

FUNÇÕES

DEFINIÇÃO 1 $\Phi(f)$ se, e somente se, f é uma função.

TEOREMA 2 (67 THEOREM) $\text{dom}(\mathcal{U}) = \mathcal{U}$ e $\text{img}(\mathcal{U}) = \mathcal{U}$.

Prova Note que para todo $x \in \mathcal{U}$, temos que $(x, x) \in \mathcal{U}$. $\//\//$

DEFINIÇÃO 3 (68 DEFINITION) $f(x) = \bigcap\{y : (x, y) \in f\}$.

A classe $f(x)$ é o *valor* de f em x ou a *imagem* de x sob f . É importante ser observado que x pode ser entendido como elemento do $\text{dom}(f)$, e como classe. Vale deixar explícito que $f(x)$ é sempre interpretado na primeira acepção e não na segunda, ou seja

$$f(x) \neq \{y : \exists z(z \in x \wedge (z, y) \in f)\}.$$

TEOREMA 4 (69 THEOREM) Se $x \notin \text{dom}(f)$, então $f(x) = \mathcal{U}$; se $x \in \text{dom}(f)$, então $f(x) \in \mathcal{U}$.

Prova Se $x \notin \text{dom}(f)$, então $y : (x, y) \in f = \emptyset$, consequentemente

$$f(x) = \bigcap\{y : (x, y) \in f\} = \bigcap \emptyset = \mathcal{U}.$$

Agora se $x \in \text{dom}(f)$, então $\{y : (x, y) \in f\} \neq \emptyset$, pelo **35 Theorem** concluímos que

$$f(x) = \bigcap\{y : (x, y) \in f\} \in \mathcal{U}.$$

$\//\//$

TEOREMA 5 (70 THEOREM) Se f é uma função, então $f = \{(x, y) : y = f(x)\}$

Prova Se f é uma função então para todo $x \in \text{dom}(f)$, existe um y tal que $(x, y) \in f$. Não obstante, $(x, z) \in f$ se, e somente se, $z = y$. Consequentemente,

$$\{z : (x, z) \in f\} = \{z : z = y\} = \{y\}$$

daí

$$f(x) = \bigcap\{z : (x, z) \in f\} = \bigcap\{y\} = y.$$

Assim, para todo $x \in \text{dom}(f)$, vale $(x, f(x)) \in f$, particularmente

$$f = \{(x, y) : y = f(x)\}.$$

///

Imediatamente temos o

TEOREMA 6 (71 THEOREM *) Se f e g são funções, então $f(x) = g(x)$, para todo x .

Prova Imediata ao THEOREM 70.

///

AXIOMA 7 (V AXIOM OF SUBSTITUTION) Se f é uma função e $\text{dom}(f) \in \mathcal{U}$, então $\text{img}(f) \in \mathcal{U}$.

AXIOMA 8 (VI AXIOM OF AMALGAMATION) Se $x \in U$, então $\bigcup x \in \mathcal{U}$.

DEFINIÇÃO 9 (72 DEFINITION) $x \times y = \{(u, v) : u \in x \wedge v \in y\}$.

A classe $x \times y$ é chamada de produto cartesiano de x e y .

TEOREMA 10 (73 THEOREM) Se $u, y \in \mathcal{U}$, então $\{u\} \times y \in \mathcal{U}$.

Prova Construamos a seguinte função

$$f = \{(x, (u, x)) : x \in y\}.$$

Como $\text{dom}(f) = x \in \mathcal{U}$, pelo axioma V concluímos

$$\{u\} \times y = \{(u, x) : x \in y\} = \text{img}(f) \in \mathcal{U}.$$

///

AXIOMA 11 (V-VI AXIOM) Se $\text{dom}(f) \in \mathcal{U}$, então $\bigcup \text{img}(f) \in \mathcal{U}$.

Este último axioma é a síntese dos axiomas V e VI, isto é elucidado pelo seguinte

TEOREMA 12 Os axiomas V e VI são equivalentes ao axioma V-VI.

Prova Admitamos que $\text{dom}(f) \in \mathcal{U}$, e os axiomas V e VI, segue naturalmente $\text{img}(f) \in U$ por V e $\bigcup \text{img}(f) \in \mathcal{U}$ por VI.

Reciprocamente, suponhamos que $\text{dom}(f) \in \mathcal{U}$, pelo axioma V-VI, segue-se que $x = \bigcup \text{img}(f) \in \mathcal{U}$, logo $2^x \in \mathcal{U}$, como $\text{img}(f) \subset 2^x$, pelo III AXIOM OF SUBSETS, incorremos que $\text{img}(f) \in \mathcal{U}$ o que prova V. Ademais, suponhamos que $x \in \mathcal{U}$, e considemos $i = \{(u, u) : u \in x\}$, por V segue-se que $\bigcup x = \bigcup \text{img}(i) \in \mathcal{U}$, o que prova VI. ///

TEOREMA 13 (74 THEOREM) Se $x, y \in \mathcal{U}$, então $x \times y \in \mathcal{U}$.

Prova Para tanto, consideremos

$$f = \{(z, \{z\} \times y) : z \in x\}$$

Atesta-se imediatamente que f é uma função. Ora $x \in \mathcal{U}$, pelo V-VI AXIOM, segue-se que $\bigcup \text{img}(f) \in \mathcal{U}$, de sorte que se $w \in \bigcup \text{img}(f)$, então existe $v \in \text{img}(f)$, tal que $w \in v$. Pelo fato de $v \in \text{img}(f)$, existe $z \in x$, tal que $v = \{z\} \times y$, logo $w \in v = \{z\} \times y$, i.e., $w \in x \times y$; assim $\bigcup \text{img}(f) \subset x \times y$.

Por outro lado, dado $(u, v) \in x \times y$, existe $\{u\} \times y \in \text{img}(f)$, tal que $(u, v) \in \{u\} \times y$, i.e., $x \times y \subset \bigcup \text{img}(f)$.

Destarte, pelo 27 THEOREM, incorremos que

$$x \times y = \bigcup \text{img}(f).$$

///

TEOREMA 14 (75 THEOREM) Se f é uma função e $\text{dom } f \in \mathcal{U}$, então $f \in U$.

Prova É suficiente notar que pelo 38 THEOREM $2^{x \times y} \in U$, pois $x, y \in \mathcal{U}$. Daí fazendo $x = \text{dom}(f)$ e $y = \text{img}(f)$ concluímos do AXIOM V-VI que $y \in \mathcal{U}$. Como $f \subset 2^{x \times y} \in U$, do 33 THEOREM, segue-se que $f \in \mathcal{U}$. //

DEFINIÇÃO 15 (76 DEFINITION)

$$y^x = \{f : \Phi(f) \wedge x = \text{dom}(f) \wedge \text{img}(f) \subset y\}.$$

TEOREMA 16 (77 THEOREM) Se $x, y \in \mathcal{U}$, então $y^x \in \mathcal{U}$.

Prova Provar. //