FUNÇÕES

TEOREMA 1 (67 THEOREM) $\mathrm{dom}(\mathcal{U}) = \mathcal{U}$ *e* $\mathrm{img}(\mathcal{U}) = \mathcal{U}$.

Prova Note que para todo $x \in \mathcal{U}$, temos que $(x, x) \in \mathcal{U}$. ///

DEFINIÇÃO 2 (68 DEFINITION) $f(x) = \bigcap\{y : (x, y) \in f\}$.

A classe $f(x)$ é o *valor* de f em x ou a *imagem* de x sob f. É importante ser observado que x pode ser entendido como elemento do $\mathrm{dom}(f)$, e como classe. Vale deixar explícito que $f(x)$ é sempre interpretado na primeira acepção e não na segunda, ou seja

$$f(x) \neq \{y : \exists z(z \in x \wedge (z, y) \in f)\}.$$

TEOREMA 3 (69 THEOREM) *Se* $x \notin \mathrm{dom}(f)$, *então* $f(x) = \mathcal{U}$; *se* $x \in \mathrm{dom}(f)$, *então* $f(x) \in \mathcal{U}$.

Prova Se $x \notin \mathrm{dom}(f)$, então $y : (x, y) \in f = \emptyset$, consequentemente

$$f(x) = \bigcap\{y : (x, y) \in f\} = \bigcap \emptyset = \mathcal{U}.$$

Agora se $x \in \mathrm{dom}(f)$, então $\{y : (x, y) \in f\} \neq \emptyset$, pelo **35 Theorem** concluímos que

$$f(x) = \bigcap\{y : (x, y) \in f\} \in \mathcal{U}.$$

///

TEOREMA 4 (70 THEOREM) *Se* f *é uma função, então* $f = \{(x, y) : y = f(x)\}$

Prova Se f é uma função então para todo $x \in \mathrm{dom}(f)$, existe um y tal que $(x, y) \in f$. Não obstante, $(x, z) \in f$ se, e somente se, $z = y$. Consequentemente,

$$\{z : (x, z) \in f\} = \{z : z = y\} = \{y\}$$

daí

$$f(x) = \bigcap\{z : (x, z) \in f\} = \bigcap\{y\} = y.$$

Assim, para todo $x \in \mathrm{dom}(f)$, vale $(x, f(x)) \in f$, particularmente

$$f = \{(x, y) : y = f(x)\}.$$

///

Imediatamente temos o

TEOREMA 5 (71 THEOREM*) *Se* f *e* g *são funções, então* $f(x) = g(x)$, *para todo* x.

Prova Imediata ao THEOREM 70. ///

AXIOMA 6 (V AXIOM OF SUBSTITUTION) *Se f é uma função e* $\operatorname{dom}(f) \in \mathcal{U}$, *então* $\operatorname{img}(f) \in \mathcal{U}$.

AXIOMA 7 (VI AXIOMA OF AMALGAMATION) *Se $x \in U$, então $\bigcup x \in \mathcal{U}$.*

DEFINIÇÃO 8 (72 DEFINITION) $x \times y = \{(u, v) : u \in x \wedge v \in y\}$.

A classe $x \times y$ é chamanda de produto cartesiano de x e y.

TEOREMA 9 (73 THEOREM) *Se $u, y \in \mathcal{U}$, então $\{u\} \times y \in \mathcal{U}$.*

Prova Construamos a seguinte função

$$f = \{(x, (u, x)) : x \in y\}.$$

Como $\operatorname{dom}(f) = x \in \mathcal{U}$, pelo axioma V concluímos

$$\{u\} \times y = \{(u, x) : x \in y\} = \operatorname{img}(f) \in \mathcal{U}.$$

///

AXIOMA 10 (V-VI AXIOM) *Se* $\operatorname{dom}(f) \in \mathcal{U}$, *então* $\bigcup \operatorname{img}(f) \in \mathcal{U}$.

Este último axioma é a síntese dos axiomas V e VI, isto é elucidado pelo seguinte

TEOREMA 11 *Os axiomas* V *e* VI *são equivalentes ao axioma* V-VI.

Prova Adimitamos que $\operatorname{dom}(f) \in \mathcal{U}$, e os axiomas V e VI, segue naturalmente $\operatorname{img}(f) \in U$ por V e $\bigcup \operatorname{img}(f) \in \mathcal{U}$ por VI.

Reciprocamente, suponhamos que $\operatorname{dom}(f) \in \mathcal{U}$, pelo axioma V-VI, segue-se que $x = \bigcup \operatorname{img}(f) \in \mathcal{U}$, logo $2^x \in \mathcal{U}$, como $\operatorname{img}(f) \subset 2^x$, pelo III AXIOM OF SUBSETS, incorremos que $\operatorname{img}(f) \in \mathcal{U}$ o que prova V. Ademais, suponhamos que $x \in \mathcal{U}$, e considemos $i = \{(u, u) : u \in x\}$, por V segue-se que $\bigcup x = \bigcup \operatorname{img}(i) \in \mathcal{U}$, o que prova VI. ///

TEOREMA 12 (74 THEOREM) *Se $x, y \in \mathcal{U}$, então $x \times y \in \mathcal{U}$.*

Prova Provar. ///