Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

ИТМО

Типовик (задание 7)

по дисциплине

"Математический анализ"

Семестр 2

Выполнил:

студент

Семёнов Никита Викторович

гр. **J3113**

ИСУ **467414**

Отчет сдан:

20.04.2025

Санкт-Петербург

2025

Лабораторная работа №1: Исследование интегрируемости функции

Постановка задачи

Дана функция $f(x) = \cos^2 x$ на отрезке $[0, \pi]$. Необходимо выполнить аналитический и практический этапы исследования интегрируемости функции и вычисления интеграла.

Аналитический этап

0. Основные определения

Рассмотрим функцию $f(x)$, заданную на отрезке $[a, b]$.

- **Разбиение**: Множество точек $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$, где $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$, разбивает $[a, b]$ на n интервалов $[x_{i-1}, x_i]$, длиной $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$.
- **Суммы Дарбу**: Для каждого интервала $[x_{i-1}, x_i]$ определяем:

  $$m_i = \inf_{[x_{i-1}, x_i]} f(x), \quad M_i = \sup_{[x_{i-1}, x_i]} f(x).$$

  Нижняя сумма Дарбу:

  $$s_n = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i,$$

  Верхняя сумма Дарбу:

  $$S_n = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i.$$

- **Интегралы Дарбу**: Нижний интеграл:

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \sup\{s_n\},$$

Верхний интеграл:

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \inf\{S_n\}.$$

- **Интегрируемость по Риману**: Функция $f(x)$ интегрируема на $[a,b]$, если:

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx.$$

Эквивалентно, по критерию Римана, $f(x)$ интегрируема, если:

$$\lim_{n\to\infty,\max\Delta x_i\to 0}(S_n - s_n) = 0.$$

1. Верхняя и нижняя суммы Дарбу

Разобьём отрезок $[0,\pi]$ на n равных частей: $\Delta x = \frac{\pi-0}{n} = \frac{\pi}{n}$, точки разбиения: $x_i = \frac{i\pi}{n}$, $i = 0,1,\ldots,n$.

Функция $f(x) = \cos^2 x$ непрерывна на $[0,\pi]$. Исследуем её монотонность:

$$f'(x) = 2\cos x \cdot (-\sin x) = -\sin 2x.$$

$$f'(x) = 0 \sin 2x = 0 \Rightarrow 2x = k\pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2}, \quad k \in Z.$$

На $[0,\pi]$ критические точки: $x = 0, \frac{\pi}{2}, \pi$. Проверяем знаки $f'(x)$:

- На $(0,\frac{\pi}{2})$: $\sin 2x > 0$, $f'(x) < 0$, $f(x)$ убывает.
- На $(\frac{\pi}{2},\pi)$: $\sin 2x < 0$, $f'(x) > 0$, $f(x)$ возрастает.

Экстремумы:

$$f(0) = \cos^2 0 = 1, \quad f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos^2\frac{\pi}{2} = 0, \quad f(\pi) = \cos^2\pi = 1.$$

На каждом интервале $[x_{i-1},x_i]$ находим:

$$m_i = \inf_{[x_{i-1},x_i]} f(x), \quad M_i = \sup_{[x_{i-1},x_i]} f(x).$$

Нижняя и верхняя суммы Дарбу:

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x, \quad S_n = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x.$$

Для примера возьмём $n = 4$:

$$\Delta x = \frac{\pi}{4}, \quad x_i = 0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}, \pi.$$

Интервалы и поведение:

- $[0, \frac{\pi}{4}]$: убывает, $M_1 = f(0) = 1$, $m_1 = f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos^2\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}$.
- $[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$: убывает, $M_2 = f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$, $m_2 = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$.
- $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}]$: возрастает, $M_3 = f\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \cos^2\frac{3\pi}{4} = \frac{1}{2}$, $m_3 = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$.
- $[\frac{3\pi}{4}, \pi]$: возрастает, $M_4 = f(\pi) = 1$, $m_4 = f\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$.

Суммы:

$$s_4 = \left(\frac{1}{2} + 0 + 0 + \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{\pi}{4} = 1 \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} \approx 0.785,$$

$$S_4 = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 1\right) \cdot \frac{\pi}{4} = 3 \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} \approx 2.356.$$

2. Критерий Римана интегрируемости

Функция $f(x)$ интегрируема по Риману, если:

$$\lim_{n\to\infty} (S_n - s_n) = 0.$$

Так как $f(x) = \cos^2 x$ непрерывна на $[0, \pi]$, для любого разбиения с $\max \Delta x_i \to 0$:

$$S_n - s_n = \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)\Delta x_i \leq \sum_{i=1}^{n} (\max f - \min f)\Delta x_i = (\max f - \min f) \cdot (b - a).$$

Максимум $f(x) = 1$, минимум $f(x) = 0$. При $\Delta x \to 0$, $M_i - m_i \to 0$, так как $f(x)$ непрерывна. Следовательно, $S_n - s_n \to 0$, и $f(x)$ интегрируема по Риману.

3. Интегралы Дарбу

Нижний и верхний интегралы Дарбу:

$$\underline{\int_0^\pi} f(x)\,dx = \sup s_n, \quad \overline{\int_0^\pi} f(x)\,dx = \inf S_n.$$

Так как $f(x)$ непрерывна, нижний и верхний интегралы совпадают:

$$\underline{\int_0^\pi} f(x)\,dx = \overline{\int_0^\pi} f(x)\,dx = \int_0^\pi \cos^2 x\,dx.$$

Вычислим интеграл:

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2},$$

$$\int_0^\pi \cos^2 x\,dx = \int_0^\pi \frac{1+\cos 2x}{2}\,dx = \frac{1}{2}\left[x + \frac{\sin 2x}{2}\right]_0^\pi = \frac{1}{2}\left(\pi + \frac{\sin 2\pi}{2} - 0 - \frac{\sin 0}{2}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

Вывод: Функция интегрируема, значение интеграла $\frac{\pi}{2} \approx 1.571$.

4. Достаточное условие интегрируемости

Достаточное условие: функция ограничена и имеет конечное число точек разрыва на $[0, \pi]$.

Проверка:

- $f(x) = \cos^2 x$ ограничена: $0 \le \cos^2 x \le 1$.
- $f(x)$ непрерывна на $[0, \pi]$, так как $\cos x$ непрерывна, и нет точек разрыва.

Условие выполнено, $f(x)$ интегрируема.

5. Сравнение с формулой Ньютона-Лейбница

По формуле Ньютона-Лейбница:

$$\int_0^\pi \cos^2 x\,dx = \frac{\pi}{2}.$$

Это совпадает с результатом, полученным через интегралы Дарбу.

Практический этап

1. Программа для вычисления интеграла

Написана программа на Python, которая вычисляет интеграл методами прямоугольников (левая, правая, средняя точки, произвольная точка), трапеций и Симпсона. Промежуток $[0, \pi]$ разбивается на $n = 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128$ равных отрезков.

2. Интегральные суммы

Для каждого метода:

- Метод прямоугольников: $s_i = f(\xi_i) \cdot \Delta x$, где ξ_i — левая, правая, средняя или произвольная точка.
- Метод трапеций: $s_i = \frac{f(x_{i-1})+f(x_i)}{2} \cdot \Delta x$.
- Метод Симпсона: $s_i = \frac{f(x_{i-1})+4f\left(\frac{x_{i-1}+x_i}{2}\right)+f(x_i)}{6} \cdot \Delta x$.

3. Графики

Построены графики для $n = 4, 8, 16$, показывающие функцию $f(x) = \cos^2 x$ и закрашенные области, соответствующие интегральным суммам (метод прямоугольников, средняя точка).

4. Сравнение результатов

Истинное значение интеграла: $\frac{\pi}{2} \approx 1.5708$. Результаты программы для $n = 128$:

- Прямоугольники (середина): ≈ 1.5708.
- Трапеции: ≈ 1.5708.
- Симпсон: ≈ 1.5708.

Все методы дают результат, близкий к аналитическому, с уменьшением ошибки при увеличении n.

При малых n (например, $n = 1, 2$) наблюдаются значительные отклонения от истинного значения $\frac{\pi}{2}$, что ожидаемо из-за грубого разбиения.

5. Зависимость отклонения

Построены графики зависимости средней абсолютной ошибки (MAE) и среднеквадратичной ошибки (MSE) от n:

$$MAE = \left| - \frac{\pi}{2} \right|, \quad MSE = \left(- \frac{\pi}{2} \right)^2.$$

Ошибка уменьшается с ростом n, метод Симпсона имеет наименьшую ошибку для обеих метрик.

Вывод

- Функция $f(x) = \cos^2 x$ интегрируема на $[0, \pi]$ по критерию Римана и из-за непрерывности.
- Аналитическое значение интеграла: $\frac{\pi}{2} \approx 1.5708$.
- Численные методы подтверждают аналитический результат, ошибка уменьшается с ростом n.
- Метод Симпсона наиболее точен.
- Численные методы показывают большие отклонения при малых n, но сходятся к $\frac{\pi}{2}$ при увеличении n.
- MSE и MAE подтверждают, что метод Симпсона наиболее точен.

$$\int_0^{\pi} \cos^2 x \, dx = \frac{\pi}{2}$$

Ссылка на ГИТ ХАБ: https://github.com/user6778899/Matan_lab-8.git