

Dedico o resultado destas anotações aos meus Senhores. Primeiro, a Deus, que, consoante o seu desígnio, me concede o discernimento e o pão de cada dia. Segundo, a Jesus, não menos importante, em cujas palavras tanto me comprazo, e ciente de que Ele é O Caminho e A Verdade.

SUMÁRIO

PARTE I • CIÊNCIAS FORMAIS

1	Geometria analítica	5
1.1	Cônicas	5
1.1.1	Translações de sistema de coordenadas.	5
1.1.2	Eliminação dos termos lineares por translações	6
1.1.3	Rotações de sistemas de coordenadas	7
1.1.4	Eliminação do termo quadrático misto por rotações	9
2	Álgebra linear	12
2.1	Espaços vetoriais	12

PARTE II • CIÊNCIAS NATURAIS

3	Equação de carga de um capacitor	15
----------	---	-----------

PRELÚDIO

O texto que segue trata-se de um compêndio de assuntos que acho relevantes. Portanto, sem margem para dúvidas, o texto reflete minha subjetividade. Este texto estará em construção contínua, de maneira que não haverá versão final enquanto as circunstâncias da vida sobrepujarem o meu ímpeto de colecionar tais informações. Alguns resultados são de minha autoria, mas certamente estão enviesados por alguma obra, de maneira que não descobri a roda, mas me sustentei sobre o trabalho de vários indivíduos perspicazes. Além disso, é impossível colecionar tudo o que nos interessa. Destarte, me ative aos que, ao menos, tive alguma ideia de demonstração.

I

CIÊNCIAS FORMAIS

1

GEOMETRIA ANALÍTICA

1.1 CÔNICAS

DEFINIÇÃO 1 Consideremos g um polinômio de duas variáveis de grau 2 com coeficientes em \mathbb{R} dado por

$$(1.1) \quad g(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f.$$

Uma cônica C é o locus (lugar geomético) ou conjunto de pontos

$$(1.2) \quad C = \{(x, y) : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \wedge g(x, y) = 0\}.$$

O objetivo das próximas seções é aplicar transformações ao sistema de coordenadas, de tal maneira que a cônica seja facilmente reconhecida.

1.1.1 TRANSLAÇÕES DE SISTEMA DE COORDENADAS.

Dados pontos $\Omega = (h, k)$ e (x, y) de \mathbb{R}^2 , as coordenadas (u, v) de (x, y) relativo ao sistema cuja origem é Ω , são simplesmente dadas pela identidade

$$(1.3) \quad (u, v) = (x, y) - (h, k).$$

Em verdade, o sistema de coordenadas é a transformação afim $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, dada por

$$(1.4) \quad T(v) = v - \Omega.$$

Em outros termos, estamos calculando as coordenadas dum ponto v relativo a um sistema de coordenadas cuja a origem é precisamente Ω .

A relação das coordenadas de (u, v) do sistema transladado com as coordenadas de (x, y) segundo o sistema antigo é expressa pelo sistema

$$(1.5) \quad \begin{cases} x = u + h \\ y = v + k \end{cases}$$

1.1.2 ELIMINAÇÃO DOS TERMOS LINEARES POR TRANSLAÇÕES

Em seguida, calculemos $G(u, v) = g(u + h, v + k)$. Conformemente,

$$\begin{aligned}
 G(u, v) &= a(u + h)^2 + b(u + h)(v + k) + c(v + k)^2 + d(u + h) + e(v + h) + f \\
 &= au^2 + buv + cv^2 + u(2ah + bk + d) + v(bh + 2ck + e) \\
 (1.6) \quad &+ \underbrace{ah^2 + bhk + ck^2 + dh + ek + f}_{g(h, k)} \\
 &= au^2 + buv + cv^2 + u(2ah + bk + d) + v(bh + 2ck + e) + g(h, k)
 \end{aligned}$$

Nosso objetivo é eliminar os termos lineares segundo u e v . Para tanto, precisamos resolver o sistema

$$(1.7) \quad \begin{cases} 2ah + bk + d = 0 \\ bh + 2ck + e = 0 \end{cases}$$

que por sua vez, é equivalente ao sistema

$$(1.8) \quad \begin{cases} ah + \frac{b}{2}k = -\frac{d}{2} \\ \frac{b}{2}h + ck = -\frac{e}{2} \end{cases}$$

É sabido que o sistema (1.8) admite uma única solução, i.e., é determinado, se, e somente se, $ac - b^2/4 \neq 0$. Caso contrário, o sistema admite infinitas soluções, neste caso diz-se que ele é indeterminado, ou não admite soluções, i.e., é impossível.

Destarte, temos um método pragmático para determinar se é possível eliminar os termos lineares do polinômio g , a saber, se, e somente se, o sistema (1.8) admite soluções.

A seguir está provado que no caso do sistema (1.8) admitir infinitas soluções, que o termo independente de g no novo sistema de coordenadas é inexorável à escolha da solução do sistema (1.8).

TEOREMA 1 (EXERCÍCIO 23-10 - [BOULOSCAMARGO 1]) *Se o sistema (1.8) admite infinitas soluções, então g é constante no seu conjunto de soluções.*

PROVA Sejam (h, k) e (u, v) soluções do sistema (1.8). Em verdade não é difícil notar que $(h + k, u + v)$ também o é, bastando para isto substituir as respectivas coordenadas do par no sistema (1.8) e atestar as igualdades.

Notemos em seguida que qualquer solução (x, y) de (1.8), satisfaz

$$(1.9) \quad ax^2 + bxy + cy^2 + \frac{d}{2}x + \frac{e}{2}y = x\left(ax + \frac{b}{2}y + \frac{d}{2}\right) + y\left(\frac{b}{2}x + cy + \frac{e}{2}\right) = 0$$

e

$$\begin{aligned}
 g(x, y) &= ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f \\
 (1.10) \quad &= x\left(ax + \frac{b}{2}y + \frac{d}{2}\right) + y\left(\frac{b}{2}x + cy + \frac{e}{2}\right) + \frac{d}{2}x + \frac{e}{2}y + f \\
 &= \frac{d}{2}x + \frac{e}{2}y + f.
 \end{aligned}$$

Em conformidade, segue-se

$$(1.11) \quad 2\left[u\left(a(u + h) + \frac{b}{2}(k + v) + \frac{d}{2}\right) + v\left(\frac{b}{2}(u + h) + c(v + k) + \frac{e}{2}\right)\right] = 0$$

de (1.9) com $(x, y) = (u, v)$ e (1.11) podemos inferir

$$(1.12) \quad au^2 + buv + cv^2 + \frac{d}{2}u + \frac{e}{2}v + 2ahu + 2ckv + bhv + buk = 0.$$

Como consequência, de (1.9), (1.10) e (1.12) temos

$$(1.13) \quad \begin{aligned} g(h, k) &= ah^2 + bhk + ck^2 + dh + ck + f \\ &= ah^2 + bhk + ck^2 + dh + ck + f + au^2 + buv + cv^2 \\ &\quad + \frac{d}{2}u + \frac{e}{2}v + 2ahu + 2ckv + bhv + buk \\ &= a(h+u)^2 + b(u+h)(v+k) + c(k+v)^2 \\ &\quad + \frac{d}{2}(h+u) + \frac{e}{2}(k+v) + \frac{d}{2}u + \frac{e}{2}v + f \\ &= \frac{d}{2}u + \frac{e}{2}v + f \\ &= g(u, v) \end{aligned}$$

Em outros termos g é constante no conjunto de soluções do sistema (1.8). ■

1.1.3 ROTAÇÕES DE SISTEMAS DE COORDENADAS

Consideremos um ponto $w = (u, v)_\theta$ cujas coordenadas são dadas em relação ao sistema rotacionado. Nosso objetivo é determinar as coordenadas de w relativo ao primeiro sistema. A título de exemplo, usaremos um método geométrico para um caso particular.

Observemos, pois, a figura seguinte

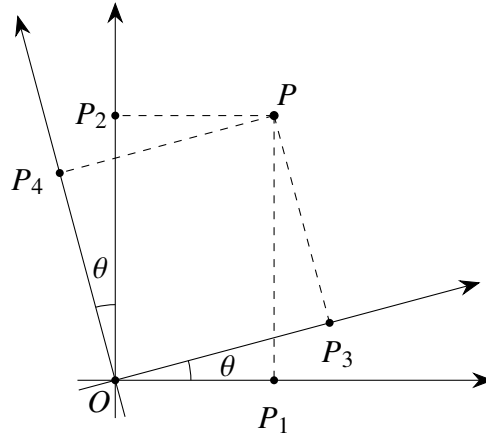


Figura 1.1: Rotação dum sistema de coordenadas cartesiano por um ângulo θ .

Seguirei a mesma linha de raciocínio empregada em [Iezzi74]. Da geometria analítica básica temos

$$(1.14) \quad \overrightarrow{OP_1} = \overrightarrow{P_2P}, \quad \overrightarrow{OP_2} = \overrightarrow{P_1P}, \quad \overrightarrow{OP_3} = \overrightarrow{P_4P}, \quad \overrightarrow{OP_4} = \overrightarrow{P_3P}$$

e

$$(1.15) \quad \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_3} + \overrightarrow{P_3P} = \overrightarrow{OP_4} + \overrightarrow{P_4P}.$$

Seguidamente, para $i \in \{1, 2\}$, definamos

$$(1.16) \quad \pi_i(w) = \langle u, e_i \rangle,$$

as projeções usuais sobre os eixos gerados pela base canônica $\{e_1, e_2\}$. Em consonância, temos

$$\begin{aligned}
 \pi_1(\overrightarrow{OP}) &= \pi_1(\overrightarrow{OP_3}) + \pi_1(\overrightarrow{P_3P}) \\
 &= \pi_1(\overrightarrow{OP_3}) + \pi_1(\overrightarrow{OP_4}) \\
 (1.17) \quad &= |\overrightarrow{OP_3}| \cos \theta + |\overrightarrow{OP_4}| \cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) \\
 &= |\overrightarrow{OP_3}| \cos \theta - |\overrightarrow{OP_4}| \sin \theta \\
 &= u \cos \theta - v \sin \theta
 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
 \pi_2(\overrightarrow{OP}) &= \pi_2(\overrightarrow{OP_4}) + \pi_2(\overrightarrow{P_4P}) \\
 &= \pi_2(\overrightarrow{OP_4}) + \pi_2(\overrightarrow{OP_3}) \\
 (1.18) \quad &= |\overrightarrow{OP_4}| \cos \theta + |\overrightarrow{OP_3}| \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \\
 &= |\overrightarrow{OP_4}| \cos \theta + |\overrightarrow{OP_3}| \sin \theta \\
 &= v \cos \theta + u \sin \theta.
 \end{aligned}$$

Em síntese, obtemos a seguinte relação das coordenadas do par (x, y) no sistema anterior, em relação às do par (u, v) , no novo sistema, nomeadamente

$$(1.19) \quad \begin{cases} x = u \cos \theta - v \sin \theta \\ y = u \sin \theta + v \cos \theta \end{cases}$$

Uma outra maneira, é recorrer à álgebra linear, mais precisamente a espaços vetoriais munidos com produto interno. Seja $\mathcal{B} = \{e_1, e_2\}$ a base canônica do \mathbb{R}^2 . Uma base ortonormal, para o segundo sistema é

$$(1.20) \quad r = \cos \theta e_1 + \sin \theta e_2$$

e

$$(1.21) \quad s = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)e_1 + \sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)e_2 = -\sin \theta e_1 + \cos \theta e_2.$$

Além do mais, o ângulo entre r e e_1 é

$$(1.22) \quad \eta = \arccos\left(\frac{\langle r, e_1 \rangle}{|r||e_1|}\right) = \arccos(\cos \theta).$$

Portanto, um vetor $w = (u, v)_\theta$ relativo à base $\mathcal{B}_\theta = \{r, s\}$, tem coordenadas satisfazendo o sistema (1.19). Assim, as coordenadas x e y de w relativas ao sistema canônico satisfazem a identidade

$$(1.23) \quad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$$

À transformação linear $R_\theta : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ cuja matriz associada é

$$(1.24) \quad [R_\theta] = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

daremos o nome de rotação por um ângulo θ . Ademais, para qualquer θ têm-se

$$(1.25) \quad [R_\theta]^{-1} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}.$$

Em consonância, R_θ é um isomorfismo de \mathbb{R}^2 .

1.1.4 ELIMINAÇÃO DO TERMO QUADRÁTICO MISTO POR ROTAÇÕES

Munido das observações da seção anterior, apliquemos uma rotação ao nosso sistema de coordenadas. Fazendo a substituição de (x, y) segundo (1.23) obtemos

$$(1.26) \quad \begin{aligned} G(u, v) = & (a \cos^2 \theta + b \cos \theta \sin \theta + c \sin^2 \theta)u^2 + ((a - c) \sin 2\theta + b \cos 2\theta)uv \\ & + (a \sin^2 \theta - b \cos \theta \sin \theta + c \cos^2 \theta)v^2 + (d \cos \theta + e \sin \theta)u \\ & + (e \cos \theta - d \sin \theta)v + f \end{aligned}$$

Por questões práticas, escreveremos

$$(1.27) \quad G(u, v) = \alpha u^2 + \beta uv + \gamma v^2 + \delta u + \varepsilon v + f,$$

o que pressupõe as igualdades

$$(1.28) \quad \begin{aligned} \alpha &= a \cos^2 \theta + b \cos \theta \sin \theta + c \sin^2 \theta \\ \beta &= (a - c) \sin 2\theta + b \cos 2\theta \\ \gamma &= a \sin^2 \theta - b \cos \theta \sin \theta + c \cos^2 \theta \\ \delta &= d \cos \theta + e \sin \theta \\ \varepsilon &= e \cos \theta - d \sin \theta \end{aligned}$$

Agora, nosso intento é que o termo misto se anule, para este fim devemos determinar θ , tal que $\beta = 0$. Notavelmente, estamos estipulando *a priori* que $b \neq 0$, pois do contrário a rotação do sistema de coordenadas não teria desígnio algum. Em conformidade com esta estipulação e com as notações anteriores segue-se o

TEOREMA 2 *Seja C uma cônica cujo o termo quadrático misto do polinômio subjacente g seja não nulo. Então existe uma rotação R_θ de um ângulo θ , segundo a qual o termo quadrático misto do polinômio subjacente $G = gR_\theta$ é nulo*

PROVA De (1.28) segue que

$$(1.29) \quad (a - c) \sin 2\theta = b \cos 2\theta$$

Daí vem necessariamente que $2\theta \neq n\pi$, para todo $n \in \mathbb{Z}$, conseqüentemente $\sin 2\theta \neq 0$. Com efeito, suponha que exista $n \in \mathbb{Z}$, tal que $2\theta = n\pi$, decorre de (1.29) que

$$(1.30) \quad b = b \cos 2\theta = (a - c) \sin 2\theta = 0,$$

o que contradiz nossa suposição. Portanto, podemos escrever

$$(1.31) \quad \cot 2\theta = \frac{\cos 2\theta}{\sin 2\theta} = \frac{a - c}{b}.$$

Temos duas soluções para (1.31) em $[0, 2\pi[$ uma no semicírculo superior e outra no inferior. ■

Escolhido θ conforme no **TEOREMA 2**, temos de (1.28) e (1.31) que

$$(1.32) \quad \alpha - \gamma = b \cot 2\theta \cos 2\theta + b \sin \theta = \frac{b}{\sin 2\theta}.$$

Em consonância com (1.28), podemos inferir

$$(1.33) \quad \alpha = \frac{1}{2} \left(a + c + \frac{b}{\sin 2\theta} \right) \quad \text{e} \quad \gamma = \frac{1}{2} \left(a + c - \frac{b}{\sin 2\theta} \right)$$

Adicionalmente, sabendo que $\alpha + \gamma = a + c$, segue-se que α e γ são raízes do polinômio p , dado por

$$(1.40) \quad p(\lambda) = \lambda^2 - (a + c)\lambda + ac - \frac{b^2}{4}.$$

Logo,

$$(1.41) \quad p(\lambda) = 0 \text{ se, e somente se, } \det([M_p - \lambda I]) = 0$$

em que

$$(1.42) \quad [M_p] = \begin{bmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{bmatrix},$$

i.e., α e γ são os autovalores da transformação M_p .

2

ÁLGEBRA LINEAR

2.1 ESPAÇOS VETORIAIS

A seguir apresentarei alguns exercícios pertinentes de [Hoffman].

PROPOSIÇÃO 1 *Sejam V um espaço vetorial e $W_i \subset V$, com $i \in \{1, 2\}$, subespaços vetoriais tais que $W = W_1 \cup W_2$ é um subespaço de V . Então, existe um $i \in \{1, 2\}$, tal que $W_i \subset W_j$, com $i \neq j$.*

PROVA Suponhamos por *reductio ad absurdum* que

$$(2.1) \quad W_1 \setminus W_2 \neq \emptyset \wedge W_2 \setminus W_1 \neq \emptyset$$

Sejam $w_1 \in W_1 \setminus W_2$ e $w_2 \in W_2 \setminus W_1$, das hipóteses $w = w_1 + w_2 \in W$. Todavia, $w \notin W_1$ e $w \notin W_2$. Pois, digamos que $w \in W_1$, então $w_2 = w - w_1 \in W_1$, o que é uma contradição pois $w_2 \in W_2 \setminus W_1$. Agora se $w \in W_2$, então analogamente $w_1 = w - w_2 \in W_2$, outra contradição, pois $w_1 \in W_1 \setminus W_2$. Concluimos, portanto, que existe $i \in \{1, 2\}$, tal que $W_i \subset W_j$, com $i \neq j$. ■

PROPOSIÇÃO 2 *Seja K um corpo, W um espaço vetorial sobre K . Considere $V = W^K$, munido com a soma e produto por escalar usuais. Então*

$$(2.2) \quad V_i = \{f : f \in V \wedge f(-x) = -f(x)\}$$

e

$$(2.3) \quad V_p = \{f : f \in V \wedge f(-x) = f(x)\}$$

são subespaços de V , tais que

$$(2.4) \quad V_i \cap V_p = \{0\} \wedge V = V_i + V_p.$$

PROVA Primeiro é evidente que $0 \in V_i$. Sejam agora $f, g \in V_i$ e $\kappa \in K$, temos que para todo $x \in K$, vale

$$(2.5) \quad \begin{aligned} (\kappa f + g)(-x) &= \kappa f(-x) + g(-x) \\ &= -\kappa f(x) - g(x) \\ &= -(\kappa f(x) + g(x)) \\ &= -(\kappa f + g)(x), \end{aligned}$$

consequentemente V_i é um subespaço de V . O outro caso é ainda mais simples de ser provado, o argumento é inteiramente semelhante.

Seja agora $f \in V_i \cap V_p$, temos para todo $x \in K$

$$(2.6) \quad f(x) = f(-x) = -f(x),$$

logo $f = 0$ e, conseqüentemente $V_i \cap V_p = \{0\}$.

Por fim, seja $f \in V$. Note que $f_i, f_p \in V$ dadas por

$$(2.7) \quad f_i(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2} \quad \wedge \quad f_p(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}$$

são tais que, para todo $x \in K$ vale

$$(2.8) \quad f_i(-x) = \frac{f(-x) - f(x)}{2} = -\frac{f(x) - f(-x)}{2} = -f_i(x),$$

e.

$$(2.9) \quad f_p(-x) = \frac{f(-x) + f(x)}{2} = \frac{f(x) + f(-x)}{2} = f_p(x),$$

i.e., $(f_i, f_p) \in V_i \times V_p$. Ademais, $f = f_i + f_p$, conseqüentemente $V = V_i + V_p$. ■

PROPOSIÇÃO 3 *Sejam $V_i \subset V$, com $i \in \{1, 2\}$, subespaços do espaço vetorial V , tais que*

$$(2.10) \quad V = V_1 + V_2 \quad \wedge \quad V_1 \cap V_2 = \{0\}.$$

Então para todo $v \in V$ existe único $(v_1, v_2) \in V_1 \times V_2$, tais que $v = v_1 + v_2$.

PROVA A existência decorre da definição, provemos, portanto, a unicidade. Para tanto, sejam $v \in V$ e $v_i, w_i \in V_1$, com $i \in \{1, 2\}$, tais que

$$(2.11) \quad v = v_1 + v_2 = w_1 + w_2,$$

temos que

$$(2.12) \quad v_1 - w_1 = w_2 - v_2 \in V_1 \cap V_2 = \{0\}.$$

Decorre que

$$(2.13) \quad v_1 - w_1 = 0 = v_2 - w_2,$$

o que por sua vez acarreta $v_i = w_i$, com $i \in \{1, 2\}$. ■

II

CIÊNCIAS NATURAIS

3

EQUAÇÃO DE CARGA DE UM CAPACITOR

Teorema 1. *Seja um capacitor de capacitância C conectado em série com um resistor de resistência R e à uma bateria de tensão V_f . Admitindo-se que o capacitor esteja inicialmente descarregado a equação de carga do capacitor é dada por:*

$$V(t) = V_f(1 - e^{-\frac{t}{RC}}).$$

Prova. A corrente no capacitor $I(t)$ é a mesma que a corrente no resistor, consequentemente

$$(\ddagger) \quad \frac{V_f - V(t)}{R} = I(t) = \frac{dQ}{dt}(t) = C \frac{dV}{dt}(t)$$

em que $V(t)$ é a tensão no capacitor no instante t . Temos portanto de (\ddagger) que

$$\frac{1}{RC} = \frac{dV}{dt}(t) \frac{1}{V_f - V(t)} = -\frac{d}{dt}(V_f - V(t)) \frac{1}{V_f - V(t)}$$

em consequência do lema que vimos e multiplicando ambos membros por -1 , decorre que

$$-\frac{1}{RC} = \frac{d}{dt}(V_f - V(t)) \frac{1}{V_f - V(t)} = \frac{d}{dt}(\ln|V_f - V(t)|)$$

do teorema fundamental do cálculo vem

$$-\frac{T}{RC} = \int_0^T \frac{d}{dt}(\ln|V_f - V(t)|) dt = \ln|V_f - V(t)| \Big|_0^T$$

para $T \geq 0$.

Agora admitindo-se que $V(0) = 0$, e que $V_f - V(t) > 0$ para todo $t \in R_+$ obtemos

$$-\frac{T}{RC} = \ln(V_f - V(t)) \Big|_0^T = \ln \frac{V_f - V(T)}{V_f}$$

donde se conclui

$$\frac{V_f - V(T)}{V_f} = e^{-\frac{T}{RC}}$$

que por sua vez implica

$$V(T) = V_f(1 - e^{-\frac{T}{RC}})$$

como T é arbitrário podemos escrever sem perdas

$$V(t) = V_f(1 - e^{-\frac{t}{RC}})$$

para todo $t \geq 0$.



Como tratar adequadamente conversões entre grandezas, e.g., grandezas angulares? *Como explicar rigorosamente a igualdade que se encontra rotineiramente em livros:*

$$2\pi \text{ rad} = 360^\circ ?$$

Rigorosamente, os dois objetos são distintos, de maneira que a identidade não é significativa.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] CAMARGO, IVAN DE; BOULOS, PAULO. *Geometria Analítica*. 3^a ed. rev. e ampl. São Paulo: Prentice Hall, 2005.
- [2] HALMOS, PAUL R. *Naive Set Theory*. Garden City, New York: Dover Publications, 2017.
- [3] HOFFMAN, KENNETH; KUNZE, RAY. *Linear Algebra*. 2nd ed. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall, 1961.
- [4] IEZZI, GELSON. *Fundamentos de Matemática Elementar*. Vol. 7. Geometria Analítica. 3^a ed. São Paulo: Atual, 1985.
- [5] RUDIN, WALTER. *Principles of Mathematical Analysis*. 3rd ed. McGraw-Hill, 1976.
- [6] SPIVAK, MICHAEL. *Calculus*. 4th ed. Houston, Texas: Publish or Perish, 2008.