Statistinės hipotezės

Prieš pradedant spręsti 13 užduotį reikėtų susipažinti su paskaitose aptariamais statistinių hipotezių tikrinimo uždaviniais ir jų sprendimo būdais.
Trumpai priminsime kai kurias sąvokas. Tegu $x = \langle x_1, x_2, ..., x_n \rangle$ yra imtis, gauta stebint atsitiktinio dydžio X reikšmes. Šios imties *vidurkiu* ir *dispersija* vadinami skaičiai

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\,, \quad s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2\,.$$

Pagal imties x duomenis su reikšmingumo lygmeniu α tikrinama statistinė hipotezė H_0. Hipotezės H_0 tikrinimo kriterijus priklauso nuo to, kokia yra jos alternatyva, įprastai žymima H_1.
Kriterijaus *p-reikšmę* žymėsime p_R. Hipotezė H_0 priimama, jei $p_R \geq \alpha$.

1. Hipotezės apie normaliojo atsitiktinio dydžio parametrus. Tarkime, kad $X \sim \mathcal{N}(a; \sigma^2)$ su nežinomais vidurkiu $EX = a$ ir dispersija $DX = \sigma^2$.

1.1 Hipotezė apie vidurkį. Su reikšmingumo lygmeniu α tikrinsime statistinę hipotezę

$H_0: \ a = a_0$.

Pirmiausiai pagal turimus imties duomenis apskaičiuojame

$$t = \frac{\bar{x} - a_0}{s/\sqrt{n}}\,. \tag{1}$$

Jei hipotezė H_0 teisinga, tai t yra atsitiktinio dydžio $T_{n-1} \sim \mathcal{S}t(n-1)$ reikšmė. Pažymėkime $F_{\mathcal{S}t}(u; n-1) = P(T_{n-1} < u)$ Studento atsitiktinio dydžio T_{n-1} pasiskirstymo funkciją, $t_\alpha(n-1) = F_{\mathcal{S}t}^{-1}(\alpha; n-1)$ atsitiktinio dydžio T_{n-1} lygmens α kvantilį.

Hipotezė H_0 priimama, kai

1) $t \leq t_{1-\alpha}(n-1) \iff p_R = 1 - F_{\mathcal{S}t}(t; n-1) \geq \alpha$, jei $H_1: \ a > a_0$;
2) $|t| \leq t_{1-\alpha/2}(n-1) \iff p_R = 2(1 - F_{\mathcal{S}t}(|t|; n-1)) \geq \alpha$, jei $H_1: \ a \neq a_0$;
3) $t \geq -t_{1-\alpha}(n-1) \iff p_R = F_{\mathcal{S}t}(t; n-1) \geq \alpha$, jei $H_1: \ a < a_0$.

1.2 Hipotezė apie dispersiją. Su reikšmingumo lygmeniu α tikrinsime statistinę hipotezę

$H_0: \ \sigma^2 = \sigma_0^2$.

Pirmiausiai pagal turimus imties duomenis apskaičiuojame

$$\chi^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}\,. \tag{2}$$

Jei hipotezė H_0 teisinga, tai χ^2 yra atsitiktinio dydžio $\chi^2_{n-1} \sim \chi^2(n-1)$ reikšmė. Pažymėkime $F_2(u; n-1) = P(\chi^2_{n-1} < u)$ "chi kvadratu" atsitiktinio dydžio χ^2_{n-1} pasiskirstymo funkciją, $\chi^2_\alpha(n-1) = F_2^{-1}(\alpha; n-1)$ atsitiktinio dydžio χ^2_{n-1} lygmens α kvantilį.

Hipotezė H_0 priimama, kai

1) $\chi^2 \leq \chi^2_{1-\alpha}(n-1) \iff p_R = 1 - F_2(\chi^2; n-1) \geq \alpha$, jei $H_1: \ \sigma^2 > \sigma_0^2$;
2) $\chi^2_{\alpha/2}(n-1) \leq \chi^2 \leq \chi^2_{1-\alpha/2}(n-1) \iff p_R = 2\min\{F_2(\chi^2; n-1),\ 1 - F_2(\chi^2; n-1)\} \geq \alpha$, jei $H_1: \ \sigma^2 \neq \sigma_0^2$;
3) $\chi^2 \geq \chi^2_\alpha(n-1) \iff p_R = F_2(\chi^2; n-1) \geq \alpha$, jei $H_1: \ \sigma^2 < \sigma_0^2$.

2. Hipotezės apie sėkmės tikimybę. Tarkime, kad bandymo rezultatas yra atsitiktinis dydis $X \sim \mathcal{B}(1; p)$ su nežinoma sėkmės tikimybe p, o atlikę n nepriklausomų bandymų gavome m sėkmių. Su reikšmingumo lygmeniu α tikrinsime statistinę hipotezę

$H_0: \ p = p_0$.

Nagrinėsime du kriterijus, kurie pasirenkami priklausomai nuo imties dydžio.

2.1 Normalioji aproksimacija. Didelėms imtims hipotezės H_0 tikrinimo kriterijus yra panašus į **1.1** kriterijų. Šiuo atveju $\bar{x} = m/n$. Jeigu hipotezė H_0 yra teisinga, tai $EX = p_0, \ DX = p_0(1-p_0)$, o skaičius

$$z = \frac{m/n - p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)/n}} \tag{3}$$

yra normaliojo atsitiktinio dydžio $Z \sim \mathcal{N}(0;1)$ reikšmė. Pažymėkime
$\Phi(u) = P(Z < u)$ standartinio normaliojo atsitiktinio dydžio Z pasiskirstymo funkciją,
$z_\alpha = \Phi^{-1}(\alpha)$ atsitiktinio dydžio Z lygmens α kvantilį.

Hipotezė H_0 priimama, kai

1) $z \le z_{1-\alpha} \iff p_R = 1 - \Phi(z) \ge \alpha$, jei $H_1: \ p > p_0$;
2) $|z| \le z_{1-\alpha/2} \iff p_R = 2(1 - \Phi(|z|)) \ge \alpha$, jei $H_1: \ p \ne p_0$;
3) $z \ge -z_{1-\alpha} \iff p_R = \Phi(z) \ge \alpha$, jei $H_1: \ p < p_0$.

2.2 Kriterijus mažoms imtims. Kai n nėra labai didelis, galima taikyti "tikslų" kriterijų. Tegu S_n yra sėkmių skaičius, atlikus n bandymų. Skaičiuojame atsitiktinio dydžio S_n reikšmių sąlygines tikimybes $P(S_n = k \,|\, H_0)$. Hipotezė H_0 priimama, kai

1) $p_R = P(S_n \ge m \,|\, H_0) \ge \alpha$, jei $H_1: \ p > p_0$;
2) $p_R = 2 \min\{P(S_n \ge m \,|\, H_0),\, P(S_n \le m \,|\, H_0)\} \ge \alpha$, jei $H_1: \ p \ne p_0$;
3) $p_R = P(S_n \le m \,|\, H_0) \ge \alpha$, jei $H_1: \ p < p_0$.

3. Hipotezė apie koreliacijos koeficientą. Tegu $\langle (x_1, y_1), (x_2, y_2), ..., (x_n, y_n) \rangle$ yra imtis, gauta stebint dvimačio atsitiktinio dydžio (X, Y) reikšmes. Su reikšmingumo lygmeniu α tikrinsime statistinę hipotezę apie koreliacijos koeficiento $\rho = \rho(X, Y)$ lygybę nuliui

$H_0: \ \rho = 0$.

Pirmiausiai pagal turimus imties duomenis apskaičiuojame empirinį koreliacijos koeficientą

$$r = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}}{(n-1)s_x s_y}$$

ir

$$t_r = r\sqrt{\frac{n-2}{1-r^2}}\,. \tag{4}$$

Jei hipotezė H_0 teisinga, tai t_r yra Studento atsitiktinio dydžio $T_{n-2} \sim \mathcal{S}t(n-2)$ reikšmė. Todėl hipotezė H_0 priimama, kai

1) $t_r \le t_{1-\alpha}(n-2) \iff p_R = 1 - F_{\mathcal{S}t}(t_r; n-2) \ge \alpha$, jei $H_1: \ \rho > 0$;
2) $|t_r| \le t_{1-\alpha/2}(n-2) \iff p_R = 2(1 - F_{\mathcal{S}t}(|t_r|; n-2)) \ge \alpha$, jei $H_1: \ \rho \ne 0$;
3) $t_r \ge -t_{1-\alpha}(n-2) \iff p_R = F_{\mathcal{S}t}(t_r; n-2) \ge \alpha$, jei $H_1: \ \rho < 0$.

4. Kvantilių ir $p-$ reikšmių skaičiavimo pavyzdžiai. Skaičiavimams naudotos Excel funkcijos.

$t_{0,95}(8) = \texttt{t.inv}(0,95;\, 8) \approx 1,85955.$
$\chi^2_{0,95}(40) = \texttt{chisq.inv}(0,95;\, 40) \approx 55,75848.$
$z_{0,95} = \texttt{norm.s.inv}(0,95) \approx 1,64485.$
$F_{\mathcal{S}t}(1,2;\, 9) = \texttt{t.dist}(1,2;\, 9;\, \mathit{true}) \approx 0,86961.$
$F_2(6,4;\, 11) = F_{\chi^2}(6,4;\, 11) = \texttt{chisq.dist}(6,4;\, 11;\, \mathit{true}) \approx 0,15461.$
$\Phi(0,352) = \texttt{norm.s.dist}(0,352;\, \mathit{true}) \approx 0,63758.$

Jeigu $S_9 \sim \mathcal{B}(9;\, 0,7)$, tai

$$P(S_9 \ge 4) = 1 - P(S_9 \le 3) = 1 - \texttt{binom.dist}(3;\, 9;\, 0,7;\, \mathit{true}) \approx 0,97471.$$