Nepriklausomi eksperimentai ir įvykiai

Prieš pradedant spręsti 5 ir 6 užduotis, reikėtų susipažinti su paskaitose nagrinėtais pavyzdžiais apie nepriklausomų eksperimentų baigčių tikimybes. Aptarsime keletą uždavinių.

Bernulio eksperimentai. Bernulio eksperimentų schema nusakoma taip: eksperimentą atlikus vieną kartą, jo sėkmės tikimybė lygi p. Atliekame n nepriklausomų eksperimentų. Sėkmių skaičių pažymėkime S_n. Kokia tikimybė, kad eksperimentas pavyks k kartų, t.y. $S_n = k$? Atsakymas į šį klausimą toks:

$$P(S_n = k) = C_n^k\, p^k (1-p)^{n-k}\,, \quad k = 0, 1, \ldots, n. \tag{1}$$

Bernulio schema yra vienodų ir nepriklausomų statistinių eksperimentų matematinis modelis. Ją naudojant skaičiuojamos tikimybės, susijusios su nepriklausomų vienodų bandymų seka, kai kiekviename bandyme galimos tik dvi baigtys.

1 pavyzdys. Informacija perduodama triukšmingu kanalu, kuris vidutiniškai iškraipo 1% visų siunčiamų bitų. Kokia tikimybė, kad baite bus ne daugiau dviejų iškraipytų bitų?

Šiuo atveju sėkmė - gauti iškraipytą bitą. Pagal sąlygą tokios "sėkmės" tikimybė kiekvienu atveju yra $p = 0,01$. Mums reikalinga tikimybė, kad "sėkmių" skaičius po 8 bandymų būtų ne didesnis už 2. Pasinaudoję (1) lygybe, gausime

$$\begin{aligned} P(S_8 \le 2) &= P(S_8 = 0) + P(S_8 = 1) + P(S_8 = 2) \\ &= C_8^0\, 0,01^0 0,99^8 + C_8^1\, 0,01^1 0,99^7 + C_8^2\, 0,01^2 0,99^6 \approx 0,999946 \end{aligned}$$

Polinominė schema. Tarkime, kad vienas eksperimentas turi ne dvi baigtis ("sėkmė" ir "nesėkmė") , o r skirtingų baigčių $B_1, B_2, ..., B_r$, kurių tikimybės $p_1, p_2, ..., p_r$ yra teigiamos ir $p_1 + p_2 + ... + p_r = 1$.
Pažymėkime $S_n^1, S_n^2, ..., S_n^r$ baigčių $B_1, B_2, ..., B_r$ skaičius, gautus atlikus n eksperimentų. Jei $m_1 + m_2 + ... + m_r = n$, tai

$$P(S_n^1 = m_1, S_n^2 = m_2, ..., S_n^r = m_r) = \frac{n!}{m_1!m_2! \cdots m_r!} p_1^{m_1} p_2^{m_2} \cdots p_r^{m_r}. \tag{2}$$

Kai $r = 2$, ši formulė virsta Bernulio formule (1).

2 pavyzdys. Šešių komandų turnyre dalyvaujanti futbolo komanda kiekvienas rungtynes laimi su tikimybe $0,6$, sužaidžia lygiosiomis - $0,3$ ir pralaimi - $0,1$. Už pergalę skiriami 2 taškai, už lygiąsias 1 taškas, o pralaimėjusi komanda taškų negauna. Žaidžiama vieno rato sistema. Kokia tikimybė, kad šios komandos surinktų taškų skaičius X bus didesnis už 5 ?

Kiekviena komanda sužais po $n = 5$ rungtynes. Laikydamiesi (2) formulės žymėjimų turime: $r = 3$, $p_1 = 0,6$, $p_2 = 0,3$, $p_3 = 0,1$,

$$P(X > 5) = P(S_5^1 \ge 3) + P(S_5^1 = 2, S_5^2 = 3, S_5^3 = 0) + P(S_5^1 = 2, S_5^2 = 2, S_5^3 = 1) + P(S_5^1 = 1, S_5^2 = 4, S_5^3 = 0).$$

Gautųjų tikimybių skaičiavimui naudosime (1) ir (2) formules

$$P(S_5^1 \ge 3) = P(S_5^1 = 3) + P(S_5^1 = 4) + P(S_5^1 = 5) = C_5^3\, 0,6^3 0,4^2 + C_5^4\, 0,6^4 0,4 + 0,6^5,$$

$$\begin{aligned} P(S_5^1 = 2, S_5^2 = 3, S_5^3 = 0) &= \frac{5!}{2!3!0!} 0,6^2 0,3^3 0,1^0, \\ P(S_5^1 = 2, S_5^2 = 2, S_5^3 = 1) &= \frac{5!}{2!2!1!} 0,6^2 0,3^2 0,1^1, \\ P(S_5^1 = 1, S_5^2 = 4, S_5^3 = 0) &= \frac{5!}{1!4!0!} 0,6^1 0,3^4 0,1^0. \end{aligned}$$

3 pavyzdys. Standartinis lošimo kauliukas mėtomas iki trečio šešeto pasirodymo. Yra žinoma, kad po pirmųjų 5 metimų žaidimas dar nebuvo pasibaigęs. Kokia tikimybė, kad žaidimui baigti iš viso prireiks lygiai 10 metimų?

Tarkime, X yra metimų skaičius iki žaidimo pabaigos. Mums reikalinga tikimybė yra

$$P(X = 10|X > 5) = \frac{P(\{X = 10\} \cap \{X > 5\})}{P(X > 5)} = \frac{P(X = 10)}{P(X > 5)}.$$

Įvykis $\{X = 10\}$ reiškia, kad dešimtuoju metimu atsivertė šešetas, o pirmuose 9 metimuose atsivertė lygiai 2 šešetai. Todėl

$$P(X = 10) = \frac{1}{6} \cdot C_9^2 \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{5}{6}\right)^7.$$

Įvykis $\{X > 5\}$ įvyksta, jei pirmuose 5 metimuose atsiverčia ne daugiau kaip 2 šešetai. Taigi

$$P(X > 5) = \left(\frac{5}{6}\right)^5 + C_5^1 \left(\frac{1}{6}\right)^1 \left(\frac{5}{6}\right)^4 + C_5^2 \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{5}{6}\right)^3,$$

čia pasinaudojome (1) formule.

Tikimybėms (1) ir (2) skaičiuoti galima pasitelkti *Python* bibliotekos `SciPy` statistikos modulio `stats` funkcijas. Tada 1 ir 2 pavyzdžiuose tikimybių radimui pakaktų tokio paprasto *Python* kodo

```
from scipy import stats as st

print (st.binom.cdf(k=2,n=8,p=0.01))
print (1.0-st.binom.cdf(k=2,n=5,p=0.6))
print (st.multinomial.pmf(x=[2,3,0],n=5,p=[0.6,0.3,0.1]))
print (st.multinomial.pmf(x=[2,2,1],n=5,p=[0.6,0.3,0.1]))
print (st.multinomial.pmf(x=[1,4,0],n=5,p=[0.6,0.3,0.1]))
```