

*Dedico o resultado destas anotações aos meus Senhores. Primeiro, a Deus, que, consoante o seu desígnio, me concede o discernimento e o pão de cada dia. Segundo, a Jesus, não menos importante, em cujas palavras tanto me comprazo, e ciente de que Ele é O Caminho e A Verdade.*

## SUMÁRIO

### PARTE I • CIÊNCIAS FORMAIS

<b>1</b>	<b>Geometria analítica</b>	<b>5</b>
1.1	Cônicas . . . . .	5
1.1.1	Eliminação dos termos lineares por translações . . . . .	5
1.1.2	Eliminação do termo quadrático misto por rotações . . . . .	7
1.1.2.1	Rotações de sistemas de coordenadas . . . . .	7
<b>2</b>	<b>Álgebra linear</b>	<b>10</b>
2.1	Espaços vetoriais . . . . .	10

### PARTE II • CIÊNCIAS NATURAIS

<b>3</b>	<b>Equação de carga de um capacitor</b>	<b>13</b>
----------	---	-----------

## PRELÚDIO

O texto que segue trata-se de um compêndio de assuntos que acho relevantes. Portanto, sem margem para dúvidas, o texto reflete minha subjetividade. Este texto estará em construção contínua, de maneira que não haverá versão final enquanto as circunstâncias da vida sobrepujarem o meu ímpeto de colecionar tais informações. Alguns resultados são de minha autoria, mas certamente estão enviesados por alguma obra, de maneira que não descobri a roda, mas me sustentei sobre o trabalho de vários indivíduos perspicazes. Além disso, é impossível colecionar tudo o que nos interessa. Destarte, me ative aos que, ao menos, tive alguma ideia de demonstração.

# I

CIÊNCIAS FORMAIS

# 1

## GEOMETRIA ANALÍTICA

### 1.1 CÔNICAS

**DEFINIÇÃO 1** Consideremos  $g$  um polinômio de duas variáveis de grau 2 com coeficientes em  $\mathbb{R}$  dado por

$$(1.1) \quad g(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f.$$

Uma cônica  $C$  é o locus (lugar geomético) ou conjunto de pontos

$$(1.2) \quad C = \{(x, y) : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \wedge g(x, y) = 0\}.$$

O objetivo das próximas seções é aplicar transformações ao sistema de coordenadas, de tal maneira que a cônica seja facilmente reconhecida.

#### 1.1.1 ELIMINAÇÃO DOS TERMOS LINEARES POR TRANSLAÇÕES

Dados pontos  $\Omega = (h, k)$  e  $(x, y)$  de  $\mathbb{R}^2$ , as coordenadas  $(u, v)$  de  $(x, y)$  relativo ao sistema cuja origem é  $\Omega$ , são simplesmente dadas pela identidade

$$(1.3) \quad (u, v) = (x, y) - (h, k).$$

Em verdade, o sistema de coordenadas é a transformação afim  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , dada por

$$(1.4) \quad T(v) = v - \Omega.$$

Em outros termos, estamos calculando as coordenadas dum ponto  $v$  relativo a um sistema de coordenadas cuja a origem é precisamente  $\Omega$ .

A relação das coordenadas  $(u, v)$  do sistema transladado segundo o sistema antigo é expressa pelo sistema

$$(1.5) \quad \begin{cases} x = u + h \\ y = v + k \end{cases}$$

Em seguida, calculemos  $G(u, v) = g(u + h, v + k)$ . Conformemente,

$$\begin{aligned} G(u, v) &= a(u + h)^2 + b(u + h)(v + k) + c(v + k)^2 + d(u + h) + e(v + k) + f \\ &= au^2 + buv + cv^2 + u(2ah + bk + d) + v(bh + 2ck + e) \\ &\quad + \underbrace{ah^2 + bhk + ck^2 + dh + ek + f}_{g(h, k)} \\ (1.6) \quad &= au^2 + buv + cv^2 + u(2ah + bk + d) + v(bh + 2ck + e) + g(h, k) \end{aligned}$$

Nosso objetivo é eliminar os termos lineares segundo  $u$  e  $v$ . Para tanto, precisamos resolver o sistema

$$(1.7) \quad \begin{cases} 2ah + bk + d = 0 \\ bh + 2ck + e = 0 \end{cases}$$

que por sua vez, é equivalente ao sistema

$$(1.8) \quad \begin{cases} ah + \frac{b}{2}k = -\frac{d}{2} \\ \frac{b}{2}h + ck = -\frac{e}{2} \end{cases}$$

Cuja solubilidade é atestada pelo determinante

$$(1.9) \quad \begin{vmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{vmatrix} = ac - \frac{b^2}{4}.$$

É sabido que o sistema (1.8) admite uma única solução, i.e., é determinado, se, e somente se,  $ac - b^2/4 \neq 0$ . Caso contrário, o sistema admite infinitas soluções, neste caso diz-se que ele é indeteminado, ou não admite soluções, i.e., é impossível.

Destarte, temos um método pragmático para determinar se é possível eliminar os termos lineares do polinômio  $g$ , a saber, se, e somente se, o sistema (1.8) admite soluções.

A seguir está provado que no caso do sistema (1.8) admitir infinitas soluções, o termo independente de  $g$  no novo sistema de coordenadas é inexorável à escolha da solução do sistema (1.8).

**TEOREMA 1 (EXERCÍCIO 23-10 - BOULOSCAMARGO 1)** *Se o sistema (1.8) admite infinitas soluções, então  $g$  é constante no seu conjunto de soluções.*

**PROVA** Sejam  $(h, k)$  e  $(u, v)$  soluções do sistema (1.8). Em verdade não é difícil notar que  $(h + k, u + v)$  também o é, bastando para isto substituir as respectivas coordenadas do par no sistema (1.8) e atestar as igualdades.

Notemos em seguida que qualquer solução  $(x, y)$  de (1.8), satisfaz

$$(1.10) \quad ax^2 + bxy + cy^2 + \frac{d}{2}x + \frac{e}{2}y = x\left(ax + \frac{b}{2}y + \frac{d}{2}\right) + y\left(\frac{b}{2}x + cy + \frac{e}{2}\right) = 0$$

e

$$(1.11) \quad \begin{aligned} g(x, y) &= ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f \\ &= x\left(ax + \frac{b}{2}y + \frac{d}{2}\right) + y\left(\frac{b}{2}x + cy + \frac{e}{2}\right) + \frac{d}{2}x + \frac{e}{2}y + f \\ &= \frac{d}{2}x + \frac{e}{2}y + f. \end{aligned}$$

Em conformidade, segue-se

$$(1.12) \quad 2\left[u\left(a(u + h) + \frac{b}{2}(k + v) + \frac{d}{2}\right) + v\left(\frac{b}{2}(u + h) + c(v + k) + \frac{e}{2}\right)\right] = 0$$

de (1.10) com  $(x, y) = (u, v)$  e (1.12) podemos inferir

$$(1.13) \quad au^2 + buv + cv^2 + \frac{d}{2}u + \frac{e}{2}v + 2ahu + 2ckv + bhv + buk = 0.$$

Como consequência, de (1.10), (1.11) e (1.13) temos

$$\begin{aligned}
 g(h, k) &= ah^2 + bhk + ck^2 + dh + ck + f \\
 &= ah^2 + bhk + ck^2 + dh + ck + f + au^2 + buv + cv^2 \\
 &\quad + \frac{d}{2}u + \frac{e}{2}v + 2ahu + 2ckv + bhv + buk \\
 (1.14) \quad &= a(h+u)^2 + b(u+h)(v+k) + c(k+v)^2 \\
 &\quad + \frac{d}{2}(h+u) + \frac{e}{2}(k+v) + \frac{d}{2}u + \frac{e}{2}v + f \\
 &= \frac{d}{2}u + \frac{e}{2}v + f \\
 &= g(u, v)
 \end{aligned}$$

Em outros termos  $g$  é constante no conjunto de soluções do sistema (1.8). ■

### 1.1.2 ELIMINAÇÃO DO TERMO QUADRÁTICO MISTO POR ROTAÇÕES

#### 1.1.2.1 ROTAÇÕES DE SISTEMAS DE COORDENADAS

Consideremos um sistema de coordenadas cartesianas e um sistema cujos eixos sejam obtidos do primeiro por uma rotação dum ângulo  $\theta$  no sentido anti-horário em relação ao eixo das abscissas.

Figura 1.1: Rotação dum sistema de coordenadas cartesiano por um ângulo  $\theta$ .

Consideremos um ponto  $w = (u, v)_\theta$  cujas coordenadas são dadas em relação ao sistema rotacionado. Nosso objetivo é determinar as coordenadas de  $w$  relativo ao primeiro sistema. A título de exemplo, usaremos um método geométrico para um caso particular, que pode ser adaptado aos outros casos.

Observemos, pois, a figura seguinte

Figura 1.2: Rotação dum sistema de coordenadas cartesiano por um ângulo  $\theta$ .

Em conformidade com a figura estamos supondo que  $\theta \in ]0, \pi/2[$ . Uma análise geométrica nos fornece o seguinte sistema

$$(1.15) \quad \begin{cases} u = \frac{x}{\cos \theta} + v \tan \theta \\ y = \frac{v}{\cos \theta} + x \tan \theta \end{cases}$$

Donde, multiplicando a primeira por  $\cos \theta$ , obtemos

$$(1.16) \quad x = u \cos \theta - v \sin \theta,$$

Substituindo  $x$  na segunda equação de (1.15), deduz-se

$$\begin{aligned}
 (1.17) \quad y &= \frac{v}{\cos \theta} + \tan \theta (u \cos \theta - v \sin \theta) \\
 &= \frac{v}{\cos \theta} + u \sin \theta + \frac{v \sin^2 \theta}{\cos \theta} \\
 &= u \sin \theta + v \cos \theta.
 \end{aligned}$$

Assim, as coordenadas  $x$  e  $y$  de  $w$  relativas ao sistema canônico é dado pela identidade

$$(1.18) \quad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$$

Fazendo a substituição de  $(x, y)$  segundo (1.18) obtemos

$$(1.19) \quad \begin{aligned} G(u, v) = & (a \cos^2 \theta + b \cos \theta \sin \theta + c \sin^2 \theta)u^2 + ((a - c) \sin 2\theta + b \cos 2\theta)uv \\ & + (a \sin^2 \theta - b \cos \theta \sin \theta + c \cos^2 \theta)v^2 + (d \cos \theta + e \sin \theta)u \\ & + (e \cos \theta - d \sin \theta)v + f \end{aligned}$$

Por questões práticas, escreveremos

$$(1.20) \quad G(u, v) = \alpha u^2 + \beta uv + \gamma v^2 + \delta u + \varepsilon v + f,$$

o que pressupõe as igualdades

$$(1.21) \quad \begin{aligned} \alpha &= a \cos^2 \theta + b \cos \theta \sin \theta + c \sin^2 \theta \\ \beta &= (a - c) \sin 2\theta + b \cos 2\theta \\ \gamma &= a \sin^2 \theta - b \cos \theta \sin \theta + c \cos^2 \theta \\ \delta &= d \cos \theta + e \sin \theta \\ \varepsilon &= e \cos \theta - d \sin \theta \end{aligned}$$

Agora, nosso intento é que o termo misto se anule, para este fim devemos determinar  $\theta$ , tal que  $\beta = 0$ . Notavelmente, estamos estipulando *a priori* que  $b \neq 0$ , pois do contrário a rotação do sistema de coordenadas não teria desígnio algum. Em conformidade com esta estipulação e com as notações anteriores segue-se o

**TEOREMA 2** *Seja  $C$  uma cônica cujo o termo quadrático misto do polinômio subjacente  $g$  seja não nulo. Então existe uma rotação  $R_\theta$  de um ângulo  $\theta$ , segundo a qual o termo quadrático misto do polinômio subjacente  $G = gR_\theta$  é nulo*

**PROVA** De (1.21) segue que

$$(1.22) \quad (a - c) \sin 2\theta = b \cos 2\theta$$

Daí vem necessariamente que  $2\theta \neq n\pi$ , para todo  $n \in \mathbb{Z}$ , consequentemente  $\sin 2\theta \neq 0$ . Com efeito, suponha que exista  $n \in \mathbb{Z}$ , tal que  $2\theta = n\pi$ , decorre de (1.22) que

$$(1.23) \quad b = b \cos 2\theta = (a - c) \sin 2\theta = 0,$$

o que contradiz nossa suposição. Portanto, podemos escrever

$$(1.24) \quad \cot 2\theta = \frac{\cos 2\theta}{\sin 2\theta} = \frac{a - c}{b}.$$

Conforme se sabe,  $\cot$  tem restrições inversíveis em  $\mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$ . Se reduzirmos nossa escolha ao intervalo  $[0, 2\pi[$ , temos duas soluções para (1.24), uma no semicíclo superior e a outra no semicíclo inferior. ■

Escolhido  $\theta$  conforme no **TEOREMA 2**, temos de (1.21) e (1.24) que

$$(1.25) \quad \alpha - \gamma = b \cot 2\theta \cos 2\theta + b \sin \theta = \frac{b}{\sin 2\theta}.$$

Em consonância com (1.21), podemos inferir

$$(1.26) \quad \alpha = \frac{1}{2} \left( a + c + \frac{b}{\sin 2\theta} \right) \quad \text{e} \quad \gamma = \frac{1}{2} \left( a + c - \frac{b}{\sin 2\theta} \right)$$

As identidades trigonométricas

$$(1.27) \quad \begin{aligned} \sin^2 2\theta &= \frac{1}{1 + \cot^2 2\theta} \\ \cos 2\theta &= \cot 2\theta \sin 2\theta \\ \cos^2 \theta &= \frac{1 + \cos 2\theta}{2} \\ \sin^2 \theta &= \frac{1 - \cos 2\theta}{2} \end{aligned}$$

nos permitem determinar uma solução do sistema

$$(1.28) \quad \begin{cases} \delta = d \cos \theta + e \sin \theta \\ \varepsilon = e \cos \theta - d \sin \theta \end{cases}$$

Em suma, o que podemos concluir é que dada uma cônica, podemos sempre supor sem perda de generalidade que o termo quadrático misto do polinômio subjacente seja nulo.

# 2

## ÁLGEBRA LINEAR

### 2.1 ESPAÇOS VETORIAIS

A seguir apresentarei alguns exercícios pertinentes de [Hoffman].

**PROPOSIÇÃO 1** *Sejam  $V$  um espaço vetorial e  $W_i \subset V$ , com  $i \in \{1, 2\}$ , subespaços vetoriais tais que  $W = W_1 \cup W_2$  é um subespaço de  $V$ . Então, existe um  $i \in \{1, 2\}$ , tal que  $W_i \subset W_j$ , com  $i \neq j$ .*

**PROVA** Suponhamos por *reductio ad absurdum* que

$$(2.1) \quad W_1 \setminus W_2 \neq \emptyset \wedge W_2 \setminus W_1 \neq \emptyset$$

Sejam  $w_1 \in W_1 \setminus W_2$  e  $w_2 \in W_2 \setminus W_1$ , das hipóteses  $w = w_1 + w_2 \in W$ . Todavia,  $w \notin W_1$  e  $w \notin W_2$ . Pois, digamos que  $w \in W_1$ , então  $w_2 = w - w_1 \in W_1$ , o que é uma contradição pois  $w_2 \in W_2 \setminus W_1$ . Agora se  $w \in W_2$ , então analogamente  $w_1 = w - w_2 \in W_2$ , outra contradição, pois  $w_1 \in W_1 \setminus W_2$ . Concluimos, portanto, que existe  $i \in \{1, 2\}$ , tal que  $W_i \subset W_j$ , com  $i \neq j$ . ■

**PROPOSIÇÃO 2** *Seja  $K$  um corpo,  $W$  um espaço vetorial sobre  $K$ . Considere  $V = W^K$ , munido com a soma e produto por escalar usuais. Então*

$$(2.2) \quad V_i = \{f : f \in V \wedge f(-x) = -f(x)\}$$

e

$$(2.3) \quad V_p = \{f : f \in V \wedge f(-x) = f(x)\}$$

são subespaços de  $V$ , tais que

$$(2.4) \quad V_i \cap V_p = \{0\} \wedge V = V_i + V_p.$$

**PROVA** Primeiro é evidente que  $0 \in V_i$ . Sejam agora  $f, g \in V_i$  e  $\kappa \in K$ , temos que para todo  $x \in K$ , vale

$$(2.5) \quad \begin{aligned} (\kappa f + g)(-x) &= \kappa f(-x) + g(-x) \\ &= -\kappa f(x) - g(x) \\ &= -(\kappa f(x) + g(x)) \\ &= -(\kappa f + g)(x), \end{aligned}$$

consequentemente  $V_i$  é um subespaço de  $V$ . O outro caso é ainda mais simples de ser provado, o argumento é inteiramente semelhante.

Seja agora  $f \in V_i \cap V_p$ , temos para todo  $x \in K$

$$(2.6) \quad f(x) = f(-x) = -f(x),$$

logo  $f = 0$  e, conseqüentemente  $V_i \cap V_p = \{0\}$ .

Por fim, seja  $f \in V$ . Note que  $f_i, f_p \in V$  dadas por

$$(2.7) \quad f_i(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2} \quad \wedge \quad f_p(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}$$

são tais que, para todo  $x \in K$  vale

$$(2.8) \quad f_i(-x) = \frac{f(-x) - f(x)}{2} = -\frac{f(x) - f(-x)}{2} = -f_i(x),$$

e.

$$(2.9) \quad f_p(-x) = \frac{f(-x) + f(x)}{2} = \frac{f(x) + f(-x)}{2} = f_p(x),$$

i.e.,  $(f_i, f_p) \in V_i \times V_p$ . Ademais,  $f = f_i + f_p$ , conseqüentemente  $V = V_i + V_p$ . ■

**PROPOSIÇÃO 3** *Sejam  $V_i \subset V$ , com  $i \in \{1, 2\}$ , subespaços do espaço vetorial  $V$ , tais que*

$$(2.10) \quad V = V_1 + V_2 \quad \wedge \quad V_1 \cap V_2 = \{0\}.$$

*Então para todo  $v \in V$  existe único  $(v_1, v_2) \in V_1 \times V_2$ , tais que  $v = v_1 + v_2$ .*

**PROVA** A existência decorre da definição, provemos, portanto, a unicidade. Para tanto, sejam  $v \in V$  e  $v_i, w_i \in V_1$ , com  $i \in \{1, 2\}$ , tais que

$$(2.11) \quad v = v_1 + v_2 = w_1 + w_2,$$

temos que

$$(2.12) \quad v_1 - w_1 = w_2 - v_2 \in V_1 \cap V_2 = \{0\}.$$

Decorre que

$$(2.13) \quad v_1 - w_1 = 0 = v_2 - w_2,$$

o que por sua vez acarreta  $v_i = w_i$ , com  $i \in \{1, 2\}$ . ■

# II

CIÊNCIAS NATURAIS

# 3

## EQUAÇÃO DE CARGA DE UM CAPACITOR

**Teorema 1.** *Seja um capacitor de capacitância  $C$  conectado em série com um resistor de resistência  $R$  e à uma bateria de tensão  $V_f$ . Admitindo-se que o capacitor esteja inicialmente descarregado a equação de carga do capacitor é dada por:*

$$V(t) = V_f(1 - e^{-\frac{t}{RC}}).$$

*Prova.* A corrente no capacitor  $I(t)$  é a mesma que a corrente no resistor, conseqüentemente

$$(\ddagger) \quad \frac{V_f - V(t)}{R} = I(t) = \frac{dQ}{dt}(t) = C \frac{dV}{dt}(t)$$

em que  $V(t)$  é a tensão no capacitor no instante  $t$ . Temos portanto de  $(\ddagger)$  que

$$\frac{1}{RC} = \frac{dV}{dt}(t) \frac{1}{V_f - V(t)} = -\frac{d}{dt}(V_f - V(t)) \frac{1}{V_f - V(t)}$$

em consequência do lema que vimos e multiplicando ambos membros por  $-1$ , decorre que

$$-\frac{1}{RC} = \frac{d}{dt}(V_f - V(t)) \frac{1}{V_f - V(t)} = \frac{d}{dt}(\ln|V_f - V(t)|)$$

do teorema fundamental do cálculo vem

$$-\frac{T}{RC} = \int_0^T \frac{d}{dt}(\ln|V_f - V(t)|) dt = \ln|V_f - V(t)| \Big|_0^T$$

para  $T \geq 0$ .

Agora admitindo-se que  $V(0) = 0$ , e que  $V_f - V(t) > 0$  para todo  $t \in R_+$  obtemos

$$-\frac{T}{RC} = \ln(V_f - V(t)) \Big|_0^T = \ln \frac{V_f - V(T)}{V_f}$$

donde se conclui

$$\frac{V_f - V(T)}{V_f} = e^{-\frac{T}{RC}}$$

que por sua vez implica

$$V(T) = V_f(1 - e^{-\frac{T}{RC}})$$

como  $T$  é arbitrário podemos escrever sem perdas

$$V(t) = V_f(1 - e^{-\frac{t}{RC}})$$

para todo  $t \geq 0$ .



**Como tratar adequadamente conversões entre grandezas, e.g., grandezas angulares?** *Como explicar rigorosamente a igualdade que se encontra rotineiramente em livros:*

$$2\pi \text{ rad} = 360^\circ ?$$

*Rigorosamente, os dois objetos são distintos, de maneira que a identidade não é significativa.*

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] CAMARGO, IVAN DE; BOULOS, PAULO. *Geometria Analítica*. 3ª ed. rev. e ampl. São Paulo, 2005.