2023 metų tikimybių teorijos ir matematinės statistikos egzamino klausimai

Egzamino užduotį sudarys klausimai iš šio sąrašo (tik skaitiniai duomenys bei žymėjimai gali būti pakeisti). Vieno klausimo vertė - 0,5 balo. Užduotyje bus 8 klausimai. Atsakinėjant į klausimus, tiksliai apskaičiuoti dydžius (tikimybes, vidurkius,...) nebūtina. Tačiau būtina užrašyti reiškinius šiems dydžiams skaičiuoti, pavyzdžiui, $P(X=1)=0{,}6^{10}$. *Sėkmės!*

Klasikinis tikimybės apibrėžimas

1. Bandymas: lošimo kauliuko ir dviejų monetos metimas. Kaip pavaizduotumėte vienodai galimas tokio bandymo baigtis? Kiek yra šio bandymo baigčių?

2. Bandymas: trijų žaidėjų žaidimas kamuoliu. Vienas iš jų ima kamuolį, perduoda kitam, tas dar kitam. Kam perduoti kamuolį, žaidėjas pasirenka atsitiktinai, pasirinkimo tikimybės vienodos. Kokia tikimybė, kad pradėjęs žaidimą gaus kamuolį tik po 4 perdavimų?

3. Studentas žino penkis būdus pasiteisinti dėl neatliktos užduoties. Jis neatliko trijų užduočių. Keliais būdais jis gali pasiteisinti, jeigu to paties pasiteisinimo iš eilės dviejų kartų naudoti negalima?

4. Bandymas: trys draugai laiko egzaminą. Kadangi jie atsiskaitė už pratybų užduotis, tai garantuotai išlaikys egzaminą, t.y., gaus vieną iš įvertinimų 5,6,7,8,9,10. Kiek palankių baigčių turi įvykis: „ne visi draugai bus įvertinti skirtingai“?

5. Bandymas: trys draugai laiko egzaminą. Kadangi jie atsiskaitė už pratybų užduotis, tai garantuotai išlaikys egzaminą, t.y., gaus vieną iš įvertinimų 5,6,7,8,9,10. Kokia įvykio „lygiai du draugai gaus vienodus pažymius“ tikimybė?

6. Urnoje yra keturi balti ir trys juodi rutuliai. Jie traukiami iš urnos vienas po kito, kol urna ištuštėja. Kokia tikimybė, kad pirmas ir paskutinis rutulys bus balti?

7. Kortų kaladėje yra 52 kortos. Atsitiktinai traukiamos penkios kortos. Kokia tikimybė, kad tarp ištrauktųjų kortų bus lygiai du tūzai?

8. Kortų kaladėje yra 52 kortos, 13 iš jų – būgnai. Viena po kitos traukiamos penkios kortos. Kokia tikimybė, kad antroji arba trečioji korta (arba abi jos) bus būgnų?

9. Voke – 8 skirtingos nuotraukos, tik viena jų spalvota. Vieną po kitos traukiate 5 nuotraukas ir rikiuojate į eilę. Kokia tikimybė, kad antroji eilės nuotrauka bus spalvota?

10. Bandymas - dalelės kelionė iš plokštumos taško $(0;0)$ į plokštumos tašką $(6;4)$. Iš taško $(x;y)$ dalelė vienu žingsniu gali patekti į tašką $(x+1;y)$ arba $(x;y+1)$. Kiek yra tokio bandymo baigčių (kelių)?

11. Bandymas – metame simetrišką šešiasienį lošimo kauliuką, užrašome atvirtusių akučių skaičių, o atvirtusią sienelę nudažome viena iš atsitiktinai parinktų trijų spalvų: balta, juoda ir raudona. Kaip pavaizduotumėte vienodai galimas tokio bandymo baigtis? Kiek yra baigčių iš viso?

12. Parduotuvės lentynoje - 15 stiklinių vazų, 6 iš jų nežymiai įskilę. Kokia tikimybė, kad nusipirkęs 5 vazas pirkėjas gaus 3 įskilusias?

13. Parduotuvės lentynoje - 15 stiklinių vazų, 6 iš jų nežymiai įskilę. Kokia tikimybė, kad nusipirkęs 5 vazas pirkėjas gaus bent 3 įskilusias?

Geometrinės tikimybės

1. Vienetiniame kvadrate nubrėžta viena įstrižainė. Kokia tikimybė, kad atsitiktinai šiame kvadrate parinkto taško atstumas iki įstrižainės bus didesnis už 0,5? Paaiškinkite brėžiniu.

2. Bandymo baigčių aibė Ω – kvadratas. Jo viduje yra skritulys, kurio spindulys lygus 2. Atsitiktinai renkant kvadrato tašką, tikimybė pataikyti į skritulį lygi 0,25. Koks kvadrato kraštinės ilgis?

3. Bandymas - atsitiktinis vienetinio kvadrato taško parinkimas. Bandymui taikome geometrinę tikimybinę erdvę. Kokia tikimybė, kad parinkto taško atstumas iki kvadrato centro bus lygus 0,5?

4. Vienetinę atkarpą atsitiktinai sulaužome į tris dalis. Kaip pavaizduotumėte tokio bandymo baigtį? Kokią aibę sudaro visos bandymo baigtys? Visos baigtys turi būti vienodai galimos!

5. Ant lygiagrečiomis, atstumu l viena nuo kitos nutolusiomis linijomis suliniuotos plokštumos metama a ilgio ($a < l$) adata. Bandymui nagrinėti norime taikyti geometrinę tikimybinę erdvę. Kaip užrašytumėte tokio bandymo baigtį? Kokią aibę šios baigtys sudaro?

6. Ant lygiagrečiomis, vienodai viena nuo kitos nutolusiomis linijomis suliniuotos plokštumos metama moneta. Kaip užrašytumėte tokio bandymo baigtį? Visos baigtys turi būti vienodai galimos. Kokia tikimybė, kad moneta kirs liniją, jeigu monetos skersmuo lygus 0,5, o atstumas tarp linijų lygus 1?

7. Į apskritimą įbrėžtas kvadratas, atsitiktinai parenkamas skritulio, kurį riboja apskritimas, taškas. Kokia tikimybė, kad taškas bus ant kurios nors kvadrato kraštinės?

8. Vienetiniame kube atsitiktinai parenkamas taškas. Kokia tikimybė, kad jis bus vienodai nutolęs nuo kubo pagrindų (apatinės ir viršutinės sienų)?

Įvykių algebra

1. Urnoje yra balti ir juodi rutuliai, vieni jų maži, kiti dideli. Atsitiktinai vieną po kito trauksime 3 rutulius. Pažymėkime įvykius: $A = \{$ištrauktų baltų rutulių daugiau nei vienas$\}$, $B = \{$pirmas ištrauktas rutulys baltas$\}$, $C = \{$ištraukti rutuliai maži$\}$. Nusakykite žodžiais, kada įvyksta įvykis $(A \cap B) \cap \overline{C}$.

2. Bandymas – dviejų šešiasienių kauliukų metimas, $A = \{$atvirtusių akučių suma lyginė$\}$, $B = \{$atvirtusių akučių suma didesnė už 6$\}$. Kada įvyksta įvykis $\overline{A \cap B}$?

3. Įvykis A reiškia, kad pavasaris bus lietingas, B – kad vasara lietinga, o C – ruduo lietingas. Kaip naudojant šiuos bei jiems priešingus įvykius išreikšti įvykį: lietingi bus lygiai du minėti metų laikai?

4. Krepšininkas mes tris baudos metimus. Įvykį, kad i-asis metimas bus taiklus, pažymėkime $A_i, i = 1, 2, 3$. Naudodamiesi šių bei jiems priešingų įvykių žymenimis išreikškite įvykį, kad taiklus bus tik vienas metimas.

5. Bandymas – kelionė į paskaitą. Įvykis A reiškia, kad pavėluosite, B – kad pavėluos dėstytojas. Kokiais dar įvykiais reikia papildyti šią įvykių porą, kad įvykių sistema sudarytų σ-algebrą?

6. Bandymo baigčių aibė – vienetinis skaičių tiesės intervalas $[0;1]$. Intervalas $[0;1/2]$ priklauso nagrinėjamai atsitiktinių įvykių σ-algebrai. Kokie dar intervalo $[0;1]$ poaibiai būtinai priklauso šiai σ-algebrai?

7. Tarkime, A ir B priklauso įvykių σ-algebrai $\mathcal{A}$. Paaiškinkite, kodėl $A \backslash B$ irgi priklauso $\mathcal{A}$.

8. Ar toks teiginys gali būti teisingas: „A ir B yra nesutaikomi įvykiai, $P(A) = 2/3, P(\overline{B}) = 1/2$“? Kodėl?

9. Įvykiai A, B, C yra poromis nesutaikomi, $P(A) = 1/3, P(B) = 1/4, P(C) = 1/4$. Suraskite tikimybę $P((A \cap \overline{B}) \cup C)$. Paaiškinkite samprotavimus brėžiniu.

10. Įvykiai A, B, C yra poromis nesutaikomi, $P(A) = 1/3, P(B) = 1/4, P(C) = 1/5$. Suraskite tikimybę $P((A \cup \overline{B}) \cap C)$. Paaiškinkite samprotavimus brėžiniu.

11. Įvykiai A, B, C yra poromis nesutaikomi, $P(A) = 1/3, P(B) = 1/4$. Kokia didžiausia galima tikimybės $P(C)$ reikšmė? Atsakymą paaiškinkite.

12. Toks teiginys nėra teisingas: „funkcija $P : \mathcal{A} \to [0,1]$ yra tikimybinis matas, jei $P(\Omega) = 1$ ir $P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$ su visais A_i iš įvykių σ-algebros.“ Pataisykite teiginį, kad jis būtų teisingas.

13. Toks teiginys nėra teisingas: „funkcija $P : \mathcal{A} \to [0,1]$ yra tikimybinis matas, jei $P(\Omega) = 1$ ir $P(\bigcup_{i=1} A_i^n) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$ su visais nesutaikomais įvykiais A_i iš įvykių σ-algebros.“

Pataisykite teiginį, kad jis būtų teisingas.

Tikimybių savybės, diskrečioji tikimybinė erdvė, paprastieji atsitiktiniai dydžiai

1. A, B yra du atsitiktiniai įvykiai ir $A \subset B$. Kam lygios tikimybės $P(A \backslash B), P(B \backslash A)$? Užrašykite reikšmes arba išreikškite įvykių A, B tikimybėmis.

2. Tegu A, B yra du atsitiktiniai įvykiai. Užbaikite rašyti formulę $P(A \backslash B) = P(A) - \ldots$ ir paaiškinkite ją brėžiniu.

3. Tegu A, B yra du atsitiktiniai įvykiai. Užrašykite formulę tikimybei $P(A \cup B)$ reikšti ir paaiškinkite ją brėžiniu.

4. Tegu A, B yra du atsitiktiniai įvykiai. Pasirėmę tikimybių savybėmis įrodykite nelygybę $P(A \cup B) \leqslant P(A) + P(B)$.

5. Kada teisinga, kada neteisinga lygybė $P(A \cup B) = P(A \backslash B) + P(B \backslash A)$? Paaiškinkite brėžiniu.

6. Kokiems atsitiktiniams įvykiams teisinga lygybė $P(A \cap B) = P(B)$?

7. Kokiems atsitiktiniams įvykiams teisinga lygybė $P(A \cup B) = P(A)$?

8. Kokiems atsitiktiniams įvykiams teisinga lygybė $P(A \backslash B) = P(A)$?

9. Bandymas – autobuso laukimas. Nustatyta, kad 25% atvejų autobusas atvažiuoja per anksti, 60% – atvažiuoja laiku, 10% atvejų – vėluoja. Kartais autobusas iš viso neatvažiuoja. Sudarykite diskrečiąją tikimybinę erdvę tokiam bandymui nagrinėti. Kokia tikimybė, kad keleivis atėjęs į stotelę laiku, autobuso nesulauks?

10. Pateikite bandymo, kuris turėtų be galo daug baigčių ir kuriam nagrinėti galėtume taikyti diskrečiąją tikimybinę erdvę, pavyzdį.

11. Bandymas - atsitiktinis skaičiaus pasirinkimas iš aibės $\{2;3;4;5;6;\}$. Tikimybė, kad bus parinktas skaičius 5 lygi 0,2; tikimybė, kad bus parinktas skaičius 4 arba 5 arba 6 lygi 0,6. Kokia tikimybė, kad bus parinktas pirminis skaičius? Atsakymą paaiškinkite.

12. Metus du simetriškus šešiasienius kauliukus atvirtusių akučių suma S gali įgyti vienuolika skirtingų reikšmių: $S = 2,\dots,12$. Ar teisinga teigti, kad $P(S = 3) = 1/11$ Kodėl?

13. Išnagrinėkite tokias prielaidas: „tarkime bandymo baigčių aibę sudaro 15 vienodai galimų baigčių, o atsitiktinio įvykio tikimybė lygi $\frac{2}{13}$". Ar taip gali būti? Kodėl?

14. Bandymo baigčių aibę sudaro 7 baigtys; 5 iš jų pasirodo vienodai dažnai, o šeštoji ir septintoji – dvigubai rečiau už pirmąsias. Raskite šių baigčių tikimybes.

15. Bandymo baigčių aibę sudaro 8 baigtys; 7 iš jų pasirodo vienodai dažnai, o aštuntoji - dvigubai dažniau už kitas. Raskite šių baigčių tikimybes.

16. Bandymo baigčių aibę sudaro 8 baigtys; pirmosios keturios pasirodo su vienodomis tikimybėmis, likusios keturios – irgi, tačiau jų tikimybės dvigubai mažesnės už pirmųjų baigčių. Raskite baigčių tikimybes.

17. Optimalaus pasirinkimo uždavinyje objektų skaičius $n = 5$. Kas yra tokio bandymo baigtis ir kiek jų yra iš viso?

18. Optimalaus pasirinkimo uždavinyje objektų skaičius $n = 5$. Rinkimosi strategijos parametras $m = 2$. Kokia tikimybė likti be nieko, t.y., nieko nepasirinkti?

19. Metami du simetriški šešiasieniai lošimo kauliukai. Atsitiktinio dydžio X reikšmė gaunama iš akučių skaičiaus ant atvirtusios pirmojo kauliuko sienelės atėmus akučių skaičių, ant atvirtusios antrojo kauliuko sienelės. Raskite tikimybę $P(X = 0)$.

20. Kada teisinga lygybė $I_{A\cup B} = I_A + I_B$?

21. Išreikškite įvykio $A \backslash B$ indikatorių panaudodami įvykių, susijusių su A, B, indikatorius.

22. Paprastasis atsitiktinis dydis X įgyja reikšmes $-1, 2$ ir 3. Reikšmę -1 jis įgyja su tikimybe $0,2$, o reikšmę 2 – su tikimybe $0,1$. Koks šio atsitiktinio dydžio vidurkis?

23. Paprastasis atsitiktinis dydis X įgyja reikšmes $-1, 2$ ir x. Reikšmę -1 jis įgyja su tikimybe $0,2$, o reikšmę 2 – su tikimybe 0,1. Kokia turi būti x reikšmė, kad atsitiktinio dydžio vidurkis būtų lygus 1?

24. Paprastasis atsitiktinis dydis įgyja tris didesnes už 1 reikšmes. Įrodykite, kad dydžio vidurkis irgi yra didesnis už 1.

25. Paprastasis atsitiktinis dydis su vienodomis tikimybėmis įgyja dvi reikšmes, viena iš reikšmių yra 3. Kokia kita atsitiktinio dydžio reikšmė, jeigu jo vidurkis lygus 5?

26. Paprastasis atsitiktinis dydis įgyja dvi reikšmes, viena iš reikšmių yra 3, ji įgyjama dvigubai dažniau nei kita reikšmė. Kokia kita atsitiktinio dydžio reikšmė, jeigu jo vidurkis lygus 5?

27. Jeigu $\mathbf{E}[X_1] = 1, \mathbf{E}[]X_2] = -1, \mathbf{E}[X_3] = 2$, tai $\mathbf{E}[2X_1 + 3X_2 - 4X_3] = ?$

28. Užrašykite formulę sąjungos tikimybei $P(A \cup B \cup C)$ reikšti.

29. Tegu $A_i, i = 1,2,\dots,6$ yra bet kokie atsitiktiniai įvykiai, A - visų šių įvykių sąjunga. Prisiminkime formulę $P(A) = S_1 - S_2 + S_3 - S_4 + S_5 - S_6$. Kokie dėmenys sudaro sumą S_3 ir kiek tų dėmenų yra?

30. Užrašykite formulę sąjungos tikimybei $P(X \cup Y \cup Z \cup U)$ reikšti.

31. Užrašykite formulę sąjungos tikimybei $P(X \cup Y \cup Z \cup U)$ reikšti. Suprastinkite formulę pasinaudodami tuo, kad įvykis X negali įvykti kartu su kitais įvykiais.

Sąlyginės tikimybės

1. Tegu $P(A) = P(A|B)$ $(P(A), P(B) > 0)$. Įrodykite, kad $P(B) = P(B|A)$.

2. Tegu A, B du atsitiktiniai įvykiai, $P(B) > 0$. Kam lygi sąlyginė tikimybė $P(A \cup B|B)$? Atsakymą paaiškinkite.

3. Tegu A, B du atsitiktiniai įvykiai, $P(B) > 0$. Įrodykite, kad $P(A \cap B|B) = P(A|B)$.

4. Tegu A, B du atsitiktiniai įvykiai, $P(A \cap B) > 0$. Kam lygi tikimybė $P(B|A \cap B)$? Atsakymą paaiškinkite.

5. Tegu $P(A) = P(A|B)$. Ar teisinga lygybė $P(\overline{A}) = P(\overline{A}|B)$? Atsakymą paaiškinkite.

6. Du kartus metamas lošimo kauliukas,

$$A = \{\text{antrajame metime atvirto “6“}\}, \quad B = \{\text{atvirtusių akučių suma} > 9\}.$$

Raskite $P(A|B)$.

7. Du kartus metamas lošimo kauliukas,

$$A = \{\text{antrajame metime atvirto “6“}\}, \quad B = \{\text{atvirtusių akučių suma} > 9\}.$$

Raskite $P(B|A)$.

8. Tegu A ir B yra nesutaikomi įvykiai, $P(A), P(B) > 0$. Kam lygi tikimybė $P(A|B)$? Atsakymą paaiškinkite.

9. A ir B yra du atsitiktiniai įvykiai, $A \subset B$. Kam lygi tikimybė $P(A|B)$? Atsakymą paaiškinkite.

10. A ir B yra du atsitiktiniai įvykiai, $A \subset B$. Kam lygi tikimybė $P(B|A)$? Atsakymą paaiškinkite.

11. Įrodykite, kad atsitiktiniams įvykiams A, C $(P(C) > 0)$ teisinga lygybė

$$P(A|C) + P(\overline{A}|C) = 1.$$

12. Įrodykite, kad $P(\overline{A}|B) = 1 - P(A|B,)$ čia $P(B) > 0$.

13. Tegu A, B, C – atsitiktiniai įvykiai, $A \subset B, P(C) > 0$. Įrodykite, kad $P(A|C) \leqslant P(B|C)$.

14. Tegu $P(A), P(\overline{A}) > 0$. Kam lygios tikimybės $P(A|A), P(\overline{A}|A), P(A|\overline{A})$?

15. A, B yra atsitiktiniai įvykiai, $B \subset \overline{A}, 0 < P(A), P(B) < 1$. Kam lygios tikimybės $P(A|B)$, $P(\overline{A}|B)$, $P(A|\overline{B})$?

16. Kokias lygybes reiktų patikrinti, norint įrodyti, kad įvykiai A, B, C sudaro nepriklausomų įvykių sistemą?

17. A, B yra atsitiktiniai įvykiai, $P(A), P(B) > 0$. Jeigu A, B yra nesutaikomi, ar jie gali būti ir nepriklausomi? Jeigu A, B yra nepriklausomi, ar jie gali būti ir nesutaikomi?

18. Įvykiai A ir B yra nepriklausomi, $P(B) > 0, P(A) = 0,25$. Kam lygi tikimybė $P(\overline{A}|B)$? Atsakymą paaiškinkite.

19. Įvykiai A ir B yra nepriklausomi, $P(B) = 0{,}3, P(A) = 0{,}25$. Kam lygi tikimybė $P(\overline{A}|\overline{B})$? Atsakymą paaiškinkite.

20. Įvykiai A, B, C yra nepriklausomi, $P(A) = P(B) = 1/2, P(C) = 1/3$. Apskaičiuokite $P(A \cap B \cap C|A)$.

21. Įvykiai A, B, C yra nepriklausomi, $P(A) = P(B) = 1/2, P(C) = 1/3$. Apskaičiuokite $P(A \cap B \cap C|A \cap B)$.

22. Žinoma, kad $P(A) = P(B) = 2/3, P(A|\overline{B}) = 1/3$. Raskite $P(A|B)$.

23. Tikimybė, kad krepšininkas pataikys pirmąjį metimą lygi 0,5. Jeigu krepšininkas pataikė pirmąjį metimą, tai tikimybė, kad pataikys ir antrąjį padidėja 1,1 karto. Jeigu du metimai iš eilės buvo taiklūs, tai tikimybė, kad pataikys ir trečiąjį padidėja 1,2 karto lyginant su taiklaus pirmojo metimo tikimybe. Kokia tikimybė, kad krepšininkas pataikys tris kartus iš eilės?

24. Urnoje yra du balti ir trys juodi rutuliai. Atsitiktinai ištraukus rutulį atgal į urną įdedami du tos pačios spalvos rutuliai. Kokia tikimybė, kad taip traukiant du rutulius pirmasis bus baltas, o antrasis juodas?

25. Naudodami tikimybių sandaugos formulę $P(A \cap B \cap C)$ išreikškite dviem būdais. Kiek yra būdų išreikšti šią tikimybę?

26. Urnoje yra dviejų spalvų rutuliai: 2 balti ir 3 juodi arba 2 juodi ir trys balti. Pirmas atvejis tris kartus tikėtinesnis negu antras. Užrašykite pilnosios tikimybės formulę įvykio

$$A = \{\text{atsitiktinai ištrauktas rutulys bus baltas}\}$$

tikimybei apskaičiuoti.

27. Užrašykite įvykio pilnosios tikimybės formulę įvykio A tikimybei, kai galimos trys hipotezės H_1, H_2, H_3. Kaip galima suprastinti užrašytąją formulę žinant, kad įvykiai A ir H_1 yra nepriklausomi?

28. Užrašykite pilnosios tikimybės formulę įvykiui A, kai yra dvi hipotezės: įvykis B ir jam priešingas įvykis, čia $P(B) = 1/3$.

29. Užrašykite įvykio pilnosios tikimybės formulę įvykio A tikimybei, kai galimos dvi hipotezės H_1 ir H_2, $P(H_1), P(H_2) > 0$. Įrodykite, kad $P(A) < P(A|H_1) + P(A|H_2)$.

30. Užrašykite įvykio pilnosios tikimybės formulę įvykio A tikimybei, kai galimos dvi hipotezės H_1 ir H_2. Tegu $P(A|H_1) > P(A|H_2)$. Įrodykite, kad $P(A) > P(A|H_2)$.

31. Duoti įvykiai B, C, $P(B), P(C) > 0$ ir visiems įvykiams A teisinga lygybė

$$P(A) = P(A|B)P(B) + P(A|C)P(C)?$$

Užrašykite lygybes su $A = \Omega$, $A = B$ ir pasinaudoję jomis nustatykite įvykių B, C savybes.

32. Atlikus bandymą gali įvykti du nesutaikomi įvykiai (hipotezės) H_1 ir H_2, $P(H_1) = 0{,}3$. Žinoma, kad $P(A|H_1) = 0{,}4, P(A|H_2) = 0{,}25$. Jeigu sužinotume, kad atlikus bandymą įvyko įvykis A, bet nežinotume, kuris iš įvykių H_1, H_2 įvyko, kaip galėtume nuspręsti, kuris iš jų yra labiau tikėtinas? Atsakykite pritaikę hipotezių tikrinimo formulę.

33. Tegu A ir B yra du su tuo pačiu bandymu susiję įvykiai, $P(B) = 0{,}4, P(A|B) = 0{,}6, P(A|\overline{B}) = 0{,}5$. Sužinojome, kad įvykis A įvyko. Kokia tikimybė, kad įvyko įvykis B? Atsakydami pasinaudokite hipotezių tikrinimo formule.

Bernulio ir polinominė schemos

1. Atliekama n ($n \geqslant 5$) Bernulio schemos bandymų, S_n yra gautų sėkmių skaičius. Kaip užrašoma baigtis šioje Bernulio schemoje? Kiek palankių baigčių turi įvykis $\{S_n = 5\}$?

2. Atliekama n ($n \geqslant 5$) Bernulio schemos bandymų. Kiek palankių baigčių turi įvykis $A = \{\text{patirtos 4 nesėkmės}\}$?

3. Atliekama $n = 5$ Bernulio schemos bandymų, sėkmės tikimybė viename bandyme $p = 0{,}2$. Kokia tikimybė, kad atlikę bandymus patirsime $m = 2$ nesėkmes?

4. Atliekama $n = 5$ Bernulio schemos bandymų, sėkmės tikimybė viename bandyme $p = 0{,}2$, S_n yra sėkmių skaičius. Užrašykite reiškinį tikimybei $P(2 \leqslant S_n \leqslant 4)$ apskaičiuoti.

5. Atliekama $n = 7$ Bernulio schemos bandymų, sėkmės tikimybė viename bandyme $p = 0{,}2$, S_n yra sėkmių skaičius. Užrašykite reiškinį tikimybei $P(5 \leqslant S_n \text{ arba } S_n \leqslant 2)$ apskaičiuoti.

6. Atliekama $n = 5$ Bernulio schemos bandymų, sėkmės tikimybė viename bandyme $p = 0{,}3$. Kokia tikimybė, kad atlikę bandymus patirsime nemažiau kaip 4 sėkmes?

7. Atliekama $n = 5$ Bernulio schemos bandymų, sėkmės tikimybė viename bandyme $p = 0{,}3$. Kokia tikimybė, kad atlikę bandymus patirsime bent dvi nesėkmes?

8. Atliekama $n = 15$ Bernulio schemos bandymų, sėkmės tikimybė viename bandyme $p = 0{,}3$. Koks labiausiai tikėtinas sėkmių skaičius? Atsakymą paaiškinkite.

9. Atliekama $n = 20$ Bernulio schemos bandymų, nesėkmės tikimybė viename bandyme 0,4. Koks labiausiai tikėtinas sėkmių skaičius?

10. Atliekami $n = 6$ Bernulio schemos bandymai. Žinoma, kad 4 ir 5 yra du labiausiai tikėtini sėkmių skaičiai. Kokia tikimybė, kad atlikę bandymus gausime vien nesėkmes?

11. Atliekami $n = 7$ Bernulio schemos bandymai. Žinoma, kad 4 ir 5 yra du labiausiai tikėtini sėkmių skaičiai. Kokia tikimybė, kad atlikę bandymus gausime lygiai vieną nesėkmę?

12. Atliekami penki polinominės schemos bandymai, kiekviename bandyme galimos trys baigtys, pirmųjų dviejų baigčių tikimybės $p_1 = 0{,}2, p_2 = 0{,}3$, bandymų serijoje gauti sėkmių skaičiai S_1, S_2, S_3. Apskaičiuokite tikimybę $P(S_1 = 2, S_2 = 1)$.

13. Atliekami penki polinominės schemos bandymai, kiekviename bandyme galimos trys baigtys, pirmųjų dviejų baigčių tikimybės $p_1 = 0{,}2, p_2 = 0{,}3$ bandymų serijoje gauti sėkmių skaičiai S_1, S_2, S_3. Užrašykite reiškinį tikimybei $P(S_1 = 2, S_3 = 2)$ apskaičiuoti.

14. Atliekami penki polinominės schemos bandymai, kiekviename bandyme galimos trys baigtys, pirmųjų dviejų baigčių tikimybės $p_1 = 0{,}2, p_2 = 0{,}3$ bandymų serijoje gauti sėkmių skaičiai S_1, S_2, S_3. Užrašykite reiškinį tikimybei $P(S_1 = 2, S_2 \leqslant 2)$ apskaičiuoti.

Atsitiktiniai dydžiai

1. Atsitiktinis dydis ξ įgyja sveikas neneigiamas reikšmes, $P(\xi = 0) = 0{,}2, P(\xi = 1) = 0{,}1$. Kam lygi tikimybė $P(\xi \geqslant 1{,}5)$?

2. Atsitiktinis dydis ξ įgyja sveikas neneigiamas reikšmes, $P(\xi = 0) = 0{,}1, P(\xi \geqslant 2) = 0{,}2$. Kam lygi tikimybė $P(\xi = 1)$?

3. Atsitiktinis dydis ξ įgyja sveikas neneigiamas reikšmes, $P(\xi = 0) = 0{,}2, P(\xi = 1) = 0{,}1$. Kam lygi atsitiktinio dydžio pasiskirstymo funkcijos reikšmė $F_\xi(1{,}5)$?

4. Atsitiktinio dydžio ξ, įgyjančio neneigiamas reikšmes, pasiskirstymo funkcija $F_\xi(x) = x^2$, kai $0 \leqslant x \leqslant 1$. Raskite tikimybę $P(0{,}25 < \xi < 0{,}3)$.

5. Atsitiktinio dydžio ,ξ įgyjančio neneigiamas reikšmes pasiskirstymo funkcija $F_\xi(x) = x^2$, kai $0 \leqslant x \leqslant 1$. Raskite tikimybę $P(0{,}5 < \xi)$.

6. Atsitiktinio dydžio ξ, įgyjančio neneigiamas reikšmes pasiskirstymo funkcija $F_\xi(x) = x^3$, kai $0 \leqslant x \leqslant 1$. Raskite tikimybę $P(\xi \notin [0{,}5; 1])$.

7. Atsitiktinis dydis ξ įgyja dvi reikšmes: 0 ir 1, $P(\xi = 0) = 0{,}2$. Kiek trūkio taškų turi šio atsitiktinio dydžio pasiskirstymo funkcijos grafikas ir kokiame taške trūkis didžiausias?

8. Atsitiktinis dydis ξ pasiskirstęs pagal binominį dėsnį: $\xi \sim \mathcal{B}(5; 0{,}2)$. Kiek trūkio taškų turi šio dydžio pasiskirstymo funkcijos grafikas ir kuriame taške trūkis didžiausias? Atsakymą paaiškinkite.

9. Atsitiktinis dydis ξ pasiskirstęs pagal binominį dėsnį: $\xi \sim \mathcal{B}(5; 0{,}3)$. Apskaičiuokite pasiskirstymo funkcijos reikšmę $F_\xi(1{,}5)$.

10. Bernulio schemos bandymai su sėkmės tikimybe $p = 0{,}3$ atliekami iki pirmos sėkmės. Kokia tikimybė, kad patirsime tris nesėkmes?

11. Bernulio schemos bandymai su sėkmės tikimybe $p = 0{,}3$ atliekami iki pirmos nesėkmės. Kokia tikimybė, kad gausime lygiai tris sėkmes?

12. Bernulio schemos bandymai su sėkmės tikimybe $p = 0{,}2$ atliekami tol, kol gaunamos dvi sėkmės. Kokia tikimybė, kad bus atlikti 6 bandymai?

13. Bernulio schemos bandymai atliekami iki pirmos sėkmės. Tikimybė, kad prireiks dviejų bandymų lygi 1/4. Kokia tikimybė, kad prireiks trijų bandymų?

14. Bernulio schemos bandymų skaičius $n = 500$, sėkmės tikimybė $p = 0{,}01$, S_n – sėkmių skaičius. Užrašykite reiškinį apytikslei tikimybės $P(S_n = 4)$ reikšmei rasti naudojantis Puasono teorema.

15. Bernulio schemos bandymų skaičius $n = 5000$, sėkmės tikimybė $p = 0{,}001$, S_n – sėkmių skaičius. Užrašykite reiškinį apytikslei tikimybės $P(S_n > 6)$ reikšmei rasti naudojantis Puasono teorema.

16. Atsitiktinis dydis ξ pasiskirstęs pagal Puasono dėsnį: $\xi \sim \mathcal{P}(4)$. Kaip apskaičiuoti pasiskirstymo funkcijos reikšmę $F_\xi(1{,}5)$? Užrašykite tinkamą reiškinį.

17. Tegu n yra Bernulio schemos bandymų skaičius, t – sėkmės tikimybė viename bandyme, X_n – sėkmių skaičius. Ištaisykite klaidas tokiame teiginyje: „Naudojantis Muavro-Laplaso teorema galime rasti apytiksles tikimybių

$$P\left(\frac{X_n - n}{\sqrt{t(1+t)}} < x\right).$$

reikšmes.“

18. Tegu n yra Bernulio schemos bandymų skaičius, s – sėkmės tikimybė viename bandyme, Y_n – sėkmių skaičius. Ištaisykite klaidas tokiame teiginyje: „naudojantis Muavro-Laplaso teorema galime rasti apytiksles tikimybių

$$P\Big(\frac{Y_n - s}{\sqrt{s(s-1)}} < x\Big)$$

reikšmes.“

19. Tegu n yra Bernulio schemos bandymų skaičius, z - sėkmės tikimybė, Z_n – sėkmių skaičius. Ištaisykite klaidas tokiame teiginyje: „naudojantis Muavro-Laplaso teorema galime rasti apytiksles tikimybių

$$P\Big(\frac{Z_n + zn}{\sqrt{z(z+1)}} < x\Big)$$

reikšmes.“

20. Tegu X yra geometrinis dydis, $\xi \sim \mathcal{G}(0{,}3)$. Kaip apskaičiuoti pasiskirstymo funkcijos reikšmę $F_\xi(2{,}3)$?

21. Dydis ξ yra geometrinis, $P(\xi = 2) = 1/4$. Kaip apskaičiuoti pasiskirstymo funkcijos reikšmę $F_\xi(2{,}5)$?

22. Atsitiktinis dydis ξ pasiskirstęs pagal Puasono dėsnį: $\xi \sim \mathcal{P}(3)$. Kaip apskaičiuoti tikimybės $P(\xi \neq 5)$ reikšmę ?

23. Atsitiktinis dydis ξ pasiskirstęs pagal Puasono dėsnį: $\xi \sim \mathcal{P}(3)$. Kaip apskaičiuoti tikimybę $P(\xi > 4)$?

24. Tarkime, ξ yra tolygiai intervale $[1;2]$ pasiskirstęs atsitiktinis dydis. Kam lygios tankio ir pasiskirstymo funkcijos reikšmės $p_\xi(1{,}3), F_\xi(1{,}5)$?

25. Tarkime, ξ yra tolygiai intervale $[3;5]$ pasiskirstęs atsitiktinis dydis. Kam lygios tankio ir tikimybės reikšmės $p_\xi(3{,}5), P(\xi > 4{,}5)$?

26. Tarkime, ξ yra tolygiai intervale $[-2;5]$ pasiskirstęs atsitiktinis dydis. Kam lygi tikimybė $P(|\xi| > 1)$?

27. Tarkime, ξ yra tolygiai intervale $[-1;5]$ pasiskirstęs atsitiktinis dydis. Raskite šio dydžio $\alpha = 0{,}25$ eilės kvantilį.

28. Tarkime, ξ yra tolygiai intervale $[-1;5]$ pasiskirstęs atsitiktinis dydis. Raskite šio dydžio $\alpha = 0{,}25$ eilės kritinę reikšmę.

29. Atsitiktinis dydis ξ yra tolygiai pasiskirstęs intervale, kurio apatinis rėžis lygus -1. Dydžio vidurkis lygus 5. Apskaičiuokite tikimybę $P(\xi > 4)$.

30. Atsitiktinis dydis ξ yra tolygiai pasiskirstęs intervale, kurio apatinis rėžis lygus -1. Dydžio dispersija lygi 12. Raskite dydžio vidurkį.

31. Tarkime ξ yra eksponentinis atsitiktinis dydis, $\xi \sim \mathcal{E}(2)$. Raskite šio dydžio $\alpha = 0{,}25$ eilės kvantilį.

32. Tarkime ξ yra eksponentinis atsitiktinis dydis, $\xi \sim \mathcal{E}(1)$. Raskite $F_\xi(3)$.

33. Tarkime, ξ yra eksponentinis atsitiktinis dydis, $\xi \sim \mathcal{E}(2)$. Raskite šio dydžio $\alpha = 0{,}25$ eilės kritinę reikšmę.

34. Žinome, kad diskretūs atsitiktiniai dydžiai X ir Y yra nepriklausomi, dydis Y įgyja tik dvi reikšmes: $0, 1$, be to,

$$P(X = 0, Y = 0) = 0{,}125, \quad P(X = 0, Y = 1) = 0{,}25.$$

Raskite tikimybę $P(Y = 0)$.

35. Žinome, kad diskretūs atsitiktiniai dydžiai X ir Y yra nepriklausomi,

$$P(X = 0, Y = 0) = 0{,}125, \quad P(X = 0, Y > 0) = 0{,}25.$$

Raskite tikimybę $P(Y = 0)$, jei Y įgyja tik neneigiamas reikšmes.

36. Žinome, kad diskretūs atsitiktiniai dydžiai X ir Y yra nepriklausomi, dydis X įgyja tik dvi reikšmes 0 ir 1,

$$P(X = 1, Y = 0) = 0{,}25, \quad P(X = 0, Y = 0) = 0{,}125.$$

Kam lygus atsitiktinio dydžio X vidurkis?

37. Atsitiktinis dydis X tolygiai pasiskirstęs intervale $[0;2]$; atsitiktiniai dydžiai X ir Y nepriklausomi, $P(X < 0{,}5 \text{ ir } Y > 2) = 0{,}25$. Kam lygios tikimybės $P(Y > 2), P(Y \leqslant 2)$?

38. Tegu X_1, X_2 yra nepriklausomi atsitiktiniai dydžiai, $X_1 \sim \mathcal{P}(1), X_2 \sim \mathcal{P}(1); Y_1 = X_1^2, Y_2 = X_2^2$. Kam lygi tikimybė $P(Y_1 = 4, Y_2 = 9)$?

39. Tegu X_1, X_2 yra nepriklausomi atsitiktiniai dydžiai, $X_1 \sim \mathcal{P}(2), X_2 \sim \mathcal{P}(3); Y_1 = X_1^2, Y_2 = X_2^2$. Kaip apskaičiuoti tikimybę $P(Y_1 = 1, Y_2 > 3)$?

40. Tegu X_1, X_2 yra nepriklausomi atsitiktiniai dydžiai, $X_1 \sim \mathcal{P}(1), X_2 \sim \mathcal{B}(6; 0{,}4)$; $Y_1 = X_1^2, Y_2 = X_2^2$. Kam lygi tikimybė $P(Y_1 < 4, Y_2 = 9)$?

41. Tegu X_1, X_2 yra nepriklausomi atsitiktiniai dydžiai, $X_1 \sim \mathcal{B}(4; 0{,}2), X_2 \sim \mathcal{B}(5; 0{,}3)$; $Y_1 = X_1^2, Y_2 = X_2^2$. Kam lygi tikimybė $P(Y_1 = 1, Y_2 = 4)$?

42. Atlikus 10 Bernulio schemos bandymų vidutiniškai gaunamos 7 nesėkmės. Kokia sėkmės tikimybė viename bandyme?

43. Nepriklausomi Bernulio schemos bandymai atliekami tol, kol gaunamos trys sėkmės. Koks patirtų nesėkmių skaičiaus vidurkis, jeigu sėkmės tikimybė viename bandyme $p = 0{,}3$?

44. Atsitiktinio dydžio X, pasiskirsčiusio pagal Puasono dėsnį vidurkis lygus 2. Kokia tikimybė, kad šis dydis įgis reikšmę $X = 3$?

45. Atsitiktinio dydžio X, pasiskirsčiusio pagal Puasono dėsnį, vidurkis lygus 2. Raskite tikimybių santykį $P(X = 6)/P(X = 5)$.

46. Atsitiktinio dydžio X, pasiskirsčiusio pagal Puasono dėsnį vidurkis lygus 3. Kaip apskaičiuoti tikimybę $P(X > 4)$?

47. Atsitiktiniai dydžiai X_1, X_2 yra nepriklausomi, $\mathbf{E}[X_1] = a, \mathbf{E}[X_2] = b, X_3 \sim \mathcal{G}(0{,}3)$. Kam lygus vidurkis $\mathbf{E}[2X_1X_2 + X_3]$?

48. Atsitiktiniai dydžiai X_1, X_2, X_3 yra nepriklausomi, $X_1 \sim \mathcal{B}(10; 0{,}7), X_2 \sim \mathcal{N}(1; 3), \mathbf{E}[X_3] = 1$. Kam lygus vidurkis $\mathbf{E}[X_1X_2 + 3X_1X_3]$?

49. Atsitiktinis dydis X įgyja tik dvi reikšmes: 0 ir 1, $P(X=1)=p$. Raskite vidurkį $\mathbf{E}[10^X]$.

50. Atsitiktinis dydis X įgyja tik dvi reikšmes: 1 ir 2, $P(X=1)=p$. Raskite vidurkį $\mathbf{E}[X^{-1}]$.

51. Atsitiktinis dydis X įgyja tris reikšmes: -1, 0 ir 1, reikšmės $-1, 1$ įgyjamos su vienodomis tikimybėmis, reikšmės 0 įgijimo tikimybė yra skaičiumi 0,1 didesnė negu reikšmių $-1, 1$ tikimybę. Raskite vidurkį $\mathbf{E}[X^2+X]$.

52. Atsitiktinis dydis X įgyja tris reikšmes: -1, 0 ir 2, reikšmės $-1, 2$ įgyjamos su vienodomis tikimybėmis, reikšmės 0 įgijimo tikimybė yra dvigubai didesnė negu reikšmių $-1, 2$ tikimybes. Raskite vidurkį $\mathbf{E}[X^2]$.

53. Atsitiktinis dydis X įgyja tris reikšmes: $-1, 0$ ir 1; reikšmė 0 įgyjama dvigubai dažniau už reikšmę -1, o reikšmė 1 dvigubai dažniau už reikšmę 0. Žinome, kad $Y \sim \mathcal{P}(4)$, atsitiktiniai dydžiai X, Y yra nepriklausomi. Kam lygus vidurkis $\mathbf{E}[X^2Y]$?

54. Atsitiktinis dydis X įgyja tris reikšmes: $-1, 0$ ir 1; reikšmė 0 įgyjama dvigubai rečiau už reikšmę -1, o 1 – dvigubai dažniau už reikšmę -1. Žinome, kad $Y \sim \mathcal{B}(5; 0{,}1)$, atsitiktiniai dydžiai X, Y yra nepriklausomi. Kam lygus vidurkis $\mathbf{E}[|X|Y]$?

55. Tegu X_1, X_2 yra nepriklausomi atsitiktiniai dydžiai, $X_1 \sim \mathcal{P}(2), \mathbf{E}[X_1X_2] = 6$. Kam lygus vidurkis $\mathbf{E}[X_2]$?

56. Absoliučiai tolydaus atsitiktinio dydžio X, turinčio tankį $p(x)$ vidurkis skaičiuojamas naudojantis formule

$$\mathbf{E}[X] = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x)\mathrm{d}x.$$

Pakeiskite šią formulę taip, kad ji tiktų atsitiktinio dydžio $Y = X^3$ vidurkiui skaičiuoti.

57. Absoliučiai tolydaus atsitiktinio dydžio X, turinčio tankį $p(u)$, vidurkis skaičiuojamas naudojantis formule

$$\mathbf{E}[X] = \int_{-\infty}^{\infty} up(u)\mathrm{d}u.$$

Pakeiskite šią formulę taip, kad ji tiktų atsitiktinio dydžio $Y = \sqrt[3]{\cos(X)}$ vidurkiui skaičiuoti.

58. Atsitiktinio dydžio X, pasiskirsčiusio pagal normalųjį dėsnį, vidurkis lygus 1, o dispersija 2. Užrašykite tokio dydžio tankio funkciją.

59. Atsitiktinio dydžio X, pasiskirsčiusio pagal normalųjį dėsnį, vidurkis lygus 1, o dispersija 2. Kokiame taške X tankio funkcija įgyja didžiausią reikšmę? Palyginkite tankio funkcijos reikšmes taškuose 0 ir 2. Kuri reikšmė didesnė?

60. Atsitiktiniai dydžiai X ir Y pasiskirstę atitinkamai pagal Puasono ir normalųjį dėsnius: $X \sim \mathcal{P}(3), Y \sim \mathcal{N}(2;1)$. Kam lygus vidurkis $\mathbf{E}[X+3Y]$?

61. Nepriklausomi atsitiktiniai dydžiai X ir Y pasiskirstę atitinkamai pagal Puasono ir normalųjį dėsnius: $X \sim \mathcal{P}(3), Y \sim \mathcal{N}(2;1)$. Kam lygi dispersija $\mathbf{D}[X-3Y]$?

62. Nepriklausomi atsitiktiniai dydžiai X ir Y pasiskirstę tolygiai atitinkamai intervaluose $[0;1]$ ir $[0;2]$. Kam lygi dispersija $\mathbf{D}[X-2Y?]$

63. Nepriklausomi atsitiktiniai dydžiai X ir Y pasiskirstę pagal normalųjį dėsnį $\mathcal{N}(0;1)$. Kam lygi atsitiktinio dydžio $Z = X - Y$ dispersija?

64. Atsitiktinis dydis X pasiskirstęs pagal binominį dėsnį $\mathcal{B}(10;0{,}3)$, atsitiktinis dydis Y – pagal Puasono dėsnį $\mathcal{P}(3)$. Atsitiktiniai dydžiai X ir Y yra nepriklausomi. Kam lygi atsitiktinio dydžio $Z = -X - 2Y$ dispersija?

65. Atsitiktinis dydis X pasiskirstęs pagal binominį dėsnį $\mathcal{B}(10;0{,}3)$. Naudodamiesi tuo, kad $\mathbf{D}[X]$ reikšmę žinote, raskite $\mathbf{E}[X^2]$.

66. Atsitiktinis dydis X pasiskirstęs pagal Puasono dėsnį $\mathcal{P}(5)$. Naudodamiesi tuo, kad $\mathbf{D}[X]$ reikšmę žinote, raskite $\mathbf{E}[X^2]$.

67. Eksponentinio dydžio X vidurkis lygus 2. Užrašykite reiškinį tikimybei $P(X > 3)$ apskaičiuoti.

68. Atsitiktinio dydžio X vidurkis lygus 1, o dispersija 0. Kam lygi šio dydžio pasiskirstymo funkcijos reikšmė $F_X(1{,}5)$?

69. Atsitiktinio dydžio X vidurkis lygus 2, o dispersija 0. Kam lygi šio dydžio pasiskirstymo funkcijos reikšmė $F_X(1)$?

70. Atsitiktinis dydis X pasiskirstęs pagal normalųjį dėsnį $\mathcal{N}(0;1)$, o dydis Y – pagal dėsnį $\mathcal{N}(0;2)$. Raskite dispersijų skirtumą $\mathbf{D}[2X - Y] - \mathbf{D}[\frac{1}{2}Y]$, jei dydžiai X, Y yra nepriklausomi.

71. Užrašykite Čebyšovo nelygybę atsitiktiniam dydžiui $X \sim \mathcal{N}(1;2)$.

72. Užrašykite Čebyšovo nelygybę atsitiktiniam dydžiui $X \sim \mathcal{B}(10;0{,}2)$.

73. Atsitiktinis dydis X – binominis, $X \sim \mathcal{B}(10;0{,}2)$. Pritaikę Čebyševo nelygybę įvertinkite tikimybę $P(|X-2| > 3)$ iš viršaus.

74. Užrašykite Čebyšovo nelygybę atsitiktiniam dydžiui $X \sim \mathcal{P}(3)$.

75. Pritaikę Čebyševo nelygybę įvertinkite tikimybę $P(|X-5| > 3)$ iš viršaus, jei X – Puasono atsitiktinis dydis, $X \sim \mathcal{P}(5)$.

76. Užrašykite Čebyšovo nelygybę intervale $[0;2]$ tolygiai pasiskirsčiusiam atsitiktiniam dydžiui.

77. Atsitiktinis dydis X normalusis, $X \sim \mathcal{N}(1;4)$. Pritaikę Čebyšovo nelygybę įvertinkite tikimybę $P(|X - \mathbf{E}[X| > 3)\ ]$ iš viršaus.

78. Atsitiktiniai dydžiai $X_1, X_2, \ldots$ yra nepriklausomi, vienodai pasiskirstę ir turi vidurkius $\mathbf{E}[X_1] = \mathbf{E}[X_2] = \ldots = a$. Kam lygi riba

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n} - a\right| > 0{,}1\right)?$$

79. Atsitiktiniai dydžiai $X_1, X_2, \ldots$ yra nepriklausomi, vienodai pasiskirstę ir turi vidurkius $\mathbf{E}[X_1] = \mathbf{E}[X_2] = \ldots = a$. Kam lygi riba

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n} - a\right| < 0{,}1\right)?$$

80. Ištaisykite klaidas (ir tik klaidas!) bei papildykite tuo, ko trūksta, kad šis teiginys būtų teisingas: *jei $X_1, X_2, \ldots$ yra ... atsitiktiniai dydžiai, turintys vidurkį a, tai*

$$P\left(\left|\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n} - a\right| < 0{,}3\right) \to 0, \quad n \to \infty.$$

81. Ištaisykite klaidas (ir tik klaidas!) bei papildykite tuo, ko trūksta, kad šis teiginys būtų teisingas: *jei* $X_1, X_2, \dots$ *yra ... atsitiktiniai dydžiai, turintys vidurkį* a*, tai*

$$P\left(\left|\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n} - a\right| < 0{,}5\right) \to 0, \quad n \to \infty.$$

82. Atsitiktiniai dydžiai X ir Y yra nepriklausomi ir pasiskirstę pagal normaliuosius dėsnius $\mathcal{N}(1;4), \mathcal{N}(1;9)$. Pagal kokį dėsnį pasiskirstęs atsitiktinis dydis $Z = X + Y$?

83. Atsitiktiniai dydžiai X_1 ir X_2 yra nepriklausomi ir pasiskirstę pagal normaliuosius dėsnius $\mathcal{N}(0;4), \mathcal{N}(1;1)$. Pagal kokį dėsnį pasiskirstęs atsitiktinis dydis $Y = X_1 + 2X_2$?

84. Atsitiktiniai dydžiai X_1 ir X_2 yra nepriklausomi ir pasiskirstę pagal normaliuosius dėsnius $\mathcal{N}(0;4), \mathcal{N}(1;1)$. Pagal kokį dėsnį pasiskirstęs atsitiktinis dydis $Y = X_1 - X_2$?

85. Atsitiktiniai dydžiai X_1 ir X_2 yra nepriklausomi ir pasiskirstę pagal Puasono dėsnius $X_1 \sim \mathcal{P}(4), X_2 \sim \mathcal{P}(1)$. Pagal kokį dėsnį pasiskirstęs atsitiktinis dydis $Y = X_1 + X_2$?

86. Atsitiktiniai dydžiai X_1 ir X_2 yra nepriklausomi ir pasiskirstę pagal dėsnius $X_1 \sim \mathcal{P}(4), X_2 \sim \mathcal{P}(1)$. Užrašykite atsitiktinio dydžio $Y = X_1 + X_2$ charakteringą funkciją.

87. Atsitiktiniai dydžiai X_1 ir X_2 yra nepriklausomi ir pasiskirstę pagal dėsnius $X_1 \sim \mathcal{P}(4), X_2 \sim \mathcal{N}(0;1)$. Užrašykite atsitiktinio dydžio $Y = X_1 + X_2$ charakteringąją funkciją.

88. Atsitiktinis dydis X pasiskirstęs pagal dėsnį $\mathcal{P}(4)$. Kam lygi jo charakteringosios funkcijos reikšmė $\phi_X(1)$?

89. Atsitiktinis dydis X pasiskirstęs pagal dėsnį $\mathcal{N}(0;4)$. Kam lygi jo charakteringosios funkcijos reikšmė $\phi_X(1)$?

90. Atsitiktiniai dydžiai $X_1, X_2, \dots$ yra nepriklausomi ir vienodai pasiskirstę. Visi jie įgyja tik dvi reikšmes:

$$P(X_i = 0) = p, \quad P(X_i = 1) = 1 - p, \quad 0 < p < 1.$$

Suformuluokite šiems dydžiams centrinę ribinę teoremą (formuluotėje įrašykite apskaičiuotas vidurkio ir dispersijos reikšmes).

91. Atsitiktiniai dydžiai $X_1, X_2, \dots$ yra nepriklausomi ir pasiskirstę pagal tą patį Puasono dėsnį $X_i \sim \mathcal{P}(4)$. Suformuluokite šiems dydžiams centrinę ribinę teoremą (formuluotėje įrašykite apskaičiuotas vidurkio ir dispersijos reikšmes).

92. Atsitiktiniai dydžiai $X_1, X_2, \dots$ yra nepriklausomi ir pasiskirstę pagal tą patį normalųjį dėsnį $X_i \sim \mathcal{N}(-2;9)$. Suformuluokite šiems dydžiams centrinę ribinę teoremą (formuluotėje įrašykite apskaičiuotas vidurkio ir dispersijos reikšmes).

93. Atsitiktiniai dydžiai $Z_1, Z_2, \dots$ yra nepriklausomi ir tolygiai pasiskirstę intervale $[-3;7]$. Suformuluokite šiems dydžiams centrinę ribinę teoremą (formuluotėje įrašykite apskaičiuotas vidurkio ir dispersijos reikšmes).

94. Atsitiktiniai dydžiai $X_1, X_2, \dots$ yra nepriklausomi ir pasiskirstę pagal tą patį binominį dėsnį $X_i \sim \mathcal{B}(10;0{,}5)$. Suformuluokite šiems dydžiams centrinę ribinę teoremą (formuluotėje įrašykite apskaičiuotas vidurkio ir dispersijos reikšmes).

Matematinė statistika

1. Kas yra imties variacinė eilutė? Paaiškinkite pavyzdžiu.

2. Raskite imties 3; 2; 3; 4; 2; 1; 3; 6; 2; 3 variacinės eilutės narį $x_{(4)}$.

3. Raskite imties 3; 2; 3; 4; 2; 1; 3; 6; 2; 3 $q = 1/3$ eilės kvantilį.

4. Raskite imties 3; 2; 3; 4; 2; 1; 3; 6; 2; 3 medianą.

5. Raskite imties 3; 2; 3; 4; 2; 1; 3; 6; 2; 3 empirinės pasiskirstymo funkcijos reikšmę $F(3{,}5)$.

6. Atsitiktinis dydis X tolygiai pasiskirstęs intervale $[0; a]$. Gauta jo imtis 3; 2; 3; 4; 2; 1; 3; 6; 2; 3. Momentų metodu raskite nežinomo parametro a įvertį.

7. Atsitiktinis dydis X tolygiai pasiskirstęs intervale $[-1; a]$. Gauta jo imtis 3; 2; 3; 4; 2; 1; 3; 6; 2; 3. Momentų metodu raskite nežinomo parametro a įvertį.

8. Kas yra imties vidurkis ir dispersija? Užrašykite formules jiems skaičiuoti.

9. Paaiškinkite, kas yra su atsitiktiniu dydžiu X susijusio nežinomo parametro θ pasikliautinis intervalas su pasikliovimo lygmeniu Q.

10. Paaiškinkite, kokie atsitiktiniai dydžiai pasiskirstę pagal chi-kvadratu dėsnį su n laisvės laipsnių. Nubrėžkite tokių dydžių tankio grafiko eskizą.

11. Paaiškinkite, kokie atsitiktiniai dydžiai pasiskirstę pagal Studento dėsnį su n laisvės laipsnių. Nubrėžkite tokių dydžių tankio grafiko eskizą.

12. Kaip konstruojamas normaliojo dydžio vidurkio pasikliautinis intervalas su pasikliovimo lygmeniu Q, kai dispersija yra žinoma?

13. Kaip konstruojamas normaliojo dydžio vidurkio pasikliautinis intervalas su pasikliovimo lygmeniu Q, kai dispersija yra nežinoma?

14. Kaip formuluojamas statistinių hipotezių tikrinimo uždavinys?

15. Pagrindinė hipotezė $\mathbf{H}_0$: programų sistemų studentai ir bioinformatikai vienodai gerai išmano tikimybių teoriją; alternatyvi hipotezė $\mathbf{H}_1$: bioinformatikai tikimybių teoriją išmano geriau. Kokiu atveju padarytume pirmos rūšies klaidą?

16. Pagrindinė hipotezė $\mathbf{H}_0$: programų sistemų studentai ir bioinformatikai vienodai gerai išmano tikimybių teoriją; alternatyvi hipotezė $\mathbf{H}_1$: bioinformatikai tikimybių teoriją išmano geriau. Kokiu atveju padarytume antros rūšies klaidą?

17. Jeigu 100 kartų tikrintume hipotezę $\mathbf{H}_0$: „studentas nepakankamai gerai išmano tikimybių teoriją“ su alternatyva $\mathbf{H}_1$: „studentas tikimybių teoriją išmano gerai“, o reikšmingumo lygmuo būtų $\alpha = 0{,}2$, maždaug kiek neišmanėlių pripažintume gerais tikimybių teorijos žinovais? Atsakymą paaiškinkite.

18. Kaip sudaromas hipotezių $\mathbf{H}_0 : a = a_0, \mathbf{H}_1 : a \neq a_0$ apie normaliojo dydžio vidurkį su reikšmingumo lygmeniu α tikrinimo kriterijus, kai dispersija žinoma?

19. Kaip sudaromas hipotezių $\mathbf{H}_0 : a = a_0, \mathbf{H}_1 : a \neq a_0$ apie normaliojo dydžio vidurkį su reikšmingumo lygmeniu α tikrinimo kriterijus, kai dispersija nežinoma?

20. Kaip sudaromas hipotezių $\mathbf{H}_0 : a = a_0, \mathbf{H}_1 : a > a_0$ apie normaliojo dydžio vidurkį su reikšmingumo lygmeniu α tikrinimo kriterijus, kai dispersija žinoma?

21. Kaip sudaromas hipotezių $\mathbf{H}_0 : a = a_0, \mathbf{H}_1 : a > a_0$ apie normaliojo dydžio vidurkį su reikšmingumo lygmeniu α tikrinimo kriterijus, kai dispersija nežinoma?

22. Kaip remiantis CRT sudaromas kriterijus hipotezėms apie proporcijas $\mathbf{H}_0 : p = p_0, \mathbf{H}_1 : p \neq p_0$ su reikšmingumo lygmeniu α tikrinti?

23. Kaip remiantis CRT sudaromas kriterijus hipotezėms apie proporcijas $\mathbf{H}_0 : p = p_0, \mathbf{H}_1 : p > p_0$ su reikšmingumo lygmeniu α tikrinti?

24. Kaip remiantis CRT sudaromas kriterijus hipotezėms apie proporcijas $\mathbf{H}_0 : p = p_0, \mathbf{H}_1 : p < p_0$ su reikšmingumo lygmeniu α tikrinti?