Definição 1 *Sejam $\sum a_n$ uma série convergente de termos não negativos, e $A \subset \omega$. Seja κ_A a característica de A. Então definimos*

$$\Sigma A = \sum_{i=0}^{\infty} \kappa_A(i) a_i. \tag{1}$$

Evidentemente ΣA é finito pois $\sum a_n < \infty$.

Lema 1 *Sejam $\sum a_n$ como na* **Definição 1** *e $A, B \in 2^\omega$. Se $A \subset B$, então $\Sigma A \leq \Sigma B$.*

Prova É suficiente notar que para todo $i \in \omega$ vale

$$\kappa_A(i) a_i \leq \kappa_B a_i, \tag{2}$$

a desigualdade requerida segue da comparação de séries. ∎

Teorema 1 (4.31 Remark: *Principles of Mathematical Analysis*) *Seja $E \subset]a, b[$ enumerável, virtualmente denso. Sejam $\sigma \in E^\omega$ uma bijeção, $\sum a_n$ uma série convergente de termos estritamente positivos e $x \in]a, b[$, definamos*

$$[x] \ = \sigma^{-1}(]a, x[) \tag{3}$$

e

$$f = \{z : \exists x (x \in]a, b[\ \wedge z = (x, \Sigma[x]))\}. \tag{4}$$

Então $f \in \mathbb{R}^{]a,b[}$ e tem as seguintes propriedades:

(a) *f é monotonicamente crescente em $]a, b[$;*

(b) *f é descontínua em todo ponto de E; Em verdade,*

$$f(\sigma_n+) - f(\sigma_n-) = a_n; \tag{5}$$

(c) *f é contínua em $]a, b[\neg E$.*

Prova Primeiramente, suponha que $a < x < y < b$. Evidentemente $[x] \subset [y]$, por conseguinte, do **Lema 1** $f(x) \leq f(y)$, segue-se, portanto, o item (a).

Seguidamente, provemos que para todo $x \in]a, b[$, tem-se

$$f(x) = \sup\{f(t) : t \in]a, x[\} = f(x-). \tag{6}$$

Para tanto seja $\varepsilon > 0$. De $\sum \kappa_{[x]}(i) a_i < \infty$, necessariamente existe $i_\varepsilon \in \omega$, tal que

$$0 \leq \sum_{i=0}^{i_\varepsilon - 1 + n} \kappa_{[x]}(i) a_i - \sum_{i=0}^{i_\varepsilon - 1} \kappa_{[x]}(i) a_i < \varepsilon. \tag{7}$$

para todo $n \in \omega$. Podemos *a fortiori* escolher $t \in]a, x[$, tal que $i_\varepsilon \cap [x] \subset [t]$. Conformemente $f(t) \leq f(x)$ e

$$\sum_{i=0}^{i_\varepsilon - 1} \kappa_{[x]}(i) a_i \leq \sum_{i=0}^{\infty} \kappa_{[t]}(i) a_i = f(t). \tag{8}$$

Tomando o limite segundo n em (7) e comparando com (8) obtemos

$$0 \leq f(x) - f(x-) \leq f(x) - f(t) \leq \varepsilon, \tag{9}$$

como $\varepsilon > 0$ é arbitrário inferimos (6).

Em seguida observemos que

$$I_x \neq \emptyset \text{ se, e somente se, } x \in \Im\sigma. \tag{10}$$

Com efeito, como $I_x \subset \Im\sigma$, se $I_x \neq \emptyset$, existe $n \in \omega$, tal que $\sigma_n \in I_x$. Daí segue que $\sigma_n \in [t]$, para todo $t \in \,]x, b[$, logo, $\sigma_n \in \,]x, t[$, para todo $t \in \,]x, b[$, consequentemente $\sigma_n = x$, i.e., $x \in \Im\sigma$. Reciprocamente, se existir $n \in \omega$ tal que $x = \sigma_n$, é evidente que $\sigma_n = x \in [t]$, para todo $t \in \,]x, b[$, consequentemente $\sigma_n \in I_x$, i.e., $I_x \neq \emptyset$.

Sejam $x \notin \Im\sigma = E$, $y \in \,]x, b[$ e $\varepsilon > 0$. Como $\sum \kappa_{[y]}(i)a_i < \infty$, necessariamente existe i_ε, tal que

$$\sum_{i=i_\varepsilon}^{\infty} \kappa_{[y]}(i)a_i < \varepsilon. \tag{11}$$

Podemos escolher $t \in \,]x, y[$, tal que $i_\varepsilon^+ \subset \neg[t]$. De fato, basta tomar $t < \min\{\sigma_i : i \in i_\varepsilon^+\}$. Ademais,

$$0 \leq f(x+) - f(x) \leq f(t) - f(x) \leq \sum_{i=i_\varepsilon}^{\infty} \kappa_{[t]}(i)a_i \leq \sum_{i=i_\varepsilon}^{\infty} \kappa_{[y]}(i)a_i < \varepsilon, \tag{12}$$

como $\varepsilon > 0$ é arbitrário segue-se que $f(x+) = f(x) = f(-x)$, consequentemente f é contínua em x. Em virtude de $x \in \,]a, b[\, \neg\, E$ ser arbitrário, provamos (c).

Agora sejam $n \in \omega$ e $y \in \,]\sigma_n, b[$. Analogamente, dado $\varepsilon > 0$, escolhamos $i_\varepsilon > n$, tal que

$$\sum_{i=i_\varepsilon}^{\infty} \kappa_{[y]}(i)a_i < \varepsilon. \tag{13}$$

Tomando $t \in \,]\sigma_n, y[$, tal que $i_\varepsilon^+ \subset \neg[t]$; temos em conformidade,

$$0 \leq f(\sigma_n+) - f(\sigma_n) - a_n \leq f(t) - f(\sigma_n) - a_n \leq \sum_{i=i_\varepsilon}^{\infty} \kappa_{[t]}(i)a_i \leq \sum_{i=i_\varepsilon}^{\infty} \kappa_{[y]}(i)a_i < \varepsilon. \tag{14}$$

Da arbitrariedade de $\varepsilon > 0$, concluímos que

$$f(\sigma_n+) - f(\sigma_n) = f(\sigma_n+) - f(\sigma_n-) = a_n, \tag{15}$$

provando portanto o item (b). ∎