UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
PROCESSO SELETIVO PARA PROFESSOR SUBSTITUTO

AUTOVALORES, AUTOVETORES E DIAGONALIZAÇÃO

por

Harllen Araújo de Sena
<harllen.araujo@gmail.com>

João Pessoa
2026

Sumário

Sumário

Sumário

Sumário

Sumário

Autovalores e autovetores

Definição 1

Sejam V um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{K}$ (usualmente $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$) e $T : V \to V$ uma transformação linear. Dizemos que $\lambda \in \mathbb{K}$ é um ***autovalor****, ou valor característico, ou ainda valor próprio se, e somente se, existir um vetor $v \in V$, não nulo, tal que $Tv = \lambda v$. O vetor associado ao autovalor λ é chamado de* ***autovetor****, vetor característico, ou vetor próprio.*

Numa perspectiva geométrica T é preserva a reta (espaço de unidimensional) que tem v como um de seus vetores diretores, *viz.*

$$[v] = \{u : \exists\varkappa(\varkappa \in \mathbb{K} \wedge u = \varkappa v)\}, \tag{1}$$

o subespaço vetorial gerado por v.

Exemplo 1

Considere a aplicação $H_\lambda : V \to V$*, dada por* $H_\lambda = \lambda I$*. Supondo que* $V \neq \{0\}$*, segue-se que* λ *é um autovalor de* H_λ*.*

Exemplo 2

Sejam $\mathscr{D}$ o cojunto das funções diferenciáveis em A, aberto de $\mathbb{R}$, com imagens em $\mathbb{R}$, e D o operador derivada. É conhecido do cálculo que D é linear em $\mathscr{D}$ e para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, tem-se

$$De^{\lambda x} = \lambda e^{\lambda x}. \tag{2}$$

Em palavras a função $f \in \mathscr{D}$ definida por $f(x) = e^{\lambda x}$ é um autovalor de D com autovetor f.

Exemplo 3

Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *cuja matriz relativa à base canônica do* $\mathbb{R}^2$ *é*

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \tag{3}$$

Seus autovalores são dados resolvendo-se o sistema

$$\begin{cases} 2x + 3y = \lambda x \\ -x + y = \lambda y \end{cases} \tag{4}$$

Determinamos

$$(1-\lambda)y = x, \tag{5}$$

Como queremos um vetor não nulo, segue-se de (5) que $x, y \neq 0$ em consequência

$$\big((2-\lambda)(1-\lambda)+3\big)y = 0. \tag{6}$$

acarreta

(7) $$\lambda^2 - 3\lambda + 5 = 0$$

como

(8) $$\Delta = 9 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = -11 < 0$$

não existe autovalores.

Exemplo 4 (Rotações)

Podemos naturalmente considerar $\mathbb{C}^2$ como um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$. Definamos a transformação linear $R_\theta : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$, dada por $R_\theta z = e^{i\theta} z$, geometricamente multiplicar por um complexo significa rotacionar por um certo ângulo e aplicar uma homotetia.

Supondo $\theta \in R \neg \pi\mathbb{Z}$, então não existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$\lambda z = R_\theta z = e^{i\theta} z. \tag{9}$$

Com efeito, (9) nos diz que

$$\lambda = e^{i\theta} = \cos\theta + i \sin\theta, \tag{10}$$

o que por sua vez acarreta que $\sin\theta = 0$, o que não é o caso, pois escolhemos $\theta \in R \neg \pi\mathbb{Z}$. Logo, R_θ, não possui autovalores.

Exemplo 5

Seja V o espaço vetorial de todas as funções contínuas de R em R. Seja T o operador linear em V definido por

(11) $$(Tf)(x) = \int_0^x f(t)\,dt.$$

Por reductio ad absurdum seja $f \in V \neg \{0\}$ tal que $Tf = \lambda f$. Do cálculo, segue-se que existe apenas uma única função tal que

(12) $$\int_0^x f(t)\,dt = \lambda f(x),$$

a saber $f(x) = e^{\lambda x}$. No entanto, de

$$\int_0^x f(t)\, dt = \lambda f(x), \tag{13}$$

e do teorema fundamental do cálculo tem-se

$$\lambda e^{\lambda x} = \int_0^x e^{\lambda x}\ dx = e^{\lambda x} - 1, \tag{14}$$

donde

$$e^{\lambda x} = \frac{1}{1-\lambda}. \tag{15}$$

o que é um absurdo.

Definição 2

Dada uma transformação linear T em um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{K}$, sabe-se que

$$A_\lambda = \ker(T - \lambda I) = \{v : v \in V \wedge (T - \lambda)v = 0\}, \tag{16}$$

*é um espaço vetorial. Nos referiremos a A_λ como o **autoespaço** associado ao autovalor λ.*

Exemplos com poucas dimensões podem ser tratados via sistemas e análise de casos, mas, e se a matriz da transformação tiver milhões ou até bilhões de entradas?

Qual a razão de se considerar uma matriz com um número muito grande de entradas?

O porquê de se considerar matrizes gigantes

Cito alguns ramos da ciência onde faz-se a necessidade de análise do conjunto de autovalores de matrizes enormes:

I. Algoritmos de ranking;
II. Dinâmica estrutural e engenharia civil;
III. Mecânica quântica e química computacional;
IV. Reconhecimento facial e compressão (PCA);
V. Redes sociais e análise de grafos.

Polinômio característico

A solução engenhosa encontra-se na álgebra. Ela jaz nas raízes de um polinômio especial, a saber, o **polinômio característico**.

Seja V um espaço vetorial não trivial e $T : V \to V$ uma transformação linear. O **polinômio característico** p_T é definido como

$$p_T(\lambda) = \det(\lambda - T) \qquad \text{ou} \qquad p_T(\lambda) = \det(T - \lambda), \tag{17}$$

pois o que nos interessa aqui são as suas raízes.

Indiferença do polinômio característico à base

O polinômio característico é determinado via uma representação matricial dum operador numa base ordenada $\mathfrak{a} \in \mathbb{K}^n$, com $n \in \omega$. O que acontece se eu representar o operador por outra base $\mathfrak{b}$?

Indiferença do polinômio característico à base

Sabe-se que se $[T]_{\mathfrak{c}}$ é a representação matricial de T na base $\mathfrak{c} \in \{\mathfrak{a}, \mathfrak{c}\}$, então vale a identidade

$$[T]_{\mathfrak{b}} = [I]_{\mathfrak{b}}^{\mathfrak{a}} \, [T]_{\mathfrak{a}} \, [I]_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}}. \tag{18}$$

Indiferença do polinômio característico à base

Sabendo que $P = [I]_{\mathfrak{b}}^{\mathfrak{a}} = ([I]_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}})^{-1}$, segue-se que $[T]_{\mathfrak{a}}$ e $[T]_{\mathfrak{b}}$, são similares. Consequentemente,

$$\begin{aligned}
\det(\lambda - [T]_{\mathfrak{b}}) &= \det\big(P(\lambda - [T]_{\mathfrak{a}})P^{-1}\big) \\
&= \det(P)\det\big((\lambda - [T]_{\mathfrak{a}})\big)\det(P^{-1}) \\
&= \det(P)\det\big((\lambda - [T]_{\mathfrak{a}})\big)\det(P)^{-1} \\
&= \det\big(\lambda - [T]_{\mathfrak{a}}\big).
\end{aligned} \tag{19}$$

Portanto, o polinômio característico é inexorável à mudança de base.

Note que que p_T ter raiz, é uma condição suficiente para que o núcleo de $\lambda - T$ seja não trivial ($\{0\}$), pois neste caso o operador é não invertível. Doravante, denotaremos

$$A_\lambda = \ker(\lambda - T) = \{v : v \in V \wedge (T - \lambda)v = 0\}. \tag{20}$$

E o referiremos como **auto-espaço** associado ao autovalor λ.

Vale a pena indagar

E se a matriz da transformação não for quadrada? Neste caso, considera-se os autovalores de $T^t T$, cuja matriz é quadrada. Estes valores são chamados de **valores singulares**.

Nesta apresentação nos restringiremos às transformações ou automorfismos em V, consequentemente as matrizes serão inevitalvemente quadradas.

A seguir veremos um método de como obter explicitamente os valores característicos diretamente da representação matricial numa determinada base.

A título de ilustração, consideremos λ_i com $i \in \{1, \ldots, r\}$ os autovalores de T e, suponhamos que V admite uma base de autovetores, digamos $\mathfrak{a} \in V^n$. Naturalmente, temos que relativa à esta base a matriz de T, fica

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & & & & & \\ & \ddots & & & 0 & \\ & & \lambda_1 & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & \lambda_r & \\ & 0 & & & & \ddots & \\ & & & & & & \lambda_r \end{bmatrix} \tag{21}$$

Conformemente, isto simplifica a determinação dos valores característicos.

Relativo à base de autovetores o polinômio característico fica fatorado em termos lineares mônicos

$$p_T(\lambda) = \prod_{i=1}^{r} (\lambda - \lambda_i)^{m_i}, \tag{22}$$

em que m_i são as **multiplicidades algébricas** dos repectivos autovalores λ_i.

Definição 3

*Sejam $V \neq \{0\}$ um espaço vetorial e $T : V \to V$ um operador linear. Diremos que T é **diagonalizável** quando V admite uma base composta de autovetores.*

Exemplo 6 (Operador não diagnoalizável)

Considere um corpo algebricamente fechado $\mathbb{K}$, i.e., todo polinômio não nulo em $\mathbb{K}[x]$ admite raiz. Sejam $V = \mathbb{K}^2$ como espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$, e $T : V \to V$ operador cuja matriz na base canônica de V é

$$[T] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{23}$$

Naturalmente,

$$p_T(\lambda) = \lambda^2. \tag{24}$$

Destarte, só existe um único autovalor, a saber, 0. Nota-se de

(25) $$[T] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

que o posto de T é 1, segue do teorema núcleo-imagem que

(26) $$\dim A_0 = \dim V - \dim \mathfrak{I}T = 2 - 1 = 1$$

Consequentemente, não pode existir uma base composta por autovetores. Logo, T, não é diagonalizável.

Polinômios anuladores de matrizes

Seja $p \in \mathbb{K}[x]$, diremos que o polinômio p anula uma matriz $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ se, e somente se, ao se substituir x por A na expressão de p obtemos $p(A) = 0$, sendo 0 a matriz nula.

Em termos simples estamos fazendo a seguinte abstração:

I. Consideremos

$$p(x) = a_0 x^0 + \ldots + a_n x^n; \tag{27}$$

II. Trocamos x por A em (27) obtendo

$$p(A) = a_0 A^0 + \ldots + a_n A^n; \tag{28}$$

III. Desejamos saber se este novo objeto, a saber, uma matriz, denotada por $p(A)$ é nula.

Polinômio minimal

Definição 4

O polinômio minimal de um operador T é um polinômio m_T possuindo as seguintes propriedades:

I. $m_T([T]) = 0$;

II. *Se* $p([T]) = 0$, *então* $m_T | p$.

Teorema 1

Sejam T um operador e p_T seu polinômio característico. Então $p_T([T]) = 0$.

Deste teorema inferimos que $m_T | p_T$, sendo m_T o polinômio minimal de T.

Critério de diagonalização dum operador

Teorema 2

Seja T um operador. Então T é diagonalizável se, e somente se, o polinômio minimal for

$$m_T(\lambda) = \prod_{i=1}^{r} (\lambda - \lambda_i). \tag{29}$$

Em que os λ_i são precisamente os autovalores distintos de T, ou as raízes de p_T, o polinômio característico de T.

Forma de Jordan

Classificação das cônicas

Sistemas de equações diferenciais lineares

Bibliografia

[1] BOLDRINI, JOSÉ LUIZ *et al*. *Álgebra Linear*. 3ª ed. São Paulo: Harper & Row do Brasil, 1980.

[2] HALMOS, PAUL R. *Finite Dimensional Vector Spaces*. 2nd ed. Mineloa, New York: Dover Publications, 2017.

[3] HOFFMAN, KENNETH; KUNZE, RAY. *Linear Algebra*. 2nd ed. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall, 1961.