Dedico o resultado destas anotações aos meus Senhores. Primeiro, a Deus, que, consoante o seu desígnio, me concede o discernimento e o pão de cada dia. Segundo, a Jesus, não menos importante, em cujas palavras tanto me comprazo, e ciente de que Ele é O Caminho e A Verdade.

SUMÁRIO

PRELÚDIO

O texto que segue trata-se de um compêndio de assuntos que acho relevantes. Portanto, sem margem para dúvidas, o texto reflete minha subjetividade. Este texto estará em construção contínua, de maneira que não haverá versão final enquanto as circunstâncias da vida sobrepujarem o meu ímpeto de colecionar tais informações. Alguns resultados são de minha autoria, mas certamente estão enviesados por alguma obra, de maneira que não descobri a roda, mas me sustentei sobre o trabalho de vários indivíduos perspicazes. Além disso, é impossível colecionar tudo o que nos interessa. Destarte, me ative aos que, ao menos, tive alguma ideia de demonstração.

I

CIÊNCIAS FORMAIS

1

GEOMETRIA ANALÍTICA

1.1 CÔNICAS

Definição 1 *Consideremos g um polinômio de duas variáveis de grau* 2 *com coeficientes em* $\mathbb{R}$ *dado por*

$$g(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f. \tag{1.1}$$

Uma cônica C é o locus (lugar geomético) ou conjunto de pontos

$$C = \{(x, y) : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \wedge g(x, y) = 0\}. \tag{1.2}$$

O objetivo das próximas seções é aplicar transformações ao sistema de coordenadas, de tal maneira que a cônica seja facilmente reconhecida.

1.1.1 Translações de sistema de coordenadas.

Dados pontos $\Omega = (h, k)$ e (x, y) de $\mathbb{R}^2$, as coordenadas (u, v) de (x, y) relativo ao sistema cuja origem é Ω, são simplesmente dadas pela identidade

$$(u, v) = (x, y) - (h, k). \tag{1.3}$$

Em verdade, o sistema de coordenadas é a transformação afim $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, dada por

$$T(v) = v - \Omega. \tag{1.4}$$

Em outros termos, estamos calculando as coordenadas dum ponto v relativo a um sistema de coordenadas cuja a origem é precisamente Ω.

A relação das coordenadas de (u, v) do sistema transladado com as coordenadas de (x, y) segundo o sistema antigo é expressa pelo sistema

$$\begin{cases} x = u + h \\ y = v + k \end{cases} \tag{1.5}$$

1.1.2 Eliminação dos termos lineares por translações

Em seguida, calculemos $G(u, v) = g(u + h, v + k)$. Conformemente,

$$\begin{aligned} G(u, v) &= a(u + h)^2 + b(u + h)(v + k) + c(v + k)^2 + d(u + h) + e(v + h) + f \\ &= au^2 + buv + cv^2 + u(2ah + bk + d) + v(bh + 2ck + e) \\ &\quad + \underbrace{ah^2 + bhk + ck^2 + dh + ek + f}_{g(h,k)} \\ &= au^2 + buv + cv^2 + u(2ah + bk + d) + v(bh + 2ck + e) + g(h, k) \end{aligned} \tag{1.6}$$

Nosso objetivo é eliminar os termos lineares segundo u e v. Para tanto, precisamos resolver o sistema

$$\begin{cases} 2ah + bk + d = 0 \\ bh + 2ck + e = 0 \end{cases} \tag{1.7}$$

que por sua vez, é equivalente ao sistema

$$\begin{cases} ah + \dfrac{b}{2}k = -\dfrac{d}{2} \\ \dfrac{b}{2}h + ck = -\dfrac{e}{2} \end{cases} \tag{1.8}$$

É sabido que o sistema (8.8) admite uma única solução, i.e., é determinado, se, e somente se, $ac - b^2/4 \neq 0$. Caso contrário, o sistema admite infinitas soluções, neste caso diz-se que ele é indetemindado, ou não admite soluções, i.e., é impossível.

Destarte, temos um método pragmático para determinar se é possível eliminar os termos lineares do polinômio g, a saber, se, e somente se, o sistema (8.8) admite soluções.

A seguir está provado que no caso do sistema (8.8) admitir infinitas soluções, que o termo independente de g no novo sistema de coordenadas é inexorável à escolha da solução do sistema (8.8).

Teorema 1 (Exercício 23-10 - [BoulosCamargo 1]) *Se o sistema* (8.8) *admite infinitas soluções, então g é constante no seu conjunto de soluções.*

Prova Sejam (h, k) e (u, v) soluções do sistema (8.8). Em verdade não é difícil notar que $(h + k, u + v)$ também o é, bastando para isto substituir as respectivas coordenadas do par no sistema (8.8) e atestar as igualdades.

Notemos em seguida que qualquer solução (x, y) de (8.8), satisfaz

$$ax^2 + bxy + cy^2 + \frac{d}{2}x + \frac{e}{2}y = x\Big(ax + \frac{b}{2}y + \frac{d}{2}\Big) + y\Big(\frac{b}{2}x + cy + \frac{e}{2}\Big) = 0 \tag{1.9}$$

e

$$\begin{aligned} g(x, y) &= ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f \\ &= x\Big(ax + \frac{b}{2}y + \frac{d}{2}\Big) + y\Big(\frac{b}{2}x + cy + \frac{e}{2}\Big) + \frac{d}{2}x + \frac{e}{2}y + f \\ &= \frac{d}{2}x + \frac{e}{2}y + f. \end{aligned} \tag{1.10}$$

Em conformidade, segue-se

$$2\Big[u\Big(a(u + h) + \frac{b}{2}(k + v) + \frac{d}{2}\Big) + v\Big(\frac{b}{2}(u + h) + c(v + k) + \frac{e}{2}\Big)\Big] = 0 \tag{1.11}$$

de (8.9) com $(x, y) = (u, v)$ e (8.11) podemos inferir

$$au^2 + buv + cv^2 + \frac{d}{2}u + \frac{e}{2}v + 2ahu + 2ckv + bhv + buk = 0. \tag{1.12}$$

Como consequência, de (8.9), (8.10) e (8.12) temos

$$\begin{aligned} g(h,k) &= ah^2 + bhk + ck^2 + dh + ck + f \\ &= ah^2 + bhk + ck^2 + dh + ck + f + au^2 + buv + cv^2 \\ &\quad + \frac{d}{2}u + \frac{e}{2}v + 2ahu + 2ckv + bhv + buk \\ &= a(h+u)^2 + b(u+h)(v+k) + c(k+v)^2 \\ &\quad + \frac{d}{2}(h+u) + \frac{e}{2}(k+v) + \frac{d}{2}u + \frac{e}{2}v + f \\ &= \frac{d}{2}u + \frac{e}{2}v + f \\ &= g(u,v) \end{aligned} \tag{1.13}$$

Em outros termos g é constante no conjunto de soluções do sistema (8.8). ▮

1.1.3 Rotações de sistemas de coordenadas

Figura 1.1: Rotação dum sistema de coordenadas cartesiano por um ângulo θ.

Consideremos um ponto $w = (u, v)_\theta$ cujas coordenadas são dadas em relação ao sistema rotacionado. Nosso objetivo é determinar as coordenadas de w relativo ao primeiro sistema. A título de exemplo, usaremos um método geométrico para um caso particular.

Observemos, pois, a figura seguinte

Figura 1.2: Rotação dum sistema de coordenadas cartesiano por um ângulo θ.

Em conformidade com a figura estamos supondo que $\theta \in]0, \pi/2[$. Uma análise geométrica nos forneçe o seguinte sistema

$$\begin{cases} u = \dfrac{x}{\cos\theta} + v\tan\theta \\ y = \dfrac{v}{\cos\theta} + x\tan\theta \end{cases} \tag{1.14}$$

Donde, multiplicando a primeira por $\cos\theta$, obtemos

$$x = u\cos\theta - v\sin\theta, \tag{1.15}$$

Substituindo x na segunda equação de (8.14), deduz-se

$$\begin{aligned} y &= \frac{v}{\cos\theta} + \tan\theta(u\cos\theta - v\sin\theta) \\ &= \frac{v}{\cos\theta} + u\sin\theta - \frac{v\sin^2\theta}{\cos\theta} \\ &= u\sin\theta + v\cos\theta. \end{aligned} \tag{1.16}$$

em síntese temos

$$\begin{cases} x = u\cos\theta - v\sin\theta \\ y = u\sin\theta + v\cos\theta \end{cases} \tag{1.17}$$

Uma outra maneira, é recorrer à álgebra linear, mais precisamente a espaços vetoriais munidos com produto interno. Seja $\mathcal{B} = \{e_1, e_2\}$ a base canônica do $\mathbb{R}^2$. Uma base ortonormal, para o segundo sistema é

$$r = \cos\theta e_1 + \sin\theta e_2 \tag{1.18}$$

e

$$s = \cos\Big(\frac{\pi}{2} + \theta\Big)e_1 + \sin\Big(\frac{\pi}{2} + \theta\Big)e_2 = -\sin\theta e_1 + \cos\theta e_2. \tag{1.19}$$

Além do mais, o ângulo entre r e e_1 é

$$\eta = \arccos\Big(\frac{\langle r, e_1\rangle}{|r||e_1|}\Big) = \arccos(\cos\theta). \tag{1.20}$$

Portanto, um vetor $w = (u, v)_\theta$ relativo à base $\mathcal{B}_\theta = \{r, s\}$, tem coordenadas satisfazendo o sistema (8.17). Assim, as coordenadas x e y de w relativas ao sistema canônico satisfazem a identidade

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \tag{1.21}$$

À transformação linear $R_\theta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ cuja matriz associada é

$$[R_\theta] = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \tag{1.22}$$

daremos o nome de rotação por um ângulo θ. Ademais, para qualquer θ têm-se

$$[R_\theta]^{-1} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}. \tag{1.23}$$

Em consonância, R_θ é um isomorfismo de $\mathbb{R}^2$.

1.1.4 Eliminação do termo quadrático misto por rotações

Munido das observações da seção anterior, apliquemos uma rotação ao nosso sistema de coordenadas. Fazendo a substituição de (x, y) segundo (8.21) obtemos

$$\begin{aligned} G(u, v) = {} & (a\cos^2\theta + b\cos\theta\sin\theta + c\sin^2\theta)u^2 + \big((a - c)\sin 2\theta + b\cos 2\theta\big)uv \\ & + (a\sin^2\theta - b\cos\theta\sin\theta + c\cos^2\theta)v^2 + (d\cos\theta + e\sin\theta)u \\ & + (e\cos\theta - d\sin\theta)v + f \end{aligned} \tag{1.24}$$

Por questões práticas, escreveremos

$$G(u, v) = \alpha u^2 + \beta uv + \gamma v^2 + \delta u + \varepsilon v + f, \tag{1.25}$$

o que pressupõe as igualdades

$$
\begin{aligned}
\alpha &= a\cos^2\theta + b\cos\theta\sin\theta + c\sin^2\theta \\
\beta &= (a-c)\sin 2\theta + b\cos 2\theta \\
\gamma &= a\sin^2\theta - b\cos\theta\sin\theta + c\cos^2\theta \\
\delta &= d\cos\theta + e\sin\theta \\
\varepsilon &= e\cos\theta - d\sin\theta
\end{aligned} \tag{1.26}
$$

Agora, nosso intento é que o termo misto se anule, para este fim devemos determinar θ, tal que $\beta = 0$. Notavelmente, estamos estipulando *a priori* que $b \neq 0$, pois do contrário a rotação do sistema de coordenadas não teria desígnio algum. Em conformidade com esta estipulação e com as notações anteriores segue-se o

Teorema 2 *Seja C uma cônica cujo o termo quadrático misto do polinômio subjacente g seja não nulo. Então existe uma rotação R_θ de um ângulo θ, segundo a qual o termo quadrático misto do polinômio subjacente $G = gR_\theta$ é nulo*

Prova De (8.26) segue que

$$(a-c)\sin 2\theta = b\cos 2\theta \tag{1.27}$$

Daí vem necessariamente que $2\theta \neq n\pi$, para todo $n \in \mathbb{Z}$, consequentemente $\sin 2\theta \neq 0$. Com efeito, suponha que exista $n \in \mathbb{Z}$, tal que $2\theta = n\pi$, decorre de (8.27) que

$$b = b\cos 2\theta = (a-c)\sin 2\theta = 0, \tag{1.28}$$

o que contradiz nossa suposição. Portanto, podemos escrever

$$\cot 2\theta = \frac{\cos 2\theta}{\sin 2\theta} = \frac{a-c}{b}. \tag{1.29}$$

Temos duas soluções para (8.29) em $[0, 2\pi[$ uma no semiciclo superior e outra no inferior. ∎

Escolhido θ conforme no **Teorema 48**, temos de (8.26) e (8.29) que

$$\alpha - \gamma = b\cot 2\theta\cos 2\theta + b\sin\theta = \frac{b}{\sin 2\theta}. \tag{1.30}$$

Em consonância com (8.26), podemos inferir

$$\alpha = \frac{1}{2}\left(a + c + \frac{b}{\sin 2\theta}\right) \quad \text{e} \quad \gamma = \frac{1}{2}\left(a + c - \frac{b}{\sin 2\theta}\right) \tag{1.31}$$

As identidades trigonométricas

$$
\begin{aligned}
\sin^2 2\theta &= \frac{1}{1+\cot^2 2\theta} \\
\cos 2\theta &= \cot 2\theta \sin 2\theta \\
\cos^2\theta &= \frac{1+\cos 2\theta}{2} \\
\sin^2\theta &= \frac{1-\cos 2\theta}{2}
\end{aligned} \tag{1.32}
$$

nos permitem determinar uma solução do sistema

$$\begin{cases} \delta = d\cos\theta + e\sin\theta \\ \varepsilon = e\cos\theta - d\sin\theta \end{cases} \tag{1.33}$$

Em suma, o que podemos concluir é que dada uma cônica, podemos sempre supor sem perda de generalidade que o termo quadrático misto do polinômio subjacente seja nulo.

Observação 1 Relembremos que dada uma função polinomial do segundo grau $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, cuja lei é

$$p(\lambda) = \lambda^2 + b\lambda + c. \tag{1.34}$$

Vale

$$r_1 + r_2 = -b \quad \text{e} \quad r_1 r_2 = c, \tag{1.35}$$

em que r_i com $i = 1, 2$, são as raízes da equação $p(\lambda) = 0$.

Nesta seção, escolhemos um θ adequado para que $\beta = 0$, com isso determinamos

$$\alpha = \frac{1}{2}\left(a + c + \frac{b}{\sin 2\theta}\right) \quad \text{e} \quad \gamma = \frac{1}{2}\left(a + c - \frac{b}{\sin 2\theta}\right). \tag{1.36}$$

Daí temos

$$\begin{aligned}
\alpha\gamma &= \frac{1}{4}\left((a+c)^2 - \frac{b^2}{\sin^2 2\theta}\right) \\
&= \frac{(a+c)^2 \sin^2 2\theta - b^2}{4\sin^2 2\theta} \\
&= \frac{(a+c)^2 \sin^2 2\theta - b^2(\cos^2 2\theta + \sin^2 2\theta)}{4\sin^2 2\theta} \\
&= \frac{(a+c)^2 \sin^2 2\theta - \overbrace{b^2 \cos^2 2\theta}^{(8.27)\ (a-c)^2 \sin^2 2\theta} - b^2 \sin^2 2\theta}{4\sin^2 2\theta} \\
&= \frac{(a+c)^2 \sin^2 2\theta - (a-c)^2 \sin^2 2\theta - b^2 \sin^2 2\theta}{4\sin^2 2\theta} \\
&= \frac{\sin^2 2\theta\big((a+c)^2 - (a-c)^2 - b^2\big)}{4\sin^2 2\theta} \\
&= \frac{(a+c)^2 - (a-c)^2 - b^2}{4} \\
&= \frac{(a+c+a-c)(a+c-(a-c)) - b^2}{4} \\
&= \frac{4ac - b^2}{4} \\
&= ac - \frac{b^2}{4}.
\end{aligned} \tag{1.37}$$

Adicionamente, sabendo que $\alpha + \gamma = a + c$, segue-se que α e γ são raízes do polinômio p, dado por

$$p(\lambda) = \lambda^2 - (a+c)\lambda + ac - \frac{b^2}{4}. \tag{1.38}$$

Logo,

$$p(\lambda) = 0 \text{ se, e somente se, } \det([M_p - \lambda I]) = 0 \tag{1.39}$$

em que

$$[M_p] = \begin{bmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{bmatrix}, \tag{1.40}$$

i.e., α e γ são os autovalores da transformação M_p.

2

ÁLGEBRA LINEAR

2.1 ESPAÇOS VETORIAIS

A seguir apresentarei alguns exercícios pertinentes de [Hoffman].

Proposição 1 *Sejam V um espaço vetorial e $W_i \subset V$, com $i \in \{1, 2\}$, subespaços vetoriais tais que $W = W_1 \cup W_2$ é um subespaço de V. Então, existe um $i \in \{1, 2\}$, tal que $W_i \subset W_j$, com $i \neq j$.*

Prova Suponhamos por *reductio ad absurdum* que

$$W_1 \setminus W_2 \neq \emptyset \wedge W_2 \setminus W_1 \neq \emptyset \tag{2.1}$$

Sejam $w_1 \in W_1 \setminus W_2$ e $w_2 \in W_2 \setminus W_1$, das hipóteses $w = w_1 + w_2 \in W$. Todavia, $w \notin W_1$ e $w \notin W_2$. Pois, digamos que $w \in W_1$, então $w_2 = w - w_1 \in W_1$, o que é uma contradição pois $w_2 \in W_2 \setminus W_1$. Agora se $w \in W_2$, então analogamente $w_1 = w - w_2 \in W_2$, outra contradição, pois $W_1 \setminus W_2$. Concluímos, portanto, que existe $i \in \{1, 2\}$, tal que $W_i \subset W_j$, com $i \neq j$. ∎

Proposição 2 *Seja K um corpo, W um espaço vetorial sobre K. Considere $V = W^K$, munido com a soma e produto por escalar usuais. Então*

$$V_i = \{f : f \in V \wedge f(-x) = -f(x)\} \tag{2.2}$$

e

$$V_p = \{f : f \in V \wedge f(-x) = f(x)\} \tag{2.3}$$

são subespaços de V, tais que

$$V_i \cap V_p = \{0\} \wedge V = V_i + V_p. \tag{2.4}$$

Prova Primeiro é evidente que $0 \in V_i$. Sejam agora $f, g \in V_i$ e $\varkappa \in K$, temos que para todo $x \in K$, vale

$$\begin{aligned} (\varkappa f + g)(-x) &= \varkappa f(-x) + g(-x) \\ &= -\varkappa f(x) - g(x) \\ &= -(\varkappa f(x) + g(x)) \\ &= -(\varkappa f + g)(x), \end{aligned} \tag{2.5}$$

consequentemente V_i é um subespaço de V. O outro caso é ainda mais simples de ser provado, o argumento é inteiramente semelhante.

Seja agora $f \in V_i \cap V_p$, temos para todo $x \in K$

$$f(x) = f(-x) = -f(x), \tag{2.6}$$

logo $f = 0$ e, consequentemente $V_i \cap V_p = \{0\}$.

Por fim, seja $f \in V$. Note que $f_i, f_p \in V$ dadas por

$$f_i(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2} \quad \wedge \quad f_p(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} \tag{2.7}$$

são tais que, para todo $x \in K$ vale

$$f_i(-x) = \frac{f(-x) - f(x)}{2} = -\frac{f(x) - f(-x)}{2} = -f_i(x), \tag{2.8}$$

e.

$$f_p(-x) = \frac{f(-x) + f(x)}{2} = \frac{f(x) + f(-x)}{2} = f_p(x), \tag{2.9}$$

i.e., $(f_i, f_p) \in V_i \times V_p$. Ademais, $f = f_i + f_p$, consequentemente $V = V_i + V_p$. ∎

Proposição 3 *Sejam $V_i \subset V$, com $i \in \{1, 2\}$, subespaços do espaço vetorial V, tais que*

$$V = V_1 + V_2 \quad \wedge \quad V_1 \cap V_2 = \{0\}. \tag{2.10}$$

Então para todo $v \in V$ existe único $(v_1, v_2) \in V_1 \times V_2$, tais que $v = v_1 + v_2$.

Prova A existência decorre da definição, provemos, portanto, a unicidade. Para tanto, sejam $v \in V$ e $v_i, w_i \in V_1$, com $i \in \{1, 2\}$, tais que

$$v = v_1 + v_2 = w_1 + w_2, \tag{2.11}$$

temos que

$$v_1 - w_1 = w_2 - v_2 \in V_1 \cap V_2 = \{0\}. \tag{2.12}$$

Decorre que

$$v_1 - w_1 = 0 = v_2 - w_2, \tag{2.13}$$

o que por sua vez acarreta $v_i = w_i$, com $i \in \{1, 2\}$. ∎

II

CIÊNCIAS NATURAIS

3

EQUAÇÃO DE CARGA DE UM CAPACITOR

Teorema 1. *Seja um capacitor de capacitância C conectado em série com um resistor de resistência R e à uma bateira de tensão V_f. Admitindo-se que o capacitor esteja inicialmente descarregado a equação de carga do capacitor é dada por*:

$$V(t) = V_f(1 - e^{-\frac{t}{RC}}).$$

Prova. A corrente no capacitor $I(t)$ é a mesma que a corrente no resistor, consequentemente

$$(\ddagger) \qquad \frac{V_f - V(t)}{R} = I(t) = \frac{dQ}{dt}(t) = C\frac{dV}{dt}(t)$$

em que $V(t)$ é a tensão no capacitor no instante t. Temos portanto de ($\ddagger$) que

$$\frac{1}{RC} = \frac{dV}{dt}(t)\frac{1}{V_f - V(t)} = -\frac{d}{dt}\big(V_f - V(t)\big)\frac{1}{V_f - V(t)}$$

em consequência do lema que vimos e multiplicando ambos membros por -1, decorre que

$$-\frac{1}{RC} = \frac{d}{dt}\big(V_f - V(t)\big)\frac{1}{V_f - V(t)} = \frac{d}{dt}\Big(\ln\big|V_f - V(t)\big|\Big)$$

do teorema fundamental do cálculo vem

$$-\frac{T}{RC} = \int_0^T \frac{d}{dt}\Big(\ln\big|V_f - V(t)\big|\Big)\,dt = \ln\big|V_f - V(t)\big|\Big|_0^T$$

para $T \geq 0$.

Agora admitindo-se que $V(0) = 0$, e que $V_f - V(t) > 0$ para todo $t \in R_+$ obtemos

$$-\frac{T}{RC} = \ln\big(V_f - V(t)\big)\Big|_0^T = \ln\frac{V_f - V(T)}{V_f}$$

donde se conclui

$$\frac{V_f - V(T)}{V_f} = e^{\frac{-T}{RC}}$$

que por sua vez implica

$$V(T) = V_f(1 - e^{-\frac{T}{RC}})$$

como T é arbitrário podemos escrever sem perdas

$$V(t) = V_f(1 - e^{-\frac{t}{RC}})$$

para todo $t \geq 0$. ∎

Como tratar adequadamente conversões entre grandezas, e.g., grandezas angulares? *Como explicar rigorosamente a igualdade que se encontra rotineiramente em livros*:

$$2\pi \text{ rad} = 360^\circ \text{ ?}$$

Rigorosamente, os dois objetos são distintos, de maneira que a identidade não é siginificativa.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] CAMARGO, IVAN DE; BOULOS, PAULO. *Geometria Analítica*. 3ª ed. rev. e ampl. São Paulo: Prentice Hall, 2005.

[2] HALMOS, PAUL R. *Naive Set Theory*. Garden City, New York: Dover Publications, 2017.

[3] HOFFMAN, KENNETH; KUNZE, RAY. *Linear Algebra*. 2nd ed. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall, 1961.

[4] IEZZI, GELSON. *Fundamentos de Matemática Elementar*. Vol. 7. Geometria Analítica. 3ª ed. São Paulo: Atual, 1985.

[5] RUDIN, WALTER. *Principles of Mathematical Analysis*. 3rd ed. McGraw-Hill, 1976.

[6] SPIVAK, MICHAEL. *Calculus*. 4th ed. Houston, Texas: Publish or Perish, 2008.