

UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA  
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA  
PROCESSO SELETIVO PARA PROFESSOR SUBSTITUTO

# ***AUTOVALORES, AUTOVETORES E DIAGONALIZAÇÃO***

*por*

Harllen Araújo de Sena  
<harllen.araujo@gmail.com>

João Pessoa  
2026

# *Sumário*

## *1. Introdução*

# *Sumário*

*1. Introdução*

*2. Autovalores e autovetores*

# Sumário

*1. Introdução*

*2. Autovalores e autovetores*

*3. Polinômio característico*

# Sumário

*1. Introdução*

*2. Autovalores e autovetores*

*3. Polinômio característico*

*4. Diagonalização de operadores*

# Sumário

1. *Introdução*

2. *Autovalores e autovetores*

3. *Polinômio característico*

4. *Diagonalização de operadores*

5. *Aplicações*

## INTRODUÇÃO

## Autovalores e autovetores

### Definição 1

Sejam  $V$  um espaço vetorial sobre um corpo  $\mathbb{K}$  (usualmente  $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ ) e  $T : V \rightarrow V$  uma transformação linear. Dizemos que  $\lambda \in \mathbb{K}$  é um **autovalor**, ou valor característico, ou ainda valor próprio se, e somente se, existir um vetor  $v \in V$ , não nulo, tal que  $Tv = \lambda v$ . O vetor associado ao autovalor  $\lambda$  é chamado de **autovetor**, vetor característico, ou vetor próprio.



Numa perspectiva geométrica  $T$  é preserva a reta (espaço de unidimensional) que tem  $v$  como um de seus vetores diretores, *viz.*

$$(1) \quad [v] = \{u : \exists \lambda (\lambda \in \mathbb{K} \wedge u = \lambda v)\},$$

o subespaço vetorial gerado por  $v$ .

### Exemplo 1

Considere a aplicação  $H_\lambda : V \rightarrow V$ , dada por  $H_\lambda = \lambda I$ . Supondo que  $V \neq \{0\}$ , segue-se que  $\lambda$  é um autovalor de  $H_\lambda$ .

## Exemplo 2

Sejam  $\mathcal{D}$  o conjunto das funções diferenciáveis em  $A$ , aberto de  $\mathbb{R}$ , com imagens em  $\mathbb{R}$ , e  $D$  o operador derivada. É conhecido do cálculo que  $D$  é linear em  $\mathcal{D}$  e para todo  $\lambda \in \mathbb{R}$ , tem-se

$$(2) \quad D e^{\lambda x} = \lambda e^{\lambda x}.$$

Em palavras a função  $f \in \mathcal{D}$  definida por  $f(x) = e^{\lambda x}$  é um autovalor de  $D$  com autovetor  $f$ .

### Exemplo 3

Seja  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  cuja matriz relativa à base canônica do  $\mathbb{R}^2$  é

$$(3) \quad \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Seus autovalores são dados resolvendo-se o sistema

$$(4) \quad \begin{cases} 2x + 3y = \lambda x \\ -x + y = \lambda y \end{cases}$$

Determinamos

$$(5) \quad (1 - \lambda)y = x,$$

Como queremos um vetor não nulo, segue-se de (5) que  $x, y \neq 0$  em consequência

$$(6) \quad ((2 - \lambda)(1 - \lambda) + 3)y = 0.$$

acarreta

$$(7) \quad \lambda^2 - 3\lambda + 5 = 0$$

como

$$(8) \quad \Delta = 9 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = -11 < 0$$

não existe autovalores.

### Exemplo 4 (Rotações)

*Podemos naturalmente considerar  $\mathbb{C}^2$  como um espaço vetorial sobre  $\mathbb{R}$ . Definamos a transformação linear  $R_\theta : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ , dada por  $R_\theta z = e^{i\theta} z$ , geometricamente multiplicar por um complexo significa rotacionar por um certo ângulo e aplicar uma homotetia.*

Supondo  $\theta \in R \cap \pi\mathbb{Z}$ , então não existe  $\lambda \in \mathbb{R}$  tal que

$$(9) \quad \lambda z = R_\theta z = e^{i\theta} z.$$

Com efeito, (9) nos diz que

$$(10) \quad \lambda = e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta,$$

o que por sua vez acarreta que  $\sin \theta = 0$ , o que não é o caso, pois escolhemos  $\theta \in R \cap \pi\mathbb{Z}$ . Logo,  $R_\theta$ , não possui autovalores.



### Exemplo 5

Seja  $V$  o espaço vetorial de todas as funções contínuas de  $\mathbb{R}$  em  $\mathbb{R}$ . Seja  $T$  o operador linear em  $V$  definido por

$$(11) \quad (Tf)(x) = \int_0^x f(t) dt.$$

Por *reductio ad absurdum* seja  $f \in V \setminus \{0\}$  tal que  $Tf = \lambda f$ . Do cálculo, segue-se que existe apenas uma única função tal que

$$(12) \quad \int_0^x f(t) dt = \lambda f(x),$$

a saber  $f(x) = e^{\lambda x}$ . No entanto, de

$$(13) \quad \int_0^x f(t) dt = \lambda f(x),$$

e do teorema fundamental do cálculo tem-se

$$(14) \quad \lambda e^{\lambda x} = \int_0^x e^{\lambda x} dx = e^{\lambda x} - 1,$$

donde

$$(15) \quad e^{\lambda x} = \frac{1}{1 - \lambda}.$$

o que é um absurdo.

## Definição 2

*Dada uma transformação linear  $T$  em um espaço vetorial sobre um corpo  $\mathbb{K}$ , sabe-se que*

$$(16) \quad A_\lambda = \ker(T - \lambda I) = \{v : v \in V \wedge (T - \lambda)v = 0\},$$

*é um espaço vetorial. Nos referiremos a  $A_\lambda$  como o **autoespaço** associado ao autovalor  $\lambda$ .*

Exemplos com poucas dimensões podem ser tratados via sistemas e análise de casos, mas, e se a matriz da transformação tiver milhões ou até bilhões de entradas?

Qual a razão de se considerar uma matriz com um número muito grande de entradas?

## *O porquê de se considerar matrizes gigantes*

Cito alguns ramos da ciência onde faz-se a necessidade de análise do conjunto de autovalores de matrizes enormes:

- I. Algoritmos de ranking;
- II. Dinâmica estrutural e engenharia civil;
- III. Mecânica quântica e química computacional;
- IV. Reconhecimento facial e compressão (PCA);
- V. Redes sociais e análise de grafos.

## *Polinômio característico*

A solução engenhosa encontra-se na álgebra. Ela jaz nas raízes de um polinômio especial, a saber, o **polinômio característico**.

Seja  $V$  um espaço vetorial não trivial e  $T : V \rightarrow V$  uma transformação linear. O **polinômio característico**  $p_T$  é definido como

$$(17) \quad p_T(\lambda) = \det(\lambda - T) \quad \text{ou} \quad p_T(\lambda) = \det(T - \lambda),$$

pois o que nos interessa aqui são as suas raízes.



## *Indiferença do polinômio característico à base*

O polinômio característico é determinado via uma representação matricial dum operador numa base ordenada  $\alpha \in \mathbb{K}^n$ , com  $n \in \omega$ . O que acontece se eu representar o operador por outra base  $\mathfrak{b}$ ?

## *Indiferença do polinômio característico à base*

Sabe-se que se  $[T]_c$  é a representação matricial de  $T$  na base  $c \in \{\alpha, c\}$ , então vale a identidade

$$(18) \quad [T]_b = [I]_b^a [T]_a [I]_a^b.$$

## Indiferença do polinômio característico à base

Sabendo que  $P = [I]_b^a = ([I]_a^b)^{-1}$ , segue-se que  $[T]_a$  e  $[T]_b$ , são similares. Consequentemente,

$$\begin{aligned} \det(\lambda - [T]_b) &= \det(P(\lambda - [T]_a)P^{-1}) \\ (19) \qquad &= \det(P) \det((\lambda - [T]_a)) \det(P^{-1}) \\ &= \det(P) \det((\lambda - [T]_a)) \det(P)^{-1} \\ &= \det(\lambda - [T]_a). \end{aligned}$$

Portanto, o polinômio característico é inexorável à mudança de base.

Note que que  $p_T$  ter raiz, é uma condição suficiente para que o núcleo de  $\lambda - T$  seja não trivial ( $\{0\}$ ), pois neste caso o operador é não invertível. Doravante, denotaremos

$$(20) \quad A_\lambda = \ker(\lambda - T) = \{v : v \in V \wedge (T - \lambda)v = 0\}.$$

E o referiremos como **auto-espaço** associado ao autovalor  $\lambda$ .

## *Vale a pena indagar*

E se a matriz da transformação não for quadrada? Neste caso, considera-se os autovalores de  $T^t T$ , cuja matriz é quadrada. Estes valores são chamados de **valores singulares**.

Nesta apresentação nos restringiremos às transformações ou automorfismos em  $V$ , conseqüentemente as matrizes serão inevitavelmente quadradas.

A seguir veremos um método de como obter explicitamente os valores característicos diretamente da representação matricial numa determinada base.

A título de ilustração, consideremos  $\lambda_i$  com  $i \in \{1, \dots, r\}$  os autovalores de  $T$  e, suponhamos que  $V$  admite uma base de autovetores, digamos  $\alpha \in V^n$ . Naturalmente, temos que relativa à esta base a matriz de  $T$ , fica



$$(21) \quad \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda_1 & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & \lambda_r & \\ & 0 & & & & \ddots \\ & & & & & & \lambda_r \end{bmatrix}$$

Conformemente, isto simplifica a determinação dos valores característicos.

Relativo à base de autovetores o polinômio característico fica fatorado em termos lineares mônicos

$$(22) \quad p_T(\lambda) = \prod_{i=1}^r (\lambda - \lambda_i)^{m_i},$$

em que  $m_i$  são as **multiplicidades algébricas** dos respectivos autovalores  $\lambda_i$ .

### Definição 3

Sejam  $V \neq \{0\}$  um espaço vetorial e  $T : V \rightarrow V$  um operador linear. Diremos que  $T$  é **diagonalizável** quando  $V$  admite uma base composta de autovetores.

### Exemplo 6 (Operador não diagonalizável)

Considere um corpo algebricamente fechado  $\mathbb{K}$ , i.e., todo polinômio não nulo em  $\mathbb{K}[x]$  admite raiz. Sejam  $V = \mathbb{K}^2$  como espaço vetorial sobre  $\mathbb{K}$ , e  $T : V \rightarrow V$  operador cuja matriz na base canônica de  $V$  é

$$(23) \quad [T] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Naturalmente,

$$(24) \quad p_T(\lambda) = \lambda^2.$$

Destarte, só existe um único autovalor, a saber, 0. Nota-se de

$$(25) \quad [T] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

que o posto de  $T$  é 1, segue do teorema núcleo-imagem que

$$(26) \quad \dim A_0 = \dim V - \dim \mathcal{I}T = 2 - 1 = 1$$

Consequentemente, não pode existir uma base composta por autovetores. Logo,  $T$ , não é diagonalizável.

## *Polinômios anuladores de matrizes*

Seja  $p \in \mathbb{K}[x]$ , diremos que o polinômio  $p$  anula uma matriz  $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$  se, e somente se, ao se substituir  $x$  por  $A$  na expressão de  $p$  obtemos  $p(A) = 0$ , sendo  $0$  a matriz nula.

Em termos simples estamos fazendo a seguinte abstração:

I. Consideremos

$$(27) \quad p(x) = a_0x^0 + \dots + a_nx^n;$$

II. Trocamos  $x$  por  $A$  em (27) obtendo

$$(28) \quad p(A) = a_0A^0 + \dots + a_nA^n;$$

III. Desejamos saber se este novo objeto, a saber, uma matriz, denotada por  $p(A)$  é nula.

## Polinômio minimal

### Definição 4

*O polinômio minimal de um operador  $T$  é um polinômio  $m_T$  possuindo as seguintes propriedades:*

- I.  $m_T([T]) = 0$ ;*
- II. Se  $p([T]) = 0$ , então  $m_T | p$ .*



### Teorema 1

*Sejam  $T$  um operador e  $p_T$  seu polinômio característico. Então  $p_T([T]) = 0$ .*

Deste teorema inferimos que  $m_T | p_T$ , sendo  $m_T$  o polinômio minimal de  $T$ .

## *Critério de diagonalização dum operador*

### Teorema 2

*Seja  $T$  um operador. Então  $T$  é diagonalizável se, e somente se, o polinômio minimal for*

$$(29) \quad m_T(\lambda) = \prod_{i=1}^r (\lambda - \lambda_i).$$

*Em que os  $\lambda_i$  são precisamente os autovalores distintos de  $T$ , ou as raízes de  $p_T$ , o polinômio característico de  $T$ .*

## *Forma de Jordan*

## *Classificação das cônicas*

## *Sistemas de equações diferenciais lineares*

## Bibliografia

- [1] BOLDRINI, JOSÉ LUIZ *et al.* *Álgebra Linear*. 3<sup>a</sup> ed. São Paulo: Harper & Row do Brasil, 1980.
- [2] HALMOS, PAUL R. *Finite Dimensional Vector Spaces*. 2<sup>nd</sup> ed. Mineloa, New York: Dover Publications, 2017.
- [3] HOFFMAN, KENNETH; KUNZE, RAY. *Linear Algebra*. 2<sup>nd</sup> ed. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall, 1961.