PRELÚDIO

O texto que segue trata-se de um compêndio de resultados que acho relevantes, portanto, o texto reflete, e muito, minha subjetividade. Não obstante, este texto estará em construção contínua, de maneira que não haverá versão final enquanto as circunstâncias da vida sobrepujarem o meu ímpeto de colecionar tais e tais resultados. Alguns, resultados são de minha autoria, mas certamente estão enviesados por uma ou outra obra, de maneira que não descobri a roda, mas me sustentei sobre o trabalho de vários indivíduos perspicazes que pela primeira vez se depararam com o problema, e talvez, eles próprios tenham o resolvido. Saliento também que, muitos—a maioria—dos resultados não são meus, de forma que talvez eu já os tenha visto em determinado momento de minha vida, e simplesmente os reproduzi aqui. Além disso, é impossível colecionar todos os resultados interessantes, portanto, me ative aos que ao menos tive alguma ideia de demonstração, talvez inspirada por outros.

1

CIÊNCIAS FORMAIS

1.1 Teoria dos conjuntos

Decidi abordar a construção dada no apêndice do livro *General Topology* de John L. Kelley (*vide* pp. 250–281). Esta abordagem de construção da teoria dos conjuntos, é reminiscente da teoria NBG (Neumann-Bernays-Gödel). Na realidade, conforme atestei posteriormente, o sistema empregado por Kelley, é uma adaptação do sistema de A. P. Morse, como ele bem afirma em sua obra. Reconheço, a necessidade de se intruduzir a igualdade '=', seguiremos a linha de raciocínio de Kelley, referindo-se a igualdade como identidade lógica. Assim, se a e b, são dois objetos, $a = b$, quando o nome 'a' designar o objeto designado pelo nome 'b' e vice-versa. Talvez futuramente eu discorra mais um pouco sobre o aparato lógico, mas por ora, nos restringiremos aos resultados.

Definição 1 (Conjuntos).

$$\forall x\big(\varsigma(x) \longleftrightarrow \exists y(x \in y)\big).$$

À cada classe x tal que $\varsigma(x)$, daremos o nome de conjunto. Desta maneira $\varsigma(x)$ se, e somente se, x é um conjunto.

Axioma 1 (Axioma-esquema da classificação). *Seja ϕ uma função proposicional tendo como parâmetros as classes. Então*

$$\forall y\big(y \in \{x : \phi(x)\} \longleftrightarrow \varsigma(y) \land \phi(y)\big).$$

Enfatizo que os objetos da teoria de classes, resumem-se, como é esperado, à classes. Portanto, '$\{x : \phi(x)\}$' denota uma classe, daí o nome de *classifier* ou classificador.

Definição 2. $\langle\phi\rangle = \{x : \phi(x)\}$.

Axioma 2 (AEx : Axioma da extensão ou extensionalidade).

$$\forall x, y\big(x = y \longleftrightarrow \forall z(z \in x \longleftrightarrow z \in y)\big).$$

Friso categoricamente que uma prova rigorosa da igualdade de classes, requer o uso explícito do axioma da extensionalidade **AEx** . Portanto, a rigor, uma cadeia de igualdades de classes dadas por classificadores, mesmo que óbvia para leitores maduros, não caracteriza, segundo minha visão, uma prova. Enfatizo este ponto, pois em estágios anteriores na confecção deste compêndio eu usei tais métodos.

Teorema 1.

$$\forall x\big(x = \{y : y \in x\}\big).$$

Prova.

$$\forall z\big(z \in \{y : y \in x\} \longleftrightarrow z \in x\big).$$

∎

Definição 3. $x \cup y = \{z : z \in x \vee z \in y\}$.

Definição 4. $x \cap y = \{z : z \in x \wedge z \in y\}$.

Aos símbolos $x \cup y$ e $x \cap y$, dá-se o nome de união e intersecção de x com y, respectivamente.

Teorema 2.

$$\forall x, y, z\Big(x \cap (y \cup z) = (x \cap y) \cup (x \cap z) \quad \wedge \quad x \cup (y \cap z) = (x \cup y) \cap (x \cup z)\Big)$$

Prova. Vamos provar a segunda proposição. Sejam x, y e z classes, notemos que

$$\begin{aligned}\forall w\big(w \in x \cup (y \cap z) &\longleftrightarrow w \in x \vee w \in y \cap z\\ &\longleftrightarrow w \in x \vee (w \in y \wedge w \in z)\\ &\longleftrightarrow (w \in x \vee w \in y) \wedge (w \in x \vee w \in z)\\ &\longleftrightarrow w \in (x \cup y) \wedge w \in (x \cup z)\\ &\longleftrightarrow w \in (x \cup y) \cap (x \cup z)\big).\end{aligned} \tag{1.1}$$

A outra prova é inteiramente análoga. De fato, decorre das propriedades dos conectivos '$\wedge$' e '$\vee$', a conjunção e disjunção lógica, respectivamente.

∎

Definição 5.

$$\forall x, y(x \notin y \longleftrightarrow \neg(x \in y)).$$

Definição 6. $\neg x = \{y : y \notin x\}$.

A classe $\neg x$ chama-se complemento absoluto de x.

Teorema 3. *Seja ϕ uma função proposicional cujos parâmetros sejam classes. Então $\neg\langle\phi\rangle = \langle\neg\phi\rangle$.*

Prova.

$$\forall x\big(x \in \neg\langle\phi\rangle \longleftrightarrow \varsigma(x) \wedge \neg\phi(x) \longleftrightarrow x \in \langle\neg\phi\rangle\big).$$

∎

Teorema 4.

$$\forall x\big(\neg(\neg x) = x\big).$$

Prova.

$$\forall y\big(y \in \neg(\neg x) \longleftrightarrow \neg(y \in \neg x) \longleftrightarrow \neg\big(\neg(y \in x)\big) \longleftrightarrow y \in x\big) \tag{1.2}$$

∎

Teorema 5 (Leis de De Morgan).

$$\forall x, y\big(\neg(x \cup y) = \neg x \cap \neg y \;\wedge\; \neg(x \cap y) = \neg x \cup \neg y\big)$$

Prova. A prova segue diretamente da definição de $\cup$ e $\cap$, e das leis de De Morgan para os conectivos $\vee$ e $\wedge$.

∎

Definição 7. $x \neg y = x \cap \neg y$.

Ao símbolo '$x \neg y$' dá-se o nome de diferença de x e y ou complemento de y relativo a x.

Teorema 6.

$$\forall x, y, z\big(x \cap (y \neg z) = (x \cap y) \neg z\big)$$

Prova. Provar.

∎

Definição 8. *Seja ϕ uma contradição qualquer. Definimos $\emptyset = \langle\phi\rangle$.*

Observe que esta definição independe da contradição. Com efeito, temos o

Teorema 7. *Se ϕ e ψ são duas contradições, então $\langle\phi\rangle = \langle\psi\rangle$.*

Prova. Com efeito,

$$\forall x\big(x \in \langle\phi\rangle \longleftrightarrow \varsigma(x) \ \wedge \ \phi(x) \longleftrightarrow \varsigma(x) \ \wedge \ \psi(x) \longleftrightarrow x \in \langle\psi\rangle\big), \tag{1.3}$$

pois ambos os membros da bicondicional são falsos, logo a equivalência é válida e, consequentemente o quantificação é verdadeira.

∎

A classe $\emptyset$ é chamada de classe nula ou vazia.

Teorema 8.

$$\forall x(x \notin \emptyset). \tag{1.4}$$

Prova.

$$\forall x(x \in \emptyset \longleftrightarrow \varsigma(x) \wedge x \neq x). \tag{1.5}$$

Como o lado direito é trivialmente falso pela definição de igualdade, decorre que $\neg(x \in \emptyset)$, ou equivalentemente $x \notin \emptyset$ é verdadeira para todo x.

∎

Teorema 9.

$$\forall x(x \cup \emptyset = x \ \wedge \ x \cap \emptyset = \emptyset). \tag{1.6}$$

Prova. Seja x uma classe, temos em conformidade

$$\forall y\big(y \in x \cup \emptyset \longleftrightarrow \varsigma(y) \wedge (y \in x \vee y \in \emptyset) \longleftrightarrow \varsigma(y) \wedge y \in x \longleftrightarrow y \in x\big) \tag{1.7}$$

o que segundo o **AEx** segue-se a identidade.

Analogamente,

$$\forall y\big(y \in x \cap \emptyset \longleftrightarrow \varsigma(y) \wedge (y \in x \ \wedge \ y \in \emptyset) \longleftrightarrow \varsigma(y) \ \wedge \ y \in \emptyset \longleftrightarrow y \in \emptyset\big) \tag{1.8}$$

novamente pelo **AEx** infere-se a igualdade.

∎

Definição 9.

$$\mathcal{U} = \neg\emptyset \tag{1.9}$$

Teorema 10.

$$\forall x\big(x \in \mathcal{U} \longleftrightarrow \varsigma(x)\big). \tag{1.10}$$

Prova.

$$\forall x\big(x \in \mathcal{U} \longleftrightarrow \varsigma(x) \ \wedge \ x \notin \emptyset \longleftrightarrow \varsigma(x)\big). \tag{1.11}$$

∎

Teorema 11. *Seja ϕ uma tautologia. Então $\langle\phi\rangle = \mathcal{U}$.*

Prova. Notemos que

$$\forall x\big(x \in \langle\phi\rangle \longleftrightarrow \varsigma(x) \wedge \phi(x) \longleftrightarrow \varsigma(x) \longleftrightarrow x \in \mathcal{U}\big), \tag{1.12}$$

de **AEx** decorre o teorema. Outra maneira seria usar a hipótese que $\neg\phi$ é uma contradição, e concluir de

$$\langle\phi\rangle = \neg\langle\neg\phi\rangle = \neg\emptyset = \mathcal{U}. \tag{1.13}$$

∎

Teorema 12.

$$\forall x\big(x \cup \mathcal{U} = \mathcal{U} \ \wedge \ x \cap \mathcal{U} = x\big) \tag{1.14}$$

Prova.

$$\forall y\big(y \in x \cup \mathcal{U} \longleftrightarrow y \in x \ \vee \ y \in \mathcal{U} \longleftrightarrow y \in \mathcal{U}\big) \tag{1.15}$$

segue pelo **AEx** .
Seguidamente,

$$\forall y\big(y \in x \cap \mathcal{U} \longleftrightarrow y \in x \ \wedge \ y \in \mathcal{U} \longleftrightarrow y \in x\big) \tag{1.16}$$

novamente decorre por **AEx** .

∎

Definição 10.

$$\bigcap x = \big\{z : \forall y(y \in x \longrightarrow z \in y)\big\}. \tag{1.17}$$

Definição 11.

$$\bigcup x = \big\{z : \exists y(y \in x \ \wedge \ z \in y)\big\}. \tag{1.18}$$

A classe $\bigcap x$ é a interseção dos membros de x e, a classe $\bigcup x$ é a união dos membros de x.

Teorema 13.

$$\bigcap \emptyset = \mathcal{U} \ \wedge \ \bigcup \emptyset = \emptyset. \tag{1.19}$$

Prova.

$$\forall x\Big(x \in \bigcap \emptyset \longleftrightarrow \varsigma(x) \ \wedge \ \forall y(y \in \emptyset \longleftrightarrow x \in y) \longleftrightarrow x \in \mathcal{U}\Big), \tag{1.20}$$

pois ϕ definida por

$$\phi(x) \longleftrightarrow \forall y(y \in \emptyset \longleftrightarrow x \in y) \tag{1.21}$$

é uma tautologia.
Em seguida,

$$\forall x\big(x \in \bigcup \emptyset \longleftrightarrow \varsigma(x) \ \wedge \ \exists(y \in \emptyset \ \wedge \ x \in y) \longleftrightarrow x \in \emptyset\big), \tag{1.22}$$

porquanto, ψ definida por

$$\psi(x) \longleftrightarrow \exists y(y \in \emptyset \ \wedge \ x \in y) \tag{1.23}$$

é uma contradição.

∎

Definição 12.

$$\forall x\big(x \subset y \longleftrightarrow \forall z(z \in x \longrightarrow z \in y)\big). \tag{1.24}$$

Uma classe x é uma subclasse de y, ou está contida em y, ou y contem x, se, e somente se, $x \subset y$.

Teorema 14.

$$\forall x(\emptyset \subset x \ \wedge \ x \subset \mathcal{U}) \tag{1.25}$$

Prova. Seja x uma classe. Temos primeiramente

$$\forall y(y \in \emptyset \longrightarrow y \in x), \tag{1.26}$$

pois o antecedente da condicional é sempre falso. O que prova a primeira inclusão.

Por outro, lado temos

$$\forall y(y \in x \longrightarrow \varsigma(y) \longrightarrow y \in \mathcal{U}). \tag{1.27}$$

o que conclui a prova.

∎

Teorema 15.

$$\forall x, y(x = y \longleftrightarrow x \subset y \ \wedge \ y \subset x). \tag{1.28}$$

Prova. Sejam x e y classes quaisquer

$$\begin{aligned} x \subset y \ \wedge \ y \subset x &\longleftrightarrow \forall z\big((z \in x \longrightarrow z \in y) \ \wedge \ (z \in y \longrightarrow z \in x)\big) \\ &\longleftrightarrow \forall z(z \in x \longleftrightarrow z \in y) \\ &\longleftrightarrow x = y. \end{aligned} \tag{1.29}$$

∎

Teorema 16.

$$\forall x, y, z(x \subset y \ \wedge \ y \subset z \longrightarrow x \subset z) \tag{1.30}$$

Prova. Sejam x, y, z classes quaisquer. Temos

$$\begin{aligned}\big(x \subset y \ \wedge \ y \subset z &\longrightarrow \forall w(w \in x \longrightarrow w \in y \ \wedge \ w \in y \longrightarrow w \in z) \\ &\longrightarrow \forall w(w \in x \longrightarrow w \in z) \\ &\longrightarrow x \subset z\big)\end{aligned} \tag{1.31}$$

∎

Teorema 17.

$$\forall x, y, z(x \subset y \longrightarrow x \cap z \subset y \cap z \ \wedge \ x \cup z \subset y \cup z) \tag{1.32}$$

Prova. Sejam x, y, z classes quaisquer. Primeiramente,

$$\forall w(w \in x \cap z \longrightarrow w \in x \wedge w \in z \longrightarrow w \in y \wedge w \in z \longrightarrow w \in y \cap z). \tag{1.33}$$

Segundo e, por fim,

$$\forall w(w \in x \cup z \longrightarrow w \in x \vee w \in z \longrightarrow w \in y \vee w \in z \longrightarrow w \in y \cup z). \tag{1.34}$$

∎

Teorema 1 (Bernstein-Cantor-Schröder). Sejam X e Y conjuntos tais que existe uma injeção própria de X em Y e vice-versa. Então X é equivalente a Y.

Prova. Supomos que $f(X) \subset Y$ e $g(Y) \subset X$ (aqui $\subset$ é a inclusão própria). Destas inclusões deriva-se facilmente a proposição

$$(\Delta) \qquad \forall i\Big(i \in N \longrightarrow (gf)^i(X) \supset (gf)^i\big(g(Y)\big) \supset (gf)^{i+1}(X)\Big).$$

Para cada $i \in N$, façamos:

$$A_{2i} = (gf)^i(X) \quad \text{e} \quad A_{2i+1} = (gf)^i\big(g(Y)\big)$$

em vista de (Δ) decorre que $\{A_i : i \in N\}$ é uma família de conjuntos estritamente decrescente.

Sejam agora

$$C_i = (gf)^i\big(X \setminus g(Y)\big) \quad \text{e} \quad D_i = (gf)^i g\big(Y \setminus f(X)\big)$$

com $i \in N$.

Definamos

$$A = \bigcap_{i \in N} A_i, \quad C = \bigcup_{i \in N} C_i \quad e \quad D = \bigcup_{i \in N} D_i.$$

Estes são disjuntos aos pares. De fato, inicialmente provemos que $C \cap D = \emptyset$. Note que

$$\forall i, j\big(i, j \in N \longrightarrow C_i \cap D_j = \emptyset\big),$$

pois dados $i, j \in N$, temos

$$C_i \cap D_j = A_{2i} \cap A_{2j+1} \setminus \big(A_{2i+1} \cup A_{2(j+1)}\big) \subset A_a \setminus A_b = \emptyset,$$

sendo

$$a = \max\{2i, 2j\} \quad \text{e} \quad b = \min\{2(i+1), 2(j+1)\}.$$

uma vez que $A_b \subset A_a$, como consequência $C \cap D = \emptyset$.

Seguidamente, dados $i, j \in N$, obtem-se

$$A \cap (C_i \cup D_j) = A \setminus \big(A_{2i+1} \cap A_{2(j+1)}\big) = \emptyset,$$

consequentemente $A \cap (C \cup D) = \emptyset$.

Afirmo que

$$X = A \cup C \cup D$$

Decerto, observe que se $x \in X \setminus (C \cup D)$, então necessariamente $x \in A_i$ para todo $i \in N$, pois, se existir $i \in N$ tal que $x \notin A_i$, então consideremos $m = \min\{i \in N : x \notin A_i\}$, é certo que $m > 0$. Assim, existe $l \in N$, tal que $l + 1 = m$, e consequentemente $x \in A_l \setminus A_{l+1} \subset C \cup D$, uma contradição.

De maneira inteiramente análoga para cada $i \in N$, façamos:

$$B_{2i} = (fg)^i(Y) \quad \text{e} \quad B_{2i+1} = (fg)^i\big(f(X)\big);$$

$$E_i = (fg)^i\big(Y \setminus f(X)\big) \quad \text{e} \quad F_i = (fg)^i f\big(X \setminus g(Y)\big).$$

Prova-se sem dificuldades que

$$Y = B \cup E \cup F,$$

em que

$$B = \bigcap_{i \in N} B_i, \quad E = \bigcup_{i \in N} E_i \quad e \quad F = \bigcup_{i \in N} F_i.$$

Em verdade, basta trocar os papéis de f com g e X com Y, concomitamente.

Agora observemos que por indução matemática decorre que

$$\forall i \big(i \in N \longrightarrow \phi(\gamma\phi)^i = (\phi\gamma)^i \phi \big).$$

para quaisquer que sejam as funções ϕ e γ, em que a composição faça sentido. Em verdade, para $i = 0$ temos necessariamente

$$\phi(\gamma\phi)^0 = \phi = (\phi\gamma)^i \phi.$$

Suponhamos por hipótese de indução que a propriedade seja válida para $i \in N$, notemos que

$$\phi(\gamma\phi)^{i+1} = \phi(\gamma\phi)^i(\gamma\phi) = (\phi\gamma)^i(\phi\gamma)\phi = (\phi\gamma)^{i+1}\phi$$

o que prova que é válida para $i + 1$, concluímos por indução matemática que a propriedade é válida para todo $i \in N$.

Posteriormente, em vista do resultado anterior observemos que para cada $i \in N$

$$A_{2i+1} = (gf)^i g(Y) = g(fg)^i(Y) = g(B_{2i})$$

e

$$B_{2i+1} = (fg)^i f(X) = f(gf)^i(X) = f(A_{2i}).$$

Em consequência para todo $i \in N$

$$B_{2i} = g^{-1}(A_{2i+1}) \quad \text{e} \quad B_{2i+1} = f(A_{2i}).$$

Em seguida, definamos $\varphi : X \to Y$ por

$$\varphi(x) = \begin{cases} f(x), & x \in A \cup C; \\ g^{-1}(x), & x \in D. \end{cases}$$

Pela própria definição φ é injetiva.

Imediatamente observe que para todo $i \in N$

$$\varphi(C_i) = f\Big((gf)^i\big(X \setminus g(Y)\big)\Big) = (fg)^i f\big(X \setminus g(Y)\big) = F_i$$

e

$$\varphi(D_i) = g^{-1}\Big((gf)^i g\big(Y \setminus f(X)\big)\Big) = (fg)^i\big(Y \setminus f(X)\big) = E_i.$$

Além do mais, para todo $i \in N$, temos

$$\varphi(A_{2i}) = f(A_{2i}) = f(gf)^i(X) = (fg)^i f(X) = B_{2i+1}$$

e

$$\varphi(A_{2i+1}) = f(A_{2i+1}) = f(gf)^i g(Y) = (fg)^i fg(Y) = B_{2(i+1)}.$$

Em suma,

$$\forall i\big(i \in N \longrightarrow \varphi(A_i) = B_{i+1} \wedge \varphi(C_i) = F_i \wedge \varphi(D_i) = E_i\big).$$

Conformemente

$$\varphi(A) = B, \quad \varphi(C) = F \quad \text{e} \quad \varphi(D) = E.$$

a fortiori

$$\varphi(X) = \varphi(A \cup C \cup D) = \varphi(A) \cup \varphi(C) \cup \varphi(D) = B \cup E \cup F = Y,$$

i.e., $X \sim Y$.

∎

Lema 1. *Sejam $f : X \to Y$ e $g : Y \to X$. Então existe um conjunto $A \subseteq X$, tal que*

$$X \setminus A = g\big(Y \setminus f(A)\big).$$

Questão *7 do capítulo III do livro Introduction to Logic de Alfred Tarski. "*...We know that variables occurring in arithmetic stand for names of numbers. Do the variables ocurring in sentential calculus stand for names of sentences or for sentences themselves*? *May we, therefore, say, if we want to be exact, that the laws of this calculus assert something about the sentences and their properties*?"*My answer*: The variables occurring in sentential calculus stands

for the sentences themselves, for the logical operations are applied over the sentences, not over their names. According to the text you write

2 is prime *and* α is a greek letter.

not

"2 is prime"*and* "α is a greek letter".

The names of the sentences have no logical value, then no logical operation over them is meaningful.

Over the sentential calculus, i.e., using it you can assert something about sentences and their properties, for example you can say that a sentence is true or false based on the logical value of its components, and you can assign it a property, as a tautology, a contradiction or a contigency. But it is relevant to put some criticism over the perspective of the sentences isolated, which with the sentential calculus alone we can't assert nothing about the nature of them, as we can say that the number 3 is prime using the arithmetic and the number itself.

Digressão a respeito de álgebras de Boole. Segundo o livro *Introduction to Boolean Algebras* de Halmos e Givant, uma álgebra booleana é um conjunto B munido de duas operações binárias $\cap$ e $\cup$, uma operação unária $'$ e dois elementos distintos 0 e 1, satisfazendo os seguintes axiomas:

I. $0' = 1 \quad \wedge \quad 1' = 0;$

II. $x \cap 0 \quad \wedge \quad x \cup 1 = 1;$

III. $x \cap 1 = x \cup 0 = x;$

IV. $x \cap x' = 0 \quad \wedge \quad x \cup x' = 1;$

V. $x'' = x;$

VI. $x \cap x = x \cup x = x;$

VII. $(x \cap y)' = x' \cup y';$

VIII. $x \cap y = y \cap x \quad \wedge \quad x \cup y = y \cup x;$

IX. $x \cap (y \cap z) = (x \cap y) \cap z \quad \wedge \quad x \cup (y \cup z) = (x \cup y) \cup z;$

X. $x \cap (y \cup z) = (x \cap y) \cup (x \cap z) \ \wedge \ x \cup (y \cap z) = (x \cup y) \cap (x \cup z);$

Teorema 2 (Álgebra de Boole dada na introdução do livro *Introduction to Mathematical Logic* **de Elliot Mendelson, página xxiii).** *Sejam B um conjunto com pelo menos dois elementos, $\cap \in B^{B^2}$ uma operação binária e $' \in B^B$ uma operação unária.*

Admitiremos que $\cap$ e $'$ satisfazem os seguintes axiomas para quaisquer $x, y, z \in B$:

1. $x \cap y = y \cap x;$
2. $(x \cap y) \cap z \longleftrightarrow x \cap (y \cap z);$
3. $(x \cap y' = z \cap z') \longleftrightarrow x \cap y = x.$

Ademais defina

$$\forall x, y \left(x \cup y = (x' \cap y')'\right) \quad \textit{Def.}$$

Então $\langle B, \cap, \cup, ' \rangle$ *é uma álgebra booleana se, e somente se, os axiomas* 1–3 *forem satisfeitos.*

Prova. Primeiramente, provemos que $x \cap x = x$, para todo $x \in B$. Suponhamos que exista $x \in B$ tal que $x \cap x \neq x$, da equivalência no item 3, fixado $y = x$ temos

$$\forall z \left(z \in B \longrightarrow (x \cap x \neq x \longleftrightarrow x \cap x' \neq z \cap z')\right)$$

o que é falso para $z = x$, consequentemente a identidade $x = x \cap x$ é válida para todo $x \in B$. Novamente, da equivalência no item 3 temos que fixados $x \in B$ e $y = x$, decorre que

$$\forall z (x \cap x = x \longleftrightarrow x \cap x' = z \cap z')$$

Definamos $0 = x \cap x'$.

Em seguida, observemos

$$\forall z \left(z \cap 0 = z \cap (z \cap z') = (z \cap z) \cap z' = z \cap z' = 0\right)$$

Seguidamente observemos, também em decorrência do 3 item do rol de axiomas, que dado z arbitrariamente temos

$$z''' = z' \cap z''' \longleftrightarrow z''' \cap z'' = 0,$$

$$(\Gamma) \qquad z \cap z''' = z \cap (z' \cap z''') = (z \cap z') \cap z''' = 0 \longleftrightarrow z \cap z'' = z$$

e

$$(\Delta) \qquad z' \cap z'' = 0 \longleftrightarrow z \cap z'' = z''$$

de (Γ) e (Δ) decorre que $z = z''$. Adicionalmente,

$$\forall z \left(z \cup z = (z' \cap z')' = (z')' = z'' = z\right)$$

Seguidamente provemos que para quaisquer $x, y, z \in B$ vale

$$x \cap (y \cup z) = (x \cap y) \cup (x \cap z)$$

em outros termos, queremos provar que

$$x \cap (y' \cap z')' = \left((x \cap y)' \cap (x \cap z)'\right)'$$

Antes provemos uma identidade auxiliar

$$(I) \quad \forall u, v \left(u, v \in B \Longrightarrow u = u \cap (u' \cap v)'\right)$$

mas do item 3 temos que

$$u \cap (u' \cap v)' = u \Longleftrightarrow u \cap (u' \cap v) = 0.$$

Mas o segundo membro da bicondicional é trivialmente verdadeiro, em consequência a proposição (I) é verdadeira.

Proseguindo primeiro provemos que

$$x \cap (y' \cap z')' \cap \big((x \cap y)' \cap (x \cap z)'\big)' = x \cap (y' \cap z')'$$

do item 3 do rol de axiomas temos que a última identidade é equivalente a

$$x \cap (y' \cap z')' \cap (x \cap y)' \cap (x \cap z)' = 0$$

que por sua vez é equivalente a

$$x \cap y' \cap z' \cap (x \cap y)' \cap (x \cap z)' = x \cap (x \cap y)' \cap (x \cap z)'$$

Teorema 3 (Álgebra de Boole dada no livro de Hewitt e Stromberg *Real and Abstract Analysis*) **[Huntington].** *Seja B um conjunto munido com uma operação binária $\cup$ e uma operação unária $'$ satisfazendo os seguintes axiomas*:

a) $a', a \cup b \in B$ (*Estabilidade de* $'$ *e* $\cup$);
b) $a \cup b = b \cup a$ (*Comutatividade*);
c) $a \cup a = a$ (*Idempotência*);
d) $a \cup (b \cup c) = (a \cup b) \cup c$ (*Associatividade*);
e) $a' = (a' \cup b')' \cup (a' \cup b)'$ (*Caracterização de* $'$).

Então $\langle B, \cup, ' \rangle$ é uma álgebra de Boole. Tais axiomas (ou postulados) são conhecidos como postulados de Huntington.

Resumo das propriedades encontradas até então:

Sejam $a, b \in B$, temos

$$\begin{aligned} a \cup a' &= \big((a' \cup b'')' \cup (a' \cup b')'\big) \cup \big((a'' \cup b'')' \cup (a'' \cup b')'\big) \\ &= \big((b' \cup a'')' \cup (b' \cup a')'\big) \cup \big((b'' \cup a'')' \cup (b'' \cup a')'\big) \\ &= b \cup b' \end{aligned}$$

Do resultado anterior trocando a e b, por a' e a'' respectivamente, obtemos $a' \cup a'' = a'' \cup a'''$, para todo $a \in B$, *a fortiori* para todo $a \in B$, vale

$$a'' = (a''' \cup a'')' \cup (a''' \cup a')' = (a' \cup a'')' \cup (a' \cup a''')' = a.$$

Definição. Um conjunto ordenado S é dito ter a propriedade da menor cota superior se, para todo conjunto não vazio E limitado superiormente admite a menor das cotas superiores de E, denotada por $\sup E$.

Teorema 4. Todo conjunto ordenado que tem a propriedade da menor cota superior tem a propriedade da maior cota superior.

Prova. Sejam $E \subseteq S$, não vazio limitado inferiormente e L o cojunto das cotas inferiores de E que, como sabemos é não vazio, pois E é limitado inferiormente. Em vista da hipótese de S ter a propriedade da menor cota superior existe $\sup L$. Seja agora $\gamma > \sup L$. Então γ não é cota inferior de E, pois do contrário $\gamma \leq \sup L$, desta forma $\sup L$ é a maior das cotas inferiores de E, como consequencia $\inf E = \sup L$. Fica, portanto, completa a prova do teorema.

∎

Teorema 5. *Sejam $x, y \in R$.*

a) Se $x > 0$, então existe $m \in Z$, tal que $mx > y$;

b) Existe $q \in Q$ tal que $x < q < y$.

Prova. a) Suponhamos que a implicação é falsa, então existe $x > 0$, tal que para todo $m \in Z$ vale $mx \leq y$.

Particularmente, $x/y > 0$, pois $x, y > 0$. Daí vem que o conjunto $M = \{m(x/y) \in R : m \in Z\}$ é limitado superiormente por 1, como aquele é não vazio, decorre da propriedade da menor cota superior de R que existe $\varsigma = \sup M$. Temos, portanto, que para todo $m \in Z$ vale

$$(m+1)\left(\frac{x}{y}\right) \leq \varsigma$$

como consequência para todo $m \in Z$ vale

$$m\left(\frac{x}{y}\right) \leq \varsigma - \frac{x}{y} < \varsigma,$$

i.e., $\varsigma - x/y$ é uma cota superior de M o que contradiz a minimalidade de ς.

b) Primeiro, provaremos a seguinte

Afirmação. *Para todo $\varrho \in R$, existe um único inteiro m, tal que $m \leq \varrho < m+1$.*

Prova. Suponha o contrário que para todo $m \in Z$, se $m \leq \varrho$, então $m + 1 \leq \varrho$, note que esta última condicional é equivalente a $\neg(m \leq \varrho < m + 1)$. Mas, isto implica por indução matemática que para todo $m \in N$ vale $m \leq \varrho$, o que contradiz o item a). Conformemente esta contradição nos leva a concluir de que nossa suposição inicial está incorreta, provando portanto a existência.

Sejam m_i $(i = 1, 2)$, tais que $m_i \leq \varrho < m_i + 1$, da totalidade da ordem $<$ em R e supondo por redução ao absurdo que $m_1 \neq m_2$, podemos supor sem perda de generalidade que $m_1 < m_2$. Daí, decorre imediatamente que $m_1 + 1 \leq m_2$, pois suponha por redução ao absurdo que $m_1 + 1 > m_2$, teríamos

$$0 < m_2 - m_1 < 1$$

o que é um absurdo, pois $m_2 - m_1 \in Z$ e não existe inteiro entre 0 e 1. Por maior razão $m_1 + 1 \leq m_2$, mas isto por sua vez acarreta que

$$\varrho < m_1 + 1 \leq m_2 \leq \varrho$$

um outro absurdo. Estas contradições nos levam a concluir que a nossa suposição $m_1 \neq m_2$, é uma suposição inverídica. Destarte fica provada a unicidade. ♡

Daí podemos inferir que dado $\varrho \in R$, tomando m satisfazendo a afirmação anterior, decorre necessariamente que $m + 1 \leq \varrho + 1$, pois suponha o contrário, i.e., que $m + 1 > \varrho + 1$, disto decorre que

$$1 = (\varrho + 1) - \varrho < (m + 1) - m = 1$$

um absurdo. Concluimos, portanto, que $m + 1 \in (\varrho, \varrho + 1]$, provamos portanto a **Afirmação.** *Para todo $\varrho \in R$, existe um inteiro m, tal que $m \in (\varrho, \varrho + 1]$.* ♡

Consequentemente, usando o item a) existe $n \in N$, tal que $(y - x)n > 1$ e da afirmação imediatamente anterior existe $m \in (nx, nx + 1]$, assim vale

$$nx < m \leq nx + 1 < ny,$$

logo, fazendo $q = m/n$, temos da cadeia anterior que $x < q < y$, concluindo portanto a prova do item b).

∎

Vale também a **Afirmação.** *Sejam $\varrho \in R$, $n \leq \varrho$ e $m \in Z$, tal que $m \leq \varrho < m + 1$. Então $n \leq m$.*

Prova. Ora, se $n > m$, então $n \geq m + 1$, daí vem

$$\varrho < m + 1 \leq n \leq \varrho$$

uma contradição.

∎

Podemos inferir daí que m com aquela propriedade é o maior inteiro tal que $m \leq \varrho$.

Teorema 6 (Digressão relativa à representação decimal de um número real). *Seja $\varrho \in R_+^*$, escolhamos $n_0 \in N$, tal que*

$$n_0 \leq \varrho < n_0 + 1.$$

Suponhamos escolhidos $n_0, \ldots, n_k$, escolhamos $n_{k+1} \in N$, tal que

$$(\Delta) \qquad n_{k+1} \leq 10^{k+1}(\varrho - \alpha_k) < n_{k+1} + 1,$$

em que

$$\alpha_k = n_0 + \ldots + \frac{n_k}{10^k},$$

podemos, portanto, por indução considerar o conjunto

$$A = \{\alpha_k : k \in N\}.$$

Então nestas condições $\varrho = \sup A$.

Prova. De (Δ) segue necessariamente que

$$0 \leq \varrho - \alpha_{k+1} = \varrho - \alpha_k - \frac{n_{k+1}}{10^{k+1}} < \frac{1}{10^{k+1}},$$

para qualquer $k \in N$. Observemos que dado $\gamma < \varrho$, temos peremptoriamente que $\varrho - \gamma > 0$, dos teoremas anteriores existe $k \in N$ tal que

$$10^{k+1} > 2^{k+1} > k > \frac{1}{\varrho - \gamma} > 0$$

donde

$$\varrho - \alpha_{k+1} < \frac{1}{10^{k+1}} < \varrho - \gamma,$$

i.e., existe $\alpha \in A$, tal que $\alpha = \alpha_{k+1} > \gamma$, i.e., todo elemento $\gamma \in R$, tal que $\gamma < \varrho$, não é cota superior de A. Além disso $\varrho \geq \alpha$, para todo $\alpha \in A$, i.e., ϱ é uma cota superior de A, que, conforme concluímos, é tal que $\varrho = \sup A$.

∎

Quando $\varrho = \sup A$, representa-se ϱ por

$$n_0.n_1n_2n_3\ldots$$

por exemplo

$$\pi = 3.141592\ldots$$

A representação do número corresponde à uma sequência finita de seus primeiros dígitos seguido de reticências. Subentende-se que os outros dígitos sejam determinados indutivamente.

1.2 Construção dos números reais

Mais precisamente, nos concentraremos na construção do inverso multiplicativo. Doravante admitamos que letras gregas representem cortes e letras romanas representem números racionais, salvo quando for explicitamente dito o contrário. Dado um corte α, por conveniência definiremos que

$$\alpha^{\bullet} = \{p \in \alpha : p > 0\}.$$

Seja $\alpha > 0^*$ (um corte estritamente positivo, veja o livro *Principles of Mathematical Analysis* de W. Rudin ou o *Calculus* de M. Spivak). Definamos

$$\alpha^{-1} = \Big\{r \in Q : \exists s,t\big(s,t \in Q \ \wedge\ t > 1 \ \wedge\ 1/st \notin \alpha \ \wedge\ r \leq s\big)\Big\} \quad \text{Def.}$$

Antes de prosseguirmos, precisaremos do

Lema 2 (Adaptado de [Spivak]). Sejam $\alpha > 0^*$ e $p \in Q$, tal que $p > 1$. Então existem $q, r \in Q$, tais que $q \in \alpha$, $1/r \in \alpha^{-1}$ e $p = r/q$.

Prova. Seja p como nas premissas, afirmo que existe $s \in Q$, tal que $0 < s < 1$, tal que $sp \in \alpha$, de fato tome $t \in \alpha$, tal que $t > 0$, o que é garantido pela nossa suposição de que $\alpha > 0^*$. Da propriedade arquimediana de Q, existe $n \in N$, tal que $n > p/t$, daí vem que $p/n < t$, fazendo $s = 1/n$, temos consequentemente $sp < t$, *a fortiori* $sp \in \alpha$, pois α é um corte e $t \in \alpha$. Observando que

$$sp^n = s\big(1 + (p-1)\big)^n \geq sn(p-1)$$

existe $n \in N$, tal que

$$sp^n \in \alpha \ \wedge\ sp^{n+1} \notin \alpha$$

consequentemente fazendo $q = sp^n$ e $r = sp^{n+1}$, temos $p = r/q$. Ademais, existe $t > 1$, tal que $rt \notin \alpha$ e $qt \in \alpha$, isto decorre do fato de α não possuir um maior elemento. De fato, tome $q' > q$ tal que $q' \in \alpha$ e faça $t = q'/q$, observe que $q' = qt$ e $r' = rt$ são tais que $r'/q' = p$. Daí existe $t > 1$ tal que $1/(t/r') = r'/t = r \notin \alpha$, portanto, podemos sem perdas admitir que $q \in \alpha$ e $1/r \in \alpha^{-1}$.

∎

Teorema 7. *Se $\alpha > 0^*$, então $\alpha\alpha^{-1} = 1^*$.*

Prova. Primeiro provaremos que α^{-1} é um corte.

(I) seja $p \notin \alpha$ e $t > 1$, temos que existe $n \in N$, tal que $n > pt$, fazendo $s = 1/n$, obtemos que $pst < 1$, consequentemente $p < 1/st$, como $p \notin \alpha$ e este último é um corte $1/st \notin \alpha$, por maior razão infere-se que $s \in \alpha^{-1}$, provando que $\alpha \neq \emptyset$. Agora seja $q \in \alpha$, tomemos $r = 1/q$, notemos que para todo $t > 1$, tem-se $1/rt \in \alpha$, pois $1/t < 1$ e $q \in \alpha$, o que prova que $q \notin \alpha^{-1}$, provando que $\alpha^{-1} \neq Q$;

(II) Consideremos agora $p \in Q$ e $q \in \alpha^{-1}$, tais que $p < q$, segue evidentemente que existem $s \geq q > p$ e $t > 1$, tais que $1/st \notin \alpha$, consequentemente $p \in \alpha^{-1}$;

(III) Seja agora $p \in \alpha^{-1}$, então existem $s, t \in Q$, tais que $t > 1$ e $1/st \notin \alpha$, tome $t' \in Q$, tal que $1 < t' < t$, em seguida observemos que

$$\frac{1}{(st/t')t'} = \frac{1}{st} \notin \alpha$$

fazendo $q = st/t'$ temos evidentemente que $q > s \geq p$, o que prova que existe $q > p$, tal que $q \in \alpha^{-1}$.

Seguidamente provemos que $\alpha\alpha^{-1} = 1^*$, para tanto, seja $p \in \alpha$ e $q \in \alpha^{-1}$, temos que existe $s, t \in Q$, tais que $t > 1$ e $1/st \notin \alpha$, daí vem que $p < 1/st$, como consequência

$$pq \leq ps < pst < 1,$$

que por sua vez acarreta $\alpha\alpha^{-1} \subset 1^*$. Por outro lado seja $p \in 1^*$, i.e., $p < 1$, que podemos supor sem perda de generalidade $p > 0$, pois $1^* = (1^*)^2 > 0$. Segue do lema que existem $r \notin \alpha$ e $q \in \alpha$, tais que $1/p = r/q$ e $1/r \in \alpha^{-1}$, daí vem $p = q/r \in \alpha\alpha^{-1}$, o que prova a inclusão $1^* \subset \alpha\alpha^{-1}$. Decorre do axioma da extensionalidade $\alpha\alpha^{-1} = 1^*$.

∎

Vale observar que em virtude da definição provisória do produto de cortes ser limitado apenas a R_+^*, não faz sentido $\alpha 0^*$, pois isto não está definido, uma vez que não existem elementos estritamente positivos em 0^*, *a fortiori*, muito menos estará definido $(0^*)^{-1}$.

Teorema 8 (Lei distributiva). *Se* $\alpha, \beta, \gamma > 0^*$, então

$$\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma.$$

Prova. Suponha que $p \in \delta$ com $\delta = \alpha(\beta + \gamma)$, da definição existe $(q, r) \in \alpha^\bullet \times (\beta + \gamma)^\bullet$ tal que $p \leq qr$, como $r \in \alpha + \beta$ existe $(s, t) \in \alpha \times \beta$, tal que $r \leq s + t \in \alpha + \beta$, portanto,

$$p \leq qr \leq q(s + t) = qs + qt \in \alpha\beta + \alpha\gamma.$$

como $\epsilon = \alpha\beta + \alpha\gamma$ é um corte decorre que $p \in \epsilon$, o que prova a inclusão $\delta \subset \epsilon$.

Seja agora $p \in \epsilon$ existem portanto $r, t \in \alpha^\bullet$ e $(s, u) \in \beta^\bullet \times \gamma^\bullet$, tais que $p \leq rs + tu$, tomando $v = \max\{r, t\}$, temos que $p \leq v(s + t) \in \delta$, o que prova a outra inclusão $\epsilon \subset \delta$. Do axioma da extensionalidade $\delta = \epsilon$, o que conclui a prova.

∎

Conforme observado em [Rudin] se $\alpha < \beta$, então $\alpha + \gamma < \beta + \gamma$, para todo corte γ, como consequência se $\alpha > 0^*$, então $-\alpha < 0^*$. Podemos, portanto, definir a multiplicação em R^* por

$$(\Pi) \qquad \alpha\beta = \begin{cases} -\big((-\alpha)\beta\big), & \alpha < 0^* \ \wedge \ \beta > 0^*; \\ -\big(\alpha(-\beta)\big), & \alpha > 0^* \ \wedge \ \beta < 0^*; \\ (-\alpha)(-\beta), & \alpha < 0^* \ \wedge \ \beta < 0^*. \end{cases}$$

Sabemos 0^* é o elemento neutro da adição em R, espera-se naturalmente pelas propriedades de corpos que este seja tal que $\alpha 0^* = 0^*\alpha = 0^*$, para todo $\alpha \in R$ e, por este motivo define-se o produto com 0^* desta forma. Feito isto podemos neste estágio (seguido o roteiro dado em [Rudin]) afirmar categoricamente que R tem todas as propriedades da adição e multiplicação satisfeitas, com exceção da propriedade distributiva.

Consideremos $\alpha, \beta, \gamma \in R$, observe que se alguns destes números reais for 0^*, então o produto é trivial. Desta forma, adimitiremos que $\alpha, \beta, \gamma \in R^*$. Consideremos, a título de exemplo o caso em que $\alpha < 0$, $\beta + \gamma > 0$ e $\gamma < 0$, neste caso temos que $\beta > 0$ e

$$(-\alpha)(\beta + \gamma) + \alpha\gamma = (-\alpha)(\beta + \gamma) + (-\alpha)(-\gamma) = (-\alpha)\beta$$

donde vem

$$\alpha(\beta + \gamma) = -(-\alpha)(\beta + \gamma) = \alpha\gamma - (-\alpha)\beta = \alpha\beta + \alpha\gamma.$$

Os outros casos são tratados de maneira análoga.

Daqui podemos dizer que concluímos a construção de um corpo ordenado com a propriedade da menor cota superior, a saber, o conjunto R dos cortes de Dedekind.

Refaço as suas demonstrações [Rudin] com adaptação e ponho as minhas no que segue para fins de documentação, que, existe um corpo ordenado Q^* em R isomorfo ao conjunto dos números racionais.

Definição. *Seja $q \in Q$ definamos*

$$q^* = \{p \in Q : p < q\} \qquad \textit{Def.}$$

Teorema 9 (Indentificação de Q em R). *Sejam $r, s \in Q$.*

a) $r^* \in R$;
b) $r^* + s^* = (r + s)^*$;
c) $r^* s^* = (rs)^*$;
d) $r^* < s^*$, *se e somente se* $r < s$.

Prova. a) Provar.

b) Suponha que $(t, u) \in r^* \times s^*$, certamente que $t + u < r + s$, consequentemente $t + u \in (r + s)^*$, o que prova a inclusão $r^* + s^* \subset (r + s)^*$.

Por outro lado suponhamos que $p \in (r+s)^*$, i.e., $p < r+s$, tomando $t \in Q$, tal que $p - s < t < r$ temos certamente que $u = p - t < s$, consequentemente

$$p = t + (p - t) = t + u \in r^* + s^*,$$

culminando a inclusão $(r + s)^* \subset r^* + s^*$, que, em conjunto com a outra pode-se inferir pelo axioma da extensionalidade a iqualdade requerida, *viz* $r^* + s^* = (r + s)^*$.

c) Observe também que se $r = 0$ ou $s = 0$, a igualdade é, em verdade, trivial. Provado o item a) podemos inferir facilmente que $-(r)^* = (-r)^*$, portanto se provarmos que c) é válida para quaisquer $r, s > 0$, tanto será verdadeiro para r, s não nulos quaisquer. Destarte, nos ateremos ao caso em que $r, s > 0$. Seja $p \leq uv$, com $u, v > 0$ e $(u, v) \in r^* \times s^*$, é conspícuo que $p < rs$, consequentemente $r^* s^* \subset (rs)^*$.

Seja agora, $p < rs$, podemos supor sem perda de generalidade que $p > 0$, pois do contrário tome $p' \in Q$, tal que $\max\{0, p\} < p' < rs$. Escolhendo $u \in Q$, tal que $p/r < u < s$, decorre que $t = p/u < r$. Ademais

$$p = (\frac{p}{u})u = tu \in r^* s^*,$$

consequentemente $(rs)^* \subset r^*s^*$. O que novamente deduz-se pelo axioma da extensionalidade a igualdade requerida.

d) Por fim, se $r^* < s^*$, então existe $p \in s^* \setminus r^*$, segue que $r \leq p < s$.

Por outro lado, se $r < s$ então $r^* \subset s^*$ e $r \in s^* \setminus r^*$.

∎

O teorema anterior nos diz que o conjunto $Q^* = \{q^* \in R : q \in Q\}$ é isomorfo a Q, desta forma podemos dizer que precipuamente $Q \subset R$.

1.3 Unicidade dos reais

Os cortes de Dedekind nos fornece um caminho para a construção de um corpo ordenado R com a propriedade da menor cota superior, existem certamente outros caminhos como usando as sequências de Cauchy, resultado devido a Cantor. Surgem as perguntas: O que individualiza o conjunto R? Será que este conjunto assim construído é de fato o conjunto númerico conhecido desde a escola primária? As construções mencionadas não resultam em dois objetos matemáticos aparentemente distintos? Adianto que o conjunto dos números reais conhecidos na escola são na realidade séries numéricas, ao passo que aquele que construímos é uma coleção de subconjuntos de números racionais. Como bem observado em [Elon], intrinsecamente estes objetos são distintos, mas do ponto de vista de isomorfismos são idênticos. Para tratar bem do caso deve-se concluir o exercício 2 do capítulo 29 de [Spivak]. A seguir empenhar-nos-emos a provar que R é único a menos de isomorfismos, para tanto precisaremos de algumas construções auxiliares.

Definição 13. *Seja K um corpo com zero 0_K, unidade 1_K e $x \in K$ definamos*

$$0 * x = 0_K \tag{1.35}$$

e indutivamente

$$(n+1) * x = n * x + x \tag{1.36}$$

para todo $n \in \omega$[[1]*.

Teorema 18. *Seja K um corpo, com zero 0_K. Então para quaisquer $m, n \in \omega$ e $x, y \in K$ valem*

(*a*) $n * 0_K = 0_K$;

[1] Esta definição requer uma prova da definição por recursão, um resultado muito famoso na teoria dos conjuntos.

(b) $m * x + n * x = (m + n) * x$;

(c) $n * x + n * y = n * (x + y)$;

(d) $m * (n * x) = mn * x$;

(e) $(n * x)y = n * xy$;

(f) $(m * x)(n * y) = mn * xy$.

Prova.

(a) Definamos o conjunto

(1.37) $$S = \{n : n \in \omega \ \wedge \ n * 0_K = 0_K\}.$$

Certamente que $0 \in S$, porquanto pela definição vale

(1.38) $$0 * 0_k = 0_K.$$

Se $n \in S$, temos que

(1.39) $$(n + 1) * 0_K = n * 0_K + 0_K = 0_K + 0_K = 0_K.$$

Consequentemente $n + 1 \in S$, donde pela minimalidade de ω, inferimos que $S = \omega$[2.

(b) Seja $m \in \omega$. Consideremos o conjunto

(1.40) $$S = \{n : n \in \omega \ \wedge \ m * x + n * x = (m + n) * x\}.$$

Primeiramente, observemos que $0 \in S$, pois

(1.41) $$m * x + 0 * x = m * x + 0_K = m * x = (m + 0) * x.$$

Em seguida, suponhamos que $n \in S$. Temos conformemente

(1.42) $$\begin{aligned} m * x + (n + 1) * x &= m * x + n * x + x \\ &= (m + n) * x + x \\ &= \big(m + (n + 1)\big) * x. \end{aligned}$$

Portanto, $n + 1 \in S$. Pela minimalidade de ω decorre que $S = \omega$.

[2] Esta é simplesmente a consequência da definição de ω como o conjunto sucessor minimal, seguindo a terminologia de Halmos.