcal{U}$ . Agora, dado  $x \in \mathcal{U}$ , então evidentemente  $x \subset \mathcal{U}$ , consequentemente  $x \in 2^{\mathcal{U}}$ . Pelo **TEOREMA 16**, concluímos que  $2^{\mathcal{U}} = \mathcal{U}$ . ■

**TEOREMA 27 (38 THEOREM)** Se  $\varsigma(x)$ , então  $\varsigma(2^x)$ .

**PROVA** Se  $\varsigma(x)$ , pelo **AS** existe  $y \in \mathcal{U}$ , tal que para todo  $z$ , se  $z \subset y$ , então  $z \in y$ . Como consequência,  $2^x \subset y$ , pelo **TEOREMA 23** segue-se que  $\varsigma(2^x)$ . ■

**TEOREMA 28 (39 THEOREM)**  $\neg \varsigma(\mathcal{U})$ .

**PROVA** Consideremos a classe  $\mathcal{R} = \{x : x \notin x\}$ <sup>3</sup>. Provemos que  $\neg \varsigma(\mathcal{R})$ , i.e.,  $\mathcal{R}$ . Para tanto, suponhamos por *reductio ad absurdum* que  $\varsigma(\mathcal{R})$ , temos então a equivalência

$$(1.49) \quad \varsigma(\mathcal{R}) \wedge \mathcal{R} \in \mathcal{R} \quad \text{se, e somente se,} \quad \varsigma(\mathcal{R}) \wedge \mathcal{R} \notin \mathcal{R},$$

o que é uma inconsistência, i.e., uma contradição. Logo,  $\neg \varsigma(\mathcal{R})$ . Ademais, da própria definição de classificadores  $\mathcal{R} \subset \mathcal{U}$ , como  $\mathcal{R}$  é uma classe própria, necessariamente  $\mathcal{U}$  também o será. Com efeito, suponha por *reductio ad absurdum* que  $\varsigma(\mathcal{U})$ , pelo **TEOREMA 23**, inferiríamos que  $\varsigma(\mathcal{R})$ , o que é uma contradição com o argumento anterior. ■

<sup>2</sup>Segui a mesma linha de raciocínio de Kelley, mas com a minhas adaptações.

<sup>3</sup>O  $\mathcal{R}$  é em homenagem a Bertrand Russel, um dos primeiros a descobrir paradoxos na teoria ingênua dos conjuntos, criada pelo matemático eminente Georg Cantor.

**Teorema 1 (Bernstein-Cantor-Schröder).** Sejam  $X$  e  $Y$  conjuntos tais que existe uma injeção própria de  $X$  em  $Y$  e vice-versa. Então  $X$  é equivalente a  $Y$ .

*Prova.* Supomos que  $f(X) \subset Y$  e  $g(Y) \subset X$  (aqui  $\subset$  é a inclusão própria). Destas inclusões deriva-se facilmente a proposição

$$(\Delta) \quad \forall i \left( i \in N \longrightarrow (gf)^i(X) \supset (gf)^i(g(Y)) \supset (gf)^{i+1}(X) \right).$$

Para cada  $i \in N$ , façamos:

$$A_{2i} = (gf)^i(X) \quad \text{e} \quad A_{2i+1} = (gf)^i(g(Y))$$

em vista de  $(\Delta)$  decorre que  $\{A_i : i \in N\}$  é uma família de conjuntos estritamente decrescente.

Sejam agora

$$C_i = (gf)^i(X \setminus g(Y)) \quad \text{e} \quad D_i = (gf)^i(g(Y \setminus f(X)))$$

com  $i \in N$ .

Definamos

$$A = \bigcap_{i \in N} A_i, \quad C = \bigcup_{i \in N} C_i \quad \text{e} \quad D = \bigcup_{i \in N} D_i.$$

Estes são disjuntos aos pares. De fato, inicialmente provemos que  $C \cap D = \emptyset$ . Note que

$$\forall i, j \left( i, j \in N \longrightarrow C_i \cap D_j = \emptyset \right),$$

pois dados  $i, j \in N$ , temos

$$C_i \cap D_j = A_{2i} \cap A_{2j+1} \setminus (A_{2i+1} \cup A_{2(j+1)}) \subset A_a \setminus A_b = \emptyset,$$

sendo

$$a = \max\{2i, 2j\} \quad \text{e} \quad b = \min\{2(i+1), 2(j+1)\}.$$

uma vez que  $A_b \subset A_a$ , como consequência  $C \cap D = \emptyset$ .

Seguidamente, dados  $i, j \in N$ , obtem-se

$$A \cap (C_i \cup D_j) = A \setminus (A_{2i+1} \cap A_{2(j+1)}) = \emptyset,$$

consequentemente  $A \cap (C \cup D) = \emptyset$ .

Afirmo que

$$X = A \cup C \cup D$$

Decerto, observe que se  $x \in X \setminus (C \cup D)$ , então necessariamente  $x \in A_i$  para todo  $i \in N$ , pois, se existir  $i \in N$  tal que  $x \notin A_i$ , então consideremos  $m = \min\{i \in N : x \notin A_i\}$ , é certo que  $m > 0$ . Assim, existe  $l \in N$ , tal que  $l+1 = m$ , e consequentemente  $x \in A_l \setminus A_{l+1} \subset C \cup D$ , uma contradição.

De maneira inteiramente análoga para cada  $i \in N$ , façamos:

$$B_{2i} = (fg)^i(Y) \quad \text{e} \quad B_{2i+1} = (fg)^i(f(X));$$

$$E_i = (fg)^i(Y \setminus f(X)) \quad \text{e} \quad F_i = (fg)^i f(X \setminus g(Y)).$$

Prova-se sem dificuldades que

$$Y = B \cup E \cup F,$$

em que

$$B = \bigcap_{i \in N} B_i, \quad E = \bigcup_{i \in N} E_i \quad \text{e} \quad F = \bigcup_{i \in N} F_i.$$

Em verdade, basta trocar os papéis de  $f$  com  $g$  e  $X$  com  $Y$ , concomitantemente.

Agora observemos que por indução matemática decorre que

$$\forall i (i \in N \longrightarrow \phi(\gamma\phi)^i = (\phi\gamma)^i\phi).$$

para quaisquer que sejam as funções  $\phi$  e  $\gamma$ , em que a composição faça sentido. Em verdade, para  $i = 0$  temos necessariamente

$$\phi(\gamma\phi)^0 = \phi = (\phi\gamma)^0\phi.$$

Suponhamos por hipótese de indução que a propriedade seja válida para  $i \in N$ , notemos que

$$\phi(\gamma\phi)^{i+1} = \phi(\gamma\phi)^i(\gamma\phi) = (\phi\gamma)^i(\phi\gamma)\phi = (\phi\gamma)^{i+1}\phi$$

o que prova que é válida para  $i + 1$ , concluímos por indução matemática que a propriedade é válida para todo  $i \in N$ .

Posteriormente, em vista do resultado anterior observemos que para cada  $i \in N$

$$A_{2i+1} = (gf)^i g(Y) = g(fg)^i(Y) = g(B_{2i})$$

e

$$B_{2i+1} = (fg)^i f(X) = f(gf)^i(X) = f(A_{2i}).$$

Em consequência para todo  $i \in N$

$$B_{2i} = g^{-1}(A_{2i+1}) \quad \text{e} \quad B_{2i+1} = f(A_{2i}).$$

Em seguida, definamos  $\varphi : X \rightarrow Y$  por

$$\varphi(x) = \begin{cases} f(x), & x \in A \cup C; \\ g^{-1}(x), & x \in D. \end{cases}$$

Pela própria definição  $\varphi$  é injetiva.

Imediatamente observe que para todo  $i \in N$

$$\varphi(C_i) = f\left((gf)^i(X \setminus g(Y))\right) = (fg)^i f(X \setminus g(Y)) = F_i$$

e

$$\varphi(D_i) = g^{-1}\left((gf)^i g(Y \setminus f(X))\right) = (fg)^i(Y \setminus f(X)) = E_i.$$

Além do mais, para todo  $i \in N$ , temos

$$\varphi(A_{2i}) = f(A_{2i}) = f(gf)^i(X) = (fg)^i f(X) = B_{2i+1}$$

e

$$\varphi(A_{2i+1}) = f(A_{2i+1}) = f(gf)^i g(Y) = (fg)^i fg(Y) = B_{2(i+1)}.$$

Em suma,

$$\forall i (i \in N \longrightarrow \varphi(A_i) = B_{i+1} \wedge \varphi(C_i) = F_i \wedge \varphi(D_i) = E_i).$$

Conformemente

$$\varphi(A) = B, \quad \varphi(C) = F \quad \text{e} \quad \varphi(D) = E.$$

*a fortiori*

$$\varphi(X) = \varphi(A \cup C \cup D) = \varphi(A) \cup \varphi(C) \cup \varphi(D) = B \cup E \cup F = Y,$$

i.e.,  $X \sim Y$ .

**Lema 1.** *Sejam  $f : X \rightarrow Y$  e  $g : Y \rightarrow X$ . Então existe um conjunto  $A \subseteq X$ , tal que*

$$X \setminus A = g(Y \setminus f(A)).$$

*Prova alternativa do teorema.* Existe uma sugestão dada pelo Halmos que embora esteja errada, ela me sugeriu um processo simples de demonstração. Apesar de tudo, não consegui determinar quais propriedades mínimas  $f$  e  $g$  devem possuir para garantir o resultado auxiliar. Em vista desse impasse, nos ateremos ao caso em que ambas  $f$  e  $g$  sejam injetivas.

**Digressão a respeito de álgebras de Boole.** Segundo o livro *Introduction to Boolean Algebras* de Halmos e Givant, uma álgebra booleana é um conjunto  $B$  munido de duas operações binárias  $\cap$  e  $\cup$ , uma operação unária  $'$  e dois elementos distintos  $0$  e  $1$ , satisfazendo os seguintes axiomas:

- |       |   |
|-------|---|
| I.    | $0' = 1 \quad \wedge \quad 1' = 0;$   |
| II.   | $x \cap 0 = 0 \quad \wedge \quad x \cup 1 = 1;$   |
| III.  | $x \cap 1 = x \cup 0 = x;$  |
| IV.   | $x \cap x' = 0 \quad \wedge \quad x \cup x' = 1;$   |
| V.    | $x'' = x;$  |
| VI.   | $x \cap x = x \cup x = x;$  |
| VII.  | $(x \cap y)' = x' \cup y';$   |
| VIII. | $x \cap y = y \cap x \quad \wedge \quad x \cup y = y \cup x;$   |
| IX.   | $x \cap (y \cap z) = (x \cap y) \cap z \quad \wedge \quad x \cup (y \cup z) = (x \cup y) \cup z;$                   |
| X.    | $x \cap (y \cup z) = (x \cap y) \cup (x \cap z) \quad \wedge \quad x \cup (y \cap z) = (x \cup y) \cap (x \cup z);$ |

**Teorema 2 (Álgebra de Boole dada na introdução do livro *Introduction to Mathematical Logic* de Elliot Mendelson, página xxiii).** *Sejam  $B$  um conjunto pelo menos dois elementos,  $\cap \in B^{B^2}$  uma operação binária e  $' \in B^B$  uma operação unária.*

*Admitiremos que  $\cap$  e  $'$  satisfazem os seguintes axiomas para quaisquer  $x, y, z \in B$ :*

1.  $x \cap y = y \cap x;$
2.  $(x \cap y) \cap z \longleftrightarrow x \cap (y \cap z);$
3.  $(x \cap y' = z \cap z') \longleftrightarrow x \cap y = x.$

*Ademais defina*

$$\forall x, y (x \cup y = (x' \cap y')') \quad \text{Def.}$$

*Então  $\langle B, \cap, \cup, ' \rangle$  é uma álgebra booleana se, e somente se, os axiomas 1–3 forem satisfeitos.*

*Prova.* Primeiramente, provemos que  $x \cap x = x$ , para todo  $x \in B$ . Suponhamos que exista  $x \in B$  tal que  $x \cap x \neq x$ , da equivalência no item 3, fixado  $y = x$  temos

$$\forall z (z \in B \longrightarrow (x \cap x \neq x \longleftrightarrow x \cap x' \neq z \cap z'))$$

o que é falso para  $z = x$ , consequentemente a identidade  $x = x \cap x$  é válida para todo  $x \in B$ . Novamente, da equivalência no item 3 temos que fixados  $x \in B$  e  $y = x$ , decorre que

$$\forall z (x \cap x = x \longleftrightarrow x \cap x' = z \cap z')$$

Definamos  $0 = x \cap x'$ .

Em seguida, observemos

$$\forall z (z \cap 0 = z \cap (z \cap z') = (z \cap z) \cap z' = z \cap z' = 0)$$

Seguidamente observemos, também em decorrência do 3 item do rol de axiomas, que dado  $z$  arbitrariamente temos

$$\begin{aligned} z''' &= z' \cap z''' \iff z''' \cap z'' = 0, \\ (\Gamma) \quad z \cap z''' &= z \cap (z' \cap z''') = (z \cap z') \cap z''' = 0 \iff z \cap z'' = z \end{aligned}$$

e

$$(\Delta) \quad z' \cap z'' = 0 \iff z \cap z'' = z''$$

de  $(\Gamma)$  e  $(\Delta)$  decorre que  $z = z''$ . Adicionalmente,

$$\forall z (z \cup z = (z' \cap z')' = (z')' = z'' = z)$$

Seguidamente provemos que para quaisquer  $x, y, z \in B$  vale

$$x \cap (y \cup z) = (x \cap y) \cup (x \cap z)$$

em outros termos, queremos provar que

$$x \cap (y' \cap z')' = ((x \cap y)' \cap (x \cap z'))'$$

Antes provemos uma identidade auxiliar

$$(I) \quad \forall u, v (u, v \in B \implies u = u \cap (u' \cap v)')$$

mas do item 3 temos que

$$u \cap (u' \cap v)' = u \iff u \cap (u' \cap v) = 0.$$

Mas o segundo membro da bicondicional é trivialmente verdadeiro, em consequência a proposição  $(I)$  é verdadeira.

Proseguindo primeiro provemos que

$$x \cap (y' \cap z')' \cap ((x \cap y)' \cap (x \cap z'))' = x \cap (y' \cap z')'$$

do item 3 do rol de axiomas temos que a última identidade é equivalente a

$$x \cap (y' \cap z')' \cap (x \cap y)' \cap (x \cap z)' = 0$$

que por sua vez é equivalente a

$$x \cap y' \cap z' \cap (x \cap y)' \cap (x \cap z)' = x \cap (x \cap y)' \cap (x \cap z)'$$

**Teorema 3 (Álgebra de Boole dada no livro de Hewitt e Stromberg *Real and Abstract Analysis*)**  
**[Huntington].** *Seja  $B$  um conjunto munido com uma operação binária  $\cup$  e uma operação unária  $'$  satisfazendo os seguintes axiomas:*

- a)  $a', a \cup b \in B$  (Estabilidade de  $'$  e  $\cup$ );
- b)  $a \cup b = b \cup a$  (Comutatividade);
- c)  $a \cup a = a$  (Idempotência);
- d)  $a \cup (b \cup c) = (a \cup b) \cup c$  (Associatividade);
- e)  $a' = (a' \cup b')' \cup (a' \cup b)'$  (Caracterização de  $'$ ).

Então  $\langle B, \cup, ' \rangle$  é uma álgebra de Boole. Tais axiomas (ou postulados) são conhecidos como postulados de Huntington.

Resumo das propriedades encontradas até então:

Sejam  $a, b \in B$ , temos

$$\begin{aligned} a \cup a' &= ((a' \cup b'')' \cup (a' \cup b')') \cup ((a'' \cup b'')' \cup (a'' \cup b')') \\ &= ((b' \cup a'')' \cup (b' \cup a')') \cup ((b'' \cup a'')' \cup (b'' \cup a')') \\ &= b \cup b' \end{aligned}$$

Do resultado anterior trocando  $a$  e  $b$ , por  $a'$  e  $a''$  respectivamente, obtemos  $a' \cup a'' = a'' \cup a'''$ , para todo  $a \in B$ , *a fortiori* para todo  $a \in B$ , vale

$$a'' = (a''' \cup a'')' \cup (a''' \cup a')' = (a' \cup a'')' \cup (a' \cup a''')' = a.$$

**Definição.** Um conjunto ordenado  $S$  é dito ter a propriedade da menor cota superior se, para todo conjunto não vazio  $E$  limitado superiormente admite a menor das cotas superiores de  $E$ , denotada por  $\sup E$ .

**Teorema 4.** Todo conjunto ordenado que tem a propriedade da menor cota superior tem a propriedade da maior cota superior.

*Prova.* Sejam  $E \subseteq S$ , não vazio limitado inferiormente e  $L$  o conjunto das cotas inferiores de  $E$  que, como sabemos é não vazio, pois  $E$  é limitado inferiormente. Em vista da hipótese de  $S$  ter a propriedade da menor cota superior existe  $\sup L$ . Seja agora  $\gamma > \sup L$ . Então  $\gamma$  não é cota inferior de  $E$ , pois do contrário  $\gamma \leq \sup L$ , desta forma  $\sup L$  é a maior das cotas inferiores de  $E$ , como consequência  $\inf E = \sup L$ . Fica, portanto, completa a prova do teorema. ■

**Teorema 5.** Sejam  $x, y \in \mathbb{R}$ .

- a) Se  $x > 0$ , então existe  $m \in \mathbb{Z}$ , tal que  $mx > y$ ;
- b) Existe  $q \in \mathbb{Q}$  tal que  $x < q < y$ .

*Prova.* a) Suponhamos que a implicação é falsa, então existe  $x > 0$ , tal que para todo  $m \in \mathbb{Z}$  vale  $mx \leq y$ .

Particularmente,  $x/y > 0$ , pois  $x, y > 0$ . Daí vem que o conjunto  $M = \{m(x/y) \in \mathbb{R} : m \in \mathbb{Z}\}$  é limitado superiormente por 1, como aquele é não vazio, decorre da propriedade da menor cota superior de  $\mathbb{R}$  que existe  $\varsigma = \sup M$ . Temos, portanto, que para todo  $m \in \mathbb{Z}$  vale

$$(m+1)\left(\frac{x}{y}\right) \leq \varsigma$$

como consequência para todo  $m \in \mathbb{Z}$  vale

$$m\left(\frac{x}{y}\right) \leq \varsigma - \frac{x}{y} < \varsigma,$$

i.e.,  $\varsigma - x/y$  é uma cota superior de  $M$  o que contradiz a minimalidade de  $\varsigma$ .

b) Primeiro, provaremos a seguinte

**Afirmção.** Para todo  $\varrho \in \mathbb{R}$ , existe um único inteiro  $m$ , tal que  $m \leq \varrho < m+1$ .

*Prova.* Suponha o contrário que para todo  $m \in \mathbb{Z}$ , se  $m \leq \varrho$ , então  $m+1 \leq \varrho$ , note que esta última condicional é equivalente a  $\neg(m \leq \varrho < m+1)$ . Mas, isto implica por indução matemática que para todo  $m \in \mathbb{N}$  vale  $m \leq \varrho$ , o que contradiz o item a). Conformemente esta contradição nos leva a concluir de que nossa suposição inicial está incorreta, provando portanto a existência.

Sejam  $m_i$  ( $i = 1, 2$ ), tais que  $m_i \leq \varrho < m_i + 1$ , da totalidade da ordem  $<$  em  $\mathbb{R}$  e supondo por redução ao absurdo que  $m_1 \neq m_2$ , podemos supor sem perda de generalidade que  $m_1 < m_2$ . Daí, decorre imediatamente que  $m_1 + 1 \leq m_2$ , pois suponha por redução ao absurdo que  $m_1 + 1 > m_2$ , teríamos

$$0 < m_2 - m_1 < 1$$

o que é um absurdo, pois  $m_2 - m_1 \in \mathbb{Z}$  e não existe inteiro entre 0 e 1. Por maior razão  $m_1 + 1 \leq m_2$ , mas isto por sua vez acarreta que

$$\varrho < m_1 + 1 \leq m_2 \leq \varrho$$

um outro absurdo. Estas contradições nos levam a concluir que a nossa suposição  $m_1 \neq m_2$ , é uma suposição inverídica. Destarte fica provada a unicidade.  $\heartsuit$

Daí podemos inferir que dado  $\varrho \in \mathbb{R}$ , tomando  $m$  satisfazendo a afirmação anterior, decorre necessariamente que  $m + 1 \leq \varrho + 1$ , pois suponha o contrário, i.e., que  $m + 1 > \varrho + 1$ , disto decorre que

$$1 = (\varrho + 1) - \varrho < (m + 1) - m = 1$$

um absurdo. Concluimos, portanto, que  $m + 1 \in (\varrho, \varrho + 1]$ , provamos portanto a **Afirmação**.

*Para todo  $\varrho \in \mathbb{R}$ , existe um inteiro  $m$ , tal que  $m \in (\varrho, \varrho + 1]$ .*  $\heartsuit$

Consequentemente, usando o item a) existe  $n \in \mathbb{N}$ , tal que  $(y - x)n > 1$  e da afirmação imediatamente anterior existe  $m \in (nx, nx + 1]$ , assim vale

$$nx < m \leq nx + 1 < ny,$$

logo, fazendo  $q = m/n$ , temos da cadeia anterior que  $x < q < y$ , concluindo portanto a prova do item b).  $\blacksquare$

Vale também a **Afirmação**. Sejam  $\varrho \in \mathbb{R}$ ,  $n \leq \varrho$  e  $m \in \mathbb{Z}$ , tal que  $m \leq \varrho < m + 1$ . Então  $n \leq m$ .

*Prova.* Ora, se  $n > m$ , então  $n \geq m + 1$ , daí vem

$$\varrho < m + 1 \leq n \leq \varrho$$

uma contradição.  $\blacksquare$

Podemos inferir daí que  $m$  com aquela propriedade é o maior inteiro tal que  $m \leq \varrho$ .

**Teorema 6 (Digressão relativa à representação decimal de um número real).** *Seja  $\varrho \in \mathbb{R}_+^*$ , escolhamos  $n_0 \in \mathbb{N}$ , tal que*

$$n_0 \leq \varrho < n_0 + 1.$$

*Suponhamos escolhidos  $n_0, \dots, n_k$ , escolhamos  $n_{k+1} \in \mathbb{N}$ , tal que*

$$(\Delta) \quad n_{k+1} \leq 10^{k+1}(\varrho - \alpha_k) < n_{k+1} + 1,$$

*em que*

$$\alpha_k = n_0 + \dots + \frac{n_k}{10^k},$$

*podemos, portanto, por indução considerar o conjunto*

$$A = \{\alpha_k : k \in \mathbb{N}\}.$$

Então nestas condições  $\varrho = \sup A$ .

*Prova.* De  $(\Delta)$  segue necessariamente que

$$0 \leq \varrho - \alpha_{k+1} = \varrho - \alpha_k - \frac{n_{k+1}}{10^{k+1}} < \frac{1}{10^{k+1}},$$

para qualquer  $k \in \mathbb{N}$ . Observemos que dado  $\gamma < \varrho$ , temos peremptoriamente que  $\varrho - \gamma > 0$ , dos teoremas anteriores existe  $k \in \mathbb{N}$  tal que

$$10^{k+1} > 2^{k+1} > k > \frac{1}{\varrho - \gamma} > 0$$

donde

$$\varrho - \alpha_{k+1} < \frac{1}{10^{k+1}} < \varrho - \gamma,$$

i.e., existe  $\alpha \in A$ , tal que  $\alpha = \alpha_{k+1} > \gamma$ , i.e., todo elemento  $\gamma \in \mathbb{R}$ , tal que  $\gamma < \varrho$ , não é cota superior de  $A$ . Além disso  $\varrho \geq \alpha$ , para todo  $\alpha \in A$ , i.e.,  $\varrho$  é uma cota superior de  $A$ , que, conforme concluímos, é tal que  $\varrho = \sup A$ . ■

Quando  $\varrho = \sup A$ , representa-se  $\varrho$  por

$$n_0.n_1n_2n_3\dots$$

por exemplo

$$\pi = 3.141592\dots$$

A representação do número corresponde à uma sequência finita de seus primeiros dígitos seguido de reticências. Subentende-se que os outros dígitos sejam determinados indutivamente.

### 1.3 CONSTRUÇÃO DOS NÚMEROS REAIS

Doravante admitamos que letras gregas representem cortes e letras romanas representem números racionais, salvo quando for explicitamente dito o contrário. Dado um corte  $\alpha$ , por conveniência definiremos que

**DEFINIÇÃO 15 (SIMPLIFICAR)** *Seja  $\alpha$  um corte tal que  $\alpha > 0^*$ , i.e., um corte estritamente positivo<sup>4</sup>. Definamos*

$$(1.50) \quad \alpha^{-1} = \{r \in \mathbb{Q} : \exists s, t (s, t \in \mathbb{Q} \wedge t > 1 \wedge 1/st \notin \alpha \wedge r \leq s)\}.$$

Antes de prosseguirmos, precisaremos do

**Lema 2 (Adaptado de [Spivak]).** *Sejam  $\alpha > 0^*$  e  $p \in \mathbb{Q}$ , tal que  $p > 1$ . Então existem  $q, r \in \mathbb{Q}$ , tais que  $q \in \alpha$ ,  $1/r \in \alpha^{-1}$  e  $p = r/q$ .*

*Prova.* Seja  $p$  como nas premissas, afirmo que existe  $s \in \mathbb{Q}$ , tal que  $0 < s < 1$ , tal que  $sp \in \alpha$ , de fato tome  $t \in \alpha$ , tal que  $t > 0$ , o que é garantido pela nossa suposição de que  $\alpha > 0^*$ . Da propriedade arquimediana de  $\mathbb{Q}$ , existe  $n \in \mathbb{N}$ , tal que  $n > p/t$ , daí vem que  $p/n < t$ , fazendo  $s = 1/n$ , temos consequentemente  $sp < t$ , *a fortiori*  $sp \in \alpha$ , pois  $\alpha$  é um corte e  $t \in \alpha$ . Observando que

$$sp^n = s(1 + (p - 1))^n \geq sn(p - 1)$$

---

<sup>4</sup>veja o [Rudin] ou [Spivak].



existe  $n \in \mathbb{N}$ , tal que

$$sp^n \in \alpha \wedge sp^{n+1} \notin \alpha$$

consequentemente fazendo  $q = sp^n$  e  $r = sp^{n+1}$ , temos  $p = r/q$ . Ademais, existe  $t > 1$ , tal que  $rt \notin \alpha$  e  $qt \in \alpha$ , isto decorre do fato de  $\alpha$  não possuir um maior elemento. De fato, tome  $q' > q$  tal que  $q' \in \alpha$  e faça  $t = q'/q$ , observe que  $q' = qt$  e  $r' = rt$  são tais que  $r'/q' = p$ . Daí existe  $t > 1$  tal que  $1/(t/r') = r'/t = r \notin \alpha$ , portanto, podemos sem perdas admitir que  $q \in \alpha$  e  $1/r \in \alpha^{-1}$ . ■

**Teorema 7.** Se  $\alpha > 0^*$ , então  $\alpha\alpha^{-1} = 1^*$ .

*Prova.* Primeiro provaremos que  $\alpha^{-1}$  é um corte.

(I) seja  $p \notin \alpha$  e  $t > 1$ , temos que existe  $n \in \mathbb{N}$ , tal que  $n > pt$ , fazendo  $s = 1/n$ , obtemos que  $pst < 1$ , consequentemente  $p < 1/st$ , como  $p \notin \alpha$  e este último é um corte  $1/st \notin \alpha$ , por maior razão infere-se que  $s \in \alpha^{-1}$ , provando que  $\alpha \neq \emptyset$ . Agora seja  $q \in \alpha$ , tomemos  $r = 1/q$ , notemos que para todo  $t > 1$ , tem-se  $1/rt \in \alpha$ , pois  $1/t < 1$  e  $q \in \alpha$ , o que prova que  $q \notin \alpha^{-1}$ , provando que  $\alpha^{-1} \neq Q$ ;

(II) Consideremos agora  $p \in Q$  e  $q \in \alpha^{-1}$ , tais que  $p < q$ , segue evidentemente que existem  $s \geq q > p$  e  $t > 1$ , tais que  $1/st \notin \alpha$ , consequentemente  $p \in \alpha^{-1}$ ;

(III) Seja agora  $p \in \alpha^{-1}$ , então existem  $s, t \in Q$ , tais que  $t > 1$  e  $1/st \notin \alpha$ , tome  $t' \in Q$ , tal que  $1 < t' < t$ , em seguida observemos que

$$\frac{1}{(st/t')t'} = \frac{1}{st} \notin \alpha$$

fazendo  $q = st/t'$  temos evidentemente que  $q > s \geq p$ , o que prova que existe  $q > p$ , tal que  $q \in \alpha^{-1}$ .

Seguidamente provemos que  $\alpha\alpha^{-1} = 1^*$ , para tanto, seja  $p \in \alpha$  e  $q \in \alpha^{-1}$ , temos que existe  $s, t \in Q$ , tais que  $t > 1$  e  $1/st \notin \alpha$ , daí vem que  $p < 1/st$ , como consequência

$$pq \leq ps < pst < 1,$$

que por sua vez acarreta  $\alpha\alpha^{-1} \subset 1^*$ . Por outro lado seja  $p \in 1^*$ , i.e.,  $p < 1$ , que podemos supor sem perda de generalidade  $p > 0$ , pois  $1^* = (1^*)^2 > 0$ . Segue do lema que existem  $r \notin \alpha$  e  $q \in \alpha$ , tais que  $1/p = r/q$  e  $1/r \in \alpha^{-1}$ , daí vem  $p = q/r \in \alpha\alpha^{-1}$ , o que prova a inclusão  $1^* \subset \alpha\alpha^{-1}$ . Decorre do axioma da extensibilidade  $\alpha\alpha^{-1} = 1^*$ . ■

Vale observar que em virtude da definição provisória do produto de cortes ser limitado apenas a  $\mathbb{R}_+^*$ , não faz sentido  $\alpha 0^*$ , pois isto não está definido, uma vez que não existem elementos estritamente positivos em  $0^*$ , *a fortiori*, muito menos estará definido  $(0^*)^{-1}$ .

**Teorema 8 (Lei distributiva).** Se  $\alpha, \beta, \gamma > 0^*$ , então

$$\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma.$$

*Prova.* Suponha que  $p \in \delta$  com  $\delta = \alpha(\beta + \gamma)$ , da definição existe  $(q, r) \in \alpha^\bullet \times (\beta + \gamma)^\bullet$  tal que  $p \leq qr$ , como  $r \in \alpha + \beta$  existe  $(s, t) \in \alpha \times \beta$ , tal que  $r \leq s + t \in \alpha + \beta$ , portanto,

$$p \leq qr \leq q(s + t) = qs + qt \in \alpha\beta + \alpha\gamma.$$

como  $\epsilon = \alpha\beta + \alpha\gamma$  é um corte decorre que  $p \in \epsilon$ , o que prova a inclusão  $\delta \subset \epsilon$ .

Seja agora  $p \in \epsilon$  existem portanto  $r, t \in \alpha^\bullet$  e  $(s, u) \in \beta^\bullet \times \gamma^\bullet$ , tais que  $p \leq rs + tu$ , tomando  $v = \max\{r, t\}$ , temos que  $p \leq v(s + t) \in \delta$ , o que prova a outra inclusão  $\epsilon \subset \delta$ . Do axioma da extensibilidade  $\delta = \epsilon$ , o que conclui a prova. ■

Conforme observado em [Rudin] se  $\alpha < \beta$ , então  $\alpha + \gamma < \beta + \gamma$ , para todo corte  $\gamma$ , como consequência se  $\alpha > 0^*$ , então  $-\alpha < 0^*$ . Podemos, portanto, definir a multiplicação em  $\mathbb{R}^*$  por

$$(\Pi) \quad \alpha\beta = \begin{cases} -((- \alpha)\beta), & \alpha < 0^* \wedge \beta > 0^*; \\ -(\alpha(-\beta)), & \alpha > 0^* \wedge \beta < 0^*; \\ (-\alpha)(-\beta), & \alpha < 0^* \wedge \beta < 0^*. \end{cases}$$

Sabemos  $0^*$  é o elemento neutro da adição em  $\mathbb{R}$ , espera-se naturalmente pelas propriedades de corpos que este seja tal que  $\alpha 0^* = 0^* \alpha = 0^*$ , para todo  $\alpha \in \mathbb{R}$  e, por este motivo define-se o produto com  $0^*$  desta forma. Feito isto podemos neste estágio (seguido o roteiro dado em [Rudin]) afirmar categoricamente que  $\mathbb{R}$  tem todas as propriedades da adição e multiplicação satisfeitas, com exceção da propriedade distributiva.

Consideremos  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ , observe que se alguns destes números reais for  $0^*$ , então o produto é trivial. Desta forma, admitiremos que  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}^*$ . Consideremos, a título de exemplo o caso em que  $\alpha < 0, \beta + \gamma > 0$  e  $\gamma < 0$ , neste caso temos que  $\beta > 0$  e

$$(-\alpha)(\beta + \gamma) + \alpha\gamma = (-\alpha)(\beta + \gamma) + (-\alpha)(-\gamma) = (-\alpha)\beta$$

onde vem

$$\alpha(\beta + \gamma) = -(-\alpha)(\beta + \gamma) = \alpha\gamma - (-\alpha)\beta = \alpha\beta + \alpha\gamma.$$

Os outros casos são tratados de maneira análoga.

Daqui podemos dizer que concluímos a construção de um corpo ordenado com a propriedade da menor cota superior, a saber, o conjunto  $\mathbb{R}$  dos cortes de Dedekind.

Refaço as suas demonstrações [Rudin] com adaptação e ponho as minhas no que segue para fins de documentação, que, existe um corpo ordenado  $Q^*$  em  $\mathbb{R}$  isomorfo ao conjunto dos números racionais.

**Definição.** Seja  $q \in Q$  definamos

$$q^* = \{p \in Q : p < q\} \quad \text{Def.}$$

**Teorema 9 (Identificação de  $Q$  em  $\mathbb{R}$ ).** Sejam  $r, s \in Q$ .

- a)  $r^* \in \mathbb{R}$ ;
- b)  $r^* + s^* = (r + s)^*$ ;
- c)  $r^* s^* = (rs)^*$ ;
- d)  $r^* < s^*$ , se e somente se  $r < s$ .

*Prova.* a) Provar.

b) Suponha que  $(t, u) \in r^* \times s^*$ , certamente que  $t + u < r + s$ , consequentemente  $t + u \in (r + s)^*$ , o que prova a inclusão  $r^* + s^* \subset (r + s)^*$ .

Por outro lado suponhamos que  $p \in (r + s)^*$ , i.e.,  $p < r + s$ , tomando  $t \in Q$ , tal que  $p - s < t < r$  temos certamente que  $u = p - t < s$ , consequentemente

$$p = t + (p - t) = t + u \in r^* + s^*,$$

culminando a inclusão  $(r + s)^* \subset r^* + s^*$ , que, em conjunto com a outra pode-se inferir pelo axioma da extensibilidade a igualdade requerida, viz  $r^* + s^* = (r + s)^*$ .

c) Observe também que se  $r = 0$  ou  $s = 0$ , a igualdade é, em verdade, trivial. Provado o item a) podemos inferir facilmente que  $-(r)^* = (-r)^*$ , portanto se provarmos que c) é válida para quaisquer  $r, s > 0$ , tanto será verdadeiro para  $r, s$  não nulos quaisquer. Destarte, nos ateremos ao caso em que  $r, s > 0$ . Seja  $p \leq uv$ , com  $u, v > 0$  e  $(u, v) \in r^* \times s^*$ , é conspícuo que  $p < rs$ , consequentemente  $r^* s^* \subset (rs)^*$ .

Seja agora,  $p < rs$ , podemos supor sem perda de generalidade que  $p > 0$ , pois do contrário tome  $p' \in Q$ , tal que  $\max\{0, p\} < p' < rs$ . Escolhendo  $u \in Q$ , tal que  $p/r < u < s$ , decorre que  $t = p/u < r$ . Ademais

$$p = \left(\frac{p}{u}\right)u = tu \in r^* s^*,$$

consequentemente  $(rs)^* \subset r^* s^*$ . O que novamente deduz-se pelo axioma da extensionalidade a igualdade requerida.

d) Por fim, se  $r^* < s^*$ , então existe  $p \in s^* \setminus r^*$ , segue que  $r \leq p < s$ .

Por outro lado, se  $r < s$  então  $r^* \subset s^*$  e  $r \in s^* \setminus r^*$ . ■

O teorema anterior nos diz que o conjunto  $Q^* = \{q^* \in \mathbb{R} : q \in Q\}$  é isomorfo a  $Q$ , desta forma podemos dizer que precipuamente  $Q \subset \mathbb{R}$ .

## 1.4 UNICIDADE DOS REAIS

Os cortes de Dedekind nos fornece um caminho para a construção de um corpo ordenado  $\mathbb{R}$  com a propriedade da menor cota superior. Existem certamente outros caminhos como usando as sequências de Cauchy, resultado devido a Cantor. Surgem as perguntas: O que individualiza o conjunto  $\mathbb{R}$ ? Será que este conjunto assim construído é de fato o conjunto numérico conhecido desde a escola primária? As construções mencionadas não resultam em dois objetos matemáticos aparentemente distintos? Em verdade, o conjunto dos números reais conhecidos na escola são na realidade somas parciais de séries numéricas, ao passo que aquele que construímos é uma coleção de subconjuntos de números racionais. Como bem observado em [Elon], intrinsecamente estes objetos são distintos, mas do ponto de vista de isomorfismos são idênticos. Para tratar bem do caso das séries deve-se concluir o exercício 2 do capítulo 29 de [Spivak]. A seguir empenhar-nos-emos a provar que  $\mathbb{R}$  é único a menos de isomorfismos, para tanto precisaremos de algumas construções auxiliares.

**DEFINIÇÃO 16** *Seja  $\mathbb{K}$  um corpo com zero  $0_{\mathbb{K}}$ , unidade  $1_{\mathbb{K}}$  e  $x \in \mathbb{K}$  definamos*

$$(1.51) \quad 0 * x = 0_{\mathbb{K}}$$

*e indutivamente*

$$(1.52) \quad (n + 1) * x = n * x + x$$

*para todo  $n \in \omega$* <sup>5</sup>.

**TEOREMA 29** *Seja  $\mathbb{K}$  um corpo, com zero  $0_{\mathbb{K}}$ . Então para quaisquer  $m, n \in \omega$  e  $x, y \in \mathbb{K}$  valem*

$$(a) \quad n * 0_{\mathbb{K}} = 0_{\mathbb{K}};$$

$$(b) \quad m * x + n * x = (m + n) * x;$$

$$(c) \quad n * x + n * y = n * (x + y);$$

$$(d) \quad m * (n * x) = mn * x;$$

---

<sup>5</sup>Esta definição requer uma prova da definição por recursão, um resultado muito famoso na teoria dos conjuntos.

$$(e) (n * x)y = n * xy;$$

$$(f) (m * x)(n * y) = mn * xy.$$

**PROVA** Sejam  $m \in \omega$  e  $x, y \in \mathbb{K}$ .

(a) Definamos o conjunto

$$(1.53) \quad S = \{n : n \in \omega \wedge n * 0_{\mathbb{K}} = 0_{\mathbb{K}}\}.$$

Certamente que  $0 \in S$ , porquanto pela definição vale

$$(1.54) \quad 0 * 0_{\mathbb{K}} = 0_{\mathbb{K}}.$$

Se  $n \in S$ , temos que

$$(1.55) \quad (n + 1) * 0_{\mathbb{K}} = n * 0_{\mathbb{K}} + 0_{\mathbb{K}} = 0_{\mathbb{K}} + 0_{\mathbb{K}} = 0_{\mathbb{K}}.$$

Consequentemente  $n + 1 \in S$ , donde pela minimalidade de  $\omega$ , inferimos que  $S = \omega$ <sup>6</sup>.

(b) Consideremos o conjunto

$$(1.56) \quad S = \{n : n \in \omega \wedge m * x + n * x = (m + n) * x\}.$$

Primeiramente, observemos que  $0 \in S$ , pois

$$(1.57) \quad m * x + 0 * x = m * x + 0_{\mathbb{K}} = m * x = (m + 0) * x.$$

Em seguida, suponhamos que  $n \in S$ . Temos conformemente

$$(1.58) \quad \begin{aligned} m * x + (n + 1) * x &= m * x + n * x + x \\ &= (m + n) * x + x \\ &= (m + (n + 1)) * x. \end{aligned}$$

Portanto,  $n + 1 \in S$ . Pela minimalidade de  $\omega$  decorre que  $S = \omega$ .

(c) Da mesma maneira seja

$$(1.59) \quad S = \{n : n \in \omega \wedge n * x + n * y = n * (x + y)\}.$$

Temos que  $0 \in S$ , pois

$$(1.60) \quad 0 * x + 0 * y = 0_{\mathbb{K}} = 0 * (x + y).$$

Se  $n \in S$ , então

$$(1.61) \quad \begin{aligned} (n + 1) * x + (n + 1) * y &= (n * x + x) + (n * y + y) \\ &= (n * x + n * y) + (x + y) \\ &= n * (x + y) + (x + y) \\ &= (n + 1) * (x + y), \end{aligned}$$

i.e.,  $n + 1 \in S$ . Consequentemente,  $S = \omega$ .

---

<sup>6</sup>Esta é simplesmente a consequência da definição de  $\omega$  como o conjunto sucessor minimal, seguindo a terminologia de Halmos.

(d) Consideremos novamente

$$(1.62) \quad S = \{n : n \in \omega \wedge m * (n * x) = mn * x\}.$$

Notemos que  $0 \in S$ , uma vez que

$$(1.63) \quad m * (0 * x) = m * 0_{\mathbb{K}} = 0_{\mathbb{K}} = 0 * x = m0 * x.$$

Se  $n \in S$ , então

$$(1.64) \quad \begin{aligned} m * ((n + 1) * x) &= m * (n * x + x) \\ &= mn * x + m * x \\ &= (mn + m) * x \\ &= (m(n + 1)) * x. \end{aligned}$$

Portanto,  $n + 1 \in S$ , logo  $S = \omega$ .

(e) Seja

$$(1.65) \quad S = \{n : n \in \omega \wedge (n * x) * y = n * xy\}.$$

Primeiro,  $0 \in S$ , pois

$$(1.66) \quad (0 * x)y = 0_{\mathbb{K}}y = 0_{\mathbb{K}};$$

Segundo, se  $n \in S$ , então

$$(1.67) \quad \begin{aligned} ((n + 1) * x)y &= (n * x + x)y \\ &= (n * x)y + xy \\ &= n * xy + xy \\ &= (n + 1) * xy. \end{aligned}$$

Portanto,  $n + 1 \in S$  e consequentemente  $S = \omega$ .

(f) Defina

$$(1.68) \quad S = \{n : n \in \omega \wedge (m * x)(n * y) = mn * xy\}.$$

Note primeiramente que  $0 \in S$ , porque

$$(1.69) \quad (m * x)(0 * y) = (m * x)0_{\mathbb{K}} = 0_{\mathbb{K}}.$$

Se  $n \in S$ , então

$$(1.70) \quad \begin{aligned} (m * x)((n + 1) * y) &= (m * x)(n * y) + (m * x)y \\ &= mn * xy + m * xy \\ &= (mn + m) * xy \\ &= (m(n + 1)) * xy. \end{aligned}$$

Logo,  $n + 1 \in S$  e, portanto,  $S = \omega$ .

**DEFINIÇÃO 17** Definamos  $\sigma : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{K}$ , por

$$(1.71) \quad \sigma(n) = \begin{cases} 1_{\mathbb{K}}, & n > 0 \\ 0_{\mathbb{K}}, & n = 0 \\ -1_{\mathbb{K}}, & n < 0. \end{cases}$$

Além disso, para  $n \in \mathbb{Z}$  definamos

$$(1.72) \quad n^* = |n| * \sigma(n)$$

e

$$(1.73) \quad n * x = n^* \cdot x.$$

**LEMA 1** Sejam  $\mathbb{K}$  um corpo com unidade  $1_{\mathbb{K}}$ . Então valem

(a)

$$(1.74) \quad \forall n (n \in \mathbb{Z} \longrightarrow \sigma(-n) = -\sigma(n));$$

(b)

$$(1.75) \quad \forall m, n (m, n \in \mathbb{Z} \longrightarrow \sigma(mn) = \sigma(m)\sigma(n)).$$

**PROVA** Sejam  $m, n \in \omega$ .

(a) Se  $n \in \omega$ , então

$$(1.76) \quad \sigma(-n) = -1_{\mathbb{K}} = -\sigma(n).$$

Caso contrário,  $-n \in \omega$ , daí

$$(1.77) \quad \sigma(-(-n)) = -\sigma(-n) \longrightarrow \sigma(-n) = -\sigma(n).$$

(b) Sejam  $m, n \in \omega$ . É suficiente notar que

$$(1.78) \quad \begin{aligned} \sigma(m)\sigma(n) &= \sigma(mn) \\ &= \sigma((-m)(-n)) \\ &= -\sigma(-mn) \\ &= -\sigma((-m)n) \end{aligned}$$

## 1.4.1 CARACTERÍSTICA DE CORPOS

**DEFINIÇÃO 18** Seja  $\mathbb{K}$  um corpo com unidade  $1_{\mathbb{K}}$  e zero  $0_{\mathbb{K}}$ . Definimos a característica de  $\mathbb{K}$  por

$$(1.79) \quad X(\mathbb{K}) = \bigcap \{n : n \in \omega \rightarrow \{0\} \wedge n^* = 0_{\mathbb{K}}\}.$$

Observe que  $X(\mathbb{K})$  é sempre um número natural, podendo inclusive ser  $0 = \emptyset$ .

**TEOREMA 30** Seja  $\mathbb{K}$  um corpo tal que  $X(\mathbb{K}) = 0$ . Então existe um  $\mathbb{Z}^* \subset \mathbb{K}$  isomorfo a  $\mathbb{Z}$ .

**PROVA** De posse da definição 17, podemos definir uma função  $\zeta : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{K}$  dada por

$$(1.80) \quad \zeta(m) = m^*.$$

Doravante, nosso objetivo limitar-se-a à prova de que  $\zeta$  é um isomorfismo de anéis.

Para todo  $n \in \mathbb{Z}$ , temos

$$(1.81) \quad \begin{aligned} \zeta(n) + \zeta(-n) &= |n| * \sigma(n) + |n| * \sigma(-n) \\ &= |n| * (\sigma(n) + \sigma(-n)) \\ &= |n| * (\sigma(n) - \sigma(n)) \\ &= 0_{\mathbb{K}}, \end{aligned}$$

i.e.,

$$(1.82) \quad \forall n (n \in \mathbb{Z} \rightarrow \zeta(-n) = -\zeta(n))$$

Sejam  $m, n \in \mathbb{Z}$ . Se  $m + n = 0$ , então é imediato que

$$(1.83) \quad \zeta(m + n) = \zeta(m) + \zeta(n).$$

Com efeito, se  $m + n = 0$ , então vimos que  $-\zeta(m) = \zeta(-m) = \zeta(n)$ , daí vem

$$(1.84) \quad \zeta(m + n) = 0_{\mathbb{K}} = \zeta(m) - \zeta(m) = \zeta(m) + \zeta(-m) = \zeta(m) + \zeta(n)$$

Agora suponhamos que  $m + n \neq 0$ . Se  $m$  e  $n$  têm o mesmo sinal, então

$$(1.85) \quad \zeta(m + n) = |m + n| * \sigma(m + n) = |m| * \sigma(m) + |n| * \sigma(n) = \zeta(m) + \zeta(n),$$

porquanto,  $\sigma(m) = \sigma(n) = \sigma(m + n)$ .

Suponhamos que  $m$  e  $n$ , não tenham o mesmo sinal. Então  $m + n$  tem o mesmo sinal de  $-m$  ou  $-n$ . Pois se,  $m + n$  tem um sinal e este difere dos de  $-m$  e  $-n$ , então estes, por sua vez, terão o mesmo sinal e consequentemente  $m$  e  $n$  também. Em conformidade, e sem perda de generalidade suponhamos que  $m + n$  e  $-m$  tenham o mesmo sinal, conforme vimos

$$(1.86) \quad \zeta(m + n) + \zeta(-m) = \zeta((m + n) - m) = \zeta(n)$$

o que por sua vez acarreta

$$(1.87) \quad \zeta(m + n) = \zeta(m) + \zeta(n).$$

Em seguida, observemos que para quaisquer  $m, n \in \mathbb{Z}$ , vale

$$(1.88) \quad \begin{aligned} \zeta(mn) &= (mn)^* \\ &= |mn| * \sigma(mn) \\ &= (|m||n|) * (\sigma(m)\sigma(n)) \\ &= (|m| * \sigma(m))(|n| * \sigma(n)) \\ &= m^* n^* \\ &= \zeta(m)\zeta(n). \end{aligned}$$

Por fim, seja  $n \in \ker \zeta$ , temos que  $\zeta(n) = n^* = 0_{\mathbb{K}}$ . Se  $n \neq 0$ , podemos sempre supor que  $n > 0$ , bastando para isso considerar  $-n$ . Conformemente incorreríamos na existência de um  $n \in \omega \setminus \{0\}$  tal que  $n^* = 0_{\mathbb{K}}$ , a fortiori  $X(\mathbb{K}) \neq 0$ , o que é uma contradição. Isto implica por sua vez que  $\ker \zeta = \{0\}$ , confirmando que  $\zeta$  é um isomorfismo. Assim, para concluirmos basta tomar  $\mathbb{Z}^* = \zeta(\mathbb{Z})$ . ■

Sob as condições do teorema anterior temos a

**DEFINIÇÃO 19** *Seja  $\mathbb{K}$  um corpo e  $X(\mathbb{K}) = 0$ . Então definimos  $\mathbb{Z}^* = \zeta(\mathbb{Z})$ .*

**TEOREMA 31** *Se  $\mathbb{K}$  é um corpo tal que  $X(\mathbb{K}) = 0$ , então existe  $\mathbb{Q}^* \subset \mathbb{K}$  isomorfo ao conjunto dos números racionais  $\mathbb{Q}$ .*

**PROVA** Em  $\mathbb{Z}^* \times (\mathbb{Z}^* \setminus \{0_{\mathbb{K}}\})$  definimos a seguinte relação

$$(1.89) \quad (m^*, n^*) \sim^* (p^*, q^*) \longleftrightarrow m^* q^* = n^* p^*.$$

Doravante, admitamos que  $m, n, p, q, r, s \in \mathbb{Z}$ .

Primeiramente, observemos

$$(1.90) \quad (m^*, n^*) \sim^* (m^*, n^*) \longleftrightarrow m^* n^* = n^* m^*.$$

Portanto,  $\sim^*$  é reflexiva.

Em seguida,

$$(1.91) \quad (m^*, n^*) \sim^* (p^*, q^*) \longleftrightarrow m^* q^* = n^* p^* \longleftrightarrow p^* n^* = q^* m^* \longleftrightarrow (p^*, q^*) \sim^* (m^*, n^*).$$

Logo,  $\sim^*$  é simétrica.

E por fim, suponhamos que

$$(1.92) \quad (m^*, n^*) \sim^* (p^*, q^*) \wedge (p^*, q^*) \sim^* (r^*, s^*).$$

Segue portanto que

$$(1.93) \quad m^* q^* s^* = n^* p^* s^* = n^* q^* r^* \longrightarrow m^* s^* = n^* r^* \longleftrightarrow (m^*, n^*) \sim^* (r^*, s^*).$$

Consequentemente,  $\sim^*$  é transitiva, a fortiori,  $\sim^*$  é uma relação de equivalência.

Podemos construir uma bijeção natural  $\rho : \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\}) \rightarrow \mathbb{Z}^* \times (\mathbb{Z}^* \setminus \{0_{\mathbb{K}}\})$ , dada por

$$(1.94) \quad \rho((m, n)) = (m^*, n^*).$$

Esta bijeção por sua vez, nos fornece um isomorfismo natural definido em

$$(1.95) \quad \mathbb{Q} = \frac{\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})}{\sim}$$

com imagens em

$$(1.96) \quad \mathbb{Q}^* = \frac{\mathbb{Z}^* \times (\mathbb{Z}^* \setminus \{0_{\mathbb{K}}\})}{\sim^*}$$

Com efeito, sejam  $m, n \in \mathbb{Z}$ , denotaremos a classe cujo representante é  $(m, n)$  por  $m/n$ , e a classe de representante  $(m^*, n^*)$  por  $m^*/n^*$ . Agora, basta definir  $\varrho : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}^*$  por

$$(1.97) \quad \varrho\left(\frac{m}{n}\right) = \frac{m^*}{n^*}.$$



A prova de que  $\varrho$  preserva a adição e a multiplicação é imediata ao isomorfismo  $\zeta : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}^*$ ; além disso, é trivialmente sobrejetiva. Suponha que

$$(1.98) \quad \frac{m^*}{n^*} = \varrho\left(\frac{m}{n}\right) = \varrho\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{p^*}{q^*}$$

Daí vem

$$(1.99) \quad m^* q^* = n^* p^* \iff mq = \zeta^{-1}(m^* q^*) = \zeta^{-1}(n^* p^*) = np,$$

por conseguinte  $m/n = p/q$  e consequentemente  $\varrho$  é injetiva, portanto, *a fortiori*, um isomorfismo de  $\mathbb{Q}$  em  $\mathbb{Q}^*$ .

Finalmente, observemos que  $\mathbb{Q}^*$  pode ser observado como subconjunto de  $\mathbb{K}^*$ , bastando para isso considerar a identificação  $\iota : \mathbb{Q}^* \rightarrow \mathbb{K}$  dada por  $\iota(m/n) = m^*(n^*)^{-1}$ . Em verdade, sejam  $(m, n)$  e  $(p, q)$  dois representantes de  $m/n$ , temos em conformidade

$$(1.100) \quad m^* q^* = n^* p^* \iff m^*(n^*)^{-1} = p^*(q^*)^{-1},$$

i.e., a definição de  $\iota$  não é ambígua. Com um raciocínio análogo, vê-se que  $\iota$  é injetiva. Destarte, sem perdas podemos identificar  $\mathbb{Q}^*$  com  $\iota(\mathbb{Q}^*) \subset \mathbb{K}$ , e abusar da notação escrevendo  $\mathbb{Q}^* \subset \mathbb{K}$ . ■

**DEFINIÇÃO 20** *Seja  $\mathbb{K}$  um corpo e  $X(\mathbb{K}) = 0$ . Então definimos  $\mathbb{Q}^*$  como no teorema 31. Ademais, da identificação podemos sem ambigüidade supor*

$$(1.101) \quad \frac{m^*}{n^*} = m^*(n^*)^{-1}.$$

**TEOREMA 32** *Seja  $\mathbb{K}$  um corpo ordenado com a propriedade da menor cota superior tal que  $X(\mathbb{K}) = 0$ . Então  $\mathbb{K}$  é arquimediano e o conjunto  $\mathbb{Q}^*$  é denso em  $\mathbb{K}$ .*

**PROVA** Sejam  $x > 0_{\mathbb{K}}$  e  $y \in \mathbb{K}$ , consideremos o conjunto

$$(1.102) \quad M = \{n * x : n \in \omega\}$$

Afirmo que existe  $n \in \omega$  tal que  $n * x > y$ . De fato, suponha que  $y$  seja um majorante do conjunto  $M$ , decorre de  $\mathbb{K}$  ter a propriedade da menor cota superior que existe  $\sigma = \sup M$ , daí vem que para todo  $n \in \omega$

$$(1.103) \quad n * x \leq \sigma$$

por maior razão, para todo  $n \in \omega$ , segue-se

$$(1.104) \quad (n + 1) * x \leq \sigma,$$

donde para todo  $n \in \omega$  vale

$$(1.105) \quad n * x = (n + 1) * x - x \leq \sigma - x < \sigma,$$

contradizendo o fato de  $\sigma$  ser a menor cota superior do conjunto  $M$ .

Imediatamente, suponhamos que  $x, y \in \mathbb{R}$  sejam tais que  $x < y$ , da propriedade arquimediana de  $\mathbb{K}$  existe  $n \in \omega$ , tal que  $n * (y - x) > 1^*$ . Seja  $m$  o maior inteiro tal que  $m^* \leq n * x$ . Destarte, de

$$(1.106) \quad m^* \leq n * x < (m + 1)^* = m^* + 1^*,$$

concluimos que

$$(1.107) \quad (m+1)^* \leq n * x + 1^*$$

pois do contrário teríamos

$$(1.108) \quad 1^* = m^* + 1^* - m^* > n * x + 1^* - n * x = 1^*,$$

um absurdo. Logo,

$$(1.109) \quad n^* \cdot x = n * x < (m+1)^* \leq n * x + 1^* < n * y = n^* \cdot y$$

donde

$$(1.110) \quad x < \frac{(m+1)^*}{n^*} < y.$$

Em outros termos  $\mathbb{Q}^*$  é denso em  $\mathbb{K}$ . ■

**TEOREMA 33** *Sejam  $\mathbb{K}$  e  $\mathbb{Q}^*$  como no teorema 32. Então*

$$(1.111) \quad \mathbb{Q}^* = \{q^* : q^* = m^*/n^* \in \mathbb{Q}^* \wedge m^* \geq 0^*\},$$

e

$$(1.112) \quad \frac{m}{n} < \frac{p}{q} \iff \frac{m^*}{n^*} < \frac{p^*}{q^*}.$$

**PROVA** É suficiente observar que vale

$$(1.113) \quad \frac{m^*}{n^*} = \frac{-m^*}{-n^*}$$

e

$$(1.114) \quad \frac{m}{n} < \frac{p}{q} \iff mq < np \iff m^* q^* < n^* p^* \iff \frac{m^*}{n^*} < \frac{p^*}{q^*}.$$
■

A construções a seguir foram motivadas por alguns exercícios do livro do [Elon] *Curso de Análise* Volume 1.

**TEOREMA 34 (UNICIDADE DE  $\mathbb{R}$  A MENOS DE ISOMORFISMO)** *Seja  $\mathbb{K}$  um corpo e  $\mathbb{Q}^*$  como teorema 32. Então  $\mathbb{R}$  é ordenadamente isomorfo a  $\mathbb{K}$ .*

**PROVA** Seja  $\rho : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}^*$  um isomorfismo, doravante quando for conveniente denotaremos  $\rho(q)$  por  $q^*$ . Defina a aplicação  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}$ , da seguinte maneira

$$(1.115) \quad \varphi(x) = \sup \rho(\mathbb{Q} \cap ] - \infty, x[).$$

Afirmo que  $\varphi$  é um isomorfismo. É o que nos empenharemos a demonstrar doravante.

Inicialmente, observemos que  $\varphi$  está bem definida pois o supremo é único e o conjunto sobre o qual se toma o supremo é não vazio e limitado superiormente em  $\mathbb{Q}^*$ . Efetivamente, basta tomar  $q \in \mathbb{Q} \cap [x, \infty[$ , daí e do teorema 33 segue que  $q^*$  é um majorante de  $\rho(\mathbb{Q} \cap ] - \infty, x[)$ .

Em seguida, provemos que  $\varphi$  é injetiva. Ora, se  $x < y$  então existem  $p, q \in \mathbb{Q}$  tais que  $x < p < q < y$ , consequentemente

$$\varphi(x) \leq p^* < q^* \leq \varphi(y),$$

observe que isto também prova que  $\varphi$  é estritamente crescente.

Imediatamente, Seja  $\beta \in \mathbb{K}$ , consideremos

$$(1.116) \quad x = \sup \rho^{-1}(\mathbb{Q}^* \cap ]\infty, \beta[).$$

Observe que faz sentido considerarmos o supremo uma vez que existe  $q^* \in \mathbb{K}$ , tal que  $q^* > \beta$ , logo o conjunto sobre o qual toma-se o supremo é limitado superiormente, pois  $q$  é um majorante de tal conjunto; além disso, tal conjunto é trivialmente não vazio. Queremos provar que  $\beta = \varphi(x)$ . Para tanto, observemos que se  $q < x$ , necessariamente  $q^* < \beta$ , pois se  $q^* \geq \beta$ , então  $q$  seria uma cota superior do conjunto  $\rho^{-1}(\mathbb{Q}^* \cap ]\infty, \beta[)$ , logo  $q \geq x$ , uma contradição. Desta forma,  $\beta \geq \varphi(x)$ .

Seja agora  $\alpha < \beta$ , do teorema 33 podemos considerar  $p^*, q^* \in \mathbb{K}$ , tais que

$$(1.117) \quad \alpha < p^* < q^* < \beta$$

segue-se que  $p < q \leq x$ , i.e., existe  $p < x$ , tal que  $p^* > \alpha$ , portanto  $\alpha$  não é cota superior do conjunto  $\varphi(x)$ , em consequência  $\varphi(x) = \beta$ , ou seja, provamos que dado  $\beta \in K$  existe  $x \in \mathbb{R}$ , tal que  $\varphi(x) = \beta$ , i.e.,  $\varphi$  é sobrejetiva.

Consideremos  $p < x + y$ , daí vem que  $p - x < y$ , da densidade de  $\mathbb{Q}$  em  $\mathbb{R}$  existe  $q \in \mathbb{Q}$ , tal que

$$(1.118) \quad p - x < q < y,$$

como consequência

$$(1.119) \quad p - q < x \wedge q^* \leq \varphi(y),$$

daí decorre que

$$(1.120) \quad p^* - q^* \leq \varphi(x),$$

portanto,

$$(1.121) \quad p^* = (p^* - q^*) + q^* \leq \varphi(x) + \varphi(y),$$

como  $p < x + y$  é arbitrário temos

$$(1.122) \quad \varphi(x + y) \leq \varphi(x) + \varphi(y).$$

Seja agora  $\alpha < \varphi(x) + \varphi(y)$ , segue-se que  $\alpha - \varphi(y) < \varphi(x)$ , como  $\varphi(x)$  é a menor cota superior existe  $q < x$  tal que

$$(1.123) \quad \alpha - \varphi(y) < q^* \leq \varphi(x).$$

Por outro lado, como  $\alpha - q^* < \varphi(y)$ , pelo mesmo motivo existe  $p < y$ , tal que

$$(1.124) \quad \alpha - q^* < p^* \leq \varphi(y),$$

donde podemos inferir que existe

$$(1.125) \quad r = p + q < x + y,$$

tal que  $\alpha < r^*$ , i.e.,  $\alpha$  não é cota superior do conjunto  $\varphi(x + y)$ , conformemente  $\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y)$ . Podemos, portanto, concluir que para todo  $x \in \mathbb{R}$  vale

$$(1.126) \quad \varphi(-x) = \varphi(-x) + \varphi(x) - \varphi(x) = \varphi(x - x) - \varphi(x) = -\varphi(x).$$

Desta forma, é suficiente provarmos que

$$(1.127) \quad \varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$$

para  $x, y > 0$ , pois se ao menos um deles for nulo a identidade é imediata. Caso, digamos  $x < 0 < y$ , basta considerar  $-x$ , pois

$$(1.128) \quad \varphi(-xy) = \varphi(-x)\varphi(y) \longrightarrow -\varphi(xy) = -\varphi(x)\varphi(y)$$

como consequência

$$(1.129) \quad \varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y).$$

Dessarte, consideremos  $x, y > 0$ . Seja  $p < xy$ , podemos sem perda de generalidade supor que  $p > 0$ . Tome  $q \in \mathbb{Q}$ , tal que

$$(1.130) \quad \frac{p}{y} < q < x$$

como  $p/q < y$ , temos necessariamente que

$$(1.131) \quad p^* = q^* \frac{p^*}{q^*} \leq \varphi(x)\varphi(y)$$

como consequência

$$(1.132) \quad \varphi(xy) \leq \varphi(x)\varphi(y).$$

Seja  $\alpha < \varphi(x)\varphi(y)$ , podemos supor sem perda de generalidade que  $\alpha > 0^*$ , pois  $\varphi(x), \varphi(y) > 0^*$ . Existe, portanto,  $p < x$ , tal que

$$\frac{\alpha}{\varphi(x)} < p^* \leq \varphi(y)$$

daí também encontramos  $q < x$ , tal que

$$\frac{\alpha}{p^*} < q^* \leq \varphi(x)$$

donde

$$r^* = p^* q^*$$

é tal que  $r < xy$  e  $\alpha < r^*$ , provando que  $\alpha$  não é cota superior do conjunto  $\varphi(xy)$ , concluindo portanto que  $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$ . O que conclui a prova do teorema.

Ademais, vale observar que em particular

$$(1.133) \quad \varphi(q) = q^*.$$

Com efeito, seja  $\sigma = \varphi(q)$  evidentemente  $\sigma \leq q^*$ . Se  $\sigma < q^*$ , então existe  $p^* \in \mathbb{Q}^*$ , tal que

$$(1.134) \quad \sigma < p^* < q^*$$

como  $\mathbb{Q}$  é ordenadamente isomorfo a  $\mathbb{Q}^*$ , então  $p < q$ , mas isto contradiria o fato de  $\sigma$  ser uma cota superior de  $\varphi(q)$ , segue, portanto, a igualdade mencionada. ■

**TEOREMA 35** *Se  $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é um isomorfismo, então  $\psi = \iota$ , em que  $\iota$  é a aplicação identidade. Em particular, se  $\mathbb{K}$  e  $\mathbb{L}$  são dois corpos ordenados com a propriedade da menor cota superior, então existe um único isomorfismo de  $\mathbb{K}$  sobre  $\mathbb{L}$ .*

*Prova.* Se  $\psi$  é um isomorfismo, então  $\psi(1) = 1$ , donde conclui-se  $\psi(m) = m$ , para todo  $m \in \mathbb{Z}$ , que por sua vez implica  $\psi(q) = q$ , para todo  $q \in \mathbb{Q}$ .

Se  $x < \varphi(x)$ , então existe  $p \in \mathbb{Q}$ , tal que

$$x < p = \varphi(p) < \varphi(x)$$

donde se conclui

$$x < p < x$$

uma contradição. Uma prova análoga pode ser dada para o caso em que  $\varphi(x) < x$ . Podemos portanto concluir que  $\varphi = \iota$ .

Em seguida observemos que se  $\varrho, \varsigma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}$ , são dois isomorfismos de  $\mathbb{R}$  sobre  $\mathbb{K}$ , então  $\varsigma^{-1}\varrho = \iota$ , conseqüentemente  $\varrho = \varsigma$ , i.e., existe um único isomorfismo de  $\mathbb{R}$  sobre  $\mathbb{K}$ .

Seja agora um isomorfismo arbitrário  $\tau : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{L}$  e,  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}$  e  $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{L}$  os únicos isomorfismos então  $\psi^{-1}\tau\varphi = \iota$ , logo  $\tau = \psi\varphi^{-1}$ , desta forma  $\tau$  é único. ■

A seguir relembremos de alguns exercícios interessantes de [Rudin], quanto a construção de potências qualquer e da construção do logaritmo, ambos de base  $b > 0$  qualquer.

**Teorema 10.** *Sejam  $m/n, p/q \in \mathbb{Q}$ , tais que  $m/n = p/q$  (podemos supor que  $n, q > 0$  sem perda de generalidade) e  $b > 1$ . Então*

$$(b^m)^{1/n} = (b^p)^{1/q}.$$

*Desta forma podemos definir*

$$b^{m/n} = (b^m)^{1/n}$$

*sem nos preocupar com a fração representante do número racional.*

*Notado isto, vale*

$$\forall r, s (r, s \in \mathbb{Q} \longrightarrow b^{r+s} = b^r b^s).$$

*Para  $x \in \mathbb{R}$ , definindo*

$$B(x) = \{b^r \in \mathbb{R} : r \leq x \wedge r \in \mathbb{Q}\},$$

*vale,*

$$\forall r (r \in \mathbb{Q} \longrightarrow b^r = \sup B(r)).$$

*Assim, faz sentido definir*

$$b^x = \sup B(x)$$

*para  $x \in \mathbb{R}$ . Além disso, vale também*

$$b^{x+y} = b^x b^y.$$

*Prova.* Primeiro, se  $m/n = p/q$ , então  $mq = np$ . Desta maneira,

$$((b^m)^{1/n})^q = (b^{mq})^{1/n} = (b^{np})^{1/n} = b^p,$$

da unicidade da raiz temos necessariamente que

$$(b^m)^{1/n} = (b^p)^{1/q}.$$

Segundo,

$$\begin{aligned} b^{m/n+p/q} &= b^{(mq+np)/nq} \\ &= (b^{mq+np})^{1/nq} \\ &= (b^{mq})^{1/nq} (b^{np})^{1/nq} \\ &= ((b^{1/n})^{mq})^{1/nq} ((b^{1/q})^{np})^{1/nq} \\ &= (b^{1/n})^m (b^{1/q})^p \\ &= (b^m)^{1/n} (b^p)^{1/q} \\ &= b^{m/n} b^{p/q}. \end{aligned}$$

Terceiro, as potências de expoente racional e base fixa  $b > 1$  preservam a ordem. Assim, se  $r < s$ , então  $b^r < b^s$ . De fato, suponha que  $m/n > p/q$ , como  $n, q > 0$ , necessariamente  $mq > np$ , donde  $b^{mq} > b^{np}$ . Observando que

$$(b^{1/n})^{1/q} = b^{1/nq},$$

pois

$$((b^{1/n})^{1/q})^{nq} = b,$$

*a fortiori*

$$b^{m/n} = (b^{mq})^{1/nq} > (b^{np})^{1/nq} = b^{p/q},$$

como afirmamos. Destarte,  $b^r \geq \sup B(r)$ , mas como  $b^r \in B(r)$ , obrigatoriamente  $b^r = \sup B(r)$ , conforme dissemos.

Quarto, devemos considerar dois casos, a saber,  $x + y \in Q$  e  $x + y \notin Q$ . Antes de prosseguirmos para os casos, provemos inicialmente que nenhum  $y < b^x b^y$  é cota superior do conjunto  $B(x + y)$ . De fato, suponha que  $y < b^x b^y$ , daí vem que  $y/b^y < b^x$ , existe, portanto,  $r \leq x$ , tal que  $y/b^y < b^r \leq b^x$ . Analogamente existe  $s \leq y$ , tal que  $y/b^r < b^s \leq b^y$ , em consequência existe  $t = r + s \leq x + y$ , tal que  $y < b^t$ , provando que  $y$  não pode ser cota superior de  $B(x + y)$ , particularmente, temos  $b^x b^y \leq b^{x+y}$ . Suponhamos primeiramente que  $x + y \notin Q$ , dado  $s \in Q$ , tal que  $s \leq x + y$ , necessariamente  $s < x + y$ , podemos portanto tomar  $t \in Q$ , tal que  $s - x < t < y$ , donde vem que

$$b^s = b^{s-t} b^t \leq b^x b^y$$

como  $s \leq x + y$  é arbitrário necessariamente  $b^{x+y} \leq b^x b^y$ , como concluímos que  $b^x b^y \leq b^{x+y}$ , conclusivamente  $b^{x+y} = b^x b^y$ . Por outro lado, suponhamos que  $x + y = r \in Q$ . Antes, sabe-se que para  $u, v \in \mathbb{R}$  é bem conhecida a identidade

$$v^n - u^n = (v - u) \sum_{i=0}^{n-1} u^i v^{n-1-i}$$

donde fazendo  $v = 1$  e  $u = (1/b)^{1/n}$  obtemos

$$1 - \frac{1}{b} = \left(1 - \frac{1}{b^{1/n}}\right) \sum_{i=0}^{n-1} b^{i+1} > n \left(1 - \frac{1}{b^{1/n}}\right)$$

donde deriva-se

$$1 - \frac{1}{b^{1/n}} < \frac{b-1}{bn}.$$

Portanto,

$$b^r - b^{r-1/n} = b^r (1 - b^{-1/n}) < \frac{b^{r-1}(b-1)}{n}.$$

Com isto em mãos, dado  $\varepsilon > 0$  existe  $s < r$ , tal que  $b^r - b^s < \varepsilon$ . De fato, tome  $n > b^{r-1}(b-1)/\varepsilon$ , temos necessariamente que existe  $s = r - 1/n < r$ , tal que

$$b^r - b^s \leq \frac{b^{r-1}(b-1)}{n} < \varepsilon$$

Desta forma, dado  $\varepsilon > 0$  existe  $s < r = x + y$ , tal que

$$b^r - \varepsilon < b^s < b^r$$

Consideremos  $t \in Q$  tal que  $s - x < t < y$ , assim  $s - t < x$  e

$$b^s = b^{s-t} b^t \leq b^x b^y,$$

logo,

$$b^r - \varepsilon < b^s \leq b^x b^y \leq b^{x+y} = b^r$$

como  $\varepsilon$  é arbitrário, decorre que  $b^{x+y} = b^r = b^x b^y$ . ■

É interessante indagar se uma definição análoga funcionaria para  $0 < b < 1$ . Primeiro devemos observar as potências de expoente racional  $r$ . Como é fácil de se observar, para  $0 < b < 1$ , quanto maior for  $s \leq r$  menor será a potência  $b^s$ , isto decorre naturalmente observando

as potências do recíproco de  $b$ , já tratadas. De fato, suponha que  $s < t$ , logo  $-t < -s$ , que por sua vez acarreta

$$b^t = \left(\frac{1}{b}\right)^{-t} < \left(\frac{1}{b}\right)^{-s} = b^s.$$

A seguir provaremos que ao invés de tormarmos o supremo para a definição de  $b^x$ , poderíamos sem problemas considerar o ínfimo.

Definamos para  $b \in \mathbb{R}_+$  e  $x \in \mathbb{R}$ , os conjuntos

$$L(b, x) = \{b^t \in \mathbb{R} : t \leq x \wedge t \in \mathbb{Q}\} \quad \text{Def.}$$

e

$$U(b, x) = \{b^t \in \mathbb{R} : t \geq x \wedge t \in \mathbb{Q}\} \quad \text{Def.}$$

Conformemente temos o

**Teorema 11.** Para  $0 < b < 1$ , vale

$$\inf L(b, x) = \sup U(b, x),$$

e para  $b > 1$ , vale

$$\sup L(b, x) = \inf U(b, x).$$

*Prova.* Com efeito, seja  $0 < b < 1$ , dado  $\varepsilon > 0$ , tomemos  $n > (1 - b)/b\varepsilon$ . Fazendo  $v = 1/b^{1/n}$  e  $u = 1$  na identidade

$$v^n - u^n = (v - u) \sum_{i=0}^{n-1} v^i u^{n-1-i}$$

obtemos

$$\frac{1}{b} - 1 = \left[ \left(\frac{1}{b}\right)^{1/n} - 1 \right] \sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{1}{b}\right)^{i/n}$$

sabendo que  $1/b > 1$  temos em consequência

$$\frac{1-b}{b} > \left[ \left(\frac{1}{b}\right)^{1/n} - 1 \right] n$$

donde

$$\frac{1}{b^{1/n}} - 1 < \frac{1-b}{bn}.$$

Desta forma, tomando  $s, r \in \mathbb{Q}$ , tais que  $r \leq x \leq s$  e  $s - r < 1/n$  temos

$$b^{r-s} - 1 < b^{-1/n} - 1 < \frac{1-b}{bn} < \varepsilon$$

donde

$$0 \leq \inf L(b, x) - \sup U(b, x) \leq b^r - b^s < b^s \varepsilon < \varepsilon.$$

Como  $\varepsilon > 0$  é arbitrário, necessariamente

$$\inf L(b, x) = \sup U(b, x).$$

Seguidamente, seja  $b > 1$ , dado  $\varepsilon > 0$ , tomemos

$$n > \frac{(b-1) \sup L(b, x)}{\varepsilon}.$$



Tomando  $r, s \in \mathbb{Q}$ , tais que  $r \leq x \leq s$  e  $s - r < 1/n$  obtemos

$$0 < b^{s-r} - 1 < b^{1/n} - 1 < \frac{b-1}{n} < \frac{\varepsilon}{\sup L(b, x)}$$

donde segue que

$$0 \leq \inf U(b, x) - \sup L(b, x) \leq b^s - b^r < \frac{\varepsilon b^r}{\sup L(b, x)} \leq \varepsilon.$$

Visto que  $\varepsilon > 0$ , é arbitrário decorrerá que

$$\inf U(b, x) = \sup L(b, x).$$

■

Agora relembremos que no teorema fizemos

$$b^x = \sup B(x) = \sup L(b, x).$$

Além disso, vimos que se  $x \in \mathbb{Q}$ , então

$$b^x = \sup L(b, x).$$

Nesta altura, definimos o símbolo  $b^x$  para  $x \in \mathbb{R}$  e  $0 < b < 1$  ou  $1 < b$ , não é difícil ver que para  $b \in \{0, 1\}$  temos  $L(b, x) = U(b, x) = \{b\}$ . Assim, é natural definir  $b^x = b$ , nestes casos. Desta forma, ficam definidas as potências de base  $b \in \mathbb{R}_+$  qualquer.

Em seguida, provemos o

**Teorema 12.** *Se  $b > 0$ , então*

$$b^x \left(\frac{1}{b}\right)^x = 1.$$

*Prova.* Para tanto, provemos que as desigualdades  $b^x(1/b)^x < 1$  e  $b^x(1/b)^x > 1$  geram contradições. Provaremos apenas para o caso  $0 < b < 1$ , pois o caso  $b > 1$  pode ser provado analogamente considerando-se  $a = 1/b$  e conforme mencionado  $1^x = 1$ .

Se  $b^x(1/b)^x < 1$ , então  $(1/b)^x < 1/b^x$ , existe portanto  $r \in \mathbb{Q}$ , tal que  $r \geq x$  e

$$\left(\frac{1}{b}\right)^x \leq \left(\frac{1}{b}\right)^r < \frac{1}{b^r},$$

donde  $b^x < b^r$ . Segue igualmente que existe  $s \in \mathbb{Q}$  tal que  $s \leq x$  e  $b^x \leq b^s < b^r$ , daí vem  $b^{r-s} > 1$ , contradizendo a hipótese  $b < 1$ . Analogamente, se  $b^x(1/b)^x > 1$ , então existe  $r \in \mathbb{Q}$ , tal que  $r \leq x$  e

$$\frac{1}{b^x} < \left(\frac{1}{b}\right)^r \leq \left(\frac{1}{b}\right)^x.$$

Destarte, existe  $s \in \mathbb{Q}$  tal que  $s \geq x$  e  $b^r < b^s \leq b^x$ , donde inferimos que  $b^{s-r} > 1$ , outra contradição com o fato de  $b < 1$ . ■

**Teorema 13 (Uma definição de logaritmo).** *Se  $b > 1$  e*

$$x = \sup\{w \in \mathbb{R} : b^w < y\},$$

*então  $b^x = y$ . Além disso,  $x$  é o único número real tal que  $b^x = y$ .*

*Prova.*

**Exercício 20 do capítulo 1 de [Rudin].** Provisoriamente diremos que  $\alpha \subset Q$  é um corte se os seguintes axiomas são satisfeitos

- I.  $\emptyset \neq \alpha \neq Q$ ;
- II.  $\forall p, q (p \in \alpha \wedge q \in Q \wedge q < p \longrightarrow q \in \alpha)$ .

Seja  $R$  a coleção de todos os cortes, provemos que  $R$  munido com a ordem

$$\alpha < \beta \longleftrightarrow \alpha \subset \beta \quad \text{Def.}$$

(em que  $\subset$  é a inclusão própria) tem a propriedade da menor cota superior. Ademais, se

$$\alpha + \beta = \{p + q \in Q : (p, q) \in \alpha \times \beta\} \quad \text{Def.}$$

então A1–A4 são satisfeitas, mas A5 falha.

*Prova.* Seja  $S \subseteq R$  um conjunto não vazio limitado superiormente, façamos  $\varsigma = \bigcup S$ , provemos que  $\varsigma$  é a menor das cotas superiores de  $S$ . Com efeito, primeiro provemos que  $\varsigma$  satisfaz I e II. De fato, sabendo que  $S \neq \emptyset$ , existe  $\alpha \subset \varsigma$  tal que  $\alpha \neq \emptyset$ , em consequência  $\varsigma \neq \emptyset$ . Seja  $\beta$  uma cota superior de  $S$  que é garantida das hipóteses. Dado  $\alpha \in S$ , inferimos que  $\alpha \subseteq \beta$ , desta maneira  $\varsigma \subseteq \beta$ . Assim, basta notar  $Q \setminus \varsigma \supseteq Q \setminus \beta \neq \emptyset$ , em outros termos  $\varsigma \neq Q$ , logo vale I. Seja agora,  $p \in \varsigma$  e  $q \in Q$  com  $q < p$ , segue que existe  $\alpha \in S$ , tal que  $p \in \alpha$ , como este último é um corte  $q \in \alpha$ , como  $\alpha \subseteq \varsigma$ , segue que  $q \in \varsigma$ , fica portanto provada II. Como  $\varsigma$  esta contida em toda cota superior de  $S$ , decorre que  $\sup S = \varsigma$ . Consequentemente  $R$  tem a propriedade da menor cota superior.

Dados  $\alpha, \beta \neq \emptyset$ , necessariamente  $\alpha + \beta \neq \emptyset$ . Agora se  $r \notin \alpha$  e  $s \notin \beta$ , então  $r + s$  majora estritamente todo elemento de  $\alpha + \beta$ , consequentemente  $r + s \notin \alpha + \beta$ , e portanto  $\alpha + \beta \neq Q$ , fica provado portanto que a soma satisfaz I. Sejam agora  $r \in \alpha + \beta$  e  $s \in Q$  com  $s < r$ , segue que existe  $(p, q) \in \alpha \times \beta$ , tal que  $r = p + q$ . Assim,  $s < p + q$ , logo  $s - p < q$ , isto é,  $s - p \in \beta$ , daí vem que

$$s = p + (s - p) \in \alpha + \beta.$$

o que prova II. Isto prova que adição de cortes é estável, em outros termos A1.

Trivialmente valem A2 e A3.

Cosideremos agora

$$0^* = \{p \in Q : p \leq 0\} \quad \text{Def.}$$

Provemos que  $0^*$  é um corte. De fato, trivialmente  $\emptyset \neq 0^* \neq Q$ . E, se  $p \in 0^*$  e  $q \in Q$  com  $q < p$ , então  $q \leq 0$ , i.e.,  $q \in 0^*$ , portanto,  $0^*$  é um corte.

Seja  $\alpha \in R$  e  $(p, q) \in 0^* \times \alpha$  temos que  $p + q \leq q \in \alpha$ , consequentemente  $p + q \in \alpha$ , i.e.,  $0^* + \alpha \subseteq \alpha$ . Por outro lado, seja  $p \in \alpha$ , trivialmente  $p = 0 + p \in 0^* + \alpha$ , i.e.,  $\alpha \subseteq 0^* + \alpha$ . Destarte  $\alpha = 0^* + \alpha$ , como  $\alpha$  é arbitrário segue que  $0^*$  é o elemento neutro para adição.

Dado  $p$ , não é difícil ver que

$$\alpha = \{p \in Q : p < q\}$$

é um corte. Suponhamos que existisse  $\beta \in R$ , tal que  $\alpha + \beta = 0^*$ , então necessariamente existiria  $(r, s) \in \alpha \times \beta$ , tal que  $r + s = 0$ , daí  $s = -r \in \beta$ . Consideremos  $t \in Q$  tal que  $r < t < q$ , temos

que  $t \in \alpha$ , mas  $s + t > 0$ , i.e., existe  $(t, s) \in \alpha \times \beta$ , tal que  $t + s \notin 0^*$ , contradizendo a igualdade  $\alpha + \beta = 0^*$ . ■

**Lema 3.** *seja  $\pi$  uma função sentencial cujo universo de discurso é o subconjunto dos números naturais  $i$  tais que  $i \leq n + 1$ . Ademais, suponha que*

*I.  $\pi(0)$  é verdadeira;*

*II. Se  $i \leq n$  e  $\pi(i)$  é verdadeira, então  $\pi(i + 1)$  é verdadeira.*

*Então  $\pi$  é verdadeira para todo natural  $i \leq n + 1$ .*

*Prova.* Use o fato de  $N$  ser bem ordenado. ■

**Exercício 24 do livro *Calculus* de M. Spivak.** Consideremos dada uma sequência de números  $\{a_n\}$ , denotaremos uma soma qualquer dos  $n \geq 1$  primeiros termos, aparacendo na ordem natural, por  $s(a_1, \dots, a_n)$ , em outras palavras,  $a_i$  vem antes de  $a_{i+1}$  na expressão da soma.

Definiremos indutivamente,

$$S_0 = 0 \quad \text{e} \quad S_{k+1} = a_{n-k} + S_k.$$

Desta forma, intuitivamente podemos considerar definida a soma

$$a_1 + (a_2 + (a_3 + (\dots + (a_{n-1} + a_n))))),$$

tal soma é na realidade  $S_n$ . Denotaremos tal soma por  $S(a_1, \dots, a_n)$ , para indicar quais termos a soma depende. No seu livro, *Calculus*, Spivak define

$$a_1 + \dots + a_n = S(a_1, \dots, a_n) \quad \text{Def.}$$

e prossegue o exercício usando esta simbologia. No entanto, nos ateremos à notação  $S(a_1, \dots, a_n)$  para se referir aquela soma.

Afirmo que para todo  $n \in N$

$$S(a_1, \dots, a_{n+2} + a_{n+3}) = S(a_1, \dots, a_{n+3}).$$

A soma no membro esquerdo da última igualdade pode ser reescrita como

$$S(b_1, \dots, b_{n+2})$$

em que  $b_i = a_i$ , para todo  $i \leq n + 1$  e  $b_{n+2} = a_{n+2} + a_{n+3}$ . Esta soma por sua vez é dada indutivamente por

$$S_0 = 0 \quad \text{e} \quad S_{j+1} = b_{n+2-j} + S_j.$$

E a soma  $S(a_1, \dots, a_{n+2})$  é dada indutivamente por

$$S'_0 = 0 \quad \text{e} \quad S'_{j+1} = a_{n+3-j} + S'_j.$$

Seguidamente, provemos indutivamente que

$$S'_{j+2} = S_{j+1},$$

para todo  $j \leq n + 1$ .

Primeiro, para  $j = 0$  temos

$$S'_2 = a_{n+2} + S'_1 = a_{n+2} + a_{n+3} = b_{n+2} = S_1.$$

Portanto, a propriedade é válida para  $j = 0$ . Suponhamos que ela seja válida para  $j \leq n$ . Temos em seguida que

$$S'_{j+3} = a_{n+1-j} + S'_{j+2}$$

e

$$S_{j+2} = b_{n+1-j} + S_{j+1}.$$

Como sabemos por hipótese de indução que  $S'_{j+2} = S_{j+1}$  e também sabemos que  $a_{n+1-j} = b_{n+1-j}$ , para  $0 \leq j \leq n$ , temos em conformidade

$$S'_{j+3} = a_{n+1-j} + S'_{j+2} = b_{n+1-j} + S_{j+1} = S_{j+2}$$

portanto a propriedade é válida para  $j + 1$ . Pelo princípio de indução matemática (sob a forma do lema anterior) a propriedade é válida para todo  $j \leq n + 1$ . Em particular,

$$S(a_1, \dots, a_{n+3}) = S'_{n+3} = S_{n+2} = S(a_1, \dots, a_{n+2} + a_{n+3}).$$

Em seguida, provemos indutivamente que para todo  $n \in N$

$$S(a_1, \dots, a_{n+1}) + a_{n+2} = S(a_1, \dots, a_{n+2}).$$

Inicialmente, verifiquemos que

$$S(a_1) + a_2 = a_1 + a_2 = S(a_1, a_2),$$

i.e., a propriedade é válida para  $n = 0$ . Suponhamos por hipótese de indução que ela seja válida para  $n$ , temos em conformidade

$$\begin{aligned} S(a_1, \dots, a_{n+2}) + a_{n+3} &= (S(a_1, \dots, a_{n+1}) + a_{n+2}) + a_{n+3} \\ &= S(a_1, \dots, a_{n+1}) + (a_{n+2} + a_{n+3}) \\ &\stackrel{(\dagger)}{=} S(b_1, \dots, b_{n+2}) \\ &\stackrel{(\ddagger)}{=} S(a_1, \dots, a_{n+3}) \end{aligned}$$

( $\dagger$ ) Fazendo  $b_k = a_k$ , para  $k \leq n + 1$  e  $b_{n+2} = a_{n+2} + a_{n+3}$ ;

( $\ddagger$ ) Pelo que já foi provado.

Fica portanto provado que a propriedade é válida para  $n + 1$ , novamente pelo princípio de indução matemática segue que a propriedade é válida para todo  $n \in N$ .

Imediatamente provemos que para todo  $l \in N$  tal que  $l \geq 1$  e para todo  $n \geq l + 1$

$$S(a_1, \dots, a_l) + S(a_{l+1}, \dots, a_n) = S(a_1, \dots, a_n).$$

Para  $l = 1$  e  $n \geq 2$  certamente

$$S(a_1) + S(a_2, \dots, a_n) = a_1 + S(a_2, \dots, a_n) = S(a_1, \dots, a_n)$$

Suponhamos por hipótese de indução que a propriedade é válida para  $l$ , temos para  $n \geq l + 2$

$$\begin{aligned} S(a_1, \dots, a_{l+1}) + S(a_{l+2}, \dots, a_n) &= (S(a_1, \dots, a_l) + a_{l+1}) + S(a_{l+2}, \dots, a_n) \\ &= S(a_1, \dots, a_l) + (a_{l+1} + S(a_{l+2}, \dots, a_n)) \\ &= S(a_1, \dots, a_l) + S(a_{l+1}, \dots, a_n) \\ &= S(a_1, \dots, a_n), \end{aligned}$$

i.e., a propriedade é válida para  $l + 1$ , em consequência pelo princípio de indução matemática ela será válida para todo  $l \in N$ .

Consideremos uma soma arbitrária com pelo menos dois elementos  $s(a_1, \dots, a_n)$ , conforme estipulado no início da resolução do problema. Para esta soma arbitrária temos duas possibilidades

I. A soma começa ou termina com um termo, neste caso temos

$$s(a_1, \dots, a_n) = a_1 + s(a_2, \dots, a_n)$$

ou

$$s(a_1, \dots, a_n) = s(a_1, \dots, a_{n-1}) + a_n.$$

Antes de exibirmos o outro caso, estipularemos que se um parêntese ocorre entre parênteses correspondentes, então o seu correspondente ocorrerá entre os parênteses correspondentes.

II. A soma começa e termina com parênteses digamos  $(_1$  e  $)_2$ , respectivamente. Seja  $(_1$  e  $)_2$  os correspondentes de  $(_1$  e  $)_2$ , respectivamente. Após  $(_1$  deve vir necessariamente um símbolo '+', pois a outra possibilidade seria um parêntese  $)_3$ , em conformidade com nossa estipulação  $(_1$  deve vir entre  $(_3$  e  $)_3$ , mas isto contradiria o fato de que  $(_1$  é o primeiro parêntese. Após '+' deve vir um parêntese  $(_3$ , este parêntese deve coincidir com  $)_2$ , pois do contrário  $(_2$  e  $)_2$  viriam entre  $(_3$  e  $)_3$  contradizendo o fato de  $)_2$  ser o último parêntese.

Em qualquer caso antes existe um símbolo '+' que separa a primeira soma em duas somas. Seja  $m$  menor natural tal que  $a_m$  está do lado direito do símbolo '+', decerto que  $2 \leq m \leq n$ , logo existe  $l \in N$ , tal que  $l + 1 = m$ ; assim

$$s(a_1, \dots, a_n) = s(a_1, \dots, a_l) + s(a_{l+1}, \dots, a_n).$$

Seguidamente provemos que para todo  $n \in N$  tal que  $n \geq 2$  vale

$$\pi(n) \equiv s(a_1, \dots, a_n) = S(a_1, \dots, a_n).$$

Certamente que  $\pi(2)$  é verdadeira. Suponhamos que  $\pi$  seja verdadeira para todo  $2 \leq i \leq n$ , pelo que vimos, para algum  $l \leq n$

$$\begin{aligned} s(a_1, \dots, a_{n+1}) &= s(a_1, \dots, a_l) + s(a_{l+1}, \dots, a_{n+1}) \\ &= S(a_1, \dots, a_l) + S(a_{l+1}, \dots, a_{n+1}) \\ &= S(a_1, \dots, a_{n+1}) \end{aligned}$$

Em consequência a propriedade é válida para  $n + 1$ , consequentemente pelo princípio de indução matemática  $\pi$  é válida para todo  $n \in N$  tal que  $n \geq 2$ . ■

**Definição 1.** Um conjunto  $C$  é finito se existe um  $n \in \omega$ , tal que  $C \sim n$ . Denotaremos o natural  $n$ , tal que  $n \sim C$ , por  $\#C$ .

**Teorema 14.** Para todo  $n \in \omega$ , se  $C \subseteq n$ , então  $\#C \leq n$ .

*Prova.* Trivialmente válida para  $n = 0$ . Suponhamos que seja válida para  $n$ , provemos que será válida para  $n + 1$ . Temos duas possibilidades a considerar,  $n \notin C$  ou  $n \in C$ . No primeiro caso temos  $C \subseteq n$ , daí pela hipótese de indução  $\#C \leq n$ . Se  $n \in C$ , então  $C \setminus \{n\} \subseteq n$ , daí  $\#(C \setminus \{n\}) \leq n$ , donde  $\#C \leq n + 1$ , como queríamos provar. Do princípio de indução matemática vale a condicional para todo  $n \in \omega$ . ■

**Teorema 15.** Nenhum conjunto finito é equivalente a um subconjunto próprio.

*Prova.* Suponhamos que exista um conjunto finito  $C$  que é equivalente a um subconjunto próprio  $S$ . Sabemos que existe  $n \in \omega$ , tal que  $n + 1 = \#C$ , pois  $C$ , deve conter ao menos um elemento para possuir subconjuntos próprios. Existe  $a \in C \setminus S$ , donde vem que  $S \subseteq C \setminus \{a\}$ , que por sua vez implica  $\#S \leq \#(C \setminus \{a\}) = n$ , mas por outro lado  $\#S = \#C = n + 1$ , daí vem a desigualdade

$$n + 1 = \#S \leq n$$

o que é um absurdo.

**Corolário 1.** *Uma condição suficiente para que um conjunto  $C$  seja infinito, i.e., não existir  $n \in \omega$ , tal que  $C \sim n$ , é que ele seja equivalente a um subconjunto próprio.*

*Prova.* Trivial. ■

Nas condições do corolário o conjunto  $C$  é dito Dedekind-infinito. Usando o axioma da escolha é possível provar que todo conjunto infinito no primeiro sentido é Dedekind-infinito, portanto sob o axioma da escolha ser infinito no primeiro sentido é indiferente de ser Dedekind-infinito.

**Teorema 16.** *Sejam  $C$  um conjunto infinito e  $f : \omega \rightarrow C$  uma sobrejeção. Então  $C$  é contável.*

*Prova.* Para todo  $c \in C$ , podemos escolher  $\eta(c) \in f^{-1}(c)$ . Sabemos que  $A = \{\eta(c) \in \omega : c \in C\} \sim C$ , pois  $f|_A$  é uma bijeção. Como  $C$  é infinito,  $A$  também o é. Dessarte,  $A$  é contável pois  $A \subseteq \omega$ , consequentemente  $C$  é contável.

**Teorema 17.**  $\omega \times \omega \sim \omega$ .

*Prova.* Defina  $\phi : \omega \times \omega \rightarrow \omega$  por  $\phi(m, n) = 2^m(2n + 1)$ . É sabido que todo número pode ser fatorado num produto de números primos, e fatores que não são 2 são ímpares e produto de ímpares é ímpar, consequentemente o produto de fatores que não são 2 é um número da forma  $2n + 1$ , para  $n \in \omega$ . Portanto, para todo  $l$  existe  $(m, n) \in \omega \times \omega$  tal que  $l = 2^m(2n + 1)$ . Assim,  $\phi$  é sobrejetiva. A injetividade não é difícil, basta supor que  $2^m(2n + 1) = 2^p(2q + 1)$ , sem perdas suponhamos que  $m < p$ , daí vem  $2n + 1 = 2^{p-m}(2q + 1)$ , donde concluiríamos que  $1 = 2r$  para  $r \in \omega$ , o que é impossível em  $\omega$ . Daí  $m = p$  e consequentemente  $n = q$ , logo  $\phi$  é injetiva, portanto bijetiva, fica, portanto, provado o teorema. ■

**Corolário 2.** *Uma reunião de uma família contável com membros contáveis é contável.*

*Prova.* Podemos supor que nossa família é  $\{E_n : n \in \omega\}$ , para cada  $n$  existe uma função  $f_n : \omega \rightarrow E_n$ . Agora basta definirmos  $f : \omega \times \omega \rightarrow U$ , por  $f(m, n) = f_m(n)$ , com  $U = \bigcup_{n \in \omega} E_n$ . Como  $f \circ \phi^{-1} : \omega \rightarrow U$  ( $\phi$  dada no teorema anterior) é sobrejetiva e  $U$  infinito, então  $U$  é contável.

**Teorema 18.** *Seja  $\mathcal{A}$  uma coleção no máximo contável de membros no máximo contáveis. Então  $\bigcup \mathcal{A}$  é no máximo contável.*

*Prova.* Das hipóteses existe  $I \in \omega \cup \{\omega\}$  e uma bijeção  $\kappa : I \rightarrow \mathcal{A}$ , digamos que  $A_i = \kappa(i)$ . Para cada  $i \in I$ , existe uma bijeção  $f_i : B_i \rightarrow A_i$ , com  $B_i \in \omega \cup \{\omega\}$ . Definamos  $f \subseteq (\omega \times \omega) \times A$ , com  $A = \bigcup \mathcal{A}$  por

$$((m, n), a) \in f \leftrightarrow a = f_m(n)$$

Então  $f$  é uma função. De fato, suponhamos que  $((m, n), a), ((m, n), b) \in f$ , então da definição  $a = f_m(n) = b$ . Assim,  $f : \text{dom } f \rightarrow A$ , é uma sobrejeção. Em verdade, dado  $a \in A$ , existe  $i \in I$ , tal que  $a \in A_i$ , como  $f_i$  é uma bijeção existe  $m \in B_i$ , tal que  $f_i(m) = a$ , consequentemente  $f(i, m) = a$ . Usando o axioma da escolha podemos construir um conjunto  $C \subseteq \omega \times \omega$  tal que  $f|_C : C \rightarrow A$  é uma bijeção. Como todo conjunto de  $\omega \times \omega$  é no máximo contável decorrerá por maior razão que  $A = \bigcup \mathcal{A}$  também o será.

**Teorema 19.** *Sejam  $\mathcal{O}$  um conjunto com pelo menos dois elementos, linearmente (totalmente) ordenado segundo  $<$  (uma ordem estrita), e  $\mathcal{B}$  uma coleção de elementos da forma:*

- I.  $(a, b) = \{x \in \mathcal{O} : a < x < b\}$ ;
- II.  $[l, b) = \{x \in \mathcal{O} : l \leq x < b\}$ ;
- III.  $(a, g] = \{x \in \mathcal{O} : a < x \leq g\}$ ;

em que  $a < b$  e  $l = \min \mathcal{O}$  e  $g = \max \mathcal{O}$ , se houverem. Caso contrário, os respectivos conjuntos II–III não figuram na coleção  $\mathcal{B}$ . Então  $\mathcal{B}$  é uma base para uma topologia em  $\mathcal{O}$ .

*Prova.* Seja  $x \in \mathcal{O}$ , temos duas possibilidades  $x \in \{l, g\}$ , neste caso é evidente que existe um elemento básico contendo  $x$ . Caso contrário, devem existir  $a, b \in \mathcal{O}$ , tais que  $a < x < b$ , i.e.,  $x \in (a, b)$ . Sejam  $B_i \in \mathcal{O}$ ,  $i = 1, 2$  e  $x \in B_1 \cap B_2$ , tome  $a = \max_{i=1,2} a_i$  e  $b = \min_{i=1,2} b_i$ , em que  $a_i$  é o extremante inferior de  $B_i$  e  $b_i$  o extremante superior de  $B_i$ , temos três possibilidades mutuamente excludentes  $a, b \notin \{l, g\}$  ou  $a = l$  ou  $b = g$ . No primeiro caso  $x \in B = (a, b)$ , no segundo  $x \in B = [l, b)$  e no terceiro  $x \in B = (a, g]$  e em todos os casos  $B \subseteq B_1 \cap B_2$  com  $x \in B \in \mathcal{B}$ . Diante do que foi recorrido,  $\mathcal{B}$  é uma base de  $\mathcal{O}$ .

Tal topologia em um conjunto totalmente ordenado com pelo menos dois elementos  $\mathcal{O}$ , é chamada de **topologia da ordem**, ou simplesmente **topologia ordem**.

**Corolário 3.** *Seja  $R^\# = R \cup \{-\infty, \infty\}$ , munido com a ordem  $<$  satisfazendo  $-\infty < \infty$ ,  $-\infty < a < \infty$  para todo  $a \in R$  e tal que  $<$  restrita a  $R$  é a ordem usual em  $R$  é um espaço topológico.*

*Prova.* Primeiro verifiquemos que a ordem é linear (ou total). Trata-se de um ordem estrita, portanto devemos atestar que vale a não reflexividade, a transitividade e a comparabilidade. Pela construção  $a < a$ , para todo  $a \in R^\#$ . Suponhamos que  $a < b$  e  $b < c$  se  $a = -\infty$  ou  $c = \infty$  é imediato que  $a < c$ . Caso contrário  $a, c \in R$  e daí segue da transitividade da ordem em  $R$  que  $a < c$ . Pela própria construção  $<$  é total. Como consequência  $<$  induz a topologia ordem sobre  $R^\#$ . ■

Não é difícil ver para quaisquer dois elementos  $x \neq y$ , existem vizinhanças  $V_x$  e  $V_y$  de  $x$  e  $y$ , respectivamente, tais que  $V_x \cap V_y = \emptyset$ , i.e.,  $R^\#$  tem a propriedade de Hausdorff ou satisfaz o axioma  $T_1$ . Como consequência disto podemos formular o limite de sequências em  $R^\#$ .

**Definição 2.** *Sejam  $X$  um espaço topológico e  $x \in X^\omega$ , vamos fazer  $x(n) = x_n$  e designar  $x$  pela família  $\{x_n \in X : n \in \omega\}$ , denotaremos-la por  $\{x_n\}$ . Diremos que  $\{x_n\}$  converge para  $p \in X$ , se e somente se, para toda vizinhança  $V$  de  $p$ , existe  $n_V \in \omega$ , tal que se  $n \geq n_V$ , então  $x_n \in V$ .*

**Teorema 20.** *Seja  $X$  um espaço topológico Hausdorff. Então, se  $\{x_n\}$  converge, então convergirá para um único elemento  $p \in X$ .*

*Prova.* Suponha que  $\{x_n\}$  converge para  $p \in X$ , e  $q \in X$  com  $q \neq p$ , existem vizinhanças  $V_p$  e  $V_q$ , de  $p$  e  $q$  respectivamente, tais que  $V_p \cap V_q = \emptyset$ . Evidentemente o conjunto  $\{n \in \omega : x_n \notin V_q\}$  é infinito, consequentemente  $\{x_n\}$ , não converge para  $q$ .

Uma outra maneira de verificar isto, é supor que  $\{x_n\}$  convirga para  $p$  e  $q$ , concomitantemente. Tomemos  $V_p$  e  $V_q$  como anteriormente. Da definição, existe  $n \in \omega$ , tal que  $x_n \in V_p \cap V_q = \emptyset$ , o que é um absurdo. ■

**Definição 3.** *Seja  $X$  um espaço topológico Hausdorff. Se  $\{x_n\}$  converge para  $p \in X$ , então escreveremos*

$$\lim_n x_n = p.$$

**Teorema 21.** *Sejam  $X$  um espaço topológico qualquer,  $E = \{x_n\} \subseteq X$ , e  $p \in X$  um ponto limite de  $E$ , tal que existe um sistema de vizinhanças  $\mathcal{S} = \{V_n : n \in \omega\}$  de  $p$ , com as seguintes propriedades:*

$$I. \forall n(n \in \omega \longrightarrow V_{n+1} \subset V_n);$$

II. Para toda vizinhança  $V$  de  $p$ , existe um  $n \in \omega$ , tal que  $V_n \subset V$ .

Então existe uma subsequência  $\{x_{n_k}\}$  convergindo para  $p$ .

*Prova.* Seja  $n_1 = \min\{n \in \omega : x_n \in V_1\}$ , suponha que  $n_i, i = 1, \dots, k$ , estejam construídos seja  $n_{k+1} = \min\{n \in \omega : x_n \in V_{k+1} \wedge n > n_k\}$ . Desta forma  $\{x_{n_k}\}$  converge a  $p$ . De fato, seja  $V$  uma vizinhança de  $p$ , consideremos  $K \in \omega$ , tal que  $V_K \subset V$ , é evidente que  $x_{n_k} \in V_k \subseteq V_K \subset V$ , para todo  $k \geq K$ . Portanto,  $\{x_{n_k}\}$  converge a  $p$ . ■

**Corolário 4.** *Sejam  $X$  um espaço topológico Hausdorff, tal que todo ponto admite um sistema de vizinhanças satisfazendo as duas condições do teorema anterior. Se  $\{x_n\} \subseteq X$ , então o conjunto  $S$  dos limites subsequeciais é fechado.*

*Prova.* Há duas possibilidades  $S$  tem ou não tem pontos limites. No primeiro caso  $S$  é trivialmente fechado. Se  $S$  tem pontos limites, seja  $p$  um deles. Seja  $V_p$  uma vizinhança de  $p$ , da hipótese existe  $q \in V_p \cap S$ , com  $q \neq p$ , da hipótese do espaço ser Hausdorff existe uma vizinhança  $V_q$  de  $q$  tal que  $p \notin V_q$ , podemos supor sem perda de generalidade que  $V_q \subset V_p$ , pois basta tomar  $V_p \cap V_q$ . Necessariamente existe  $n \in \omega$  tal que  $x_n \in V_q$ , pois  $q$  é um limite subsequencial de  $\{x_n\}$ , consequentemente  $x_n \in V_p \setminus \{p\}$ . Como  $V_p$  é uma vizinhança arbitrária de  $p$ , decorre que  $p$  é um ponto limite de  $\{x_n\}$ . Do teorema anterior,  $p \in S$ . Assim, provamos que  $\bar{S} \subseteq S$ , consequentemente  $S = \bar{S}$ . ■

**Corolário 5.** *Seja  $\{x_n\} \subseteq R^\#$ . Então o conjunto  $S$  dos limites subsequeciais de  $\{x_n\}$  é um conjunto fechado.*

*Prova.* Não é difícil ver que para todo ponto de  $R^\#$  existe um sistema de vizinhanças com aquela propriedade. ■

**Teorema 22.** *Sejam  $\{x_n\} \subset R^\#$  e  $S$  o conjunto dos limites subsequeciais de  $\{x_n\}$ . Então  $S \neq \emptyset$ .*

*Prova.* Consideremos os conjuntos  $A = \{n \in \omega : x_n = -\infty\}$ ,  $B = \{n \in \omega : x_n = \infty\}$  e  $C = \{n \in \omega : x_n \in R\}$ . Um deles é infinito, se  $A$  ou  $B$  o forem, então é evidente que  $-\infty \in S$  ou  $\infty \in S$ . No caso restante  $C$  é limitado ou não, caso  $C$  seja limitado, ele está num conjunto compacto, consequentemente uma subsequência convergirá para  $l$ . Caso contrário,  $-\infty$  ou  $\infty$  são pontos limites de  $C$  portanto de  $\{x_n\}$ . Assim, em qualquer caso  $S \neq \emptyset$ . ■

Aqui cabe uma digressão. Este teorema pode ser provado diretamente. Primeiro  $R^\#$  é compacto, este fato com alguns casos especiais de sequências com imagem finita, garantem que toda sequência de  $R^\#$  admite uma subsequência convergente. Portanto sempre  $S \neq \emptyset$ . Ademais, se considerarmos um espaço topológico compacto Hausdorff, com um sistemas de vizinhanças satisfazendo as condições I-II de um dos teoremas anteriores, podemos inferir que  $S$  o conjunto dos limites subsequeciais é sempre não vazio. Precipuamente este resultado se baseia na proposição de que um conjunto infinito em um espaço topológico compacto, sempre admite um ponto limite.

Após escrever as demonstrações dos teoremas eu consultei o GPT e um livro de topologia, a saber, o *Topology* de James R. Munkres, e percebi que um espaço topológico com um sistema de vizinhanças com aquelas propriedades é essencialmente um espaço que satisfaz o **primeiro axioma de contabilidade** também chamado de **primeiro-contável**. Este axioma diz que todo ponto admite um sistema de vizinhanças contável, como consequência, podemos construir um sistema de vizinhanças contável descendente, como no teorema.



**Definição 4.** Sejam  $\{x_n\} \subset R^\#$  e  $S$  o conjunto dos limites subsequenciais de  $\{x_n\}$ . Então definimos

$$\liminf x_n = \inf S \quad e \quad \limsup x_n = \sup S.$$

**Teorema 23.** Uma sequência  $\{x_n\}$  em  $R^\#$  é convergente, se e somente se,  $\liminf x_n = \limsup x_n$ .

*Prova.* A condição do espaço ser Hausdorff é suficiente para que o conjunto  $S$  dos limite subsequenciais degenere a um único ponto caso a sequência convirja. Se  $\liminf x_n = \limsup x_n$  então  $S$  é necessariamente unitário, logo toda subsequência converge para um único ponto  $l \in S$ , em particular a própria sequência converge para  $l$ . ■

**Teorema 24.** Se  $\emptyset \neq E \subseteq R^\#$ , então  $\inf E, \sup E \in \overline{E}$ .

*Prova.* Seja  $\varsigma = \sup E$ , temos duas possibilidades  $\varsigma \in E$  ou  $\varsigma \notin E$ . Se  $\varsigma \in E$ , então  $\varsigma \in \overline{E}$ . Se  $\varsigma \notin E$ , consideremos um elemento básico  $B$  contendo  $\varsigma$ , existe  $a < \varsigma$ , pois  $E \neq \emptyset$ , tal que  $\emptyset \neq (a, \varsigma) \cap E \subset B \cap E$ . Como  $B$  é arbitrário decorre que  $\varsigma$  é um ponto limite. Portanto,  $\varsigma \in \overline{E}$ . Com um argumento simétrico prova-se que  $\inf E \in \overline{E}$ . ■

Em particular, nas condições dos teoremas anteriores

$$\liminf x_n, \limsup x_n \in S.$$

**Teorema 25.** Se  $\{x_n\} \subset R^\#$ , então

$$\liminf x_n = \sup_{n \in \omega} \inf_{k \geq n} x_k \quad e \quad \limsup x_n = \inf_{n \in \omega} \sup_{k \geq n} x_k.$$

*Prova.* Provemos a primeira igualdade, para tanto façamos  $b_n = \inf_{k \geq n} x_k$  e  $\iota = \sup_n b_n$ , daí segue imediatamente que qualquer limite subsequencial é maior que ou igual a  $b_n$ , portanto  $b_n \leq \liminf x_n$ , para todo  $n \in \omega$ , consequentemente  $\iota \leq \liminf x_n$ . Suponhamos por redução ao absurdo que exista  $p \in R$ , tal que  $\iota < p < \liminf x_n$ . Seja  $n_0 = \min\{n \in \omega : x_n < p\}$  e supondo definidos  $n_i$ , com  $i \in k + 1$ , defina  $n_{k+1} = \min\{n \in \omega : x_n < p \wedge n_k < n\}$ , observe que estes conjuntos onde tomamos o mínimo são não vazios pois  $b_n < p$ , para todo  $n \in \omega$ . Podemos supor sem perda de generalidade que  $\{x_{n_k}\}$  converge para algum ponto de  $R^\#$ , pois em  $R^\#$  toda sequência admite uma subsequência convergente. Todavia como  $x_{n_k} < p$ , para todo  $k \in \omega$ , decorrerá que  $\lim_k x_{n_k} \leq p$ , como consequência  $\liminf x_n \leq p < \liminf x_n$ , o que é um absurdo. A outra igualdade demonstra-se usando um argumento simétrico. ■

**Corolário 6.** Seja  $\{x_n\} \subset R^\#$ . Se  $\kappa < \liminf x_n$  ( $\limsup x_n < \kappa$ ), então existe  $n_\kappa \in \omega$ , tal que se  $n \geq n_\kappa$ , então  $x_n > \kappa$  ( $x_n < \kappa$ ).

*Prova.* Basta saber que  $\liminf x_n = \sup_n \inf_{k \geq n} x_k > \kappa$ , daí vem que existe um  $n_\kappa \in \omega$  tal que  $\inf_{k \geq n_\kappa} x_k > \kappa$ , como consequência  $x_n > \kappa$ , para todo  $n \geq n_\kappa$ . O outro caso pode ser demonstrado com um argumento simétrico. ■

**Corolário 7.** Se  $\{x_n\}, \{y_n\} \subset R^\#$ , são tais que existe  $m \in \omega$ , tal que para todo  $n \geq m$ , temos  $x_n \leq y_n$ , então

$$\liminf x_n \leq \liminf y_n \quad e \quad \limsup x_n \leq \limsup y_n.$$

*Prova.* Suponha que  $\liminf y_n < \liminf x_n$  e derive uma contradição com as hipóteses. O mesmo pode ser feito para provar a outra desigualdade. ■

**Teorema 26.** *Sejam  $\{a_n\}$  e  $\{b_n\}$  sequências em  $R^\#$ . Então*

$$\begin{aligned}\liminf a_n + \liminf b_n &\leq \liminf(a_n + b_n) \\ &\leq \limsup(a_n + b_n) \\ &\leq \limsup a_n + \limsup b_n.\end{aligned}$$

*Prova.* Sejam  $\alpha_n = \sup A_n$  com  $A_n = \{a_k \in R^\# : k \geq n\}$  e  $\beta_n = \sup B_n$  com  $\{b_k \in R^\# : k \geq n\}$ . Provemos que  $\{\alpha_n\}$  e  $\{\beta_n\}$  são monótonas decrescentes. Basta provar que uma o é, pois a outra segue por um raciocínio análogo. Em verdade, dados  $A, B \subseteq R^\#$ , toda cota inferior de  $B$  também o é de  $A$ , consequentemente  $\inf B \leq \inf A$ . Como  $\{A_n\}$  é monótona decrescente em  $\mathcal{P}(R^\#)$  com a ordem induzida por  $\subset$ , decorre que

$$\alpha_{n+1} = \sup A_{n+1} \leq \sup A_n = \alpha_n,$$

para todo  $n \in \omega$ . Ademais,  $\lim_n \alpha_n = \inf\{a_n \in R^\# : n \in \omega\}$ , isto se deve ao fato de que há somente dois casos a serem considerados para uma sequência monótona em  $R^\#$ , ou  $\{\alpha_n\}$  admite uma cota inferior em  $R$ , ou não. Dependendo do caso  $\{a_n\}$  converge para um elemento de  $R$  ou para  $-\infty$ .

Agora note que para todo  $n \in \omega$ ,

$$\alpha_n + \beta_n \leq a_n + b_n,$$

daí vem

$$\begin{aligned}\liminf a_n + \liminf b_n &= \lim_n \alpha_n + \lim_n \beta_n \\ &= \lim_n (\alpha_n + \beta_n) \\ &= \liminf (\alpha_n + \beta_n) \\ &\leq \liminf (a_n + b_n).\end{aligned}$$

Adimitti tacitamente o resultado

$$\lim_n \alpha_n + \lim_n \beta_n = \lim_n (\alpha_n + \beta_n),$$

cujas demonstrações são corriqueiras para sequências monótonas em  $R^\#$ , considerando a adição estendida de  $R$  à  $R^\#$  com as definições usuais. A demonstração da outra desigualdade é um argumento simétrico dual. ■

**Definição 5.** *Seja  $X$  um espaço topológico e  $A, B \subseteq X$ , diremos que  $A$  e  $B$  são separados (ou formam uma separação) se, e somente se,*

$$\overline{A} \cap B = A \cap \overline{B} = \emptyset.$$

*Diremos que um conjunto  $Y \subseteq X$ , é **conexo** quando não for o caso que  $X = A \cup B$ , com  $A, B \neq \emptyset$  separados. Uma cisão de um conjunto  $Y$  é uma decomposição  $Y = A \cup B$ , tais que  $A, B$  são abertos e disjuntos em  $Y$ . Conforme veremos,  $Y$  é conexo se, e somente se, a cisão for trivial, isto é, um dos operantes da união é vazio.*

**Teorema 27.** *Seja  $X$  um espaço topológico e  $Y \subseteq X$ . Então  $Y$  é conexo, se e somente se, toda cisão de  $Y$  é trivial. Em verdade, uma cisão de  $Y$  é uma separação de  $Y$ .*

*Prova.* Suponhamos que  $Y = A \cup B$ , uma cisão de  $Y$ . Observemos que

$$A \cap B \subset \overline{A} \cap B \wedge A \cap B \subset A \cap \overline{B}.$$

Isto nos diz que se  $A \cap B \neq \emptyset$ , a fortiori,

$$\overline{A} \cap B \neq \emptyset \vee A \cap \overline{B} \neq \emptyset.$$

Dessarte  $A$  e  $B$  formam uma separação de  $Y$ .

Agora suponhamos que  $Y = A \cup B$ , uma separação de  $Y$ , observe que

$$\overline{A} \cap Y = A \wedge \overline{B} \cap Y = B,$$

consequentemente,  $A$  e  $B$  são fechados em  $Y$ , também inferimos que  $A \cap B = \emptyset$ . Assim  $A = Y \setminus B$  e  $B = Y \setminus A$ , são abertos em  $Y$ . Portanto,  $A$  e  $B$ , formam uma cisão.

Concluindo, a separação implica na cisão, e vice-versa e, conforme vimos, na realidade são a mesma coisa. Concluimos por negação dos membros de uma equivalência o requerido. ■

**Teorema 28.** *Seja  $X$  um espaço topológico munido com a topologia ordem. Então todo conjunto conexo  $Y$  com pelos dois pontos, tem a seguinte propriedade*

$$\forall x, z \exists y (x, y, z \in Y \wedge (x < z \longrightarrow x < y < z)).$$

*Prova.* É suficiente notar que se existem  $x, z \in Y$ , tais que  $(x, z) \cap Y = \emptyset$ , então  $Y = A \cup B$ , em que  $A = \{y \in Y : y \leq x\}$  e  $B = \{y \in Y : y \geq z\}$ , observe que  $A, B \neq \emptyset$ , pois  $x \in A$  e  $z \in B$ . Ademais,  $A$  e  $B$  são ambos fechados e disjuntos em  $Y$ , consequentemente,  $Y$  é desconexo. A prova decorre por contrapositiva. ■

**Corolário 8.** *Seja  $f : X \rightarrow Y$ , contínua<sup>7</sup> e  $X$  conexo, com  $Y$  munido da topologia ordem, então  $f$  satisfaz a propriedade do valor intermediário. Em outros termos, se  $f(x) < f(z)$ , então existe  $y \in X$  tal que  $f(x) < f(y) < f(z)$ .*

*Prova.* Decorre de um fato conhecido, que talvez eu o demonstre posteriormente<sup>8</sup>: *funções contínuas preservam conexos.* ■

Um outro fato interessate é o seguinte, cuja prova pode ser vista no livro do Munkres.

**Teorema 29.** *Seja  $f : X \rightarrow Y$ , contínua,  $X$  compacto e  $Y$  munido da topologia ordem. Então existem  $a, b$ , tais que, se  $x \in X$ , então  $f(a) \leq f(x) \leq f(b)$ .*

*Prova.* O caminho para a prova deste teorema é *reductio ad absurdum*. Suponha por absurdo que não existam  $a$  e  $b$ , com tais propriedades, construamos  $\mathcal{C} = \{[f(x), f(y)] \in 2^Y : x, y \in X\}$ . Afirmamos que,  $\mathcal{C}$  é uma cobertura aberta de  $f(X)$ . Com efeito, seja  $f(z) \in Y$ , como não existe um menor elemento em  $f(X)$ , segue que existe  $x \in X$ , tal que  $f(x) < f(z)$ . Analogamente como  $f(z)$  não pode ser o maior elemento de  $f(X)$ , existe  $y \in X$  tal que  $f(z) < f(y)$ . Portanto,  $f(X) \subseteq \bigcup \mathcal{C}$ , como afirmamos. Da premisa que  $X$  é compacto e  $f$  contínua, decorre que  $f(X)$  é compacto, consequentemente existe uma subcobertura finita de  $\mathcal{C}$ , digamos,

<sup>7</sup>Pressupõe-se obviamente uma topologia sobre  $X$ .

<sup>8</sup>Em verdade, este resultado é bastante trivial quando se conhece que imagens inversas de intersecções é a intersecção de imagens inversas, e daí, basta supor por redução ao absurdo uma cisão não trivial da imagem e, como conseguinte deduzir uma contradição.

$\mathcal{D} = \{ ]f(x_i), f(y_i)[ : i \in n \}$  com  $n \in \omega$ . Em virtude, da ordem em  $Y$  ser linear existem  $i, j \in n$ , tais que  $f(X) = \bigcup \mathcal{D} = ]f(x_i), f(y_j)[$ , mas isto acarretaria  $f(x_i), f(y_j) \notin f(X)$ , o que é uma contradição. Esta contradição foi obtida supondo-se que não existiam  $a$  e  $b$  com aquelas propriedades. Desta contradição a condicional é necessariamente verdadeira, pois sua negação acarreta num absurdo. ■

**EXEMPLO 1 (FUNÇÃO QUE SATISFAZ O TEOREMA DO VALOR INTERMEDIÁRIO, MAS NÃO É CONTÍNUA)** Considere  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por  $f = \iota_{X[0,1[} + (1 - \iota)_{X\{0,1\}}$ <sup>9</sup>.

**PROVA** É suficiente notar que  $f([0, 1]) = [0, 1]$ . No entanto,  $f$  é descontínua em 0 e 1. ■

Este exemplo, apesar de inócuo, nos diz que nem toda função que preserva conexos é contínua, o mesmo pode ser inferido a respeito de compactos e perfeitos.

**Definição 6.** Seja  $f : X \rightarrow Y$ , em que  $X$  e  $Y$  sejam espaços topológicos satisfazendo o axioma  $T_1$  e  $a \in X'$ , i.e.,  $a$  é um ponto limite (de acumulação) de  $X$ . Diremos que  $f(x)$  converge (tende) a  $l \in Y$ , quando  $x$  converge (tende) a  $a$ , quando para toda vizinhança  $V_y$  de  $y$  existir uma vizinhança  $V_a$  de  $a$  tal que

$$x \in V_a \setminus \{a\} \longrightarrow f(x) \in V_y.$$

Quando dispomos de bases  $\mathcal{B}_X$  e  $\mathcal{B}_Y$ , das respectivas topologias sobre  $X$  e  $Y$ , podemos verificar que a definição é equivalente a

$$\forall V \exists U \left( (U, V) \in \mathcal{B}_X \times \mathcal{B}_Y \wedge (a, l) \in U \times V \wedge (x \in U \setminus \{a\} \longrightarrow f(x) \in V) \right).$$

Sob estas condições estipulamos a simbologia

$$\lim_a f := l.$$

Esta notação é significativa, pois estamos considerando espaços  $T_1$ . Chamaremos o símbolo  $\lim_a f$  de limite de  $f$  quando o parâmetro da função tende a  $a$ , é comum escrever tal símbolo por  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ , que conforme notado por M. Spivak em seu livro *Calculus*, é mais conveniente do ponto de vista pragmático, por exemplo quando se dá uma lei para  $f$ , e.g.  $f(x) = e^{-x}/x^n$ , escreve-se

$$\lim_{\infty} f = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{-x}}{x^n}.$$

**OBSERVAÇÃO 1 (TEOREMA 3.54 P. 77 DO PMA)** Foi afirmado que, as somas parciais da soma construída não podem ter limites subsequenciais menores que  $\alpha$  e maiores que  $\beta$ . Antes de prosseguirmos, há um fato que deve ser observado, embora quase evidente, quando não mencionado conjectura-se, se as sequências  $\{P_n\}$  e  $\{Q_n\}$ , podem ser construídas. De fato, devem necessariamente existir uma infinidade de termos tanto estritamente positivos como negativos na série  $\sum a_n$ . Se só existissem uma quantidade finita de termos negativos, ela convergiria absolutamente e a construção não teria significado. Em verdade, conforme se vê no teorema posterior, qualquer reordenação converge para mesma soma. O mesmo fato ocorreria se a série possuísse uma quantidade finita de termos positivos, em virtude de ser convergente, seria absolutamente convergente, recaindo no mesmo caso. Logo, é peremptório que os conjuntos de termos positivos e o de negativos sejam ambos infinitos.

Seja  $\{r_n\}$  uma subsequência da sequência das somas parciais  $\{s_n\}$  da série construída no teorema. Então, para todo  $n \in \omega$ ,  $A_n = \{p \in \omega : y_p \leq r_n \leq x_p\} \neq \emptyset$ . Com efeito, o último termo

<sup>9</sup>Aqui,  $\chi$  é a função característica e  $\iota$  a identidade.

de  $r_n$  é da forma  $-Q_k$  ou  $P_m$ , isto, é evidente da própria construção da soma, pois seus termos são de tais formas. Evidentemente, como o número de termos de  $r_n$  cresce, necessariamente  $k$  e  $m$  crescem. Observe que  $\{k_n\}$  é uma sequência estritamente crescente, o mesmo ocorre com  $\{m_n\}$ , para facilitar meu argumento, suponha que  $m_0 = k_0 = 0$ . Suponhamos, que o último termo de  $r_n$  seja  $-Q_k$ , certamente  $k \in (k_{i_n-1}, k_{i_n}] \cap \omega$  para algum  $i_n \in \omega$ , pois

$$\omega \setminus \{0\} = \omega \cap \bigcup_{n \in \omega} (k_n, k_{n+1}],$$

Daí, vem  $y_{i_n} \leq r_n \leq x_{i_n}$ . Um argumento análogo pode ser aplicado ao caso que o último termo de  $r_n$  é da forma  $P_m$ . Assim, concluímos que  $A_n \neq \emptyset$  para todo  $n \in \omega$ .

Seguidamente, seja  $p_n = \max A_n$ , a sequência  $\{x_{p_n}\}$ , potencialmente possui termos iguais. Ademais,  $\{p_n\}$  é monótona não decrescente com imagem infinita, pois os índices dos últimos termos de  $r_n$  crescem com  $n$ . Dessarte, é evidente que  $\lim_n x_{p_n} = \beta$  e  $\lim_n y_{p_n} = \alpha$ . Em virtude do fato  $y_{p_n} \leq r_n \leq x_{p_n}$ , para todo  $n \in \omega$ , decorre que

$$\alpha = \liminf_n y_{p_n} \leq \liminf_n r_n \leq \limsup_n r_n \leq \limsup_n x_{p_n} = \beta.$$

■

**EXEMPLO 2 (ITEM (D) DO EXERCÍCIO 11 DO PMA)** *Há uma pergunta que me deu bastante trabalho. Supondo que  $\{a_n\}$  seja uma sequência de números reais, em  $]0, \infty[$ , tal que  $\sum a_n = \infty$ , o que se pode dizer sobre*

$$(1.135) \quad \sum \frac{a_n}{1 + na_n}?$$

*Isto é, converge ou diverge?*

Não obstante, há uma soma ao lado desta, cuja convergência é trivial pelo critério da comparação, a saber

$$\sum \frac{a_n}{1 + n^2 a_n},$$

bastando para isto comparar com a série

$$\sum \frac{1}{n^2}.$$

Para responder à esta pergunta eu percorri o caminho mais difícil. Primeiro provei o seguinte:

**PROPOSIÇÃO 1** *Sejam  $\{a_n\}$  uma sequência em  $]0, \infty[$  tal que  $\sum a_n = \infty$  e  $n_0 \in \omega$ , tal que*

$$(1.136) \quad \forall n (n \geq n_0 \longrightarrow a_n \in ]0, 1[)$$

*ou*

$$(1.137) \quad \forall n (n \geq n_0 \longrightarrow a_n \in [1, \infty[).$$

*Então*

$$\sum \frac{a_n}{1 + na_n} = \infty.$$

**PROVA** Suponhamos que valha (1.136) então temos

$$(1.138) \quad \left( \frac{a_n}{1+a_n} \right)^n = \frac{a_n^n}{(1+a_n)^n} < \frac{a_n}{1+na_n},$$

donde segue-se que

$$(1.139) \quad \sqrt[n]{\frac{a_n}{1+a_n}} < \sqrt[n^2]{\frac{a_n}{1+na_n}} < \frac{a_n}{1+na_n}.$$

Todavia, provamos no item (a) que

$$(1.140) \quad \sum \frac{a_n}{1+a_n} = \infty,$$

consequentemente

$$(1.141) \quad 1 \leq \limsup \sqrt[n]{\frac{a_n}{1+a_n}}$$

de (1.139) e de (1.141) concluímos que

$$(1.142) \quad 1 \leq \limsup \sqrt[n]{\frac{a_n}{1+a_n}} \leq \limsup \frac{a_n}{1+na_n},$$

por conseguinte

$$(1.143) \quad \sum \frac{a_n}{1+na_n} = \infty,$$

pois é uma soma de termos positivos, se não converge tende a  $\infty$ .

Agora consideremos o segundo caso (1.137), basta notar que

$$(1.144) \quad \frac{1}{1+n} = \frac{a_n}{a_n + na_n} \leq \frac{a_n}{1+na_n}$$

para todo  $n \geq n_0$ . Em conformidade com o critério de comparação, concluímos

$$(1.145) \quad \sum \frac{a_n}{1+na_n} = \infty.$$

■

Isto me fez atinar que, se queremos que (1.135) convirja então  $\{a_n\}$  tem infinitos termos, tanto em  $]0, 1[$ , quanto em  $[1, \infty[$ . Daí eu fiz meu chute

**PROPOSIÇÃO 2** *Sejam*

$$(1.146) \quad A = \{n : \exists m(m \in \omega \wedge n = 2^m)\}$$

e  $\{a_n\}$  definida por

$$(1.147) \quad a_n = \begin{cases} n, & n \in A \\ 2^{-n}, & n \notin A. \end{cases}$$

Então

$$(1.148) \quad \sum a_n = \infty$$

e

$$(1.149) \quad \sum \frac{a_n}{1+na_n} < \infty.$$

**PROVA** Observe primeiramente que para todo  $n \in \omega$ , vale

$$(1.150) \quad \sum_{k=1}^{2^n} a_k \geq 2^n,$$

consequentemente

$$(1.151) \quad \sum a_n = \infty.$$

O próximo passo é averiguar por indução matemática que para todo  $n \in \omega$ , vale

$$(1.152) \quad \sum_{k=1}^{2^n} \frac{a_k}{1 + ka_k} \leq \sum_{k=0}^n 2^{-k} + \sum_{k=1}^{2^n} 2^{-k}.$$

e concluir

$$(1.153) \quad \sum \frac{a_n}{1 + na_n} < \infty.$$

Doravante para todo  $n \in \omega$  façamos

$$(1.154) \quad b_n = \frac{a_n}{1 + na_n}.$$

Primeiro,

$$(1.155) \quad \sum_{k=1}^{2^0} b_k = 1 \leq 1 + \frac{1}{2} = \sum_{k=0}^0 2^{-k} + \sum_{k=1}^{2^0} 2^{-k}.$$

Portanto, a propriedade é válida para  $n = 0$ . Suponhamos por hipótese que ela seja para  $n$ , observemos em seguida

$$(1.156) \quad \begin{aligned} \sum_{k=1}^{2^{n+1}} b_k &= \sum_{k=1}^{2^n} b_k + \sum_{k=2^n+1}^{2^{n+1}} b_k \\ &\leq \left( \sum_{k=0}^n 2^{-k} + \sum_{k=1}^{2^n} 2^{-k} \right) + 2^{-(n+1)} + \sum_{k=2^n+1}^{2^{n+1}} 2^{-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} 2^{-k} + \sum_{k=1}^{2^{n+1}} 2^{-k}. \end{aligned}$$

Concluimos que é válida para  $n + 1$ . Por indução matemática provamos o requerido. ■

**EXEMPLO 3 (EXERCÍCIO 16 DO PMA)** Considere  $\alpha \in ]0, \infty[$  e a sequência  $x : \omega \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $x_0 > \sqrt{\alpha}$  e

$$(1.157) \quad x_{n+1} = \frac{1}{2} \left( x_n + \frac{\alpha}{x_n} \right),$$

para todo  $n \in \omega$ . Primeiro, observemos que

$$(1.158) \quad \forall y \left( y > \sqrt{\alpha} \rightarrow \sqrt{\alpha} < \frac{1}{2} \left( y + \frac{\alpha}{y} \right) < y \right).$$

Segue-se de manipulações das duas desigualdades, uma é trivialmente verdadeira,

$$(1.159) \quad (y - \sqrt{\alpha})^2 > 0 \iff \frac{1}{2} \left( y + \frac{\alpha}{y} \right) > \sqrt{\alpha}.$$

Desta forma, a sequência é trivialmente estritamente decrescente. Ademais, ela é limitada inferiormente por 0, como consequência é convergente. Certamente que pela própria definição  $x_n \in ]0, \infty[$ , para todo  $n$ . Se  $\lim_n x_n = 0$ , teríamos

$$\alpha = \lim_n x_n^2 + \alpha = \lim_n (2x_{n+1}x_n) = 0$$

uma contradição com a suposição  $\alpha > 0$ . Destarte,  $l = \lim_n x_n > 0$ , daí obtemos

$$l = \lim_n x_{n+1} = \lim_n \frac{x_n^2 + \alpha}{2x_n} = \frac{l^2 + \alpha}{2l}$$

donde segue-se que  $l = \sqrt{\alpha}$ . ■

**DEFINIÇÃO 21** Sejam  $\sum a_n$  uma série convergente de termos não negativos, e  $A \subset \omega$ . Seja  $\kappa_A$  a característica de  $A$ . Então definimos

$$(1.160) \quad \Sigma A = \sum_{i=0}^{\infty} \kappa_A(i) a_i.$$

Evidentemente  $\Sigma A$  é finito pois  $\sum a_n < \infty$ .

**LEMA 2** Sejam  $\sum a_n$  como na **DEFINIÇÃO 21** e  $A, B \in 2^\omega$ . Se  $A \subset B$ , então  $\Sigma A \leq \Sigma B$ .

**PROVA** É suficiente notar que para todo  $i \in \omega$  vale

$$(1.161) \quad \kappa_A(i) a_i \leq \kappa_B a_i,$$

a desigualdade requerida segue da comparação de séries. ■

**TEOREMA 36 (4.31 REMARK: Principles of Mathematical Analysis)** Seja  $E \subset ]a, b[$  enumerável, virtualmente denso. Sejam  $\sigma \in E^\omega$  uma bijeção,  $\sum a_n$  uma série convergente de termos estritamente positivos e  $x \in ]a, b[$ , definamos

$$(1.162) \quad [x] = \sigma^{-1}(]a, x[)$$

e

$$(1.163) \quad f = \{z : \exists x (x \in ]a, b[ \wedge z = (x, \Sigma[x]))\}.$$

Então  $f \in \mathbb{R}^{]a, b[}$  e tem as seguintes propriedades:

(a)  $f$  é monotonicamente crescente em  $]a, b[$ ;

(b)  $f$  é descontínua em todo ponto de  $E$ ; Em verdade,

$$(1.164) \quad f(\sigma_n+) - f(\sigma_n-) = a_n;$$

(c)  $f$  é contínua em  $]a, b[ \setminus E$ .



**PROVA** Primeiramente, suponha que  $a < x < y < b$ . Evidentemente  $[x] \subset [y]$ , por conseguinte, do **LEMA 2**  $f(x) \leq f(y)$ , segue-se, portanto, o item (a).

Seguidamente, provemos que para todo  $x \in ]a, b[$ , tem-se

$$(1.165) \quad f(x) = \sup\{f(t) : t \in ]a, x[ \} = f(x-).$$

Para tanto seja  $\varepsilon > 0$ . De  $\sum \kappa_{[x]}(i)a_i < \infty$ , necessariamente existe  $i_\varepsilon \in \omega$ , tal que

$$(1.166) \quad 0 \leq \sum_{i=0}^{i_\varepsilon-1+n} \kappa_{[x]}(i)a_i - \sum_{i=0}^{i_\varepsilon-1} \kappa_{[x]}(i)a_i < \varepsilon.$$

para todo  $n \in \omega$ . Podemos *a fortiori* escolher  $t \in ]a, x[$ , tal que  $i_\varepsilon \cap [x] \subset [t]$ . Conformemente  $f(t) \leq f(x)$  e

$$(1.167) \quad \sum_{i=0}^{i_\varepsilon-1} \kappa_{[x]}(i)a_i \leq \sum_{i=0}^{\infty} \kappa_{[t]}(i)a_i = f(t).$$

Tomando o limite segundo  $n$  em (1.166) e comparando com (1.167) obtemos

$$(1.168) \quad 0 \leq f(x) - f(x-) \leq f(x) - f(t) \leq \varepsilon,$$

como  $\varepsilon > 0$  é arbitrário inferimos (1.165).

Em seguida observemos que

$$(1.169) \quad I_x \neq \emptyset \text{ se, e somente se, } x \in \mathfrak{I}\sigma.$$

Com efeito, como  $I_x \subset \mathfrak{I}\sigma$ , se  $I_x \neq \emptyset$ , existe  $n \in \omega$ , tal que  $\sigma_n \in I_x$ . Daí segue que  $\sigma_n \in [t]$ , para todo  $t \in ]x, b[$ , logo,  $\sigma_n \in ]x, t[$ , para todo  $t \in ]x, b[$ , consequentemente  $\sigma_n = x$ , i.e.,  $x \in \mathfrak{I}\sigma$ . Reciprocamente, se existir  $n \in \omega$  tal que  $x = \sigma_n$ , é evidente que  $\sigma_n = x \in [t]$ , para todo  $t \in ]x, b[$ , consequentemente  $\sigma_n \in I_x$ , i.e.,  $I_x \neq \emptyset$ .

Sejam  $x \notin \mathfrak{I}\sigma = E$ ,  $y \in ]x, b[$  e  $\varepsilon > 0$ . Como  $\sum \kappa_{[y]}(i)a_i < \infty$ , necessariamente existe  $i_\varepsilon$ , tal que

$$(1.170) \quad \sum_{i=i_\varepsilon}^{\infty} \kappa_{[y]}(i)a_i < \varepsilon.$$

Podemos escolher  $t \in ]x, y[$ , tal que  $i_\varepsilon^+ \subset \neg[t]$ . De fato, basta tomar  $t < \min\{\sigma_i : i \in i_\varepsilon^+\}$ . Ademais,

$$(1.171) \quad 0 \leq f(x+) - f(x) \leq f(t) - f(x) \leq \sum_{i=i_\varepsilon}^{\infty} \kappa_{[t]}(i)a_i \leq \sum_{i=i_\varepsilon}^{\infty} \kappa_{[y]}(i)a_i < \varepsilon,$$

como  $\varepsilon > 0$  é arbitrário segue-se que  $f(x+) = f(x) = f(-x)$ , consequentemente  $f$  é contínua em  $x$ . Em virtude de  $x \in ]a, b[ \neg E$  ser arbitrário, provamos (c).

Agora sejam  $n \in \omega$  e  $y \in ]\sigma_n, b[$ . Analogamente, dado  $\varepsilon > 0$ , escolhamos  $i_\varepsilon > n$ , tal que

$$(1.172) \quad \sum_{i=i_\varepsilon}^{\infty} \kappa_{[y]}(i)a_i < \varepsilon.$$

Tomando  $t \in ]\sigma_n, y[$ , tal que  $i_\varepsilon^+ \subset \neg[t]$ ; temos em conformidade,

$$(1.173) \quad 0 \leq f(\sigma_n+) - f(\sigma_n) - a_n \leq f(t) - f(\sigma_n) - a_n \leq \sum_{i=i_\varepsilon}^{\infty} \kappa_{[t]}(i)a_i \leq \sum_{i=i_\varepsilon}^{\infty} \kappa_{[y]}(i)a_i < \varepsilon.$$

Da arbitrariedade de  $\varepsilon > 0$ , concluímos que

$$(1.174) \quad f(\sigma_n+) - f(\sigma_n) = f(\sigma_n+) - f(\sigma_n-) = a_n,$$

provando portanto o item (b). ■

**Teorema 30 (Teorema do ponto fixo)<sup>10</sup>.** *Sejam  $(X, \varrho)$  um espaço métrico completo,  $\kappa \in R_+$ , tal que  $\kappa < 1$  e  $f : X \rightarrow X$  uma função tal que<sup>11</sup>*

$$\forall x, y \left( x, y \in X \longrightarrow \varrho(f(x), f(y)) \leq \kappa \varrho(x, y) \right).$$

*Então  $f$  admite um único ponto fixo, i.e., existe  $p \in X$ , tal que  $f(p) = p$ .*

*Prova.* A prova é clássica. Primeiro, provemos a unicidade. Com efeito, sejam  $p, q$ , tais que  $f(p) = p$  e  $f(q) = q$ , temos em conformidade

$$\varrho(p, q) = \varrho(f(p), f(q)) \leq \kappa \varrho(p, q),$$

daí necessariamente  $\varrho(p, q) = 0$ , pois caso contrário, de acordo com a desigualdade anterior incorreríamos numa contradição, a saber,  $\kappa \geq 1$ . Segundo, escolhamos  $x \in X$  e definamos a sequência  $x_0 = x$  e  $x_{n+1} = f(x_n)$ , para todo  $n \in \omega$ . Em seguida, provemos que

$$\forall n \left( n \in \omega \longrightarrow \varrho(x_{n+2}, x_{n+1}) \leq \kappa^{n+1} \varrho(x_1, x_0) \right).$$

A prova é feita por indução matemática sobre  $n \in \omega$ . Seja  $n = 0$ , conspicuamente

$$\varrho(x_2, x_1) \leq \kappa \varrho(x_1, x_0).$$

Seguidamente, suponhamos por hipótese de indução que a tese seja válida para  $n \in \omega$ , conformemente

$$\varrho(x_{n+3}, x_{n+2}) \leq \kappa \varrho(x_{n+2}, x_{n+1}) \leq \kappa^{n+2} \varrho(x_1, x_0),$$

o que acarreta que a tese é válida para  $n + 1$ . Do princípio de indução matemática, a condicional quantificada é válida, i.e., a tese (ou consequente) é verdadeira para todo  $n \in \omega$ . Sejam  $m, n \in \omega$  tais que  $m \leq n$ , segue-se em conformidade

$$\varrho(x_n, x_m) \leq \varrho(x_1, x_0) \sum_{i=m}^n \kappa^i,$$

Como  $\sum_n \kappa^n$  é convergente, seque que a sequência das suas somas parciais é Cauchy e, a desigualdade anterior implica que  $\{x_n\}$  é uma sequência de Cauchy em  $X$ . Como  $X$  é completo  $\{x_n\}$  converge para um único ponto em  $X$ , digamos  $\lim_n x_n = p$ . Verifica-se da propriedade de  $f$  que ela é contínua, notavelmente

$$f(p) = \lim_n f(x_n) = \lim_n x_n = p. \quad \text{■}$$

<sup>10</sup>Às vezes chamado de teorema do ponto fixo de Banach. Basta que o espaço seja métrico e completo, i.e., toda sequência de Cauchy é convergente.

<sup>11</sup>Uma função com tal propriedade é chamada de contração, pois contrai segundo a métrica sua imagem com relação ao seu domínio.

**TEOREMA 37 (UM PROBLEMA DO LIVRO PROBLEMS FOR MATHEMATICIANS, YOUNG AND OLD DE PAUL R. HALMOS)** *Seja  $x \in \mathbb{R}$ , consideremos a sequência  $\{x_n\}$  com  $x_n = \cos^{(n)}(x)$ , em que  $\cos^{(n)}$  é a  $n$ -ésima composição da função trigonométrica  $\cos$ . Então,  $\{x_n\}$  converge.*

**PROVA** Podemos supor sem perda de generalidade que  $x \in [0, 1]$ , pois se  $x \in \mathbb{R}$ , então  $\cos(x) \in [-1, 1] \subseteq [-\pi/2, \pi/2]$ , consequentemente  $\cos^{(2)}(x) \in [0, 1]$ . Consideremos  $\cos : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ , sabemos que  $\cos$  é derivável em  $\mathbb{R}$ , e que  $\cos' = -\sin$ , pelo teorema do valor médio dados quaisquer  $x, y \in [0, 1]$  com  $x < y$ , existe  $z \in (x, y)$ , tal que

$$\cos(x) - \cos(y) = \sin(z)(y - x)$$

donde

$$|\cos(x) - \cos(y)| = |\sin(z)||x - y|.$$

Todavia,  $\sin : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  é limitada, de tal maneira que atinge o máximo em  $\sin(1) < \sin(\pi/2) = 1$ , pois  $\sin$  é crescente em  $[0, \pi/2] \supset [0, 1]$ .

Dessarte, existe  $\kappa = \sin(1) < 1$ , tal que

$$|\cos(x) - \cos(y)| \leq \kappa|x - y|.$$

Logo,  $\cos|_{[0,1]}$  é uma contração. Como  $[0, 1]$  é completo pois todo compacto de um espaço métrico é completo, existe  $\theta \in [0, 1]$ , tal que  $\cos(\theta) = \theta$ . Ademais, vimos que  $\lim_n x_n = \theta$ <sup>12</sup>. ■

**Teorema 31 (Adaptado do exercício 23 do Calculus de M. Spivak).** *Seja  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  ( $X \subseteq \mathbb{R}$ ) uma função e  $a \in X'$  com a seguinte propriedade: Para toda função  $g : X \rightarrow \mathbb{R}$  se  $\lim_a g$  não existe, então  $\lim_a fg$  não existe, se, e somente se,  $\lim_a f$  existe e  $\lim_a f \neq 0$  ou  $\lim_a |f| = \infty$ . Em símbolos é equivalente a*

$$\forall g \left( g \in \mathbb{R}^X \wedge \exists \lim_a fg \longrightarrow \exists \lim_a g \right) \longleftrightarrow \left( \exists \lim_a f \wedge \lim_a f \neq 0 \right) \vee \lim_a |f| = \infty.$$

*Prova.* Suponhamos primeiramente que  $\lim_a f \neq 0$ , evidentemente, se existe  $\lim_a fg$ , então as propriedades de limites implicam

$$\lim_a g = \lim_a g \frac{f}{f} = \frac{\lim_a fg}{\lim_a f},$$

ou seja,  $\lim_a g$  existe. Note que o quociente  $f/f$  é possível, pois o limite é valorizado localmente e, em virtude da hipótese  $\lim_a f \neq 0$ , em uma vizinhança de  $a$ , tem-se  $f(x) \neq 0$ .

Suponhamos agora que  $\lim_a |f| = \infty$ , e que  $\lim_a fg = l$ , temos por maior razão que  $\lim_a |l/f| = \lim_a |1/f| = 0$ . Assim, dado  $\varepsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que

$$x \in X \cap (a - \delta, a + \delta) \longrightarrow \left| \frac{l}{f(x)} \right| < \frac{\varepsilon}{2} \wedge \left| g(x) - \frac{l}{f(x)} \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

consequentemente

$$x \in X \cap (a - \delta, a + \delta) \longrightarrow |g(x)| = \left| g(x) - \frac{l}{f(x)} + \frac{l}{f(x)} \right| \leq \left| g(x) - \frac{l}{f(x)} \right| + \left| \frac{l}{f(x)} \right| < \varepsilon,$$

i.e.,  $\lim_a g = 0$ . Portanto  $\lim_a g$  existe.

---

<sup>12</sup>É notável que  $\theta \in (0, 1)$ .

Agora suponhamos

$$\neg \left( (\exists \lim_a f \wedge \lim_a f \neq 0) \vee \lim_a |f| = \infty \right)$$

ou equivalentemente

$$\left( \neg (\exists \lim_a f) \wedge \lim_a |f| \neq \infty \right) \vee \lim_a f = 0.$$

Se  $\lim_a f = 0$ , tome  $g = \chi_{(-\infty, a)} - \chi_{(a, \infty)}$ , observe que não existe  $\lim_a g$ , mas  $\lim_a fg = 0$ . Se não existe  $\lim_a f$  e  $\lim_a |f| \neq \infty$ , temos alguns casos a considerar. Se existe  $\delta > 0$  tal que se  $x \in X \cap (a - \delta, a + \delta)$ , então  $f(x) \neq 0$ , tome  $g : X \cap (a - \delta, a + \delta) \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $g(x) = 1/f(x)$ . Observemos que não é o caso que  $\lim_a g = 0$ , pois isto acarretaria  $\lim_a |f| = \infty$ . Logo não existe  $\lim_a g$ , pois caso contrário existiria  $\lim_a f$ . A outra possibilidade é

$$\forall \delta \exists x \left( \delta > 0 \wedge x \in X \cap (a - \delta, a + \delta) \cap f^{-1}(\{0\}) \right).$$

Neste caso, defina  $g : X \rightarrow \mathbb{R}$ , por

$$g(x) = \begin{cases} 1, & x \in f^{-1}(\{0\}); \\ \frac{x-a}{f(x)}, & x \notin f^{-1}(\{0\}). \end{cases}$$

observe que  $\lim_a g|_{f^{-1}(\{0\})} = 0$  mas  $1 \in g(X \cap (a - \delta, a + \delta))$ , para todo  $\delta > 0$ , consequentemente não existe  $\lim_a g$ . Não obstante,  $|fg(x)| \leq |x - a|$ , para todo  $x \in X$ , logo  $\lim_a fg = 0$ . Estes argumentos resultantes da negação da hipótese, possibilitaram a construção de uma  $g$  adequada para cada caso, negando, portanto, o quantificador universal. Isto por sua vez nos leva a negação da consequente. Pela contrapositiva fica provada a outra condicional, concluindo, portanto, o teorema. ■

## 1.5 CONTINUIDADE UNIFORME

A seguir, apresento um resultado sem recorrer a resultados muito sofisticados da análise, em outros termos, uma prova usando conceitos elementares do cálculo.

**PROPOSIÇÃO 3 (EXERCÍCIO 3 P. 146 DO *Calculus* DE [SPIVAK])** Se  $f$  é contínua em  $[a, b]$ , então  $f$  é uniformemente contínua em  $[a, b]$ .

**PROVA** Suponhamos por *reductio ad absurdum* que não é o caso de  $f$  ser uniformemente contínua em  $[a, b]$ . Existe, portanto  $\varepsilon > 0$ , tal que para todo  $\delta > 0$  existem  $x, y \in [a, b]$ , tais que

$$(1.175) \quad |x - y| < \delta \longrightarrow |f(x) - f(y)| \geq \varepsilon.$$

Como consequência dado  $\delta > 0$ , concebamos o conjunto

$$(1.176) \quad X_\delta = \{(x, y) : x \in [a, b] \wedge \exists y(y \in [a, b] \wedge |x - y| < \delta \wedge |f(x) - f(y)| \geq \varepsilon)\},$$

pela hipótese,  $X_\delta$  é infinito.

Em seguida, bissectamos  $[a, b]$ . Como  $f$  é contínua em  $(a + b)/2$  existe  $\delta_0 > 0$ , tal que

$$(1.177) \quad x \in [a, b] \wedge \left| x - \frac{a+b}{2} \right| < \frac{\delta_0}{2} \longrightarrow \left| f(x) - f\left(\frac{a+b}{2}\right) \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Portanto,

$$(1.178) \quad X_{\delta_0} \subset \left[ a, \frac{a+b}{2} \right] \vee X_{\delta_0} \subset \left[ \frac{a+b}{2}, b \right].$$

Seja  $K_0$  uma das bisseções de  $[a, b]$  que contem  $X_{\delta_0}$ . Suponhamos construída a família  $\{K_i : i \in n + 1\}$ , tal que para todo  $i \in n + 1$ , existe  $\delta_i > 0$ , tal que  $X_{\delta_i} \subset K_i$ . Seja  $K_n = [a_n, b_n]$ . Bissectamos  $K_n$ , e de maneira análoga determinamos  $\delta_{n+1} > 0$ , tal que

$$(1.179) \quad x \in K_n \wedge \left| x - \frac{a_n + b_n}{2} \right| < \frac{\delta_{n+1}}{2} \longrightarrow \left| f(x) - f\left(\frac{a_n + b_n}{2}\right) \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Da mesma forma, seja  $K_{n+1}$  uma das bisseções de  $K_n$ , tal que  $X_{\delta_{n+1}} \subset K_{n+1}$ . Destarte, construímos por recursão matemática uma família enumerável  $\{K_n : n \in \omega\}$ , ou melhor, uma sequência  $\{K_n\}$ , tal que  $K_{n+1} \subset K_n$  e  $X_{\delta_n} \subset K_n$ , para todo  $n \in \omega$ . Pelo teorema dos intervalos encaixados (*Nested Intervals Theorem*) existe  $x \in \bigcap_{n \in \omega} K_n$ . Da construção de  $\{K_n\}$ , temos que

$$(1.180) \quad x \in K_n = [a_n, b_n] \wedge b_n - a_n < 2^{-(n+1)}(b - a)$$

e existem sequências  $\{x_n\}$  e  $\{y_n\}$  com

$$(1.181) \quad x_n, y_n \in K_n \wedge |f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon.$$

Daí e da continuidade de  $f$  em  $[a, b]$  vem

$$(1.182) \quad 0 < \varepsilon \leq \lim_n |f(x) - f(x_n)| + \lim_n |f(x) - f(y_n)| = 0,$$

o que é evidentemente uma contradição. Isto por sua vez acarreta que a hipótese é falsa. Consequentemente,  $f$  é uniformemente contínua em  $[a, b]$ . ■

**EXEMPLO 4** Sejam  $n \in \omega$  e  $f, g : [0, \infty[ \rightarrow \mathbb{R}$ , dadas por  $f(x) = x^{n+2}$  e  $g(x) = x^{1/(n+1)}$ . Então  $f$  não é uniformemente contínua e  $g$  o é.

**PROVA** ■

**EXEMPLO 5** Seja  $f : ]0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $\sin(1/x)$  é limitada, mas não é uniformemente contínua.

**PROVA** ■

**EXEMPLO 6** Seja  $f : [0, \infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $\sin(x^2)$  é limitada, mas não é uniformemente contínua.

**PROVA** ■

**EXEMPLO 7** Seja  $f : [0, \infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  contínua e periódica. Então  $f$  é uniformemente contínua.

## 1.6 DERIVADAS E INTEGRAIS

**LEMA 3** Seja  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $f(t) \neq 0$ , para todo  $t \in [a, b]$ . Então

$$(1.183) \quad (\ln |f|)' = \frac{\sigma(f)f'}{|f|} = \frac{f'}{f}.$$

**PROVA** Primeiro relembremos da função sinal, a saber,

$$(1.184) \quad \sigma(x) = (\chi_{\mathbb{R}_+^*} - \chi_{\mathbb{R}_-^*})(x)$$

em que  $\chi$  é a função característica. É sabido que  $|\cdot|' = \sigma$  em  $\mathbb{R}^*$  e não é difícil ver que para todo  $x \in \mathbb{R}$

$$(1.185) \quad |x| = \sigma(x) \cdot x.$$

Da regra da cadeia temos,

$$(1.186) \quad (\ln |f|)' = \frac{\sigma(f)f'}{|f|} = \frac{f'}{f}.$$

■

**DEFINIÇÃO 22** Denotaremos o conjunto das funções reais Riemann integráveis em  $[a, b]$ , por  $\mathcal{R}(\mathbb{R}^{[a,b]})$ , ou quando não houver risco de ambiguidade denotaremos simplesmente por  $\mathcal{R}$ . Ademais quando  $f \in \mathcal{R}$  definiremos  $I_f \in \mathbb{R}^{[a,b]}$  por

$$(1.187) \quad I_f(x) = \int_a^x f \, d\iota,$$

em que  $\iota$  é a função identidade<sup>13</sup>.

**TEOREMA 38** Seja  $f \in \mathcal{R}(\mathbb{R}^{[a,b]})$ <sup>14</sup>. Se  $f$  é contínua em  $c \in [a, b]$ , então  $I'_f(c) = f(c)$ . A fortiori, se  $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^{[a,b]})$ , então  $I'_f = f$ .

**PROVA** Seja  $\varepsilon > 0$ , da continuidade de  $f$  em  $c$ , existe  $\delta > 0$ , tal que

$$(1.188) \quad \forall x (x \in [a, b] \wedge |x - c| < \delta \longrightarrow |f(x) - f(c)| < \varepsilon),$$

daí segue que em qualquer caso, i.e., seja  $h < 0$  ou seja  $h > 0$ , tem-se

$$(1.189) \quad \left| \frac{I_f(c+h) - I_f(c)}{h} - f(c) \right| = \left| \frac{1}{h} \int_c^{c+h} f - f(c) \, d\iota \right| \leq \varepsilon,$$

ou seja,  $I'_f(c) = f(c)$ . Particularmente, se  $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^{[a,b]})$ , então  $I'_f = f$ . ■

**DEFINIÇÃO 23** Denotaremos o conjunto das funções reais deriváveis em  $[a, b]$  por  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^{[a,b]})$ , ou simplesmente por  $\mathcal{D}$ , quando não houver ambiguidade.

**TEOREMA 39** Em  $\mathcal{D}$ , podemos considerar a relação  $D \subset \mathcal{D} \times \mathcal{D}$  definida por

$$(1.190) \quad (f, g) \in D \iff f' = g'.$$

Desta forma,  $D$  é uma relação de equivalência. Ademais, dado  $f \in \mathcal{D}$  a classe de equivalência determinada por  $f$  é

$$(1.191) \quad [f] = \mathbb{R} + f = \{x : \exists \kappa (\kappa \in \mathbb{R} \wedge x = f + \kappa)\}.$$

<sup>13</sup>Estou considerando a integral de Riemann-Stieltjes, em que a função monótona em questão é a função identidade  $\iota$ .

<sup>14</sup>Conjunto das funções Riemann integráveis de  $\mathbb{R}^{[a,b]}$ .

**PROVA** Provar. ■

**DEFINIÇÃO 24** Seja  $f \in \mathbb{R}^{[a,b]}$ . Qualquer função  $F \in \mathbb{R}^{[a,b]}$ , tal que  $F' = f$ , é chamada primitiva de  $f$ .

**DEFINIÇÃO 25** Seja  $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^{[a,b]})$ . Definiremos

$$(1.192) \quad \int f \, d\iota = [I_f].$$

Ao símbolo no lado esquerdo de (1.192) denominaremos de integral indefinida de  $f$ . Dessarte, um representante genérico de  $\int f \, d\iota$  é da forma  $I_f + \kappa$ , com  $\kappa \in \mathbb{R}$ .

É comum na literatura escrever

$$(1.193) \quad \int f \, d\iota = I_f + \kappa,$$

em que  $\kappa$  é uma constante real arbitrária, quando na realidade  $\int f \, d\iota$  é um conjunto.

**Teorema 32.** Sejam  $X \subseteq \mathbb{R}$ ,  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  e  $a$  um ponto de mínimo(máximo) local de  $f$  em  $X$  tal que  $f$  seja derivável em  $a$ . Então  $f'(a) = 0$ .

*Prova.* Seja  $V_a$  uma vizinhança relativa de  $a$  em  $X$ , tal que  $a$  é um ponto de máximo de  $f$  em  $V_a$ . Por conveniência definamos  $\kappa, \varsigma : X \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{R}$  pelas respectivas leis

$$\kappa(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad \text{e} \quad \varsigma(x) = \frac{x - a}{|x - a|}$$

de tal maneira que é imediato inferir que  $\lim_a \kappa = f'(a)$  e,  $\varsigma \kappa \leq 0$  em  $V_a \setminus \{a\}$ , pois  $a$  é ponto de máximo em  $V_a$ . Assim, notando que  $\varsigma^2 = 1$  podemos inferir

$$0 \leq \lim_{a-} \varsigma^2 \kappa = \lim_{a-} \kappa = f'(a) = \lim_{a+} \kappa = \lim_{a+} \varsigma^2 \kappa \leq 0,$$

*a fortiori*,  $f'(a) = 0$ . ■

Existe um teorema muito popular que tem como casos particulares o teorema de Rolle e o teorema do valor médio. A fim de colocar as hipóteses do teorema sob uma perspectiva mais geral, notei que se usa a compacidade e a perfeição do domínio. Geralmente toma-se o domínio como sendo um compacto  $[a, b] \subset \mathbb{R}$ , este conjunto como se sabe é perfeito, a saber, é um conjunto fechado onde todos os seus pontos são pontos limites. Como é sabido existe um conjunto compacto perfeito, que não é um intervalo, nomeadamente o conjunto de Cantor, que poderia ser um domínio adequado para os propósitos do teorema. Certamente, digo que esta generalização é de certa maneira irrelevante em relação ao que se conhece usualmente. Em verdade, minha ignorância não enxerga nenhum fruto além do usual. Não obstante, deixarei-o assim, como uma curiosidade matemática.

**Teorema 33 (Teorema do valor médio de Cauchy).** Sejam  $K$  compacto perfeito,  $(a, b) = (\min K, \max K)$ <sup>15</sup>,  $K^* = K \setminus \{a, b\}$  e  $f, g : K \rightarrow \mathbb{R}$  funções contínuas em  $K$  e deriváveis em  $K^*$ . Então existe  $c \in K^*$ , tal que

$$(f(b) - f(a))f'(c) = g'(c)(g(b) - g(a)).$$

<sup>15</sup>Isto é uma igualdade de pares ordenados.

*Prova.* A prova também é clássica e consiste somente em construir uma  $h : K \rightarrow R$  adequada. Pois bem, considere  $h$  definida pela lei

$$h(x) = (g(b) - g(a))(f(x) - f(a)) + (f(a) - f(b))(g(x) - g(a)).$$

A função  $h$  é contínua em  $K$  é derivável em  $K^*$ . Além disso, observemos que para todo  $x \in K^*$

$$h'(x) = (g(b) - g(a))f'(x) + (f(a) - f(b))g'(x).$$

Como  $K$  é compacto sua imagem é compacta, logo, existem  $x_{\min}, x_{\max} \in K$ , tais que  $h(x_{\min}) = \min h(K)$  e  $h(x_{\max}) = \max h(K)$ . Se  $\{x_{\min}, x_{\max}\} = \{a, b\}$ , como  $h(a) = h(b) = 0$ , decorrerá que  $h$  será constante em  $K$ , como  $K$  é perfeito, portanto infinito, podemos tomar qualquer  $c \in K^*$ . Não obstante, se  $\{x_{\min}, x_{\max}\} \setminus \{a, b\} \neq \emptyset$ , então certamente existe  $c \in \{x_{\min}, x_{\max}\} \setminus \{a, b\} \subset K^*$ . Em qualquer caso, sendo  $h$  constante ou não,  $c$  é um ponto crítico de  $h$ , pois noutro caso ele é ponto extremo (máximo ou mínimo global de  $h$ ). Consequentemente,

$$0 = h'(c) = (g(b) - g(a))f'(c) + (f(a) - f(b))g'(c).$$

ou equivalentemente

$$(f(b) - f(a))f'(c) = g'(c)(g(b) - g(a)).$$

■

É preciso mencionar o porquê de remover os pontos laterais do conjunto em análise, por exemplo um compacto  $[a, b]$ . Por que a hipótese não dá simplesmente que  $f$  seja derivável em  $[a, b]$ , mas em  $]a, b[$ ? É porque existe um contra-exemplo. Com efeito, considere  $f : [0, 1] \rightarrow R$ , dada por  $\sqrt{x}$ , do cálculo sabemos que  $f'(x) = (2\sqrt{x})^{-1}$ , certamente  $\lim_0 f' = \infty$ , todavia  $f$  é contínua em  $[0, 1]$ . Dessarte, não é verdadeiro que se  $f$  é contínua em  $[a, b]$  e derivável em  $]a, b[$ , então existe  $f'(a)$  em  $[a, b]$ , o mesmo vale para  $f'(b)$  (considere  $f : [-1, 0] \rightarrow R$  definida por  $f = \sqrt{|x|}$ ). No que segue, adotarei um caminho canônico, considerando intervalos como se faz usualmente.

**Corolário 9 (TVM: Teorema do valor médio).** *Seja  $f$  contínua em  $[a, b]$  e diferenciável em  $]a, b[$ . Então existe  $c \in ]a, b[$ , tal que*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

*Prova.* Basta tomar  $g : [a, b] \rightarrow R$ , definida por  $g(x) = x$ , segue portanto o resultado. ■

**Corolário 10 (Teorema de Rolle).** *Seja  $f$  contínua em  $[a, b]$  e diferenciável em  $]a, b[$ . Então se,  $f(a) = f(b)$ , existe  $c \in ]a, b[$ , tal que  $f'(c) = 0$ .*

*Prova.* Imediata ao resultado anterior. ■

**Corolário 11.** *Sejam  $f, g$  contínuas em  $[a, b]$  e diferenciáveis em  $]a, b[$ . Então  $f' = g'$  em  $]a, b[$ , se e somente se, existe  $\alpha \in R$ , tal que  $f = g + \alpha$ .*

*Prova.* Uma das condicionais é imediata. Prossigamos com a prova da outra. Com efeito, sejam  $x, y \in [a, b]$  distintos, do **TVM** existe  $c \in ]x, y[$ , tal que

$$f(y) - f(x) = f'(c) = g'(c) = g(y) - g(x)$$



ou equivalentemente

$$f(x) - g(x) = f(y) - g(y).$$

Como  $x$  e  $y$  são arbitrários, fixando  $y$  e estipulando  $\kappa = f(y) - g(y)$ , obtemos que para todo  $x \in [a, b]$ , vale  $f(x) = g(x) + \kappa$ , que era o requerido. ■

**Corolário 12.** *Seja  $f$  contínua em  $[a, b]$  e diferenciável em  $]a, b[$ . Se  $f' > 0$  ( $f' < 0$ ) em  $]a, b[$ , então  $f$  é crescente (decrecente) em  $]a, b[$ .*

*Prova.* Sejam  $x, y \in (a, b)$  tais que  $x < y$ , suponhamos que  $f' > 0$  em  $]a, b[$  do **TVM** existe  $c \in ]a, b[$ , tal que

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} = f'(c) > 0$$

como  $y - x > 0$ , segue que  $f(y) > f(x)$ . O outro caso basta tomar  $g = -f$ . ■

Neste ponto cabe algumas perguntas. É possível garantir a diferenciabilidade local de uma função  $f$ , bastando para isto que ela seja derivável em um ponto? A resposta é não. Considere a função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$f(x) = x + (-1)^{\chi_Q(x)} x^2$$

esta função é descontínua em todo ponto  $x \neq 0$ , consequentemente não derivável em  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ , todavia  $f'(0) = 1$ . Esta função responde em negativo à outra pergunta: Se  $f'(c) > 0$ , então  $f$  é monotônica numa vizinhança de  $c$ ? Podemos até considerar uma função contínua  $g$  dada por

$$g(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} + \sin\left(\frac{1}{x}\right)x^2, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Observe que

$$g'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) - g(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{2} + \sin\left(\frac{1}{x}\right)x \right) = \frac{1}{2} > 0,$$

e que se  $x \neq 0$ , então

$$g'(x) = \frac{1}{2} - \cos\left(\frac{1}{x}\right) + 2x\sin\left(\frac{1}{x}\right).$$

Considere  $\{x_n\}$  e  $\{y_n\}$  em  $\mathbb{R}$  tais que

$$x_n = \frac{1}{2n\pi} \quad \text{e} \quad y_n = \frac{1}{(2n+1)\pi}.$$

É conspícuo que  $\lim_n x_n = \lim_n y_n = 0$ , todavia

$$g'(x_n) = -1/2 < 0 < 3/2 = g'(y_n).$$

Como  $g'$  é contínua em  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$  para cada  $n \in \omega$  existem vizinhanças  $V_{x_n}$  e  $V_{y_n}$  de  $x_n$  e  $y_n$ , respectivamente, em que a derivada conserva o sinal, consequentemente existem famílias de vizinhanças de pontos próximos de 0, tais que, ora  $f$  é estritamente decrescente, ora  $f$  é estritamente crescente.

A seguir apresento um resultado bastante peculiar sobre funções deriváveis. Em meus estudos posteriores sem lembrar de tal fato, o conjecturei, atestei sua veracidade relendo o *Principles of Mathematical Analysis* de W. Rudin, a prova deste resultado encontrada no livro é concisa e elegante, a adaptei a seguir.

**Teorema 34 (Teorema de Darboux).** *Seja  $f$  derivável em  $[a, b]$  tal que  $f'(a) < f'(b)$ . Se  $\lambda \in ]f'(a), f'(b)[$ , então existe  $c \in ]a, b[$  tal que  $f'(c) = \lambda$ .*

*Prova.* Defina  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , por  $g(x) = f(x) - \lambda x$ . Decerto que  $g$  é derivável e portanto contínua, com domínio compacto. Consequentemente atingirá os extremos em seu domínio. Observe que  $g'(a) < 0 < g'(b)$ . Localmente  $a$  e  $b$  são pontos de máximo local, pois<sup>16</sup>

$$\lim_{x \rightarrow a+} \frac{g(x) - g(a)}{x - a} = g'(a) < 0 < g'(b) = \lim_{x \rightarrow b-} \frac{g(b) - g(x)}{b - x}.$$

Portanto, existem  $x, y \in ]a, b[$  com  $x < y$ , tais que  $g(x) < g(a)$  e  $g(y) < g(b)$ , consequentemente o mínimo de  $g$  estará em  $[x, y] \subset ]a, b[$ . Assim, existe  $c \in ]a, b[$ , tal que  $f'(c) - \lambda = g'(c) = 0$ , ou equivalentemente  $f'(c) = \lambda$ . ■

**Teorema 35 (Teste da derivada primeira).** *Seja  $f$  derivável em  $]a, b[$  e  $m \in ]a, b[$  tal  $f'(m) = 0$ . Então, se existir uma vizinhança  $V_m$  de  $m$  em  $]a, b[$ , tal que*

$$\forall x \left( x \in V_m \setminus \{m\} \longrightarrow \frac{f'(x)}{x - m} < 0 \left( \frac{f'(x)}{x - m} > 0 \right) \right).$$

*então  $m$  é ponto de máximo(mínimo) em  $V_m$ , ou equivalentemente,  $m$  é ponto de máximo(mínimo) local.*

*Prova.* Suponhamos por *reductio ad absurdum* que existe  $x \in V_m$ , tal que  $f(m) < f(x)$ . Certamente,  $x \neq m$ , pois  $f(x) \neq f(m)$ . Primeiramente, digamos que  $x > m$ , segue-se do **TVM** que existe  $c \in ]m, x[$ , tal que

$$f'(c) = \frac{f(x) - f(m)}{x - m} > 0.$$

Não obstante, temos da hipótese que

$$\frac{f'(c)}{c - m} < 0.$$

Todavia, como  $c > m$ , tem-se  $f'(c) < 0$ , ou seja, incorremos numa contradição. Homologamente, suponhamos que  $x < m$ , novamente invocando o **TVM** concluímos que existe  $c \in ]x, m[$ , tal que

$$f'(c) = \frac{f(x) - f(m)}{x - m} < 0.$$

No entanto,

$$\frac{f'(c)}{c - m} < 0,$$

o que em virtude de  $c - m < 0$  acarreta  $f'(c) > 0$ , o que é outra contradição. Por fim, incorremos numa contradição por supor que a tese era falsa, consequentemente a condicional é verdadeira, i.e.,  $m$  é um ponto de máximo em  $V_m$ , consequentemente um ponto de máximo local. A outra prova é inteiramente análoga. ■

**Teorema 36 (Teste da derivada segunda).** *Seja  $f$  contínua em  $[a, b]$  e diferenciável em  $]a, b[$ . Se existe  $c \in ]a, b[$  tal que  $f'(c) = 0$  e  $f''(c) > 0$  ( $f''(c) < 0$ ), então  $c$  é um ponto de mínimo(máximo) local de  $f$ .*

*Prova.* Se  $f''(c) > 0$ , então existe uma vizinhança  $V_c$  de  $c$ , tal que

$$\forall x \left( x \in V_c \setminus \{c\} \longrightarrow \frac{f'(x)}{x - c} > 0 \right).$$

<sup>16</sup>Fui corrigido por uma lhm, simplesmente risível. Eu pensei que era necessário que  $g'$  fosse contínua em  $a$  e  $b$ , para determinar os pontos  $x$  e  $y$  como da demonstração.

Com efeito, note que

$$\lim_{x \rightarrow c-} \frac{f'(c) - f'(x)}{x - c} = f''(c) = \lim_{x \rightarrow c+} \frac{f'(c) - f'(x)}{c - x}$$

Da definição de derivada existe uma vizinhança  $V_c$ , tal que

$$\forall x \left( x \in V_c \longrightarrow \frac{f'(c) - f'(x)}{x - c} > 0 \right).$$

Seja  $x \in V_c$ , suponhamos inicialmente  $x < c$ , segue que  $f'(x) < f'(c) = 0$ , daí  $f'(x)/(x-c) > 0$ . Agora, suponhamos que  $c < x$ , daí vem que  $0 = f'(c) < f'(x)$ , logo,  $f'(x)/(x-c) > 0$ . O que prova a quantificação. Isto por sua vez, em decorrência de resultados anteriores, acarreta que  $c$  é um ponto de mínimo local. A prova é inteiramente análoga para  $f''(c) > 0$ , pois o argumento é dual. ■

No que segue vamos tentar construir o conceito de vetor. A princípio era tratar axiomáticamente esta construção, mas tenho uma certa convicção que esta tarefa foge as minhas capacidades.

Primeiro vamos considerar um conjunto  $E$  chamado espaço, este espaço possui certos objetos indefinidos, como pontos denotados por letras maiúsculas do alfabeto latino  $A, \dots, Z$ ; retas denotadas por letras minúsculas do alfabeto latino  $a, \dots, z$ ; e planos denotados por letras do alfabeto grego  $\alpha, \dots, \omega$ .

Existem várias formas de se alcançar a geometria euclidiana, i.e., podemos partir de diferentes axiomas e intuitivamente alcançar o espaço euclidiano, i.e., construí-lo axiomáticamente.

Doravante explicitaremos os axiomas necessários e algumas definições auxiliares, ao progredirmos.

**Axioma 1.** *Dois pontos distintos  $A$  e  $B$ , determinam uma, e somente uma, reta. Tal reta será denotada por  $AB$ .*

**Axioma 2.** *Admitiremos uma noção primitiva, a noção de ‘estar entre’. Dados três pontos numa reta, somente um deles está entre os outros dois.*

**Definição 7.** *Ao conjunto de pontos entre dois pontos distintos  $A$  e  $B$  de uma reta  $r$  denotaremos por  $]A, B[$ . Também definiremos*

$$\begin{aligned} [A, B] &= ]A, B[ \cup \{A, B\}; \\ [A, B[ &= ]A, B[ \cup \{A\}; \\ ]A, B] &= ]A, B[ \cup \{B\}. \end{aligned}$$

*A qualquer um destes conjuntos chamaremos de seguimento.  $A$  e  $B$  são chamados extremos ou extremantes. Segundo esta definição  $[A, B] = [B, A]$ . Diremos que um seguimento com extremos  $A$  e  $B$  é nulo se, e somente se,  $A = B$ .*

**Definição 8.** *Sejam  $A$  e  $B$ , dois pontos distintos definimos a semirreta com origem em  $A$  determinada por  $B$ , como sendo o conjunto*

$$s_{(A,B)} = \left\{ P \in AB : P \in [A, B] \vee B \in [A, P] \right\}$$

**Definição 9.** *Seja  $\alpha$  um plano e  $r, s \subset \alpha$  retas quaisquer, diremos que  $r$  e  $s$  são paralelas se,  $r = s$  ou  $r \cap s = \emptyset$ .*

**Axioma 3.** *Seja  $r$  uma reta e  $P \notin r$ , existe uma única reta  $s$  paralela  $r$  passando por  $P$ , i.e.,  $P \in s$ . O plano fica dividido em dois conjuntos disjuntos. Defina no plano  $\alpha$  a seguinte relação entre pontos  $A \sim B$ , se e somente se,  $[A, B] \cap r = \emptyset$ .*

**Axioma 4.** *Existe uma função  $\mu : E \rightarrow R_+$ , satisfazendo as seguintes propriedades:*

I.  $\mu(S) = 0$  se, e somente se  $S$  é um seguimento nulo;

II. *Seja  $\mathcal{F} = \{S_i \in \mathcal{P}(E) : i \in n+1\}$  uma família de seguimentos disjuntos aos pares. Então*

$$\mu\left(\bigcup_{i \in n+1} S_i\right) = \sum_{i=0}^n \mu(S_i);$$

III. *Para toda semirreta  $s_{(A,B)}$  e todo  $c \in R_+$ , existe  $C \in s_{(A,B)}$ , tal que  $\mu([A, C]) = c$ .*

**Definição 10.** *Sejam  $\alpha$  um plano e  $r \subset \alpha$  uma reta*

**Definição 11.** *Sejam  $A$  e  $B$  dois pontos distintos definimos por seguimento orientado como sendo o par ordenado  $(A, B)$ . Diremos que o seguimento é nulo se, e somente se,  $A = B$ .*

Não confundir seguimento orientado que é um par ordenado  $(A, B)$ , com o seguimentos definidos anteriormente.

**Definição 12.** *Sejam  $(A, B)$  e  $(C, D)$  dois seguimentos não nulos.*

**Seguimentos equipolentes.** Na geometria analítica existe um conceito chamado **vetor**, cuja definição baseia-se na equipolência, uma relação de equivalência definida no conjunto dos seguimentos orientados. Seguiremos aqui a notação de P. Boulos e I. de Camargo dada no livro *Geometria Analítica um Tratamento Vetorial*. Seja  $E$  o espaço euclidiano, um seguimento orientado é um par de pontos de  $E$ , ou em outros termos, os seguimentos orientados são elementos de  $E \times E$ . Sobre  $E \times E$  definimos a seguinte relação de equivalência  $(A, B) \sim (C, D)$  se, e somente se

$$(\mathcal{E}) \quad ((A = C \longleftrightarrow B = D) \vee AC \parallel BD) \wedge ((A = B \longleftrightarrow C = D) \vee AB \parallel CD)$$

Aqui por conveniência  $AB$  denota a reta determinada por  $A$  e  $B$ , quando  $A \neq B$  e,  $AA = \{A\}$ . Definimos a relação

$$AB \parallel CD \longleftrightarrow AB = CD \vee AB \cap CD = \emptyset,$$

assim a expressão  $(\mathcal{E})$  é significativa. Nestas condições seguimentos nulos, isto é da forma  $(A, A)$ , são equivalentes somente a seguimentos nulos.

Doravante denotaremos tal relação de equivalência por **equipolência**. Assim, se dois seguimentos são equivalentes, são chamados por este motivo de **equipolentes**.

**Teorema 37.** *Seja  $(A, B)$  um seguimento não nulo, i.e.,  $A \neq B$ , e  $P \in E$ , então existe um seguimento orientado  $(P, P_{(A,B)}) \sim (A, B)$ , i.e., um seguimento equipolente a  $(A, B)$  com origem em  $P$ .*

*Prova.* Primeiro suponhamos que  $P \notin AB$ , pelo axioma das paralelas na geometria euclidiana existe uma reta  $r$  paralela a  $AB$  passando por  $P$ . Note que  $B \notin AP$ , pois caso contrário  $P \in AP = AB$ , o que contradiz nossa hipótese inicial. Pelo mesmo axioma existe uma reta  $s$  paralela a  $AP$  passando por  $B$ . Afirimo que  $s \cap r \neq \emptyset$ , suponhamos por redução ao absurdo o contrário. Necessariamente  $s \parallel r$ , consequentemente  $s \parallel AB$ , como  $B \in s \cap AB$ , decorre que

$s = AB$ , todavia  $A \notin s$ , pois  $s$  é uma reta paralela a  $AP$ , contendo  $B \notin AP$ . Esta contradição nos leva a concluir que existe  $P_{(A,B)} \in r \cap s$ . Seguidamente observemos que  $AB \parallel r = PP_{(A,B)}$  e  $AP \parallel s = BP_{(A,B)}$ , consequentemente  $(A, B) \sim (P, P_{(A,B)})$ . Suponhamos agora que  $P \in AB$ , existe  $(Q, Q_{(A,B)}) \sim (A, B)$ , tal que  $Q \notin AB$  assim  $A \notin QQ_{(A,B)}$ , pelo mesmo modo existe  $(P, P_{(Q,Q_{(A,B)})}) \sim (Q, Q_{(A,B)})$ , por transitividade  $(P, P_{(Q,Q_{(A,B)})}) \sim (A, B)$ . ■

Este teorema nos mostra que se  $(A, B)$  é não nulo e  $(A, B) \sim (C, D)$  e  $C \notin AB$ , então  $ABDC$  é um paralelogramo. Da geometria euclidiana tem-se uma noção básica de comprimento (medida), sabe-se que num paralelogramo lados paralelos têm o mesmo comprimento. Como consequência seguimentos equipolentes têm o mesmo comprimento.

**Definição 13.** *Sejam  $(A, B)$  e  $(C, D)$  seguimentos não nulos, diremos que eles possuem o mesmo sentido se  $AB \parallel CD$  e existem  $(E, F) \sim (A, B)$   $(G, H) \sim (C, D)$ , tais que  $EF \cap GH = \emptyset$  e  $\overline{EG} \cap \overline{FH} = \emptyset$ .*

**Teorema 38.** *Seguimentos equipolentes não nulos têm o mesmo sentido.*

*Prova.* Podemos sem perdas de generalidade supor que  $(A, B) \sim (C, D)$ , sejam tais que  $AB \cap CD = \emptyset$ . Necessariamente  $AB \parallel CD$  e  $AC \parallel BD$ , como  $B \notin AC$ , decorre que  $\overline{AC} \cap \overline{BD} = \emptyset$ .

**Corolário 13.** *Seguimentos orientados são nulos ou têm o mesmo sentido e mesmo comprimento.*

*Prova.* Imediata à discussão anterior. ■

Note que a definição de equipolência ( $\mathcal{E}$ ) implica o corolário anterior, mas a priori não é sabido se dois seguimentos não nulos que têm o mesmo sentido e comprimento são equipolentes. Para o que vamos fazer não é necessário provar a recíproca. A definição da relação de equipolência evita fazer comentários prévios sobre comprimentos, e também nos poupa de tratar os casos em que seguimentos são nulos ou não.

**Definição 14.** *Um vetor é o conjunto*

$$\overrightarrow{AB} = \{(C, D) \in E \times E : (C, D) \sim (A, B)\}$$

*em outros termos, um vetor é uma classe de equivalência da relação de equipolência ( $\mathcal{E}$ ).*

*Quando não se quiser fazer referência a um representante da classe, escolheremos uma letra do alfabeto latino comumente  $u, v, w, x, y, z$  e encimamos-la por uma flecha, e.g.,  $\vec{x}$ .*

*Os vetores herdam as propriedades dos seguimentos orientados e não orientados dados por de seus representantes, neste caso, paralelismo, sentido e comprimento. Denotaremos o comprimento de um vetor  $\vec{x}$ , por  $\|\vec{x}\|$  e a este número daremos o nome de norma. Observe que a noção de comprimento faz sentido para seguimentos nulos, neste caso trivialmente se  $\vec{x}$  possui representante nulo, então  $\|\vec{x}\| = 0$ . Ademais, nestas condições escreveremos  $\vec{0}$  para denotar a classe de equivalência dos seguimentos orientados nulos. O conjunto das classes de equivalência será denotada por  $\mathcal{V}$ .*

A seguir muniremos o conjunto  $\mathcal{V}$  de uma estrutura algébrica, a saber a adição  $+$ .

**Definição 15.** *Dados dois vetores  $\overrightarrow{AB}$  e  $\overrightarrow{CD}$ , definiremos o símbolo  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$  como sendo o vetor  $\overrightarrow{AB_{(C,D)}}$ , em outros termos a adição trata-se de construir um triângulo (possivelmente degenerado) com vértices  $A, B$  e  $B_{(C,D)}$ , em que  $(B, B_{(C,D)}) \sim (C, D)$ , e considerar o vetor (a classe) cujo representante seja o seguimento orientado  $(A, B_{(C,D)})$ .*

† Mostrar que a definição indepente do representante!

**Teorema 39.** *Sejam  $\overrightarrow{AB}$  e  $\overrightarrow{CD}$  dois vetores quaisquer. Então  $(A, B_{(C,D)}) \sim (C, D_{(A,B)})$ .*

## 1.7 ESPAÇOS VETORIAIS

A seguir apresentarei alguns exercícios pertinentes de [Hoffman].

**PROPOSIÇÃO 4** *Sejam  $V$  um espaço vetorial e  $W_i \subset V$ , com  $i \in \{1, 2\}$ , subespaços vetoriais tais que  $W = W_1 \cup W_2$  é um subespaço de  $V$ . Então, existe um  $i \in \{1, 2\}$ , tal que  $W_i \subset W_j$ , com  $i \neq j$ .*

**PROVA** Suponhamos por *reductio ad absurdum* que

$$(1.194) \quad W_1 \setminus W_2 \neq \emptyset \wedge W_2 \setminus W_1 \neq \emptyset$$

Sejam  $w_1 \in W_1 \setminus W_2$  e  $w_2 \in W_2 \setminus W_1$ , das hipóteses  $w = w_1 + w_2 \in W$ . Todavia,  $w \notin W_1$  e  $w \notin W_2$ . Pois, digamos que  $w \in W_1$ , então  $w_2 = w - w_1 \in W_1$ , o que é uma contradição pois  $w_2 \in W_2 \setminus W_1$ . Agora se  $w \in W_2$ , então analogamente  $w_1 = w - w_2 \in W_2$ , outra contradição, pois  $w_1 \in W_1 \setminus W_2$ . Concluimos, portanto, que existe  $i \in \{1, 2\}$ , tal que  $W_i \subset W_j$ , com  $i \neq j$ . ■

**PROPOSIÇÃO 5** *Seja  $K$  um corpo,  $W$  um espaço vetorial sobre  $K$ . Considere  $V = W^K$ , munido com a soma e produto por escalar usuais. Então*

$$(1.195) \quad V_i = \{f : f \in V \wedge f(-x) = -f(x)\}$$

e

$$(1.196) \quad V_p = \{f : f \in V \wedge f(-x) = f(x)\}$$

são subespaços de  $V$ , tais que

$$(1.197) \quad V_i \cap V_p = \{0\} \wedge V = V_i + V_p.$$

**PROVA** Primeiro é evidente que  $0 \in V_i$ . Sejam agora  $f, g \in V_i$  e  $\kappa \in K$ , temos que para todo  $x \in K$ , vale

$$(1.198) \quad \begin{aligned} (\kappa f + g)(-x) &= \kappa f(-x) + g(-x) \\ &= -\kappa f(x) - g(x) \\ &= -(\kappa f(x) + g(x)) \\ &= -(\kappa f + g)(x), \end{aligned}$$

consequentemente  $V_i$  é um subespaço de  $V$ . O outro caso é ainda mais simples de ser provado, o argumento é inteiramente semelhante.

Seja agora  $f \in V_i \cap V_p$ , temos para todo  $x \in K$

$$(1.199) \quad f(x) = f(-x) = -f(x),$$

logo  $f = 0$  e, consequentemente  $V_i \cap V_p = \{0\}$ .

Por fim, seja  $f \in V$ . Note que  $f_i, f_p \in V$  dadas por

$$(1.200) \quad f_i(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2} \quad \wedge \quad f_p(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}$$

são tais que, para todo  $x \in K$  vale

$$(1.201) \quad f_i(-x) = \frac{f(-x) - f(x)}{2} = -\frac{f(x) - f(-x)}{2} = -f_i(x),$$

e,

$$(1.202) \quad f_p(-x) = \frac{f(-x) + f(x)}{2} = \frac{f(x) + f(-x)}{2} = f_p(x),$$

i.e.,  $(f_i, f_p) \in V_i \times V_p$ . Ademais,  $f = f_i + f_p$ , consequentemente  $V = V_i + V_p$ . ■

**PROPOSIÇÃO 6** *Sejam  $V_i \subset V$ , com  $i \in \{1, 2\}$ , subespaços do espaço vetorial  $V$ , tais que*

$$(1.203) \quad V = V_1 + V_2 \quad \wedge \quad V_1 \cap V_2 = \{0\}.$$

*Então para todo  $v \in V$  existe único  $(v_1, v_2) \in V_1 \times V_2$ , tais que  $v = v_1 + v_2$ .*

**PROVA** A existência decorre da definição, provemos, portanto, a unicidade. Para tanto, sejam  $v \in V$  e  $v_i, w_i \in V_i$ , com  $i \in \{1, 2\}$ , tais que

$$(1.204) \quad v = v_1 + v_2 = w_1 + w_2,$$

temos que

$$(1.205) \quad v_1 - w_1 = w_2 - v_2 \in V_1 \cap V_2 = \{0\}.$$

Decorre que

$$(1.206) \quad v_1 - w_1 = 0 = v_2 - w_2,$$

o que por sua vez acarreta  $v_i = w_i$ , com  $i \in \{1, 2\}$ . ■

# 2

## CIÊNCIAS NATURAIS

### 2.1 EQUAÇÃO DE CARGA DE UM CAPACITOR

**Teorema 40.** *Seja um capacitor de capacitância  $C$  conectado em série com um resistor de resistência  $R$  e à uma bateria de tensão  $V_f$ . Admitindo-se que o capacitor esteja inicialmente descarregado a equação de carga do capacitor é dada por:*

$$V(t) = V_f(1 - e^{-\frac{t}{RC}}).$$

*Prova.* A corrente no capacitor  $I(t)$  é a mesma que a corrente no resistor, consequentemente

$$(\ddagger) \quad \frac{V_f - V(t)}{R} = I(t) = \frac{dQ}{dt}(t) = C \frac{dV}{dt}(t)$$

em que  $V(t)$  é a tensão no capacitor no instante  $t$ . Temos portanto de  $(\ddagger)$  que

$$\frac{1}{RC} = \frac{dV}{dt}(t) \frac{1}{V_f - V(t)} = -\frac{d}{dt}(V_f - V(t)) \frac{1}{V_f - V(t)}$$

em consequência do lema que vimos e multiplicando ambos membros por  $-1$ , decorre que

$$-\frac{1}{RC} = \frac{d}{dt}(V_f - V(t)) \frac{1}{V_f - V(t)} = \frac{d}{dt}(\ln|V_f - V(t)|)$$

do teorema fundamental do cálculo vem

$$-\frac{T}{RC} = \int_0^T \frac{d}{dt}(\ln|V_f - V(t)|) dt = \ln|V_f - V(t)| \Big|_0^T$$

para  $T \geq 0$ .

Agora admitindo-se que  $V(0) = 0$ , e que  $V_f - V(t) > 0$  para todo  $t \in R_+$  obtemos

$$-\frac{T}{RC} = \ln(V_f - V(t)) \Big|_0^T = \ln \frac{V_f - V(T)}{V_f}$$

donde se conclui

$$\frac{V_f - V(T)}{V_f} = e^{-\frac{T}{RC}}$$



que por sua vez implica

$$V(T) = V_f(1 - e^{-\frac{T}{RC}})$$

como  $T$  é arbitrário podemos escrever sem perdas

$$V(t) = V_f(1 - e^{-\frac{t}{RC}})$$

para todo  $t \geq 0$ . ■

**Como tratar adequadamente conversões entre grandezas, e.g., grandezas angulares?** *Como explicar rigorosamente a igualdade que se encontra rotineiramente em livros:*

$$2\pi \text{ rad} = 360^\circ ?$$

*Rigorosamente, os dois objetos são distintos, de maneira que a identidade não é significativa.*

# 3

## CONSIDERAÇÕES FINAIS

# 4

## A FAZER

- I.** Geometria euclidiana;
- II.** Geometria analítica;
- III.** Álgebra Linear;
- IV.** Anel dos inteiros;
- V.** MMC e MDC;
- VI.** Anel dos polinômios;
- VII.** Anel das matrizes;
- VIII.** Espaços vetoriais;
- IX.** Módulos;
- X.** Regra de três simples e composta;
- XI.** Inconsistência de modelos LLM;
- XII.** Diferenciabilidade de funções reais inversas de variáveis reais;
- XIII.** Mudança de variáveis em integrais;
- XIV.** Definição de primitivas ou integrais indefinidas.