Dedico o resultado destas anotações aos meus Senhores. Primeiro, a Deus, que, consoante o seu desígnio, me concede o discernimento e o pão de cada dia. Segundo, a Jesus, não menos importante, em cujas palavras tanto me comprazo, e ciente de que Ele é O Caminho e A Verdade.

SUMÁRIO

O texto que segue trata-se de um compêndio de assuntos que acho relevantes. Portanto, sem margem para dúvidas, o texto reflete minha subjetividade. Este texto estará em construção contínua, de maneira que não haverá versão final enquanto as circunstâncias da vida sobrepujarem o meu ímpeto de colecionar tais informações. Alguns resultados são de minha autoria, mas certamente estão enviesados por alguma obra, de maneira que não descobri a roda, mas me sustentei sobre o trabalho de vários indivíduos perspicazes. Além disso, é impossível colecionar tudo o que nos interessa. Destarte, me ative aos que, ao menos, tive alguma ideia de demonstração.

Página deixada intencionalmente em branco

CAPÍTULO

1

TEORIA DOS CONJUNTOS

Decidi abordar a construção dada no apêndice do livro *General Topology* de John L. Kelley (*vide* pp. 250–281). Conforme atestei, o sistema empregado por Kelley, é uma adaptação do sistema de A. P. Morse, confirma na referida obra.

Nosso sistema axiomático constituirá além da lógica proposicional, de objetos indefinidos chamados **classes**, denotadas doravante por letras do alfabeto latino. Adicionalmente, com uma relação $\in$, chamada pertinência.

Definição 1 (Conjunto)

$$\forall x\big(\varsigma(x) \longleftrightarrow \exists y(x \in y)\big).$$

À cada classe x tal que $\varsigma(x)$, daremos o nome de conjunto. Desta maneira $\varsigma(x)$ se, e somente se, x é um conjunto.

Axioma 1 (II Classification axiom-scheme • Axioma-esquema da classificação) *Seja ϕ uma função proposicional tendo como parâmetros as classes. Então*

$$\forall y\big(y \in \{x : \phi(x)\} \longleftrightarrow \varsigma(y) \wedge \phi(y)\big).$$

Enfatizo que os objetos da teoria de classes, resumem-se, como é esperado, à classes. Portanto, '$\{x : \phi(x)\}$' denota uma classe, daí o nome de *classifier* ou **classificador**.

Definição 2 $\langle\phi\rangle = \{x : \phi(x)\}$.

Axioma 2 (I Axiom of extent • AEx: Axioma da extensionalidade)

$$\forall x, y\big(x = y \longleftrightarrow \forall z(z \in x \longleftrightarrow z \in y)\big).$$

Friso categoricamente que uma prova rigorosa da igualdade de classes, requer o uso explícito do axioma da extensionalidade **AEx**. Portanto, a rigor, uma cadeia de igualdades de classes dadas por classificadores, mesmo que óbvia para leitores maduros, não caracteriza, segundo minha visão, uma prova. Enfatizo este ponto, pois em estágios anteriores na confecção deste compêndio eu usei tais métodos.

Teorema 1

$$\forall x\big(x = \{y : y \in x\}\big).$$

Prova

$$\forall z\big(z \in \{y : y \in x\} \longleftrightarrow z \in x\big).$$

∎

Definição 3 $x \cup y = \{z : z \in x \vee z \in y\}$.

Definição 4 $x \cap y = \{z : z \in x \wedge z \in y\}$.

Aos símbolos $x \cup y$ e $x \cap y$, dá-se o nome de união e intersecção de x com y, respectivamente.

Teorema 2

$$\forall x, y, z\Big(x \cap (y \cup z) = (x \cap y) \cup (x \cap z) \ \wedge \ x \cup (y \cap z) = (x \cup y) \cap (x \cup z)\Big)$$

Prova Vamos provar a segunda proposição. Sejam x, y e z classes, notemos que

$$\begin{aligned} \forall w\big(w \in x \cup (y \cap z) &\longleftrightarrow w \in x \vee w \in y \cap z \\ &\longleftrightarrow w \in x \vee (w \in y \wedge w \in z) \\ &\longleftrightarrow (w \in x \vee w \in y) \wedge (w \in x \vee w \in z) \\ &\longleftrightarrow w \in (x \cup y) \wedge w \in (x \cup z) \\ &\longleftrightarrow w \in (x \cup y) \cap (x \cup z)\big). \end{aligned} \tag{1.1}$$

A outra prova é inteiramente análoga. De fato, decorre das propriedades dos conectivos '$\wedge$' e '$\vee$', a conjunção e disjunção lógica, respectivamente. ▮

Definição 5

$$\forall x, y(x \notin y \longleftrightarrow \neg(x \in y)).$$

Definição 6 $\neg x = \{y : y \notin x\}$.

A classe $\neg x$ chama-se complemento absoluto de x.

Teorema 3 *Seja ϕ uma função proposicional cujos parâmetros sejam classes. Então $\neg\langle\phi\rangle = \langle\neg\phi\rangle$.*

Prova

$$\forall x\big(x \in \neg\langle\phi\rangle \longleftrightarrow \varsigma(x) \wedge \neg\phi(x) \longleftrightarrow x \in \langle\neg\phi\rangle\big).$$

▮

Teorema 4

$$\forall x\big(\neg(\neg x) = x\big).$$

Prova

$$\forall y\big(y \in \neg(\neg x) \longleftrightarrow \neg(y \in \neg x) \longleftrightarrow \neg\big(\neg(y \in x)\big) \longleftrightarrow y \in x\big) \tag{1.2}$$

▮

Teorema 5 (Leis de De Morgan)

$$\forall x, y\big(\neg(x \cup y) = \neg x \cap \neg y \ \wedge \ \neg(x \cap y) = \neg x \cup \neg y\big)$$

Prova A prova segue diretamente da definição de $\cup$ e $\cap$, e das leis de De Morgan para os conectivos $\vee$ e $\wedge$. ▮

Definição 7 $x \neg y = x \cap \neg y$.

Ao símbolo '$x \neg y$' dá-se o nome de diferença de x e y ou complemento de y relativo a x.

Teorema 6

$$\forall x, y, z\big(x \cap (y \neg z) = (x \cap y) \neg z\big)$$

Prova Provar. ∎

Definição 8 *Seja ϕ uma contradição qualquer. Definimos $\emptyset = \langle \phi \rangle$.*

Observe que esta definição independe da contradição. Com efeito, temos o

Teorema 7 *Se ϕ e ψ são duas contradições, então $\langle \phi \rangle = \langle \psi \rangle$.*

Prova Com efeito,

$$\forall x\big(x \in \langle \phi \rangle \longleftrightarrow \varsigma(x) \wedge \phi(x) \longleftrightarrow \varsigma(x) \wedge \psi(x) \longleftrightarrow x \in \langle \psi \rangle\big), \tag{1.3}$$

pois ambos os membros da bicondicional são falsos, logo a equivalência é válida e, consequentemente o quantificação é verdadeira. ∎

A classe $\emptyset$ é chamada de classe nula ou vazia.

Teorema 8

$$\forall x(x \notin \emptyset). \tag{1.4}$$

Prova

$$\forall x(x \in \emptyset \longleftrightarrow \varsigma(x) \wedge x \neq x). \tag{1.5}$$

Como o lado direito é trivialmente falso pela definição de igualdade, decorre que $\neg(x \in \emptyset)$, ou equivalentemente $x \notin \emptyset$ é verdadeira para todo x. ∎

Teorema 9

$$\forall x(x \cup \emptyset = x \ \wedge \ x \cap \emptyset = \emptyset). \tag{1.6}$$

Prova Seja x uma classe, temos em conformidade

$$\forall y\big(y \in x \cup \emptyset \longleftrightarrow \varsigma(y) \wedge (y \in x \vee y \in \emptyset) \longleftrightarrow \varsigma(y) \wedge y \in x \longleftrightarrow y \in x\big) \tag{1.7}$$

o que segundo o **AEx**segue-se a identidade.

Analogamente,

$$\forall y\big(y \in x \cap \emptyset \longleftrightarrow \varsigma(y) \wedge (y \in x \wedge y \in \emptyset) \longleftrightarrow \varsigma(y) \wedge y \in \emptyset \longleftrightarrow y \in \emptyset\big) \tag{1.8}$$

novamente pelo **AEx**infere-se a igualdade. ∎

Definição 9

$$\mathcal{U} = \neg\emptyset \tag{1.9}$$

Teorema 10

$$\forall x\big(x \in \mathcal{U} \longleftrightarrow \varsigma(x)\big). \tag{1.10}$$

Prova

$$\forall x\big(x \in \mathcal{U} \longleftrightarrow \varsigma(x) \wedge x \notin \emptyset \longleftrightarrow \varsigma(x)\big). \tag{1.11}$$

∎

Teorema 11 *Seja ϕ uma tautologia. Então $\langle\phi\rangle = \mathcal{U}$.*

Prova Notemos que

$$\forall x\big(x \in \langle\phi\rangle \longleftrightarrow \varsigma(x) \wedge \phi(x) \longleftrightarrow \varsigma(x) \longleftrightarrow x \in \mathcal{U}\big), \tag{1.12}$$

de **AEx**decorre o teorema. Outra maneira seria usar a hipótese que $\neg\phi$ é uma contradição, e concluir de

$$\langle\phi\rangle = \neg\langle\neg\phi\rangle = \neg\emptyset = \mathcal{U}. \tag{1.13}$$

∎

Teorema 12

$$\forall x\big(x \cup \mathcal{U} = \mathcal{U} \wedge x \cap \mathcal{U} = x\big) \tag{1.14}$$

Prova

$$\forall y\big(y \in x \cup \mathcal{U} \longleftrightarrow y \in x \vee y \in \mathcal{U} \longleftrightarrow y \in \mathcal{U}\big) \tag{1.15}$$

segue pelo **AEx**.

Seguidamente,

$$\forall y\big(y \in x \cap \mathcal{U} \longleftrightarrow y \in x \wedge y \in \mathcal{U} \longleftrightarrow y \in x\big) \tag{1.16}$$

novamente decorre por **AEx**. ∎

Definição 10

$$\bigcap x = \big\{z : \forall y(y \in x \longrightarrow z \in y)\big\}. \tag{1.17}$$

Definição 11

$$\bigcup x = \big\{z : \exists y(y \in x \wedge z \in y)\big\} \subset . \tag{1.18}$$

A classe $\bigcap x$ é a interseção dos membros de x e, a classe $\bigcup x$ é a união dos membros de x.

Teorema 13

$$\bigcap \emptyset = \mathcal{U} \wedge \bigcup \emptyset = \emptyset. \tag{1.19}$$

Prova

$$\forall x\Big(x \in \bigcap \emptyset \longleftrightarrow \varsigma(x) \wedge \forall y(y \in \emptyset \longleftrightarrow x \in y) \longleftrightarrow x \in \mathcal{U}\Big), \tag{1.20}$$

pois ϕ definida por

$$\phi(x) \longleftrightarrow \forall y(y \in \emptyset \longleftrightarrow x \in y) \tag{1.21}$$

é uma tautologia.

Em seguida,

$$\forall x\big(x \in \bigcup \emptyset \longleftrightarrow \varsigma(x) \wedge \exists(y \in \emptyset \wedge x \in y) \longleftrightarrow x \in \emptyset\big), \tag{1.22}$$

porquanto, ψ definida por

$$\psi(x) \longleftrightarrow \exists y(y \in \emptyset \wedge x \in y) \tag{1.23}$$

é uma contradição. ∎

Definição 12

$$\forall x\big(x \subset y \longleftrightarrow \forall z(z \in x \longrightarrow z \in y)\big). \tag{1.24}$$

Uma classe x é uma subclasse de y, ou está contida em y, ou y contem x, se, e somente se, $x \subset y$.

Teorema 14 (26 Theorem)

$$\forall x(\emptyset \subset x \wedge x \subset \mathcal{U}) \tag{1.25}$$

Prova Seja x uma classe. Temos primeiramente

$$\forall y(y \in \emptyset \longrightarrow y \in x), \tag{1.26}$$

pois o antecedente da condicional é sempre falso. O que prova a primeira inclusão.

Por outro, lado temos

$$\forall y(y \in x \longrightarrow \varsigma(y) \longrightarrow y \in \mathcal{U}). \tag{1.27}$$

o que conclui a prova. ∎

Teorema 15 (27 Theorem)

$$\forall x, y(x = y \longleftrightarrow x \subset y \wedge y \subset x). \tag{1.28}$$

Prova Sejam x e y classes quaisquer

$$\begin{aligned} x \subset y \wedge y \subset x &\longleftrightarrow \forall z\big((z \in x \longrightarrow z \in y) \wedge (z \in y \longrightarrow z \in x)\big) \\ &\longleftrightarrow \forall z(z \in x \longleftrightarrow z \in y) \\ &\longleftrightarrow x = y. \end{aligned} \tag{1.29}$$

∎

Teorema 16 (28 Theorem)

$$\forall x, y, z(x \subset y \wedge y \subset z \longrightarrow x \subset z) \tag{1.30}$$

Prova Sejam x, y, z classes quaisquer. Temos

$$\begin{aligned}\bigl(x \subset y \wedge y \subset z &\longrightarrow \forall w(w \in x \longrightarrow w \in y \wedge w \in y \longrightarrow w \in z)\\ &\longrightarrow \forall w(w \in x \longrightarrow w \in z)\\ &\longrightarrow x \subset z\bigr)\end{aligned} \tag{1.31}$$

∎

Teorema 17

$$\forall x, y, z(x \subset y \longrightarrow x \cap z \subset y \cap z \wedge x \cup z \subset y \cup z) \tag{1.32}$$

Prova Sejam x, y, z classes quaisquer. Primeiramente,

$$\forall w(w \in x \cap z \longrightarrow w \in x \wedge w \in z \longrightarrow w \in y \wedge w \in z \longrightarrow w \in y \cap z). \tag{1.33}$$

Segundo e, por fim,

$$\forall w(w \in x \cup z \longrightarrow w \in x \vee w \in z \longrightarrow w \in y \vee w \in z \longrightarrow w \in y \cup z). \tag{1.34}$$

∎

Teorema 18

$$\forall x, y(x \subset y \longleftrightarrow x \cup y = y) \tag{1.35}$$

Prova Sejam x, y classes arbitrárias, segue-se

$$x \subset y \wedge y \subset x \cup y \longleftrightarrow x \cup y \subset y \wedge y \subset x \cup y \longleftrightarrow x \cup y = y. \tag{1.36}$$

∎

Teorema 19 (30 Theorem)

$$\forall x, y(x \subset y \longleftrightarrow x \cap y = x) \tag{1.37}$$

Prova Dadas as classes x e y, temos

$$x \subset y \wedge x \cap y \subset x \longleftrightarrow x \subset x \cap y \wedge x \cap y \subset x \longleftrightarrow x \cap y = x. \tag{1.38}$$

∎

Teorema 20 (31 Theorem)

$$\forall x, y\Bigl(x \subset y \longrightarrow \bigcup x \subset \bigcup y \wedge \bigcap y \subset \bigcap x\Bigr). \tag{1.39}$$

Prova Sejam x, y, z classes arbitrárias, tais que $x \subset y$. Primeiro temos

$$z \in \bigcup x \longrightarrow \exists w(w \in x \wedge z \in w) \longrightarrow \exists w(w \in y \wedge z \in w) \longrightarrow z \in \bigcup y. \tag{1.40}$$

Segundo,

$$z \in \bigcap y \longrightarrow \forall w(w \in y \longrightarrow z \in w) \longrightarrow \exists w(w \in x \longrightarrow z \in w) \longrightarrow z \in \bigcap x. \tag{1.41}$$

∎

Teorema 21 (32 Theorem)

$$\forall x, y\Big(x \in y \longrightarrow x \subset \bigcup y \wedge \bigcap y \subset x\Big) \tag{1.42}$$

Prova Sejam $x, y, z,$ classes aleatórias tais que $x \in y$. Inicialmente, temos

$$z \in x \longrightarrow \exists w(w \in y \wedge z \in w) \longrightarrow z \in \bigcup y. \tag{1.43}$$

Finalmente,

$$z \in \bigcap y \longrightarrow \forall w(w \in y \longrightarrow z \in w) \longrightarrow z \in x. \tag{1.44}$$

∎

1.1 EXISTÊNCIA DE CONJUNTOS

Axioma 3 (III Axiom • AS: Axioma de subconjuntos)

$$\forall x\Big(\varsigma(x) \longrightarrow \exists y\big(\varsigma(y) \wedge \forall z(z \subset x \longrightarrow z \in y)\big)\Big). \tag{1.45}$$

Teorema 22 (33 Theorem)

$$\forall x, z\big(\varsigma(x) \wedge z \subset x \longrightarrow \varsigma(z)\big). \tag{1.46}$$

Prova Sejam as classes x e z, tais $\varsigma(x)$ e $z \subset x$, tem se

$$\varsigma(x) \xrightarrow{\textbf{AS}} \exists y(w \subset x \longrightarrow w \in y) \longrightarrow z \in w \longrightarrow \varsigma(z). \tag{1.47}$$

∎

Teorema 23 (34 Theorem)

$$\emptyset = \bigcap \mathcal{U} \wedge \mathcal{U} = \bigcup \mathcal{U}. \tag{1.48}$$

Prova Primeiramente suponhamos por *reductio ad absurdum* que exista $x \in \bigcap \mathcal{U}$, então $\varsigma(x)$, pelo **Teorema 14** segue-se $\emptyset \subset x$; assim necessariamente $\varsigma(\emptyset)$, ou equivalentemente $\emptyset \in \mathcal{U}$. Pelo **Teorema 21** tem-se que $\bigcup \mathcal{U} \subset \emptyset$, novamente pelo **Teorema 14** temos $\emptyset \subset \bigcap \mathcal{U}$, logo, pelo **Teorema 15** e da suposição inicial decorre que $x \in \bigcap \mathcal{U} = \emptyset$, o que é uma contradição. Consequentemente, não é o caso que exista $x \in \bigcap \mathcal{U}$, i.e., $\bigcap \mathcal{U} = \emptyset$[1.

Agora, seja $x \in \mathcal{U}$, pelo **AS** existe $y \in \mathcal{U}$, tal que $x \in y$, pois $x \subset x$, pela definição de $\bigcup \mathcal{U}$, segues-se que $x \in \bigcup \mathcal{U}$, consequentemente $\mathcal{U} \subset \bigcup \mathcal{U}$. Por outro lado, pelo **Teorema 14**, temos $\bigcup \mathcal{U} \subset \mathcal{U}$, consequentemente pelo **Teorema 15**, $\bigcup \mathcal{U} = \mathcal{U}$. ∎

Teorema 24 (35 Theorem) *Para toda classe x, se $x \neq \emptyset$, então $\varsigma(\bigcap x)$.*

Prova Se $x \neq \emptyset$, então existe $y \in x$, logo $\varsigma(y)$ e pelo **Teorema 21** tem-se $\bigcap x \subset y$, daí e do **Teorema 21**, decorre que $\varsigma(\bigcap x)$. ∎

Definição 13 $2^x = \{y : y \subset x\}$.

Teorema 25 (37 Theorem) $2^{\mathcal{U}} = \mathcal{U}$.

Prova Certamente pelo **Teorema 14** segue que $2^{\mathcal{U}} \subset \mathcal{U}$. Agora, dado $x \in \mathcal{U}$, então evidentemente $x \subset \mathcal{U}$, consquentemente $x \in 2^{\mathcal{U}}$. Pelo **Teorema 15**, concluímos que $2^{\mathcal{U}} = \mathcal{U}$.∎

Teorema 26 (38 Theorem) *Se $\varsigma(x)$, então $\varsigma(2^x)$.*

Prova Se $\varsigma(x)$, pelo **AS** existe $y \in \mathcal{U}$, tal que para todo z, se $z \subset y$, então $z \in y$. Como consequência, $2^x \subset y$, pelo **Teorema 22** segue-se que $\varsigma(2^x)$. ∎

Teorema 27 (39 Theorem) $\neg\varsigma(\mathcal{U})$.

Prova Consideremos a classe $\mathcal{R} = \{x : x \notin x\}$[2. Provemos que $\neg\varsigma(\mathcal{R})$, i.e., $\mathcal{R}$. Para tanto, suponhamos por *reductio ad absurdum* que $\varsigma(\mathcal{R})$, temos então a equivalência

$$\varsigma(\mathcal{R}) \wedge \mathcal{R} \in \mathcal{R} \text{ se, e somente se, } \varsigma(\mathcal{R}) \wedge \mathcal{R} \notin \mathcal{R}, \tag{1.49}$$

o que é uma inconsistência, i.e., uma contradição. Logo, $\neg\varsigma(\mathcal{R})$. Ademais, da própria definição de classificadores $\mathcal{R} \subset \mathcal{U}$, como $\mathcal{R}$ é uma classe própria, necessariamente $\mathcal{U}$ também o será. Com efeito, suponha por *reductio ad absurdum* que $\varsigma(\mathcal{U})$, pelo **Teorema 22**, inferiríamos que $\varsigma(\mathcal{R})$, o que é uma contradição com o argumento anterior. ∎

Definição 14 (40 Definition) $\{x\} = \{y : x \in \mathcal{U} \longrightarrow y = x\}$.

Teorema 28 (41 Theorem) *Se $\varsigma(x)$, então, para cada y, $y \in \{x\}$ se, e somente se, $y = x$.*

Prova Se $\varsigma(x)$, então $x \in \mathcal{U}$. Logo, $y \in \{x\}$ se, e somente se, $y = x$.

Teorema 29 (42 Theorem) *Se $\varsigma(x)$, então $\varsigma(\{x\})$.*

Prova Pelo **Teorema 26** se $\varsigma(x)$, então $\varsigma(2^x)$, como $\{x\} \subset 2^x$, segue-se pelo **Teorema 22** que $\varsigma(\{x\})$. ∎

---

[1] Segui a mesma linha de raciocínio de Kelley, mas com a minhas adaptações.

[2] O $\mathcal{R}$ é em homenagem a Bertrand Russel, um dos primeiros a descobrir paradoxos na teoria ingênia dos conjuntos, criada pelo matemático eminente Georg Cantor.

Teorema 30 (43) *$\neg\varsigma(x)$ se, e somente se, $\{x\} = \mathcal{U}$.*

Prova Se $\neg\varsigma(x)$, então

$$(x \in \mathcal{U} \longrightarrow y = x) \wedge \varsigma(y) \tag{1.50}$$

é uma tautologia, pois o antecedente $x \in \mathcal{U}$ é sempre falso, pelo **Teorema 11**, decorre $\{x\} = \mathcal{U}$. Se $\varsigma(x)$, então do **Teorema 29** $\varsigma(\{x\})$, logo $\{x\}$ não pode ser igual a $\mathcal{U}$, disto a recíproca segue por contrapositiva. ▮

Teorema 31 (44 Theorem) *Se $\neg\varsigma(x)$, então $\bigcap\{x\} = \emptyset$ e $\bigcup\{x\} = \mathcal{U}$. Se $\varsigma(x)$, então $x = \bigcap\{x\} = \bigcup\{x\}$.*

Prova A primeira condicional segue do **Teorema 23** e do **Teorema 30**.