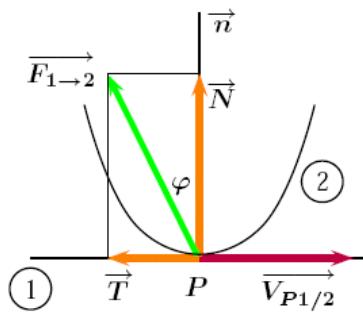


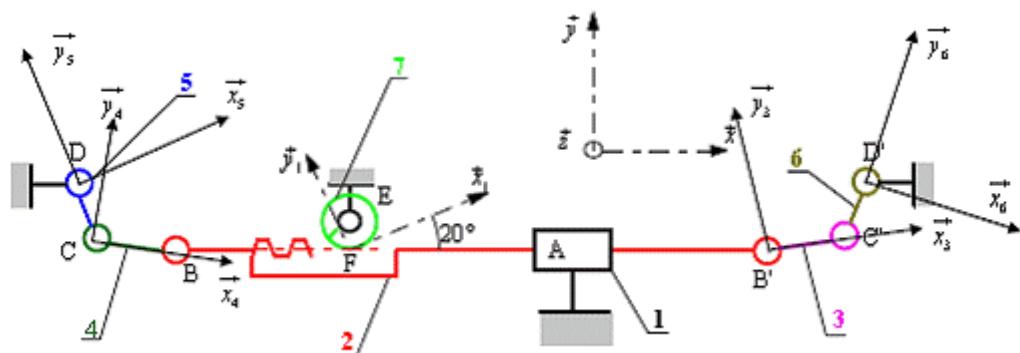
Mécanique du solide rigide

Comportement statique des systèmes mécaniques

$$\begin{aligned} \text{Action en } K \\ \left\{ \begin{array}{l} 6k_{3/2} \\ 0 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} +k_T \\ -k_A \\ +k_R \\ 0 \end{array} \right\}_{K,R} \quad \alpha = 20^\circ \\ \beta = 18^\circ \\ \left\{ \begin{array}{l} 6k_{3/2} \\ 0 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} k \cos 20^\circ \cos 18^\circ \\ -k \sin 20^\circ \\ k \cos 20^\circ \sin 18^\circ \\ 0 \end{array} \right\}_{K,R} \end{aligned}$$



D.A.E.



Sommaire

Notions de calcul vectoriel	3
Centre de gravité.....	9
Schématisation.....	11
Modélisation des actions mécaniques.....	25
Frottement - Lois de Coulomb.....	48
Principe fondamental de la statique.....	54
Méthode de résolution en statique analytique.....	61
Méthode de résolution en statique graphique.....	63
Notion de torseur.....	75
Applications.....	80

Notions de calcul vectoriel

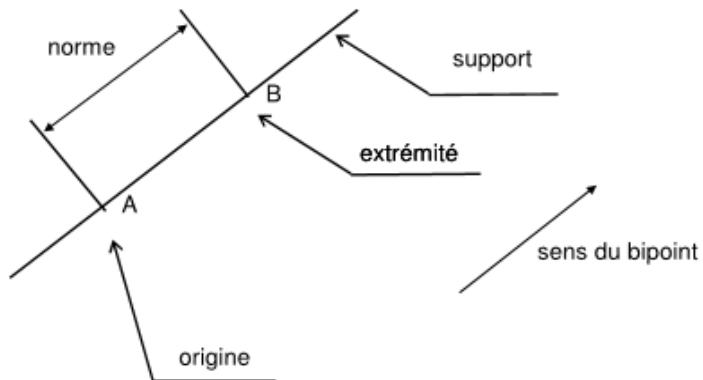
1 - Bipoint

1 - 1 Définition

Soit (E) l'espace affine (ensemble dont les éléments sont des points). On appelle bipoint tout couple de points (A, B) de (E). Le point A est appelé origine et le point B extrémité du bipoint.

1 - 2 Représentation géométrique

Un bipoint (A, B) est représenté par un segment de droite orienté, de l'origine A vers l'extrémité B du bipoint



1 - 3 Caractéristiques

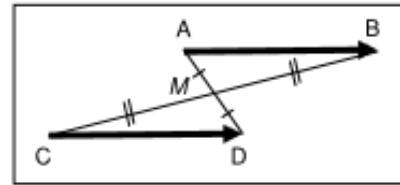
Un bipoint (A, B) est défini par :

- son origine : A
- son support : la droite (D)
- son sens : de A vers B
- sa norme : la distance entre les points A et B

1 - 4 Bipoints équipollents

2 bipoints (A, B) et (C, D) sont équipollents s'ils ont :

- des supports parallèles
- même sens
- même norme

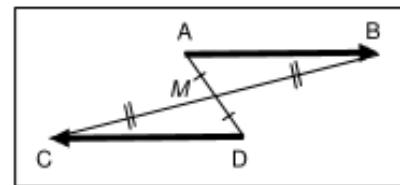


Géométriquement les segments [$A D$] et [$B C$] ont le même milieu

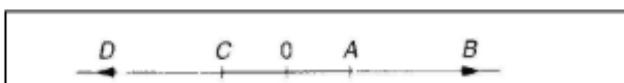
1 - 5 Bipoints opposés

2 bipoints (A, B) et (C, D) sont opposés s'ils ont :

- des supports parallèles
- des sens contraires
- même norme



1 - 6 Bipoints directement opposés



2 bipoints opposés, ayant le même support, sont dits directement opposés.

1 - 7 Bipoint nul

Un bipoint est nul si son origine et son extrémité sont confondues

2 - Vecteur

2 - 1 Définition

L'ensemble des bipoints équipollents au bipoint (A, B) constitue une classe d'équivalence appelée vecteur et notée \vec{V}

Le bipoint (A, B) est un représentant de la classe d'équivalence \vec{V} et on l'écrit : $\vec{V} = \vec{AB}$

2 - 2 Vecteur nul

C'est un vecteur ayant pour représentant le bipoint nul, c'est à dire 2 points confondus.

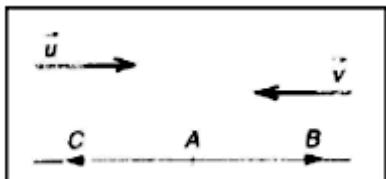
On le note $\vec{0}$

2 - 3 Vecteurs égaux

Deux vecteurs \vec{U} et \vec{V} sont dits égaux si les bipoints qui les représentent sont équipollents.

On note $\vec{U} = \vec{V}$

2 - 4 Vecteurs colinéaires



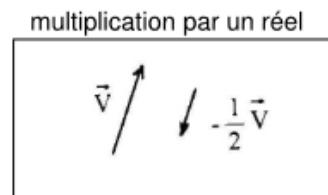
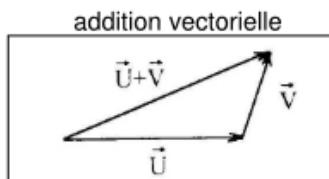
Deux vecteurs \vec{U} et \vec{V} sont dits colinéaires si leurs représentants de même origine, \vec{AB} et \vec{AC} par exemple ont même support

2 - 5 Opérations sur les vecteurs

Dans l'ensemble (E) des vecteurs deux lois de composition ont été introduites :

- une loi interne : l'addition vectorielle qui à tout couple de vecteurs (\vec{U}, \vec{V}) associe le vecteur somme \vec{s}
 $= \vec{U} + \vec{V}$

- une loi externe : la multiplication par un réel, qui à tout vecteur \vec{V} et un réel λ associe un vecteur colinéaire $\lambda \vec{V}$



Ces deux lois possèdent les propriétés indiquées ci-après.

Quels que soient les vecteurs et les réels $\lambda, \mu \dots$:

Propriétés de l'addition vectorielle :

$$\vec{U} + (\vec{V} + \vec{W}) = (\vec{U} + \vec{V}) + \vec{W} = \vec{U} + \vec{V} + \vec{W}$$

$$\vec{U} + \vec{V} = \vec{V} + \vec{U}$$

$$\vec{V} + (-\vec{V}) = \vec{0} \text{ et } \vec{V} + \vec{0} = \vec{V}$$

Propriétés de la multiplication par un réel :

$$\lambda(\mu \vec{V}) = (\lambda \mu) \vec{V}$$

$$\lambda(\vec{U} + \vec{V}) = \lambda \vec{U} + \lambda \vec{V}$$

$$(\lambda + \mu) \vec{V} = \lambda \vec{V} + \mu \vec{V}$$

L'ensemble (E) muni de ces 8 propriétés possède une structure d'espace vectoriel sur R

2 - 6 Base de l'espace vectoriel

On appelle base de l'espace vectoriel (E), de dimensions 3, tout triplet de vecteurs \vec{x} , \vec{y} , \vec{z} tel que tout vecteur \vec{V} de (E) puisse s'écrire de façon unique : $\vec{V} = X \vec{x} + Y \vec{y} + Z \vec{z}$

Les réels X, Y, Z sont les composantes de \vec{V} dans la base B (\vec{x} , \vec{y} , \vec{z})

On note $\vec{v}(X, Y, Z)$ ou $\vec{v} \begin{cases} X \\ Y \\ Z \end{cases}$

2 - 7 Repère d'espace

Un repère R de l'espace affine (E), associé à l'espace vectoriel (E) est constitué par :

- un point origine du repère noté O

- une base B (\vec{x} , \vec{y} , \vec{z}) de l'espace vectoriel (E)

Ce repère est noté : R (O, \vec{x} , \vec{y} , \vec{z}).

A tout point M de (E) on peut associer le

vecteur \vec{v} de (E) tel que : $\vec{v} = \vec{OM}$

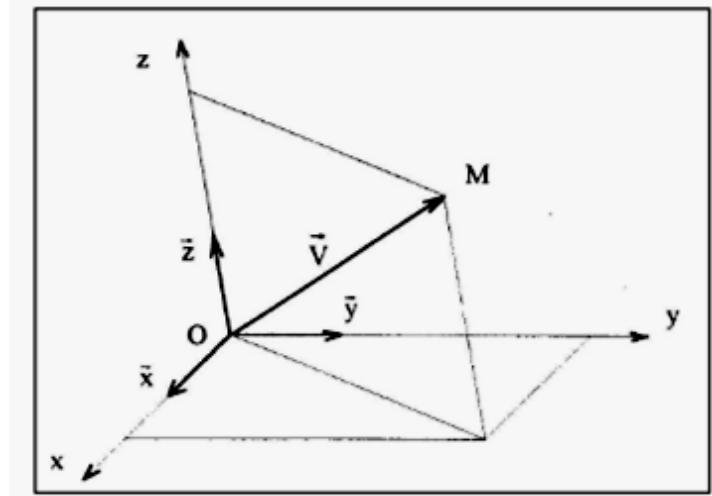
Cette application de (E) dans (E) est une bijection.

Si le vecteur \vec{v} a pour composantes X, Y, Z dans la base B (\vec{x} , \vec{y} , \vec{z}) on a donc :

$$\vec{OM} = X \vec{x} + Y \vec{y} + Z \vec{z}$$

X, Y, Z sont les coordonnées du point M dans le repère R (O, \vec{x} , \vec{y} , \vec{z}).

On note : M (X, Y, Z)



2 - 8 Conséquences

- Expression analytique de la somme de deux vecteurs $\vec{v}_1(X_1, Y_1, Z_1)$ et $\vec{v}_2(X_2, Y_2, Z_2)$ exprimés dans la base B (\vec{x} , \vec{y} , \vec{z}) : $\vec{v}_1 + \vec{v}_2 = (X_1 + X_2) \vec{x} + (Y_1 + Y_2) \vec{y} + (Z_1 + Z_2) \vec{z}$
- L'addition vectorielle conduit à la relation de Chasles : $\vec{MN} = \vec{MP} + \vec{PN}$

3 - Produit scalaire de 2 vecteurs

3 - 1 Définition

Le produit scalaire du vecteur \vec{U} par le vecteur \vec{V} , que l'on note $\vec{U} \cdot \vec{V}$ est le nombre réel tel que :

$$\vec{U} \cdot \vec{V} = \|\vec{U}\| \|\vec{V}\| \cos(\vec{U}, \vec{V}) \text{ on note } (\vec{U}, \vec{V}) = \alpha$$

Cas de nullité : $\vec{U} \cdot \vec{V} = 0$ si $\vec{U} = \vec{0}$ ou si $\vec{V} = \vec{0}$ ou si $\alpha = \frac{\pi}{2}$

3 - 2 Propriétés

- Commutativité : $\vec{U} \cdot \vec{V} = \vec{V} \cdot \vec{U}$
- Distributivité par rapport à l'addition vectorielle : $\vec{U} \cdot (\vec{V} + \vec{W}) = \vec{U} \cdot \vec{V} + \vec{U} \cdot \vec{W}$
- Multiplication par un scalaire : $\lambda \vec{U} \cdot \mu \vec{V} = \lambda \cdot \mu \cdot (\vec{U} \cdot \vec{V})$

Applications :

Si (\vec{x} , \vec{y} , \vec{z}) sont les vecteurs unitaires d'une base orthonormée directe :

$$\vec{x} \cdot \vec{x} = \vec{y} \cdot \vec{y} = \vec{z} \cdot \vec{z} = 1 \text{ et } \vec{x} \cdot \vec{y} = \vec{y} \cdot \vec{z} = \vec{z} \cdot \vec{x} = 0$$

Dans une base orthonormée (\vec{x} , \vec{y} , \vec{z}) la norme du vecteur $\vec{V}(X, Y, Z)$ a pour expression :

$$\|\vec{V}\| = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$$

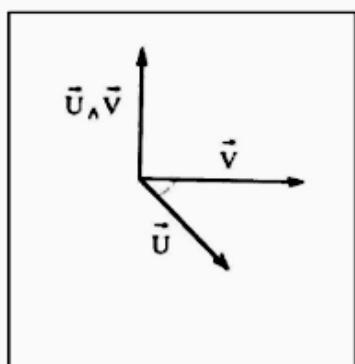
3 - 3 Expression analytique

Dans un repère R (O, \vec{x} , \vec{y} , \vec{z}) on donne $\vec{V}_1(X_1, Y_1, Z_1)$ et $\vec{V}_2(X_2, Y_2, Z_2)$

Le produit scalaire $\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2$ s'exprime par : $\boxed{\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 = X_1 \cdot X_2 + Y_1 \cdot Y_2 + Z_1 \cdot Z_2}$

4 - Produit vectoriel de 2 vecteurs

4 - 1 Définition



Le produit vectoriel du vecteur \vec{U} par le vecteur \vec{V} , noté $\vec{U} \wedge \vec{V}$ ou $\vec{U} \times \vec{V}$ est le vecteur \vec{W} dont un représentant est tel que :

- son support est perpendiculaire au plan (\vec{U}, \vec{V})

- son sens est tel que ($\vec{U}, \vec{V}, \vec{W}$) soit direct

- sa norme a pour valeur $\|\vec{W}\| = \|\vec{U}\| \cdot \|\vec{V}\| \cdot \sin(\vec{U}, \vec{V})$

Cas de nullité : si $\vec{U} = \vec{0}$ ou si $\vec{V} = \vec{0}$ ou si \vec{U} et \vec{V} sont colinéaires

4 - 2 Propriétés

- Non commutativité : $\vec{U} \wedge \vec{V} = -(\vec{V} \wedge \vec{U})$
- Distributivité par rapport à l'addition vectorielle : $\vec{U} \wedge (\vec{V} + \vec{W}) = \vec{U} \wedge \vec{V} + \vec{U} \wedge \vec{W}$
- Multiplication par un scalaire : $\lambda \vec{U} \wedge \mu \vec{V} = \lambda \cdot \mu \cdot (\vec{U} \wedge \vec{V})$
- Application : si (\vec{x} , \vec{y} , \vec{z}) sont les vecteurs unitaires d'une base orthonormée directe :

$$\vec{x} \times \vec{y} = \vec{x} \wedge \vec{y} = \vec{z} \quad \text{et} \quad \vec{y} \times \vec{x} = \vec{y} \wedge \vec{x} = -\vec{z} \quad \text{puis} \quad \vec{x} \times \vec{x} = \vec{0}$$

$$\vec{y} \times \vec{z} = \vec{y} \wedge \vec{z} = \vec{x} \quad \text{et} \quad \vec{z} \times \vec{y} = \vec{z} \wedge \vec{y} = -\vec{x} \quad \text{puis} \quad \vec{y} \times \vec{y} = \vec{0}$$

$$\vec{z} \times \vec{x} = \vec{z} \wedge \vec{x} = \vec{y} \quad \text{et} \quad \vec{x} \times \vec{z} = \vec{x} \wedge \vec{z} = -\vec{y} \quad \text{puis} \quad \vec{z} \times \vec{z} = \vec{0}$$

4 - 3 Expression analytique

Dans une base orthonormée (\vec{x} , \vec{y} , \vec{z}) on donne $\vec{V}_1(X_1, Y_1, Z_1)$ et $\vec{V}_2(X_2, Y_2, Z_2)$

Le produit vectoriel $\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2$ s'exprime par :

$$\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 = (Y_1 \cdot Z_2 - Z_1 \cdot Y_2) \vec{x} + (Z_1 \cdot X_2 - X_1 \cdot Z_2) \vec{y} + (X_1 \cdot Y_2 - Y_1 \cdot X_2) \vec{z}$$

Méthode mnémotechnique :

Pour retrouver rapidement une ligne de composante du produit vectoriel, on fait le produit en croix des composantes des deux lignes suivantes, en respectant la convention de signe, comme indiqué ci-dessous.

$$\begin{array}{lcl} \vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 & = & \vec{W} \\ \left\{ \begin{array}{l} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{array} \right. & \left\{ \begin{array}{l} X_2 \\ Y_2 \\ Z_2 \end{array} \right. & \left\{ \begin{array}{l} Y_1 \cdot Z_2 - Z_1 \cdot Y_2 \\ Z_1 \cdot X_2 - X_1 \cdot Z_2 \\ X_1 \cdot Y_2 - Y_1 \cdot X_2 \end{array} \right. \end{array}$$

4 - 4 Double produit vectoriel

Soient 3 vecteurs \vec{U} , \vec{V} , \vec{W} on démontre la formule suivante dite de Gibbs :

$$\vec{U} \wedge (\vec{V} \wedge \vec{W}) = (\vec{U} \cdot \vec{W}) \cdot \vec{V} - (\vec{U} \cdot \vec{V}) \cdot \vec{W}$$

5 - Produit mixte

5 - 1 Définition

Le produit mixte de 3 vecteurs \vec{U} , \vec{V} , \vec{W} est le nombre réel suivant, noté $(\vec{U}, \vec{V}, \vec{W})$:

$$(\vec{U}, \vec{V}, \vec{W}) = \vec{U} \cdot (\vec{V} \wedge \vec{W})$$

5 - 2 Propriétés

- Permutation des signes scalaire et vectoriel : le produit mixte reste inchangé :

$$(\vec{U}, \vec{V}, \vec{W}) = \vec{U} \cdot (\vec{V} \wedge \vec{W}) = (\vec{U} \wedge \vec{V}) \cdot \vec{W}$$

- Distributivité par rapport à l'addition vectorielle : $(\vec{U} + \vec{U}', \vec{V}, \vec{W}) = (\vec{U}, \vec{V}, \vec{W}) + (\vec{U}', \vec{V}, \vec{W})$

- Multiplication par un réel : $(\lambda \vec{U}, \mu \vec{V}, \delta \vec{W}) = \lambda \mu \delta (\vec{U}, \vec{V}, \vec{W})$

- Permutation de 2 vecteurs : le produit mixte change de signe : $(\vec{U}, \vec{V}, \vec{W}) = -(\vec{V}, \vec{U}, \vec{W})$

- Permutation circulaire des vecteurs : le produit mixte reste inchangé :

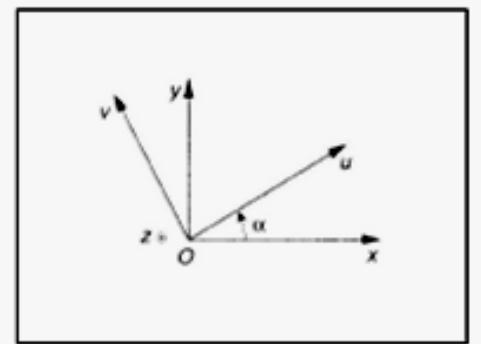
$$(\vec{U}, \vec{V}, \vec{W}) = (\vec{V}, \vec{W}, \vec{U}) = (\vec{W}, \vec{U}, \vec{V})$$

Cas de nullité :

- un des vecteurs est nul
- 2 vecteurs ont même direction
- Les 3 vecteurs forment un même plan

6 – Changement de base :

Soient 2 bases B (\vec{x} , \vec{y} , \vec{z}) et B_1 (\vec{u} , \vec{v} , \vec{z}) ayant un vecteur commun (ici \vec{z}). Les repères associés à ces bases ont pour représentant au point O : voir figure.



L'angle α étant défini par : $\alpha = (\vec{x}, \vec{u})$ on peut écrire :

$$\vec{u} = \cos \alpha \vec{x} + \sin \alpha \vec{y}$$

$$\vec{v} = -\sin \alpha \vec{x} + \cos \alpha \vec{y}$$

Soit un vecteur \vec{V} dont l'expression dans la base B_1 est :

$$\vec{V} = A \vec{u} + B \vec{v} + C \vec{z}$$

Dans la base B, ce vecteur \vec{V} s'exprimera par :

$$\vec{V} = (A \cos \alpha - B \sin \alpha) \vec{x} + (A \sin \alpha + B \cos \alpha) \vec{y} + C \vec{z}$$

Centre de gravité

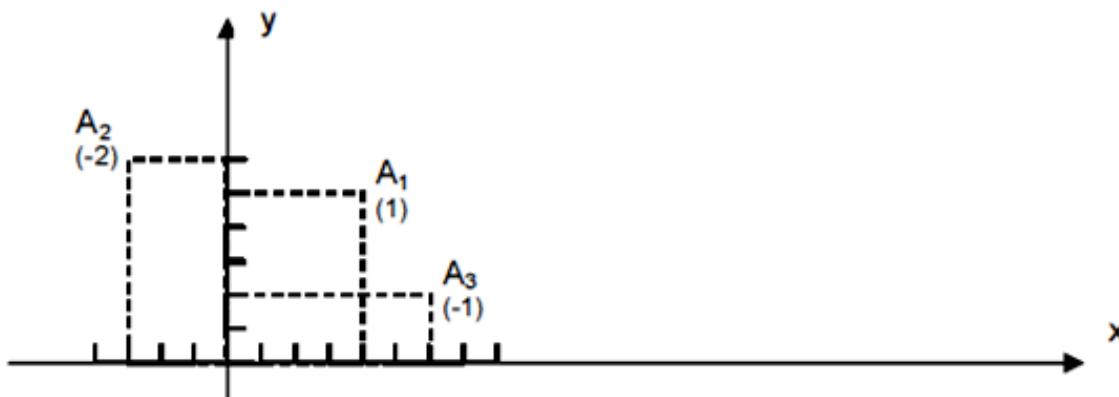
1 – Barycentre

Le barycentre de n points A_1, A_2, \dots, A_n affectés respectivement des coefficients $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ est un point G tel que :

$$\alpha_1 \overrightarrow{OA_1} + \alpha_2 \overrightarrow{OA_2} + \dots + \alpha_n \overrightarrow{OA_n} = (\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n) \overrightarrow{OG}$$

$$\text{Soit } \sum_{i=0}^n (\alpha_i \overrightarrow{OA_i}) = (\sum \alpha_i) \overrightarrow{OG}$$

O représente un point arbitraire commun aux pointeurs $\overrightarrow{OA_i}$ et \overrightarrow{OG}



2 – Centre de gravité

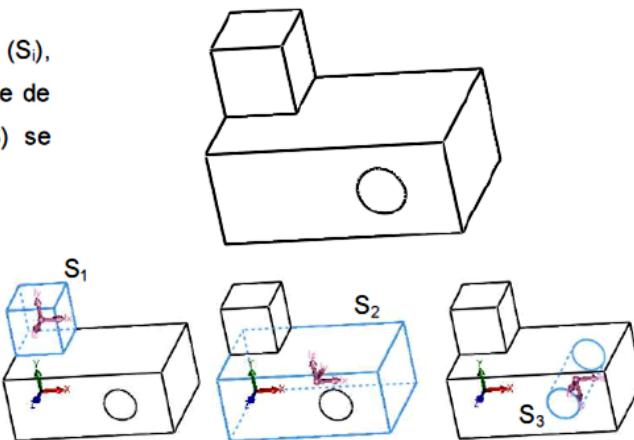
Le barycentre de n points affectés de coefficients proportionnels aux masses associées à ces points se désigne par un « centre de gravité » des n points . Pour une structure (S) discrète (constituée de blocs séparés), on considère les masses m_i associées aux divers points A_i et l'on détermine le centre de gravité de l'ensemble à partir de la relation :

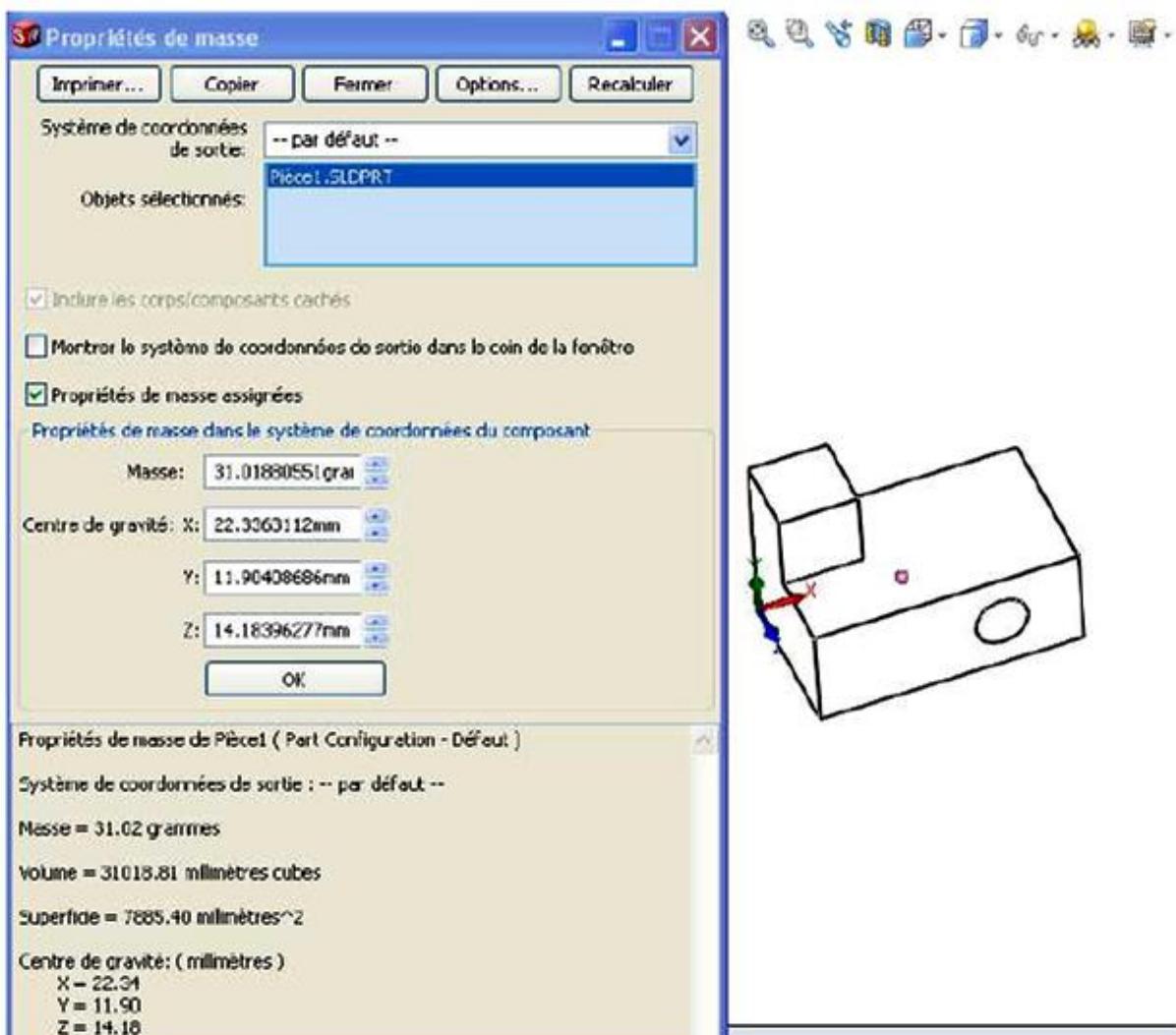
$$\sum (m_i \overrightarrow{OA_i}) = M \overrightarrow{OG} \text{ avec } M = \sum m_i$$

3 – Détermination du centre de gravité

Si le solide (S) peut de partager en n solides notés (S_i), géométriquement simples de masse m_i et de centre de gravité A_i connus, le centre de gravité G de (S) se détermine à partir de la relation :

$$\sum_{i=1}^n (m_i \overrightarrow{OA_i}) = \left(\sum_{i=1}^n m_i \right) \overrightarrow{OG}$$





SCHEMATISATION

La schématisation est avec le dessin industriel un des principaux outils de la communication technique. La schématisation est un langage symbolique utilisant une codification normalisée.

1- Introduction

Pourquoi modéliser ?

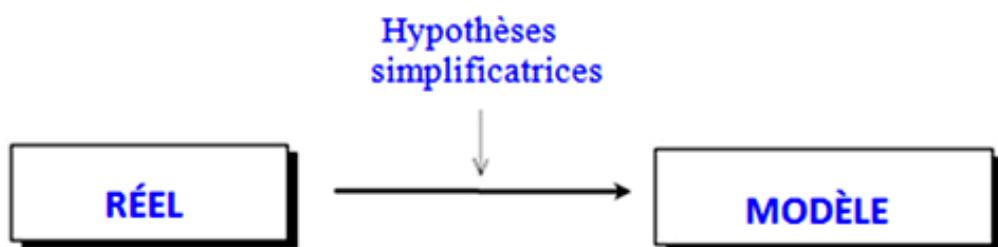
Pour trouver une réponse à une question technologique (valider un critère du CdCF, dimensionner une pièce,...), la complexité du réel nous constraint à effectuer des hypothèses simplificatrices. La modélisation permet, par des approximations plus ou moins grandes (les hypothèses), de faire entrer le réel dans le domaine de validité d'une théorie de calcul. (par exemple : la mécanique du solide indéformable : statique, cinématique, dynamique, RDM)

Le langage graphique que nous utiliserons, pour donner une représentation graphique du modèle, est constitué de symboles normalisés par l'AFNOR

Un schéma obéit dès lors aux impératifs suivants :

- il doit être construit à l'aide de symboles normalisés
- il doit permettre de résoudre un problème technique (de fait un même système technique pourra avoir plusieurs modèles en fonction du problème à résoudre).

Le schéma est la traduction graphique du modèle : Il contient les hypothèses simplificatrices



2- Hypothèses

Surfaces géométriquement parfaites, positionnement géométriquement parfait des surfaces

Contact sans jeu, sans adhérence.

Liaisons considérées permanentes.

Mécanisme dans une configuration de fonctionnement et non en butée.

Les solides étudiés sont considéré comme parfait. Il s'agit d'un modèle théorique souvent utilisé

- La masse d'un solide parfait reste constante.
- Sa forme ne varie pas quelle que soient les sollicitations qu'on lui impose (indéformable).
- La distance entre deux points quelconques est invariante au cours du temps (rigide).
- Un solide parfait est supposé isotrope, même caractéristiques mécaniques dans toutes les directions.

3- Repérage d'un solide par rapport à un autre solide.

Afin de pouvoir schématiser le mécanisme il nous faut pouvoir définir l'emplacement des différents éléments.

Pour cela, on est amené à placer différents repères.

3.1- Repère général.

Pour repérer une liaison, le mécanicien est amené à choisir :

- Un point fixe, généralement lié au bâti.
- Une base (x , y , z) avec des vecteurs unitaires dirigés selon des directions caractéristiques de l'ensemble : axes de symétries de certaines pièces essentielles, pouvant servir de lignes de références à la cotation.

3.2 - Repère local.

Le repère local permet de caractériser une liaison selon sa forme géométrique particulière :

- Axes de symétrie.
- Normale à un plan particulier de cette liaison.

Les axes du repère local doivent tenir compte de ces particularités.

L'origine du repère local sera précisée à partir d'un repère général.

4- Cinématique des liaisons entre solides

Une liaison élémentaire entre deux solides 1 et 2 est créée par le contact d'une surface associée au solide 1 sur une surface associée à 2.

4.1- Les différents types de contact.

Les solides étudiés dans ce chapitre sont supposés déformables. On distingue de manière purement théorique trois grands types de contact :

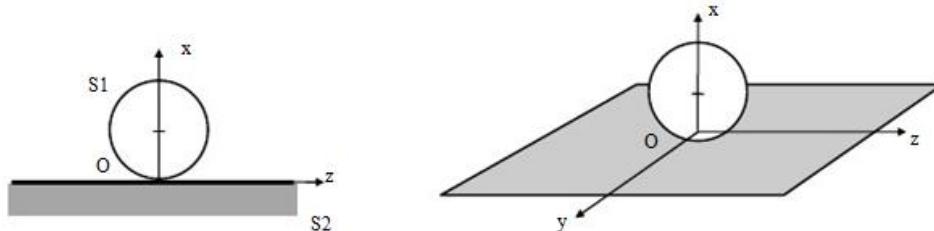
- Le contact ponctuel.
- Le contact linéique.
- Le contact surfacique.

Remarque importante :

Il ne faudra jamais perdre de vue que dans la réalité, il n'existe que des contacts surfaciques et rien d'autre.

4.1.1- Le contact ponctuel.

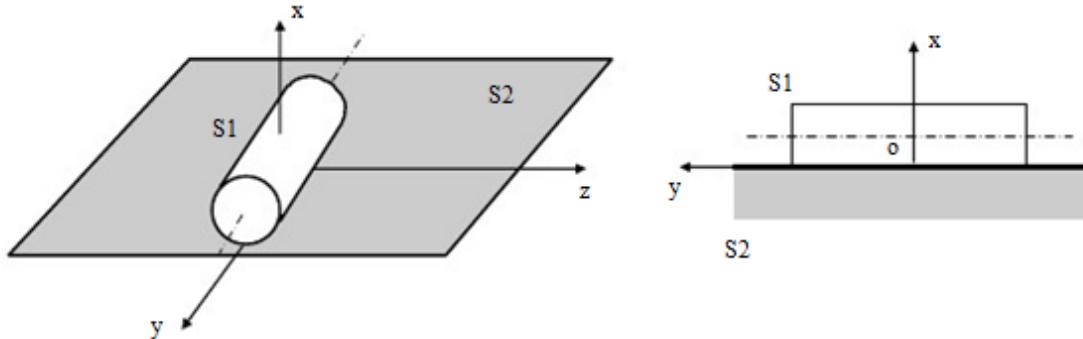
Deux solides S_1 et S_2 sont en contact ponctuel si l'intersection de leur représentation géométrique est un point.



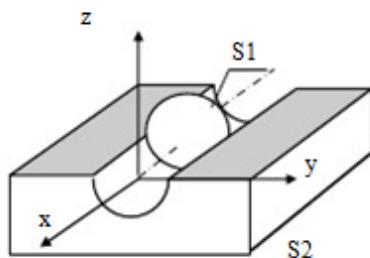
4.1.2- Les contacts linéaires.

Deux solides S1 et S2 sont en contact linéaire si l'intersection de leur représentation géométrique est une ligne.

Le contact linéaire rectiligne

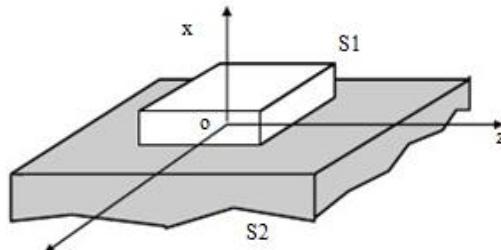


Le contact linéaire circulaire



4.1.3- Les contacts surfaciques.

Deux solides S1 et S2 sont en contact surfacique si l'intersection de leur représentation géométrique est une surface.



La figure ci-contre montre les .6.... mouvements relatifs indépendants par rapport au repère (A, x, y, z)

Ces .6.. mouvements sont :

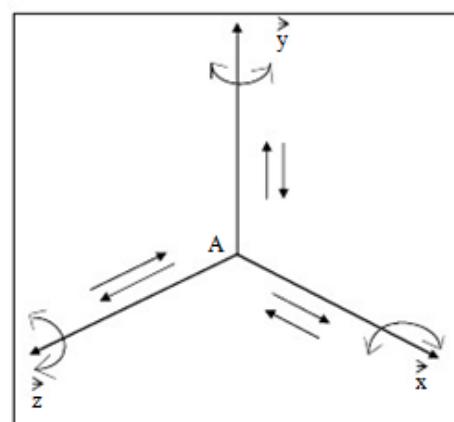
- 3... translations ..Tx.,Ty.,Tz
- 3... rotations ..Rx.,Ry.,Rz

Tx.,Ty.,Tz., Rx.,Ry.,Rz...sont des variables qui peuvent prendre deux états :

- état 0 lorsque le mouvement est impossible
- état 1 lorsque le mouvement est possible

Le degré de liaison est le nombre de déplacements élémentaires interdits

$$d^{\circ}\text{liberté} + d^{\circ}\text{liaison} = 6$$



Une liaison possède donc au maximum **6** degrés de liberté (liaison libre)

Une liaison possède donc au maximum **6** degrés de liaison (liaison complète)

Remarques : Si deux ou plusieurs solides n'ont aucun degré de liberté entre eux, ils constituent une classe d'équivalence.

Liaisons élémentaires :

Une liaison élémentaire entre deux solides S1 et S2 est obtenue à partir du contact d'une surface géométrique élémentaire liée à S1 sur une surface géométrique élémentaire liée à S2.

Les surfaces géométriques élémentaires sont obtenues à partir des principaux procédés d'usinage.

On recense trois surfaces élémentaires :

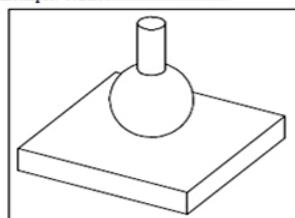
- PLAN
- CYLINDRE
- SPHERE

Les différentes combinaisons des surfaces élémentaires vont donner les liaisons élémentaires.

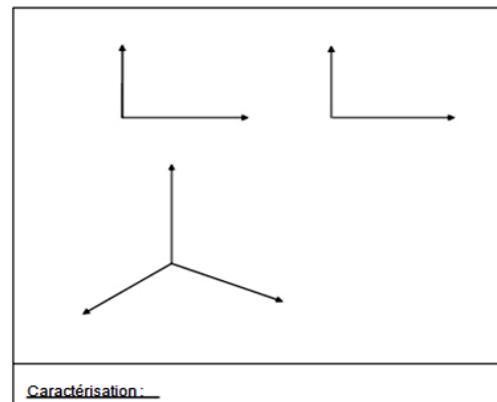
a) Liaison sphère-plan (ponctuelle) :

Deux solides sont en liaison ponctuelle si l'intersection de leur représentation géométrique se réduit à un point ou à une surface très petite devant les dimensions des solides

Exemple: contact.....



Représentation normalisée



Degré de mobilité :

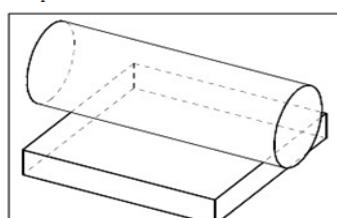
$T_x =$	$R_x =$
$T_y =$	$R_y =$
$T_z =$	$R_z =$

Caractérisation :

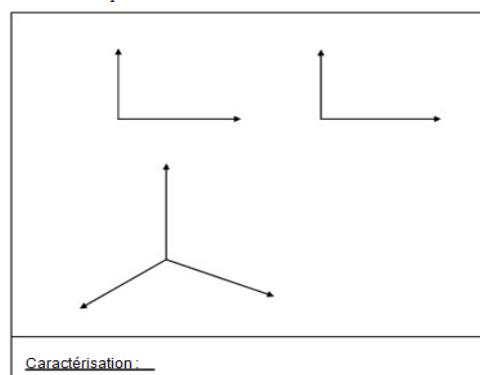
b) Liaison linéaire rectiligne :

Deux solides sont en liaison linéaire rectiligne si l'intersection de leur représentation géométrique est une droite.

Exemple: contact.....



Représentation normalisée

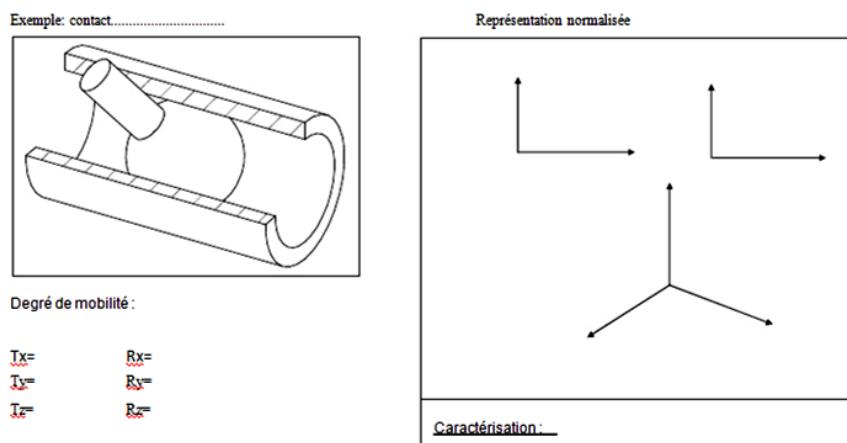


Degré de mobilité :

$T_x =$	$R_x =$
$T_y =$	$R_y =$
$T_z =$	$R_z =$

c) liaison sphère-cylindre (linéaire annulaire) :

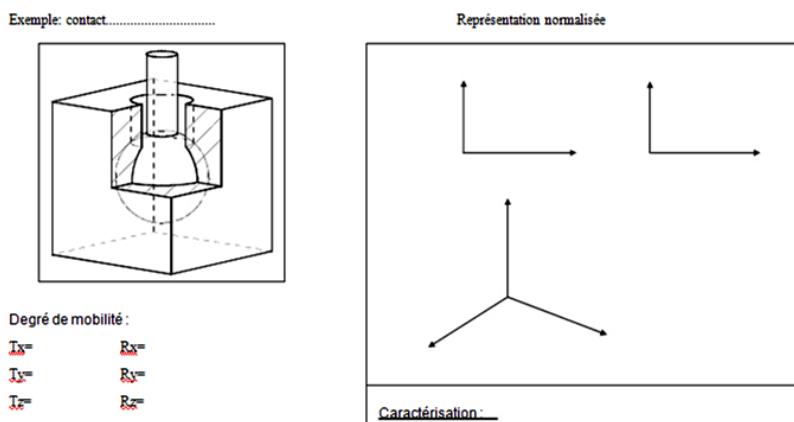
Deux solides sont en liaison linéaire annulaire si l'intersection de leur représentation géométrique est un cercle.



Remarques : Pour un contact cylindre/cylindre, on considère qu'il y a liaison sphère-cylindre lorsque la portée, L, est inférieure à 0.2 fois le diamètre D.

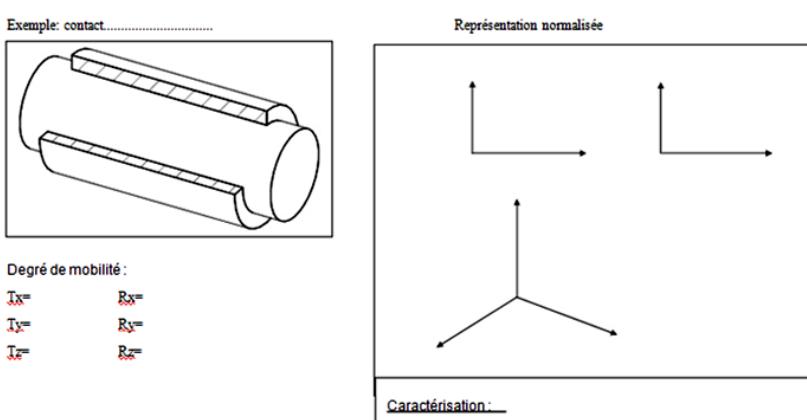
d) Liaison sphérique (rotule) :

Deux solides sont en liaison rotule ou sphérique si l'intersection de leur représentation géométrique est une sphère ou portion de sphère concentrique.



e) Liaison pivot glissant :

Deux solides sont en liaison pivot glissant si l'intersection de leur représentation géométrique est un cylindre de révolution.

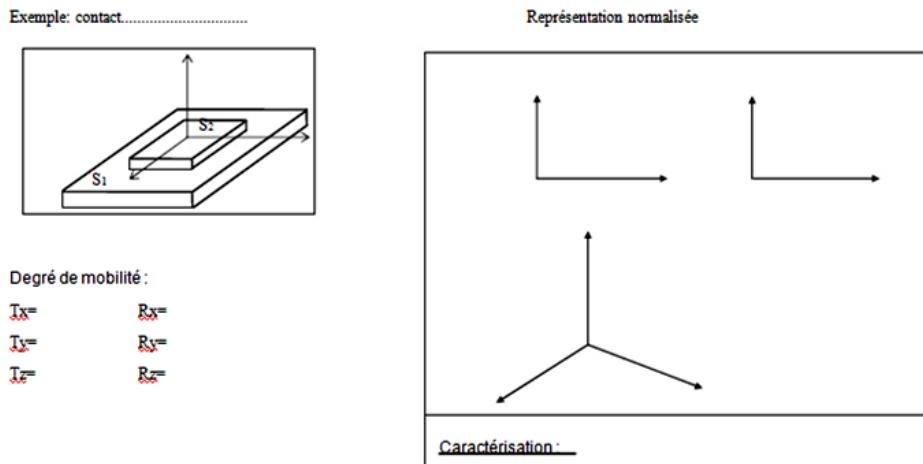


Remarques : On considère qu'il y a liaison pivotante lorsque la portée, L, est supérieure à 1.5 fois le diamètre, D.

Rappel si $L < 0.2 \times D$ alors on considère que l'on a une liaison sphère-cylindre

f) liaison appui plan :

Deux solides sont en appui plan si l'intersection de leur représentation géométrique est un plan.



Ces assemblages de surfaces élémentaires constituent les liaisons élémentaires à partir desquelles seront construites toutes les autres liaisons normalisées. On peut remarquer que la liaison sphère-plan permet d'établir des équivalents cinématiques à toutes les liaisons.

Liaisons composées :

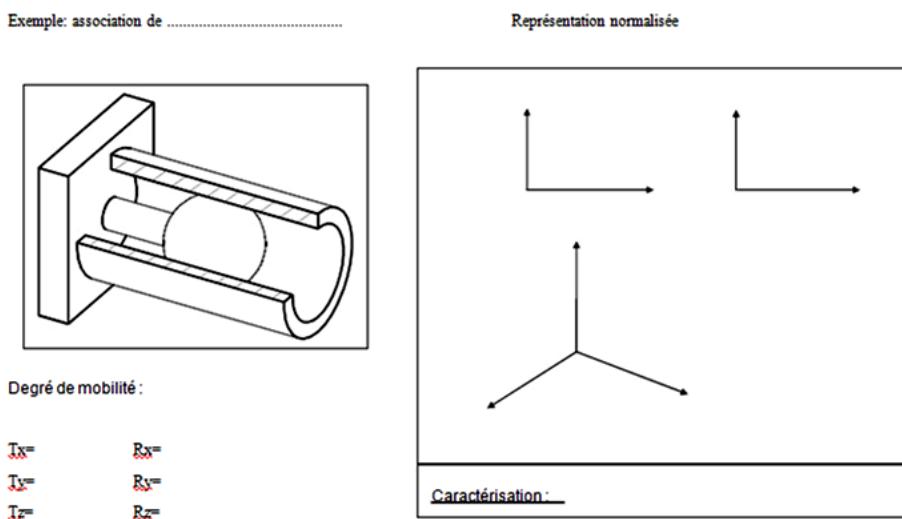
Les liaisons composées sont obtenues par association cohérente de liaisons élémentaires. L'objectif de ces associations sera de supprimer certains degrés de liberté de façon à offrir de nouvelles caractéristiques de liaisons.

Les exemples d'associations cités dans la suite du cours ne constituent pas une liste exhaustive. Pour réaliser une liaison composée il n'y a pas qu'une seule solution. Le choix d'association de liaisons élémentaires sera dicté par l'application technologique envisagée.

a) Liaison pivot :

Deux solides S1 et S2 sont en liaison pivot si, au cours du fonctionnement, le seul mouvement relatif possible est

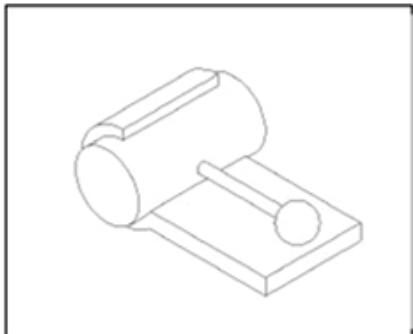
une rotation autour de l'axe principal de la liaison.



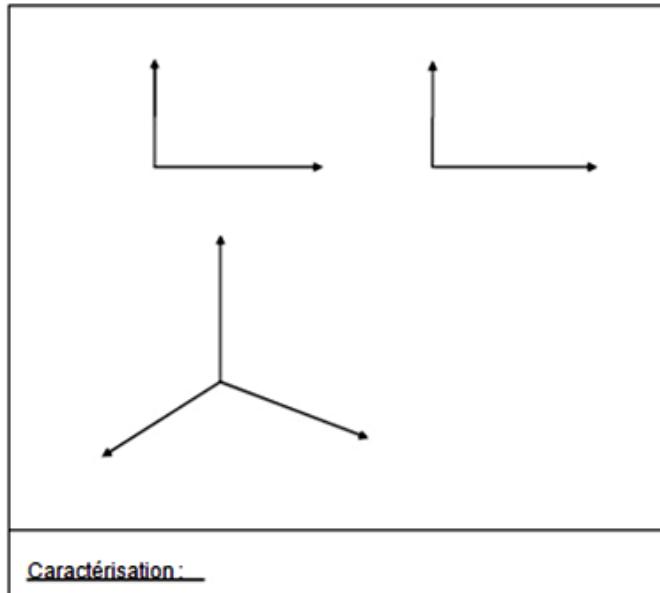
b) Liaison glissière :

Deux solides S1 et S2 sont en liaison glissière si, au cours du fonctionnement, le seul mouvement possible est une translation suivant l'axe principal de la liaison.

Exemple: association de



Représentation normalisée



Degré de mobilité :

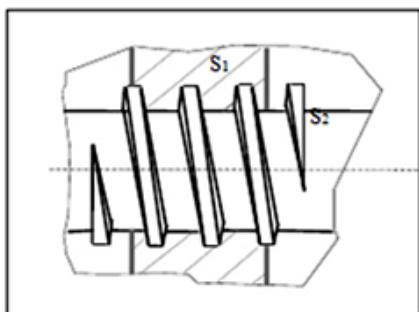
$$\begin{array}{ll} T_x = & R_x = \\ T_y = & R_y = \\ T_z = & R_z = \end{array}$$

Caractérisation :

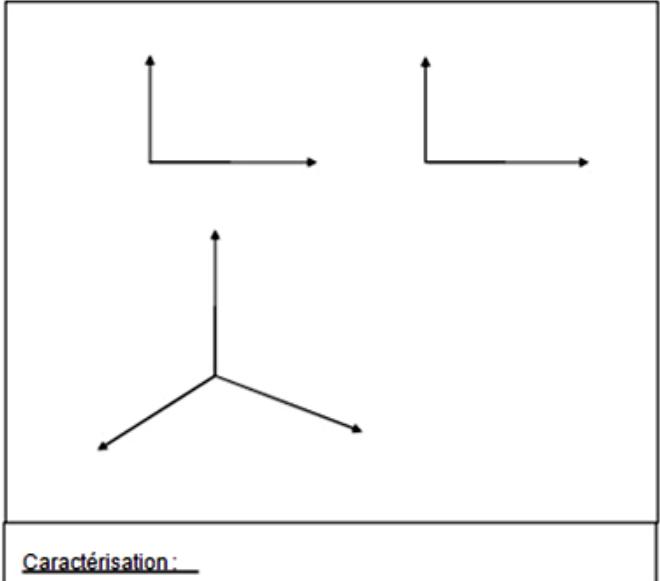
c) Liaison hélicoïdale :

Deux solides S1 et S2 sont en liaison hélicoïdale si, au cours du fonctionnement, le seul mouvement possible résulte d'une translation et d'une rotation par rapport à l'axe principal de la liaison.

Exemple: association de



Représentation normalisée

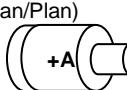
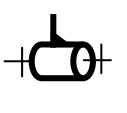
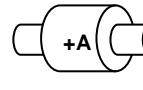
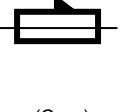
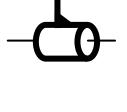
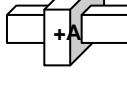
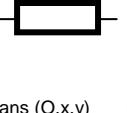
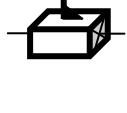
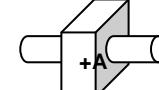
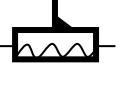
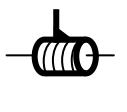
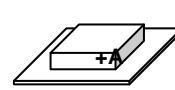
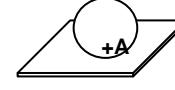
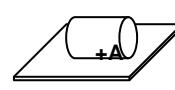
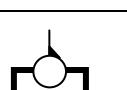
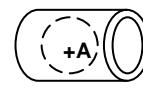


Degré de mobilité :

$$\begin{array}{ll} T_x = & R_x = \\ T_y = & R_y = \\ T_z = & R_z = \end{array}$$

Caractérisation :

Tableau récapitulatif des liaisons normalisées

ILLUSTRATION Exemples	Degrés de Liberté Tx, Ty, Tz Rx, Ry, Rz	Schéma Plan	Schéma Spatial
1- Liaison Pivot d'axe (A, x) (Ex. : Cylindre/Cylindre + Plan/Plan) 	1 Rx	 dans (O,x,y)  dans (O,y,z)	
2- Liaison Pivot Glissant d'axe (A, x) (Ex. : Cylindre/Cylindre) 	2 Tx, Rx	 dans (O,x,y)  dans (O,y,z)	
3- Liaison Glissière d'axe (A, x) (Ex. : Plan/Plan + Plan/Plan) 	1 Tx	 dans (O,x,y)  dans (O,y,z)	
4- Liaison Hélicoïdale d'axe (A, x) (Ex. : Vis/Ecrou) 	1 $Tx \leftrightarrow Rx$	 dans (O,x,y)  dans (O,y,z)	
5- Liaison Rotule de centre A (Ex. : Sphère/Sphère) 	3 Rx, Ry, Rz	  	
6- Liaison Appui-plan de normale (A, y) (Ex. : Plan/Plan) 	3 Tx, Tz, Ry	  dans (O,x,y)	
7- Liaison Ponctuelle de normale (A, y) (Ex. : Plan/Sphère) 	5 Tx, Tz Rx, Ry, Rz	  dans (O,x,y)	
8- Liaison Linéaire Rectiligne de normale (A, y) (Ex. : Plan/Cylindre) 	4 Tx, Ty Rx, Ry	  dans (O,x,y)   dans (O,y,z)	
9- Liaison Linéaire Annulaire d'axe (A, x) (Ex. : Cylindre/Sphère) 	4 Tx Rx, Ry, Rz	  dans (O,x,y)   dans (O,y,z)	
10- Liaison Encastrement 	0	 	

5- Graphe des liaisons

Construction du graphe des liaisons.

La première étape est une lecture attentive de tous les documents. Certaines informations, en particulier celles contenues dans la nomenclature, seront une aide précieuse à la construction du graphe des liaisons. Ces informations sont appelées « déclencheurs »

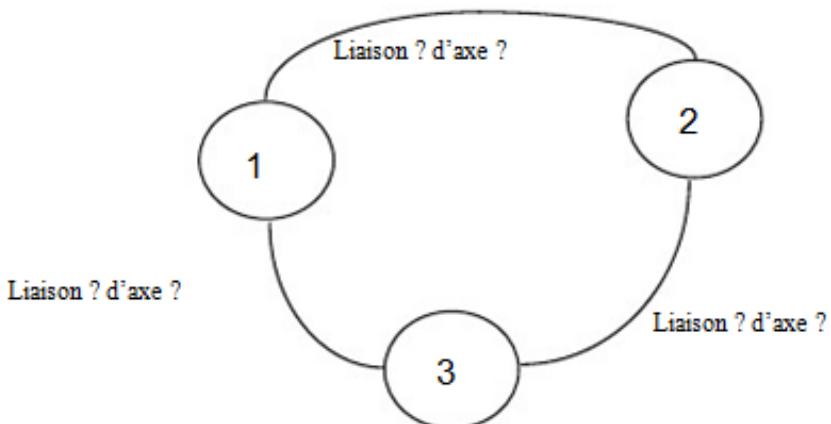
Dans un second temps, sans se préoccuper de la structure interne du mécanisme, il faut rechercher :

- les entrées: pièces qui reçoivent un mouvement de l'extérieur.
- les sorties: pièces qui communiquent un mouvement à l'extérieur.

Dans la mesure où seul les aspects cinématiques nous intéressent, il faut regrouper les pièces qui n'ont jamais de mouvements relatifs entre elles. Nous appellerons ces sous-ensembles « sous-ensembles fonctionnels » ou « classes d'équivalences ». Là encore, la nomenclature peut jouer un rôle important dans la détermination des pièces qui sont en liaison complète entre elles (vis de fixation, cannelures, clavettes...). Chaque ensemble est considéré comme une seule pièce.

On suit ensuite la chaîne de transmission de mouvement à partir d'une des extrémités en déterminant les liaisons entre les différents sous-ensembles, soit en étudiant les mouvements des pièces, soit en analysant les surfaces de contact.

Le graphe des liaisons est constitué de cercles dans lesquels sont inscrits les numéros des sous-ensembles et d'arcs représentant les liaisons joignant les cercles



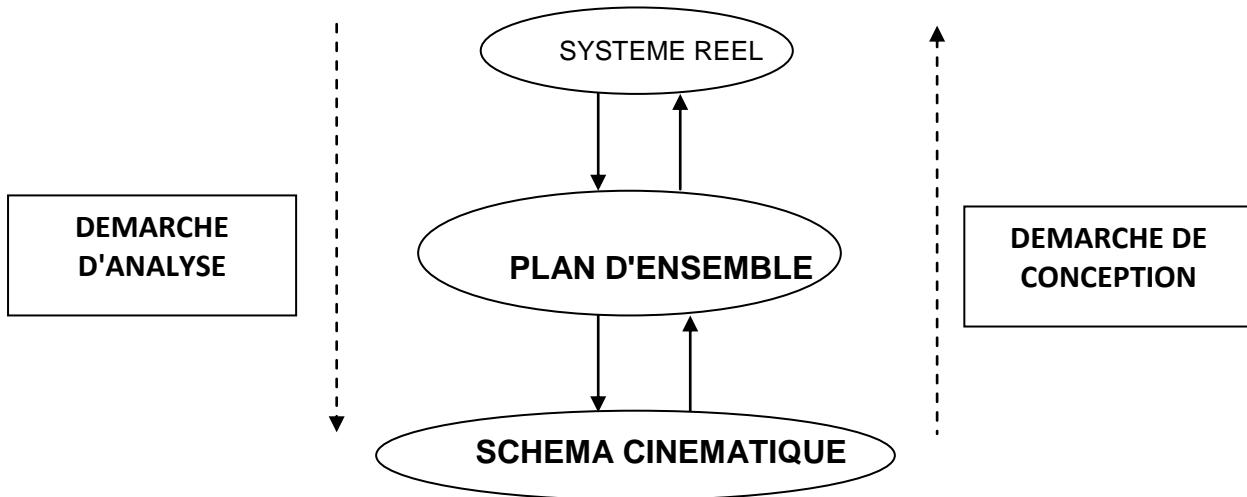
6 - Schéma cinématique

DEFINITIONS :

- Mécanisme : un mécanisme est un ensemble de solides qui peuvent être mobiles les uns par rapport aux autres.
- Ensemble Cinétiquement Équivalent : un ensemble cinématiquement équivalent est un ensemble de pièces qui n'ont aucun mouvement possible les unes par rapport aux autres.

SCHEMA CINEMATIQUE :

Intérêt : il va permettre le passage du **réel au concret**.



Le schéma cinématique est l'aboutissement de la démarche d'analyse. C'est un modèle qui permet d'établir une représentation claire du mécanisme, mettant en évidence les mouvements entre les ensembles cinématiquement équivalents.

- Règles :
- Si il n'y a pas de surface de contact entre deux solides, il n'y a pas de liaison mécanique entre ces deux solides.
 - Lorsque l'on étudie la liaison pouvant exister entre deux solides, on n'étudie que ces deux solides, le reste du mécanisme étant supposé enlevé.
 - **Le schéma cinématique ne traduit en aucun cas les formes et les volumes des pièces du mécanisme.**

METHODE DE REALISATION

1- Préparer la constitution des Ensembles Cinétiquement Équivalents :

- Etablir la liste des Ensembles Cinétiquement Équivalents :
 - Colorier sur les différentes vues les ECE (une couleur par ECE).
 - Faire le bilan en faisant soit la liste par solide ($\{S_1\}=\{\dots\}$), soit en cochant les repères des pièces dans un tableau.

Remarques : Pour les ECE, il ne faut pas prendre en compte :

- les éléments flexibles (ressort, courroie, soufflet, chaîne, ...).
 - les roulements.
- Les joints d'étanchéité peuvent être inclus dans les ECE.

2- Etablir le graphe des liaisons entre les Ensembles Cinétiquement Équivalents :

- Construire le graphe des liaisons avec les éléments suivants : repère des solides, traits de liaison, centres de liaison connus, noms des liaisons et repères liés aux symboles.

Remarque : lorsque l'on étudie la liaison entre deux ECE, on étudie que ces deux ECE, le reste du mécanisme étant supposé enlevé.

3- Tracer le schéma cinématique minimal du système :

- Placer de préférence les symboles des liaisons aux endroits qu'elles occupent sur la vue choisie pour la schématisation.
- Relier entre eux par un trait de couleur les symboles appartenant à un même ECE. Utiliser les couleurs employées en 2-.
- Ajouter les symboles des liens flexibles et éléments spéciaux (ressort, ...).

Exemple de schématisation : Sécateur électrique

Présentation

La taille de la vigne représente deux à trois mois de travail difficile en hiver. Les viticulteurs taillent à raison de huit à dix heures par jour. Avec un sécateur, ils répètent donc le même geste des milliers de fois.

Les sociétés fabricant du matériel agricole cherchent depuis longtemps un moyen pour améliorer les conditions de travail du viticulteur.

Les outils classiques, lorsqu'ils sont mécanisés, nécessitent l'utilisation de plusieurs éléments reliés soit entre eux, soit à un tracteur qui fournit l'énergie nécessaire.

Selon le type d'énergie disponible, des sociétés ont conçu et réalisé le sécateur pneumatique, le sécateur hydraulique, puis le sécateur électronique qui permet à l'ouvrier d'être plus mobile.

Le sécateur électronique est alimenté par des accumulateurs, une réserve d'énergie électrique, qui sont logés dans une mallette, celle-ci étant accrochée à la ceinture.

Le sécateur électronique est un outil portatif. Il a été développé par l'entreprise Pellenc SA. Le modèle PE 20 a été commercialisé de 1987 à 1990.



Caractéristiques techniques du sécateur (données par le constructeur)

Diamètre de coupe moyen (suivant la nature du bois) : 22mm.
Puissance mécanique moyenne : 120W.
Capacité de la batterie nickel-cadmium : 4,5A.h.
Tension / Fréquence d'alimentation : 220V/50Hz.
Temps de charge moyen : 12h.
Rapport de réduction du réducteur : 1/3,7.
Masse de la mallette contenant les accumulateurs : 3,5kg.

Tension d'alimentation du sécateur : 24V.
Vitesse maximale de rotation du moteur : 8000tr/min.
Durée d'utilisation moyenne sans recharge : environ 8h.
Puissance apparente du chargeur : 15V.A.
Pas de la vis à bille : 2mm.
Masse du sécateur : 800g.

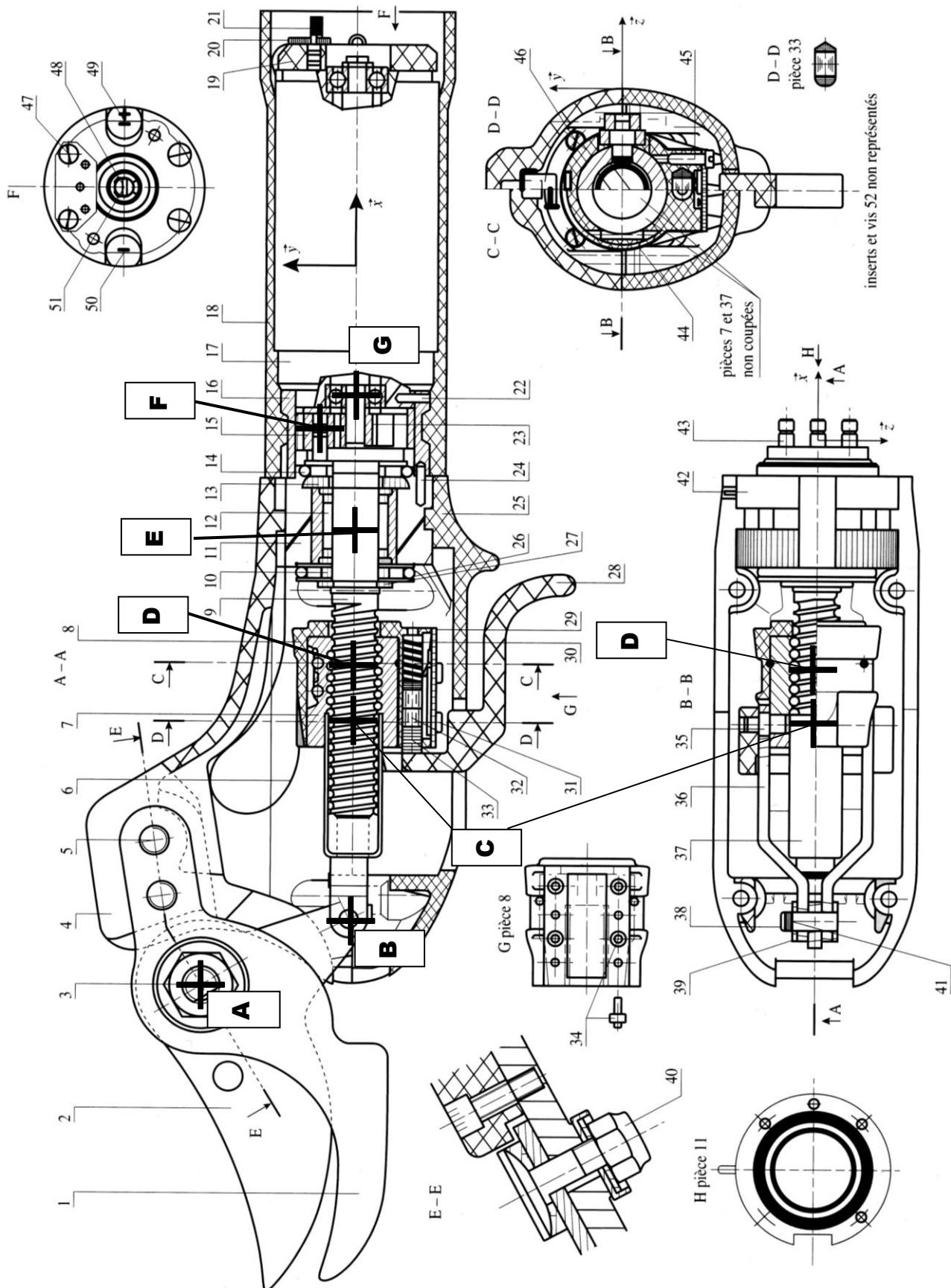
Nomenclature

51	1	Rondelle moteur
50	1	Borne -
49	1	Borne +
48	1	Anneau élastique
47	4	Vis F/90 M3-14
46	4	Vis CL S M2-8
45	4	Vis CL S M2-8
44	2	Goupille
43	3	Axe porte-satellite
42	1	Goupille
41	1	Goupille cylindrique fendue
40	1	Ecrou Nylstop HM8
39	1	Rondelle concave
38	1	Axe des biellettes
37	1	Protection vis
36	2	Biellette
35	2	Axe et gâchette
Rp	Nb	Désignation

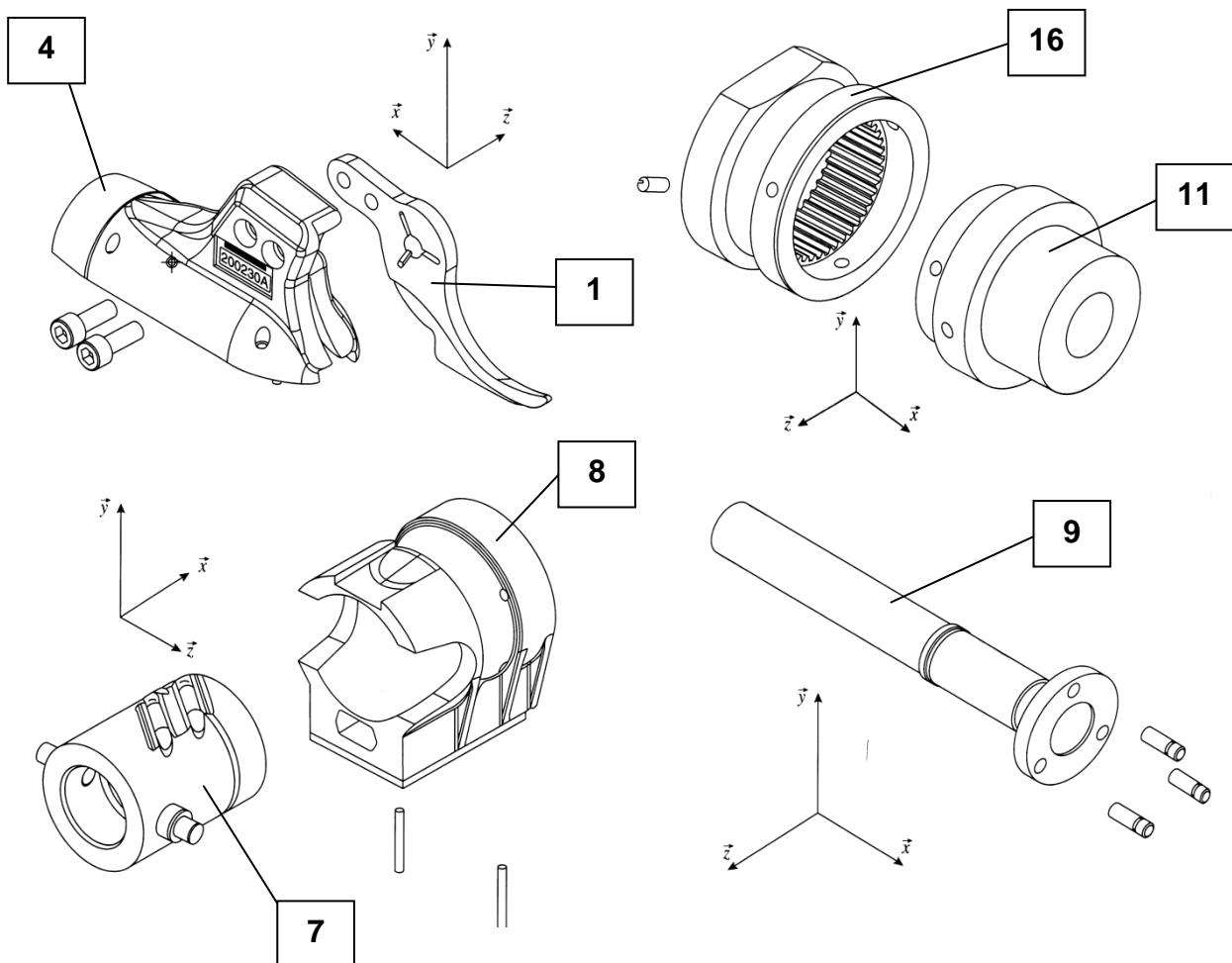
34	4	Picot capteur
33	1	Porte-aimant
32	2	Aimant
31	1	Capteur
30	1	Ressort
29	1	Plaque porte-capteur
28	1	Gâchette
27	1	Anneau élastique
26	1	Cale de réglage
25	1	Corps inférieur
24	1	Goupille élastique 2-8
23	1	Pignon moteur - Z=16
22	1	Goupille élastique 1,5 -12
21	3	Picot long arrière
20	1	Plaque de fixation picots
19	1	Plaque arrière
18	1	Gaine protection moteur
Rp	Nb	Désignation

17	1	Moteur
16	1	Couronne dentée - Z=46
15	3	Satellite - Z=15
14	1	Butée à aiguilles
13	1	Rondelle de butée
12	1	Roulement à aiguilles
11	1	Palier de roulements
10	1	Butée à aiguilles
9	1	Vis à billes - p=2 - D _n =10
8	1	Porte-capteur
7	1	Ecrou à bille
6	1	Circuit souple
5	2	Vis CHC M6-16
4	1	Corps supérieur
3	1	Axe des lames
2	1	Lame mobile
1	1	Lame fixe
Rp	Nb	Désignation

DESSIN D'ENSEMBLE DU SECATEUR ELECTRONIQUE PELLENC



Vues en perspective de quelques pièces



SCHEMA CINEMATIQUE MINIMAL

COMPLETEZ les classes d'équivalence suivantes :

$$C1 = \{1\}$$

$$C2 = \{2\}$$

$$C3 = \{36\}$$

$$C4 = \{7\}$$

$$C5 = \{9\}$$

$$C6 = \{15\}$$

$$C7 = \{23\}$$

Sur le dessin d'ensemble, **COLORIEZ** partout où vous le voyez :

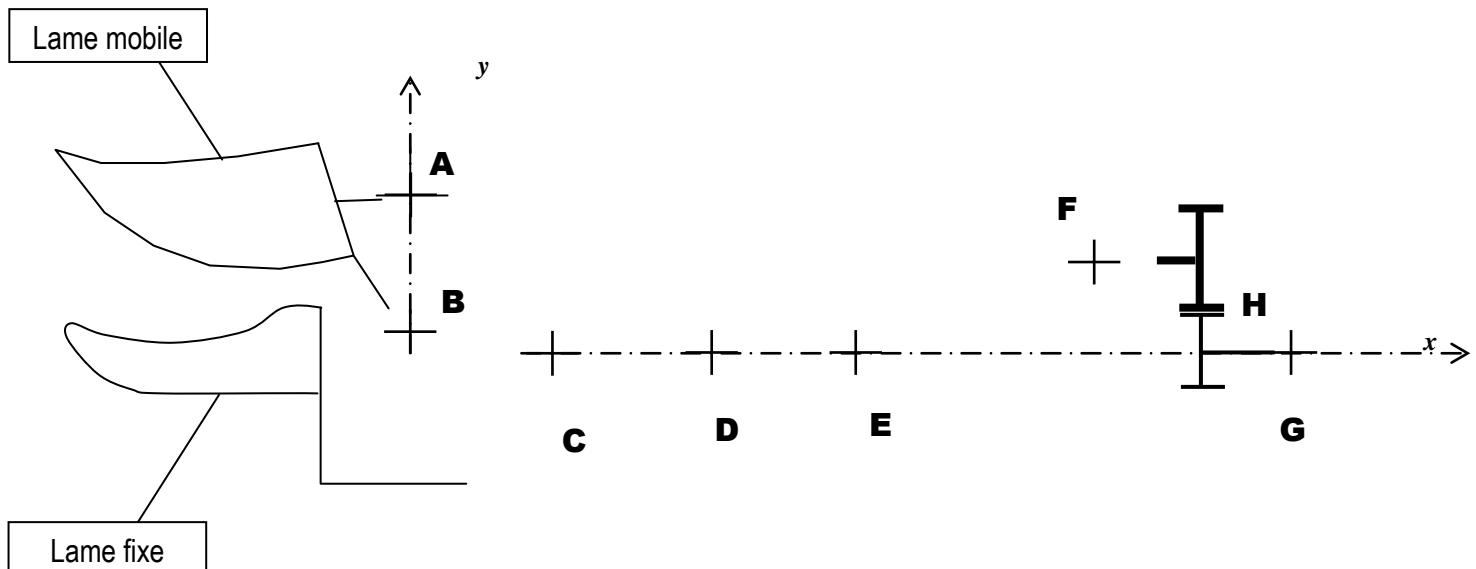
- En **rouge** : l'ensemble **C2**.
- En **bleu** : l'ensemble **C3**.
- En **vert** : l'ensemble **C4**.
- En **marron** : l'ensemble **C5**.
- En **jaune** : l'ensemble **C6**.
- En **orange** : l'ensemble **C7**.

COMPLETEZ le tableau ci-dessous :

La liaison au point H n'est pas à modéliser, il s'agit d'un contact engrenage

Ensembles	Centre de la liaison	Nature des surfaces en contact	Translation suivant l'axe			Rotation suivant l'axe			Nom et caractéristique de la liaison (centre, axe principal)	Représentation normalisée dans (O,x,y)
			Tx	Ty	Tz	Rx	Ry	Rz		
C_1 et C_2	A									
C_2 et C_3	B									
C_3 et C_4	C									
C_4 et C_5	D									
C_5 et C_6	E									
C_6 et C_7	F									
C_7 et C_1	G									

COMPLETEZ le schéma cinématique minimal du sécateur dans le plan xOy



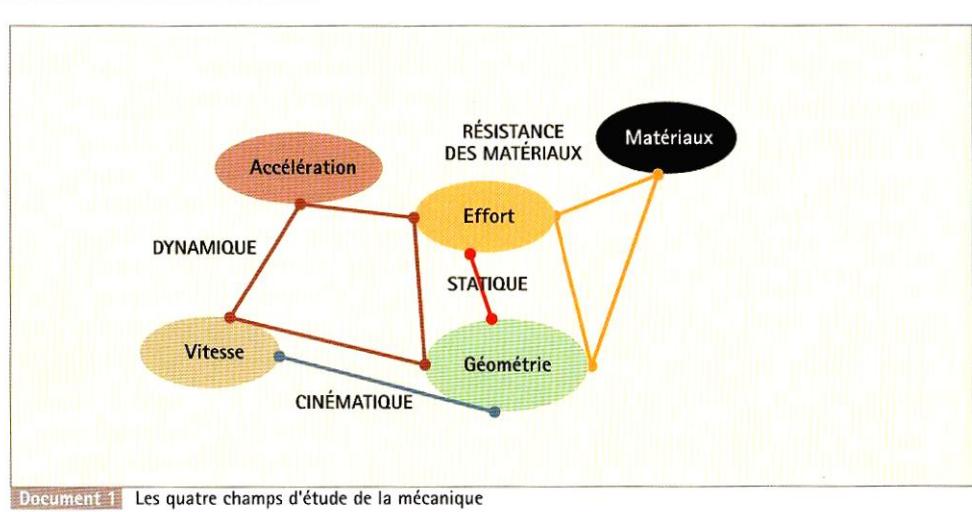
MODELISATION DES ACTIONS MECANIQUES

Objet du cours : Etre capable de modéliser les actions mécaniques s'exerçant sur une structure

Le comportement d'une structure est conditionné :

- par une géométrie,
- par un ou des matériaux ,
- par des efforts appliqués et des déformations qui en découlent

Il faut maîtriser la relation entre tous ces éléments pour prédire et maîtriser le comportement mécanique d'un système.



La mécanique des solides s'intéresse à plusieurs volets du comportement des structures des systèmes : la statique, la cinématique, la dynamique et la résistance des matériaux.

1 – Notion d'action mécanique

Le concept d'action mécanique permet d'expliquer comment on arrive à :

- maintenir un corps au repos
- créer ou modifier un mouvement
- déformer un corps

Caractérisation d'une action mécanique

Définition générale

Action mécanique = toute cause susceptible de maintenir un corps au repos, ou de créer un mouvement ou de déformer un corps.

On appelle force, l'action mécanique qui s'exerce mutuellement entre deux particules élémentaires, pas forcément en contact. C'est une notion assez intuitive.

Comme indiquée fig. 1a, une force est toujours appliquée en un point P. De plus : on peut toujours identifier :

- une direction ici (Δ) pour la force ;
- un sens d'action (en haut à droite sur la figure) ;
- une norme

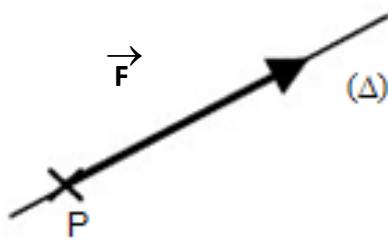


Fig. 1a

Ces caractéristiques font du vecteur un modèle bien adapté. On note la force associée à son point d'application

(c'est donc un pointeur) : (P, \vec{F})

$\| \vec{F} \|$ Il est la norme de la force ; cette norme se mesure en newton (N).

Exemple de force (Fig. 1b)

Lorsque un contact entre deux pièces est concentré en un point, l'action de contact est

schématisée par le vecteur force $\vec{F}_{0 \rightarrow 1}$

- Point d'application :
- Direction et sens :

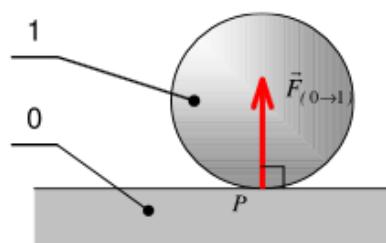


Fig. 1b

Est-ce que la notion de force est suffisante pour décrire une action mécanique ?

Exemple 1

Une planche est déposée sur le rebord d'une table. On pose un objet sur cette planche.

Si on place le centre de gravité de l'objet à l'aplomb du rebord, rien ne se passe. (fig 10a)

Si on déplace l'objet pour le mettre au bord de la planche, celle-ci bascule (fig 10b)

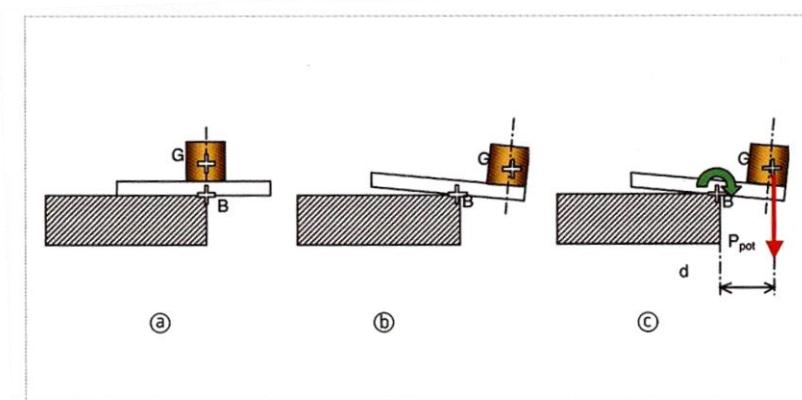


Fig. 10 Influence du moment sur l'équilibre d'un solide

Analyse de la situation : le bilan des forces en présence est le même, c'est la position du centre de gravité de l'objet par rapport au rebord de la table qui a changé.

Explication : l'effet constaté peut être expliqué par la notion de moment d'une force.

Le produit de la norme de la force par la distance d est appelé moment (exprimé en N.m) et provoque la rotation de la planche.

Exemple 2

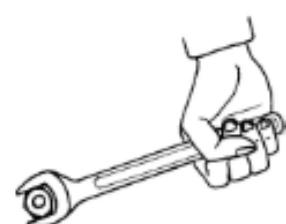
Expérience : action mécanique de serrage d'une vis par l'intermédiaire d'une clé (Fig. 2)

Situation : Une main 3 exerce sur une clé 2 une force afin de serrer une vis 1.

On « capte » l'effet de la force au niveau de la vis.

Analyse des phénomènes : on examine l'efficacité de la force (A, F) exercée par la main ainsi que son bras de levier d à l'axe de la vis (rappel : bras de levier =

distance orthogonale à la force). On suppose que dans chacun des cas $F = \| \vec{F} \| =$ constante.



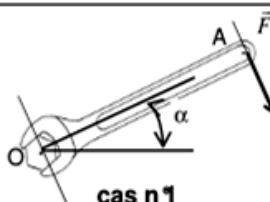
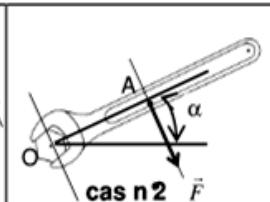
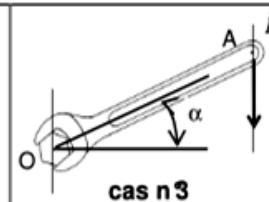
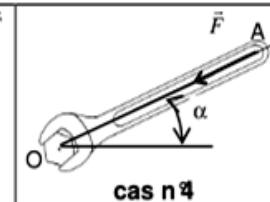
			
Efficacité à serrer la vis :	Efficacité à serrer la vis :	Efficacité à serrer la vis :	Efficacité à serrer la vis :
d_1 distance :	d_2 distance :	d_3 distance :	d_4 distance :

Fig. 2

On conçoit que si \vec{F} Il augmente, l'efficacité à serrer la vis dans chaque cas augmente de la même façon (sauf cas n° 4 évidemment). Ainsi on peut conclure :

Conclusion

La définition de la force F ne suffit pas pour décrire de façon univoque une action mécanique.

Il existe 2 formes d'actions mécaniques :

- les forces (en Newton = N)
- les moments (en Newton.mètre = N.m)

Ces 2 types d'actions mécaniques peuvent être classées :

- en actions mécaniques **de contact**
- en actions mécaniques **à distance**

$\overrightarrow{F}_{Ai \rightarrow j}$ est l'action mécanique en A du solide i sur le solide j

$\overrightarrow{M}_P \overrightarrow{F}_{Ai \rightarrow j}$ est le moment en P de l'action mécanique en A du solide i sur le solide j

La **résultante** est la somme des vecteurs forces appliqués à un solide

Le **moment résultant** est la somme des vecteurs moments appliqués à un solide

Calcul du moment d'une force

On introduit le moment de la force (P , \vec{F}) par rapport à A pour compléter la caractérisation de l'action mécanique

Définition vectorielle (Fig. 3)

Au point A par exemple, on note le moment de la force

$$\overrightarrow{m}_A(\vec{F}) = \overrightarrow{AP} \times \vec{F}$$

Unité : L'unité de moment est le newton mètre (N.m).

Cas de nullité : Le moment de la force (P , \vec{F}) au point A est nul si

le support de (P , \vec{F}) passe par A, ou si $F = 0$

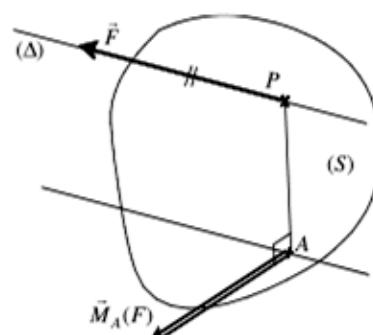


Fig. 3

Moment scalaire dans le plan (Fig. 4)

Dans un problème de type plan (π) où toutes les forces \vec{F} sont coplanaires dans (π), les moments sont tous perpendiculaires au plan.
On se contente d'utiliser la projection du moment suivant l'axe normal à (π) soit :

$$M_A(\vec{F}) = \pm AH \times \|\vec{F}\|$$

Signe à préciser, cf ci-dessous

tel que :

un sens positif étant convenu dans (π), de préférence le sens direct du repère de travail,

- on retient le signe + si \vec{F} « tourne » autour de A dans le sens positif ;
- on retient le signe - si \vec{F} « tourne » autour de A dans le sens négatif.

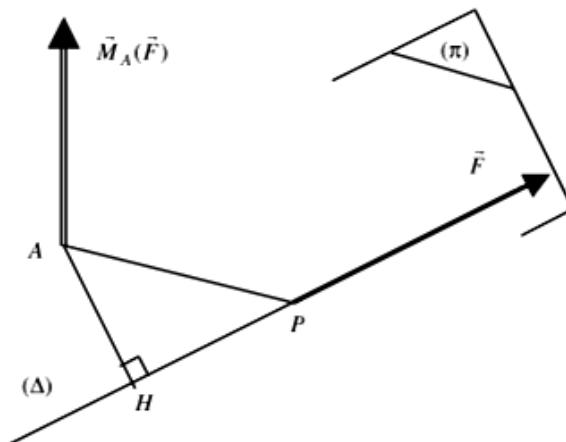


Fig. 4

Conclusion sur la modélisation d'une action mécanique de base

Une action mécanique due à une force (P, \vec{F}) de 2 sur 1 est représentée en un point A par deux vecteurs :

2 – Repère – Système et frontière d'isolement

2 – 1 Référentiel galiléen

Un référentiel galiléen est constitué :

- d'un repère d'espace (unité = longueur)
- d'un repère de temps (unité = seconde)

2 – 2 Système matériel

C'est un ensemble de solides et de fluides que l'on souhaite étudier. Un système matériel peut présenter des mobilités internes.

2 – 3 Concept d'isolement

L'étude des systèmes impose leur isolement c'est-à-dire de les séparer du reste de leur milieu environnant. (on « efface » tout ce qui entoure l'ensemble isolé)

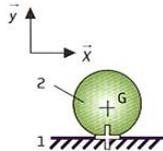
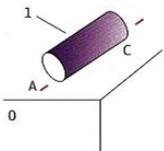
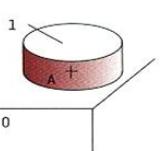
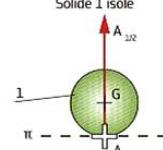
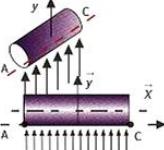
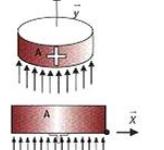
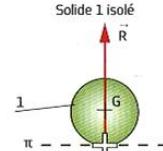
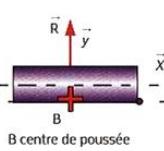
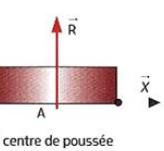
3 – Les différents types d'actions mécaniques

Le vecteur-force représente et modélise la résultante d'une action mécanique.

3 – 1 Action mécanique de contact

Une action mécanique de contact peut :

- s'appliquer sur un point unique : c'est une **charge concentrée**
- s'appliquer sur une ligne ou sur une surface : c'est une **charge répartie**

Type de description	Charges concentrées	Charges réparties	
Type de contact	Ponctuel	Linéique	Surfacique
Nature du contact	Point	Ligne droite ou courbe	Surface plane, cylindrique ou gauchée
Représentation du contact			
Représentation de la charge sur le solide isolé			
Représentation de la résultante des actions mécaniques sur le solide isolé			
Expression de la résultante	$R = A_{1/2}$	$R = q \cdot L$ (q en N/m)	$R = p \cdot S$ (p en $\text{Pa} (\text{N/m}^2)$ ou en bar 1 bar = 10^5 Pa)
Condition de réalisation	L'étendue du contact doit être suffisamment petite	Les charges q et p sont uniformes (constantes)	

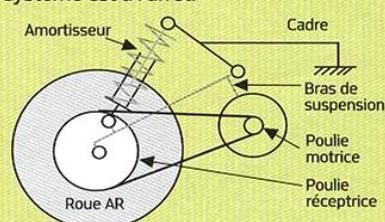
ACTIVITÉ 1

Le schéma ci-contre représente l'essieu moteur situé à l'arrière d'un quadricycle à moteur électrique FUN ELEC. La courroie est en élastomère. Le système est à l'arrêt.

Déterminer le type d'action mécanique s'exerçant entre la courroie et la poulie de la roue arrière, entre l'amortisseur et la cadre, ainsi qu'entre le sol et le pneu arrière.

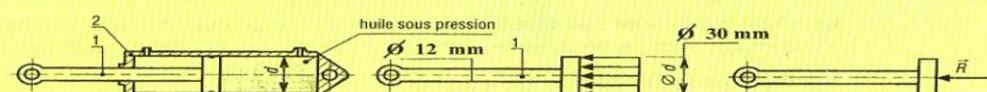
Déterminer les directions des résultantes de ces actions de contact.

Que deviennent les contacts poulie/courroie et pneu/sol lorsque le système est en train de rouler ?



ACTIVITÉ 2

Contact surfacique d'un fluide sous pression ($p = 0,8 \text{ MPa}$) sur un piston de vérin ($1 \text{ MPa} = 10^6 \text{ Pa} = 1 \text{ N/mm}^2 = 10 \text{ bars}$).



La force est dirigée selon la perpendiculaire à la surface d'appui du fluide : l'axe du piston.

$$\text{Elle est d'intensité } R = p \cdot S = \frac{\pi D^2}{4} \text{ A.N} : R = 0,8 \times \frac{\pi \cdot (30)^2}{4} = 565,5 \text{ N.}$$

Unités légales : p en Pa , S en m^2 , $|R|$ en N .

Autres unités : p en MPa , S en mm^2 , $|R|$ en N .

Unités pratiques : p en bars , S en cm^2 , $|R|$ en daN .

Exemple

Contact surfacique entre garnitures et disque de freins d'automobile

Lorsqu'on cherche à connaître le couple de freinage d'une automobile il est nécessaire d'étudier la pression exercée par les patins de freinage 2 sur le disque de frein 1.

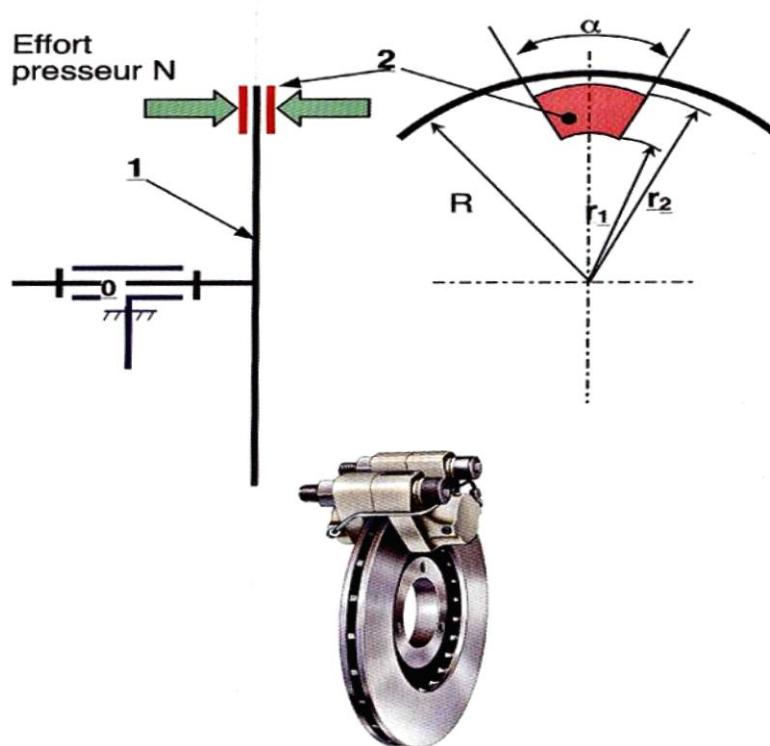
Le résultat sera, entre autres, fonction des dimensions du disque, des matériaux utilisés et de la pression exercée par le fluide.

Dans le cas d'une hypothèse d'usure constante en tout point de la plaquette de frein :

$$C_{\text{grott}} = \mu \cdot N \cdot (r_1 + r_2) \text{ avec } N = 2 \cdot P_M \cdot r_1 \cdot \alpha \cdot (r_1 + r_2).$$

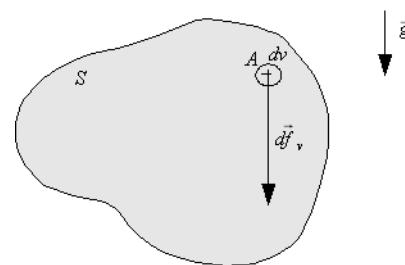
P_M pression en un point quelconque de la plaquette.

μ coefficient lié aux matériaux en contact.



3 – 2 Action mécanique à distance

Ce sont essentiellement les actions magnétiques et l'action de la pesanteur. On parle alors d'actions volumiques car sur chaque particule élémentaire du solide, s'exerce une force volumique élémentaire df_v



La Terre exerce à distance sur chaque particule d'un système S une action mécanique v dirigée vers le centre de la Terre.

Cette action mécanique :

- est proportionnelle à la masse (en kg) du système étudié
- est appliquée au centre de gravité G du système étudié
- a pour norme $P = m \cdot g$, avec g = accélération de la pesanteur exprimée en m/s^2

3 – 3 Action concentrée ou répartie

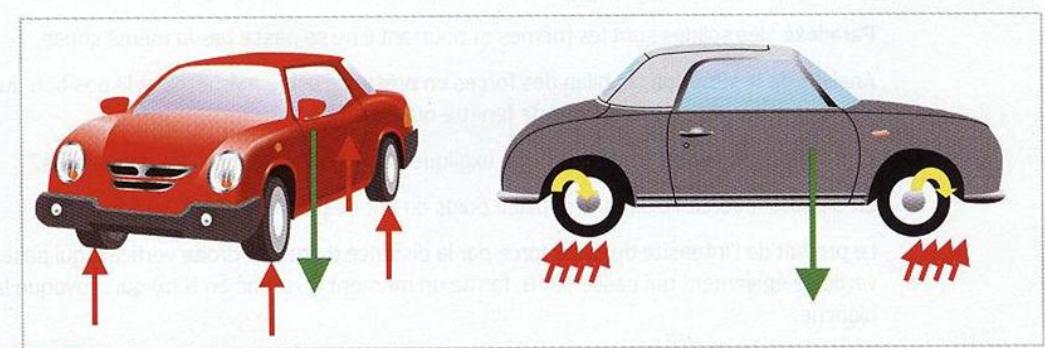


Fig. 9 Actions sur les suspensions d'une voiture

Pour étudier l'équilibre de la voiture et déterminer les actions s'exerçant sur chacune des suspensions à l'arrêt, on isole le véhicule en considérant :

- que le véhicule est un ensemble de solides indéformables
- que chaque action du sol sur le pneu s'applique sur une surface suffisamment peu étendue pour être considéré comme une action ponctuelle

La charge répartie peut alors être remplacée par une action mécanique équivalente :

- la résultante de cette action R (en N) est la somme des forces élémentaires appliquées sur les éléments
- le moment de cette action est la somme des moments de ces mêmes forces élémentaires

Exemple

Pourquoi un sous-marin à coque métallique ne coule-t-il pas ?

On comprend qu'un bateau en bois dont la densité est inférieure à 1 puisse flotter, mais comment un navire en métal (dont la densité est de 7,8) fait-il pour ne pas couler à pic.

Le sous-marin s'enfonce, sous l'action de son poids. Sous l'eau il subit la pression de l'eau qui est fonction de la profondeur.

Plus il est en profondeur plus la pression est grande, c'est la loi de l'hydrostatique :

$$p = p_{\text{atm}} + \rho g h$$

(p étant la pression, p_{atm} la pression atmosphérique, ρ la densité de l'eau, g l'accélération de la gravité et h l'altitude ou la profondeur).

Comme l'illustre la figure ci contre, le dessus du navire subit donc une pression plus faible que le dessous.

La résultante des actions de pression du dessous est égale à la résultante de celle du dessus augmentée du poids du navire.



En faisant la somme de toutes les forces surfaciques agissant sur la coque, on trouve une force volumique F appelée poussée d'Archimède (savant grec du IIIe siècle avant J.-C.). Le principe d'Archimède s'énonce ainsi : « tout corps plongé dans un fluide subit une poussée verticale, dirigée de bas en haut, égale au poids du volume de fluide qu'il déplace ».

3 - 4 Exemple 1 : Pince coupe-câble

L'appareil présenté ci-dessous permet de sectionner les câbles.

L'énergie nécessaire pour la coupe est fournie par de l'**air comprimé** délivré par une centrale pneumatique.

Le déplacement vers la gauche de la tige du piston (4) entraîne la fermeture des mâchoires (2) et (3).

Les couteaux (10) en liaison encastrement avec les mâchoires assurent la coupe du câble.

La coupe étant effectuée, le ressort (6) repousse le piston en position initiale ; le ressort (7) maintient le contact entre les galets (5) , en liaison pivot avec les mâchoires et la tige du piston (embout conique) et assure ainsi l'ouverture des mâchoires lors du retour en position initiale .

On se place au moment où la pince commence à découper le câble.

1 : Support de mâchoire

2 : Mâchoire inférieure

3 : Mâchoire supérieure

4 : Tige de piston

5 : Galet

6 : Ressort de rappel du piston

7 : Lame de ressort

8 : Câble à couper

9 : Fond de cylindre

10 : Couteau

11 : Vis de fixation du couteau

12 : Piston du vérin ($\varnothing 22 \text{ mm}$)

13 : Attache du ressort à lame

14 : Axe du galet

15 : Contre-écrou de réglage

16 : Bague

17 : Corps du vérin

18 : Rondelle

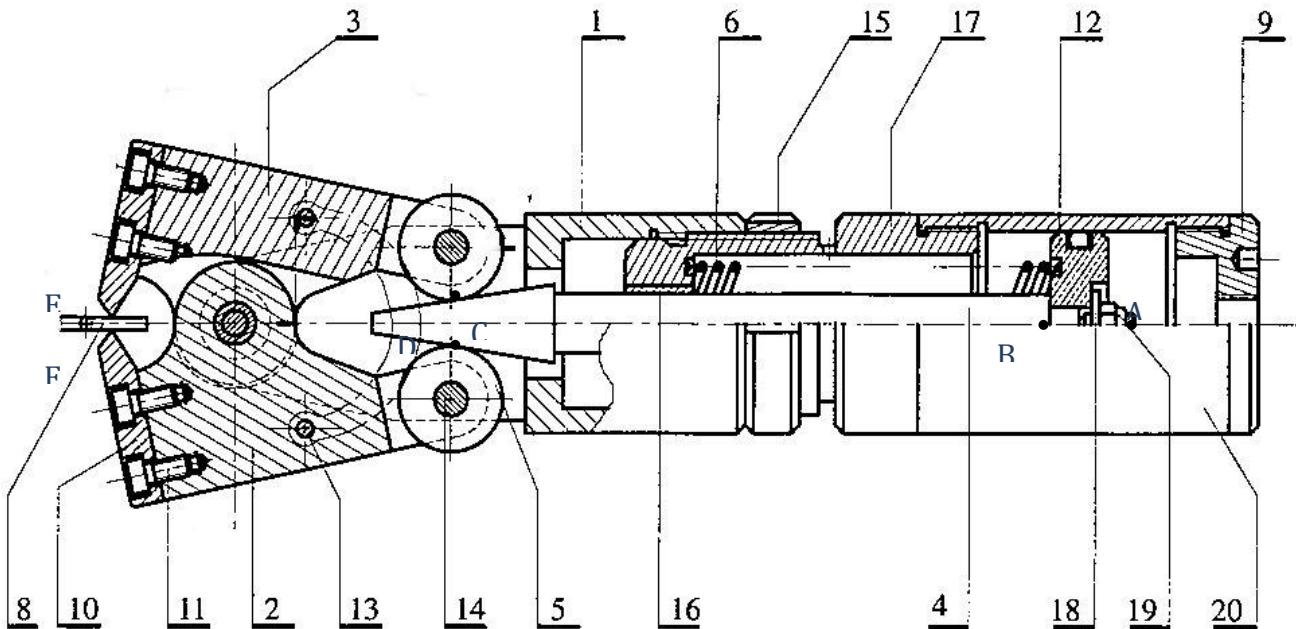
19 : Ecrou Nylstop

20 : Cylindre

21 : Rondelle d'arrêt

22 : Axe de mâchoire

23 : Entretoise



On demande de **REPRESENTER** sur les dessins ci-après (à l'échelle 1 cm pour 80 N) :

- L'action de l'air comprimé sur le piston (12) en A : $\overrightarrow{\mathbf{A}}_{\text{air} \rightarrow 12}$ (Norme : 160 N)

- L'action du ressort (6) sur le piston (12) en B : $\overrightarrow{\mathbf{B}}_{6 \rightarrow 12}$ (Norme : 40 N)

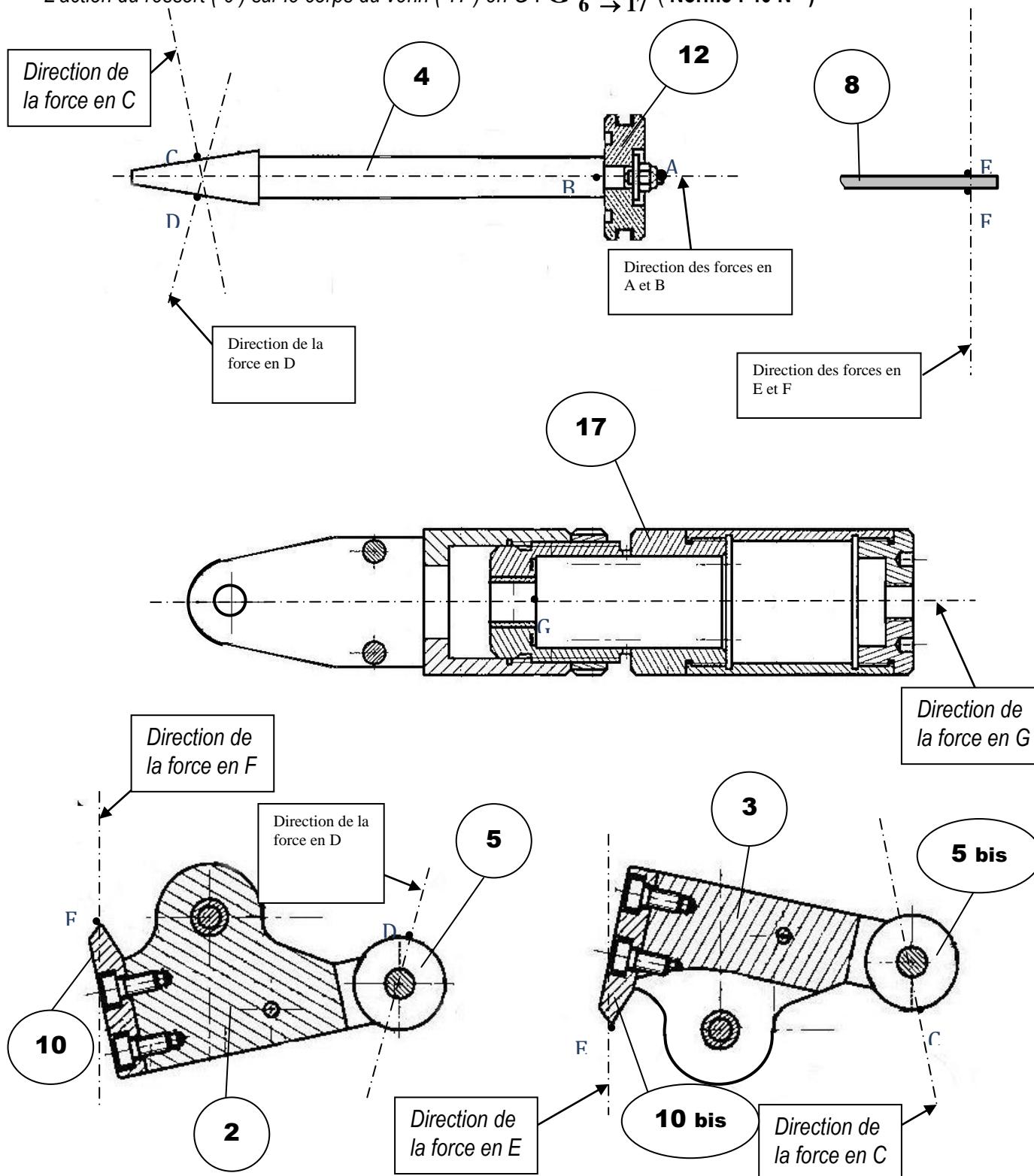
- L'action du galet (5 bis) sur le piston (4) en C : $\overrightarrow{\mathbf{C}}_{5 \text{ bis} \rightarrow 4}$ (Norme : 240 N)

- L'action du galet (5) sur le piston (4) en D : $\overrightarrow{\mathbf{D}}_{5 \rightarrow 4}$ (Norme : 240 N)

- L'action du câble (8) sur la lame (10 bis) en E : $\overrightarrow{\mathbf{E}}_{8 \rightarrow 10 \text{ bis}}$ (Norme : 480 N)

- L'action du câble (8) sur la lame (10) en F : $\overrightarrow{\mathbf{F}}_{8 \rightarrow 10}$ (Norme : 480 N)

- L'action du ressort (6) sur le corps du vérin (17) en G : $\overrightarrow{\mathbf{G}}_{6 \rightarrow 17}$ (Norme : 40 N)

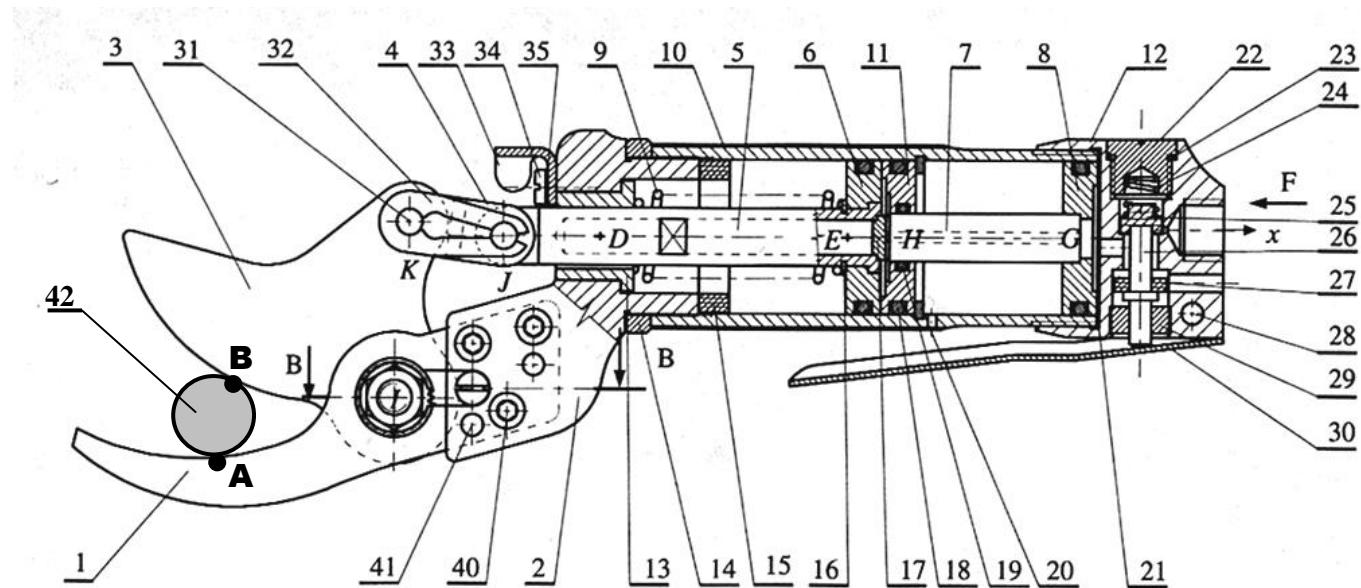


3 - 5 Exemple 2 : sécateur pneumatique

La branche à couper est placée entre la lame (3) et le crochet (1) du sécateur.

L'opérateur appuie sur la gâchette (30) qui déplace le tiroir (26) du distributeur .

L'air sous pression arrive au contact des pistons (6) et (8). Les pistons (6) et (8) sont donc mis en mouvement , ce qui entraîne la lame mobile (3) en mouvement et provoque la découpe de la branche.

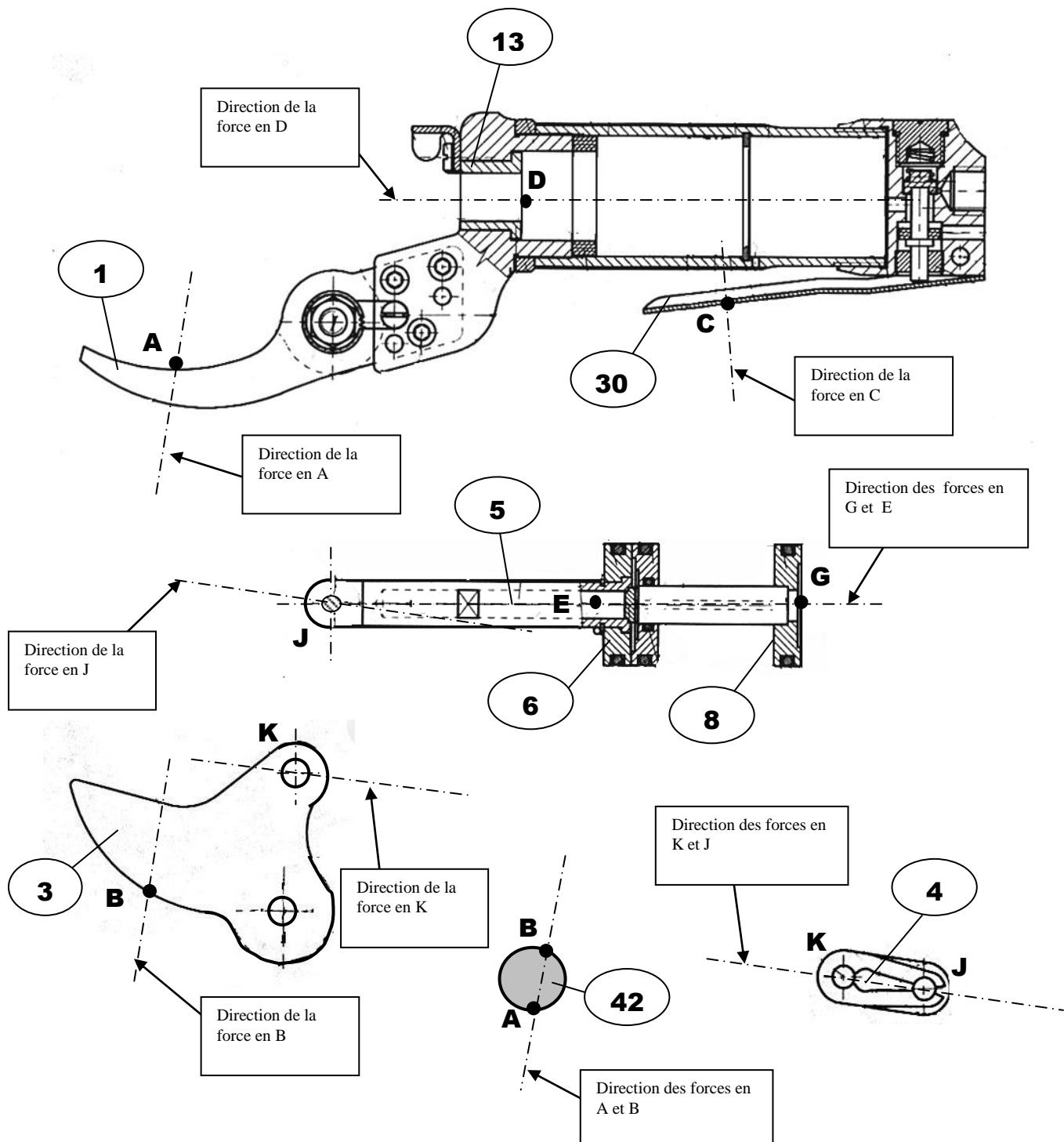


1 : Crochet	2 : Support de crochet	3 : Lame	4 : Biellette
5 : Tige de piston principal	6 : Piston principal	7 : Tige de piston secondaire	8 : Piston secondaire
9 : Ressort de rappel	10 : Cylindre	11 : Cloison	12 : Corps du bloc de commande
13 : Baguette de guidage	14 : Ecrou	15 : Amortisseur	16 : Anneau élastique
17 : Embout de piston	18 : Joint torique	19 : Joint torique	20 : Anneau élastique
21 : Joint papier	22 : Bouchon	23 : Joint	24 : Ressort
25 : Obturateur	26 : Piston de commande	27 : Joint de fermeture	28 : Axe de levier de commande
29 : Guide piston de commande	30 : Levier de commande	31 : Axe de biellette	32 : Agraphe
33 : Cliquet de sécurité	34 : Vis	35 : Ressort de sécurité	36 : Axe de lame
37 : Ecrou indexé	38 : Index de position	39 : Vis	40 : Vis CHc
41 : Goupille	42 : Branche à découper		

On demande de **REPRESENTER** sur les dessins ci-après (à l'échelle 1 cm pour 200 N) :

- L'action de l'opérateur sur le levier de commande (30) en C : $\overrightarrow{C_{op} \rightarrow 30}$ (Norme : 100 N)
- L'action du crochet (1) sur la branche (42) en A : $\overrightarrow{A_1 \rightarrow 42}$ (Norme : 900 N)
- L'action de la branche (42) sur la lame (3) en B : $\overrightarrow{B_{42 \rightarrow 3}}$ (Norme : 900 N)
- L'action de la biellette (4) sur la tige de piston (5) en J : $\overrightarrow{J_4 \rightarrow 5}$ (Norme : 800 N)
- L'action de la lame (3) sur la biellette (4) en K : $\overrightarrow{K_3 \rightarrow 4}$ (Norme : 800 N)

- L'action du ressort (9) sur la bague de guidage (13) en D : $\overrightarrow{\mathbf{D}}_9 \rightarrow 13$ (Norme : 200 N)
- L'action du fluide sous pression sur le piston (8) en G : $\overrightarrow{\mathbf{G}}_{\text{air}} \rightarrow 8$ (Norme : 1000 N)



Effets des représentants d'une action mécanique

Pris séparément, on associe à chaque vecteur de l'action mécanique un effet qu'il produit :

Force :

La force seule a un effet créant ou s'opposant à un mouvement ou/et un déplacement de TRANSLATION. La force « tire » ou « pousse » suivant sa direction.

Moment d'une force (soit seul, un couple) :

Le moment seul ou couple a un effet créant ou s'opposant à un mouvement ou/et un déplacement de ROTATION

Le couple « tord » autour de son axe directeur.

On modélisera les actions mécaniques réelles par une combinaison de ces deux modèles.

Modélisation d'un ensemble de n forces

Soit un ensemble de n forces (P_i, \vec{F}_i) agissant de **2 sur 1** ; on caractérise de même l'action mécanique par les **deux vecteurs** suivants :

$$\vec{R}(2 \rightarrow 1) = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i ; \quad \text{et} \quad \vec{M}_A(2 \rightarrow 1) = \sum_{i=1}^n \overrightarrow{AP_i} \wedge \vec{F}_i .$$

Définitions

$\vec{R}(2 \rightarrow 1)$ est la **résultante** de **2 sur 1**. Ne dépend que des forces (P_i, \vec{F}_i) .

$\vec{M}_A(2 \rightarrow 1)$ est le **moment résultant** au point A de **2 sur 1**. Dépend des forces (P_i, \vec{F}_i) et du choix du point A .

Propriété : champ des moments résultants

4 - Outils de représentation général d'une action mécanique

Modélisation d'une action mécanique par un torseur

Le torseur $\{\tau_{(2 \rightarrow 1)}\}$ associé à l'action mécanique exercée en A , par un solide 2 sur un solide 1 sera noté :

$$\{\tau_{(2 \rightarrow 1)}\} = A \left\{ \begin{array}{c} \vec{R}_{(2 \rightarrow 1)} \\ \vec{M}_A(2 \rightarrow 1) \end{array} \right\} = A \left\{ \begin{array}{c|c} X_{21} & L_{21} \\ Y_{21} & M_{21} \\ Z_{21} & N_{21} \end{array} \right\} (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$$

The diagram illustrates the decomposition of a mechanical action into its components. It shows a central coordinate system $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ with three vectors X_{21}, Y_{21}, Z_{21} and L_{21}, M_{21}, N_{21} originating from point A . Four boxes with arrows point to specific parts of the equation:
 1. Top right: "Composantes de la résultante" (Components of the resultant) points to $\vec{R}_{(2 \rightarrow 1)}$.
 2. Middle right: "Composantes du moment Résultant en A" (Components of the moment resulting at A) points to $\vec{M}_A(2 \rightarrow 1)$.
 3. Bottom right: "Base de projection des vecteurs" (Projection base of the vectors) points to the coordinate system $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$.
 4. Bottom left: "Centre de réduction" (Reduction center) points to point A .

Remarques :

➢ Le point A est un point quelconque.

➢ $\vec{R}_{(2 \rightarrow 1)}$ et $\vec{M}_A(2 \rightarrow 1)$ sont appelés *éléments de réduction au point A* du torseur $\{\tau_{(2 \rightarrow 1)}\}$.

Pour calculer le **moment d'une force au point B** à partir de son moment au point A, on utilise la relation (*dite du déplacement du moment* ou champ des moments) :

$$\vec{M}_B(\vec{F}) = \vec{M}_A(\vec{F}) + \vec{BA} \wedge \vec{F}$$

Cadre d'utilisation du torseur

La manipulation du torseur n'est intéressante essentiellement que dans les problèmes de type spatial. Dans les problèmes plans, on évite de les utiliser car ils alourdissent l'écriture. On utilise alors plutôt la notion de moment scalaire.

Répartition des forces et actions mécaniques statiquement équivalentes

Modèle réel local et action globale équivalente

La répartition des forces appliquées à un solide a toute son importance dans les calculs de solides indéformables (ex : résistance des matériaux). Or, si le torseur statique permet de modéliser simplement par une résultante et un moment résultant l'action mécanique due à un ensemble de forces appliquées à un solide, il ne traduit pas la répartition de celles-ci.

Exemples (Fig. 5.1 et 5.2) :

Cas 1 : Soit 20000 N de neige répartie sur un plancher de 4 m de largeur (posé en A et B) modélisé par une force répartie par unité de longueur soit une force linéaire de $20\ 000/4 = 5\ 000 \text{ N/m}$. Une masse ponctuelle de 20 000 N concentrée au centre donne le même torseur mais certainement pas la même déformée !!!!!

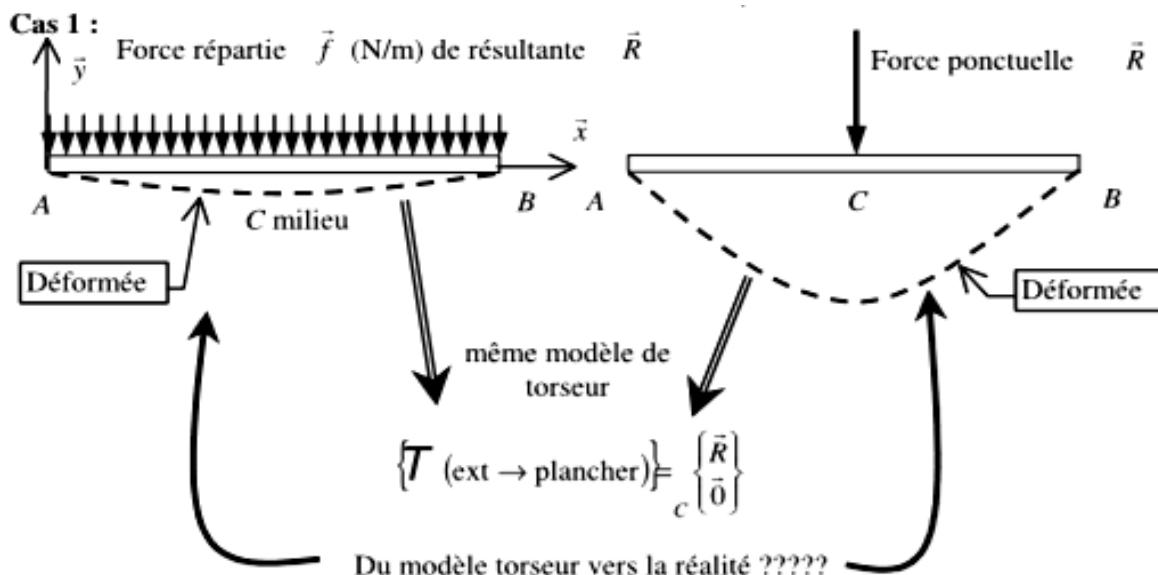


Fig. 5.1

Cas 2 : Une sphère est soumise à une pression extérieure. Pourtant le torseur d'action mécanique est nul !!
 Du modèle torseur vers la réalité ????



Fig. 5.2

Deux actions mécaniques sont équivalentes d'un point de vue statique si leur torseur s'écrit de la même façon au même point de réduction.

Précaution d'utilisation des modèles locaux (répartition réelle) et globaux (torseur équivalent) :

Applications simples

Couple de forces : Action dans un cardan (Fig. 6)

Modéliser l'action mécanique équivalente sur l'axe (O, x).

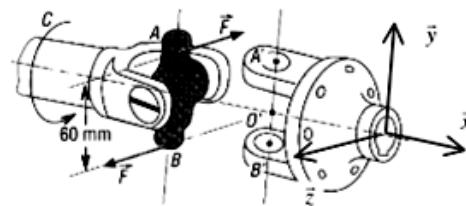
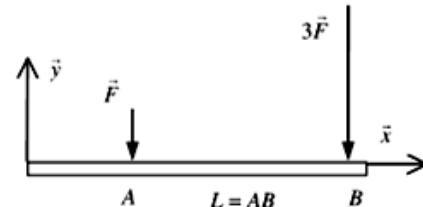


Fig. 6

Combinaison de deux forces (Fig. 7)

Trouver le torseur d'action mécanique statiquement équivalent à ces deux forces en limitant au maximum la complexité des calculs.



Conclusion sur les actions mécaniques particulières et torseurs associés

– **Torseur nul** : si $\begin{Bmatrix} \vec{0} \\ \vec{0} \end{Bmatrix} = \{0\}$ en tout point.

– **Torseur couple** : si $\begin{Bmatrix} \vec{0} \\ \vec{C} \end{Bmatrix}$ en tout point.

– **Glisseur** : Il existe un point A tel que le torseur prend la forme $\begin{Bmatrix} \vec{R} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$ et en un point $B \neq A$, on a toujours :
 $\vec{M}_B \cdot \vec{R} = 0$ soit \vec{M}_B et \vec{R} perpendiculaires.

Illustration de la réduction d'un glisseur d'un point à un autre (Fig. 8)

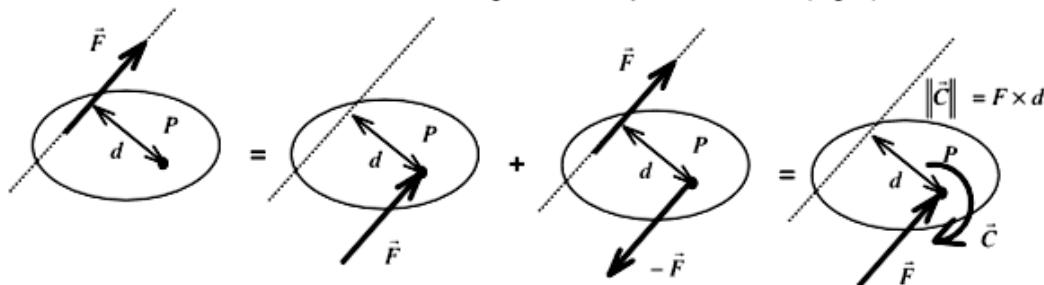


Fig. 8

Comment trouver le point A qui annule le moment du glisseur ?

Recherche de l'axe central du torseur

Recherche de l'axe central sur lequel le **moment est parallèle à la résultante ou nul**. On utilise :

Soit un torseur défini en O par $\begin{Bmatrix} \vec{R} \\ \vec{M}_O \end{Bmatrix}$ la projection orthogonale H de O sur l'axe central (D) est donné par :

$$\overrightarrow{OH} = \frac{\overrightarrow{R} \times \overrightarrow{M_O}}{\|\overrightarrow{R}\|^2}$$

5- Principe des actions mutuelles

Toute force d'un système **2** sur un système **1** implique l'existence d'une autre force, de **1** sur **2**, qui lui est

directement opposée : $(A, \vec{F}) = (B, -\vec{F})$ (fig 9)

On généralise :

L'action mécanique d'un système **2** sur un système **1** est opposée à l'action mécanique de **1** sur **2** :

$$\{T_{(2 \rightarrow 1)}\} = -\{T_{(1 \rightarrow 2)}\}$$

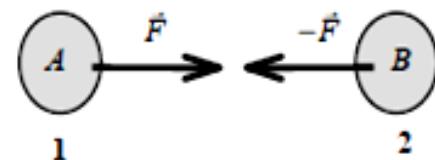


Fig. 9

Torseur au centre de gravité G

6- Autres modélisations d'actions mécaniques

Modélisation de l'action mécanique de pesanteur

Modélisation locale de l'action de la pesanteur

Soit un solide (S) de masse m dans le champ

d'accélération de la pesanteur \vec{g} toujours vertical descendant (Fig. 10).

En tout point matériel M de masse dm s'exerce une

force élémentaire : $d\vec{P} = dm \vec{g}$ avec \vec{g} accélération de la pesanteur

Sur avec g accélération de la pesanteur.

Sur la figure $\vec{g} = -g \vec{z}$; $g = 9,81 \text{ m/s}^2$

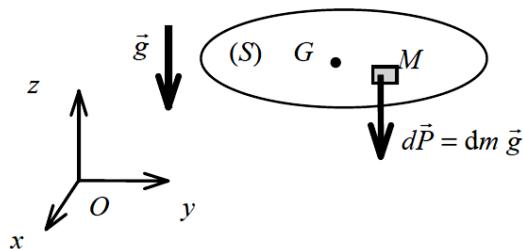


Fig. 10

Torseur au centre de gravité G

$$\left\{\tau_{(pes \rightarrow S)}\right\}_A = \left\{ \begin{array}{l} \vec{R}_{(pes \rightarrow S)} = \int_{M \in S} \vec{dP} = \int_{M \in S} \vec{g} dm = mg \\ \vec{M}_{G(pes \rightarrow S)} = \int_{M \in S} \vec{GM} \wedge \vec{dP} = \vec{0} \end{array} \right\}$$

En utilisant $\int_{M \in S} \vec{GM} dm = \vec{0}$ (propriété du barycentre des points matériels)

$$\left\{\tau_{(pes \rightarrow S)}\right\}_A = \left\{ \begin{array}{l} \vec{R}_{(pes \rightarrow S)} = mg \\ \vec{M}_{G(pes \rightarrow S)} = \vec{0} \end{array} \right\}$$

C'est un glisseur dont G est sur l'axe central

On note $P = \| \vec{R}_{(pes \rightarrow S)} \| = mg$ le **poids** de (S).

Unités : m en kg ; g en m.s^{-2} ; P en N (Newton)

Action mécanique de pression uniforme

Exemple d'application : Ensemble mobile de vérin

Dans un vérin, on considère une **pression hydraulique constante** : $p = \text{cte.}$

L'effort que le fluide exerce sur une petite surface localement est **perpendiculaire** à cette surface (Fig. 11).

La **pression** est définie par :

$$P = \frac{dF}{dS} \text{ et } d\vec{F} = -pdS \vec{n}$$

Où \vec{n} est la normale extérieure à dS

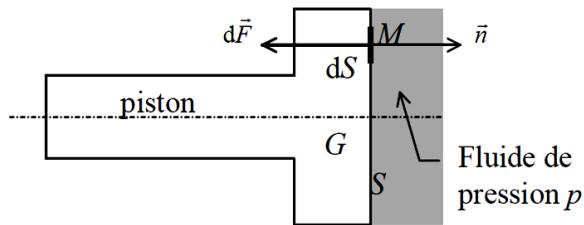


Fig. 11

p est **indépendant de l'orientation de dS** et s'exprime en **pascal** ; $1 \text{ Pa} = 1 \text{ N/m}^2$ (donc unité petite).

Unités usuelles : le bar = 10^5 Pa ; le Mpa = 10^6 Pa .

Torseur de l'action de pression

$$\vec{R}_S = \int_S d\vec{F} = \int_S -pdS \vec{n} \text{ car } p=\text{cte} \text{ et par symétrie de la pression sur } S: \vec{M}_G = \vec{0}$$

$$\text{D'où : } \left\{ \tau_{(pressure \rightarrow piston)} \right\}_G = \begin{cases} -pS\vec{n} \\ \vec{0} \end{cases}$$

Action mécanique dans les liaisons normalisées

Hypothèses de bases :

- Pas de frottement, contact parfait
- Tout contact a lieu suivant une surface même infiniment petite (contact ponctuel théorique). Sur un tel contact élémentaire et **en l'absence de frottement**, l'effort

élémentaire transmissible $d\vec{F} (2 \rightarrow 1)$ est perpendiculaire au plan tangent aux solides en M (Fig. 12).

- Que le contact soit direct ou indirect (ex : pivot glissant par interposition d'un coussinet), on se ramène au torseur des actions mécaniques transmissibles de la même **liaison normalisée équivalente réalisée par contact direct**.

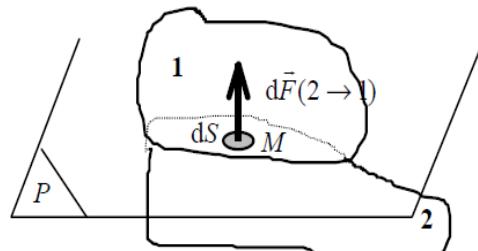


Fig. 12

Notations

- Dans un repère R ($O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$), lié à une liaison, on note **de façon la plus générale** le torseur de 2 sur 1 :

$$\left\{ \tau_{(2 \rightarrow 1)} \right\}_O = \begin{cases} \vec{R}_{(2 \rightarrow 1)} \\ \vec{M}_{O(2 \rightarrow 1)} \end{cases} = \begin{cases} X_{21} & | L_{O21} \\ Y_{21} & | M_{O21} \\ Z_{21} & | N_{O21} \end{cases}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$$

Ici O est toujours le centre de liaison

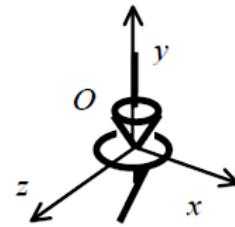
(**En pratique et quand cela possible, on s'autorise une notation la plus simple possible.**)

Exemple 1 : Liaison ponctuelle de normale (O, \vec{y})

Contact : en théorie, un point. Ex : sphère sur plan (Fig. 13).

Torseur : De part les hypothèses, la résultante est suivant

\vec{y} et si le moment résultant est nul car toute force passe par l'unique point de contact, point d'écriture du torseur.


Fig. 13
Exemple 2 : Liaison linéaire rectiligne d'axe (O, z) et de normale (O, \vec{y})

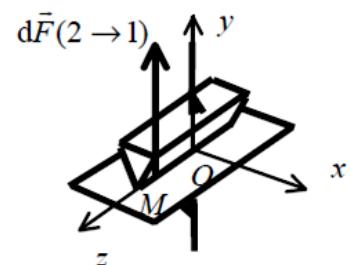
Contact : en théorie, une ligne. Ex : cylindre sur plan (Fig. 14)

Torseur : Les efforts transmissibles élémentaires $\vec{dF}_{(2 \rightarrow 1)}$

sont suivant \vec{y} en chaque point de la ligne (O, \vec{z}).

$\vec{R}_{(2 \rightarrow 1)}$ a donc la même direction que chaque $\vec{dF}_{(2 \rightarrow 1)}$ soit \vec{y}

$$\overrightarrow{M_O}_{(2 \rightarrow 1)} = \int_{M \in (O, z)} \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{dF}_{(2 \rightarrow 1)} \text{ a pour direction } \vec{z} \wedge \vec{y} \text{ on a donc :}$$


Fig. 14

$$\left\{ \tau_{(2 \rightarrow 1)} \right\}_O = \left\{ \begin{array}{c} \vec{R}_{(2 \rightarrow 1)} \\ \vec{M_O}_{(2 \rightarrow 1)} \end{array} \right\}_O = \left\{ \begin{array}{c|c} 0 & L_{021} \\ Y_{21} & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right\}_{(x, y, z)}$$

Remarque

On a compatibilité entre ces composantes indépendantes et les mobilités indépendantes. Là où il y a mobilité, il y a un zéro sur la composante d'action transmissible associée soit ici $u_x, u_z, \theta_y, \theta_z$ sont non nulles.

Cas où (O, \vec{x}, \vec{y}) est un plan de symétrie pour les actions mécaniques.

Si (O, \vec{x}, \vec{y}) est plan de symétrie, le moment résultant s'annule car les moments élémentaires de deux forces $\vec{dF}_{(2 \rightarrow 1)}$ symétriques s'annulent deux à deux. L'écriture du torseur se simplifie :

$$\left\{ \tau_{(2 \rightarrow 1)} \right\}_O = \left\{ \begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ Y_{21} & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right\}_O \quad \text{Expression valable uniquement dans ce cas particulier.}$$

A noter : On ne vérifie plus la compatibilité car certains zéro sont issus de la symétrie et non issus d'une mobilité supplémentaire.

$$\left\{ \tau_{(2 \rightarrow 1)} \right\}_O = \left\{ \begin{array}{c|c} 0 & / \\ Y_{21} & / \\ / & 0 \end{array} \right\}_O$$

On peut éventuellement noter le torseur sous la forme :

où les barres obliques correspondent à un zéro mais provenant de l'hypothèse de symétrie donc valide uniquement dans le cadre de cette hypothèse. On distingue ainsi l'origine de nullité des composantes.

7 - Torseur des actions mécaniques transmissibles par une liaison parfaite

Une **liaison mécanique** entre deux pièces dite **parfaite** est caractérisée par :

- Des volumes géométriquement parfaits et indéformables ,
- Des ajustements sans jeu ,
- Des contacts sans frottement.

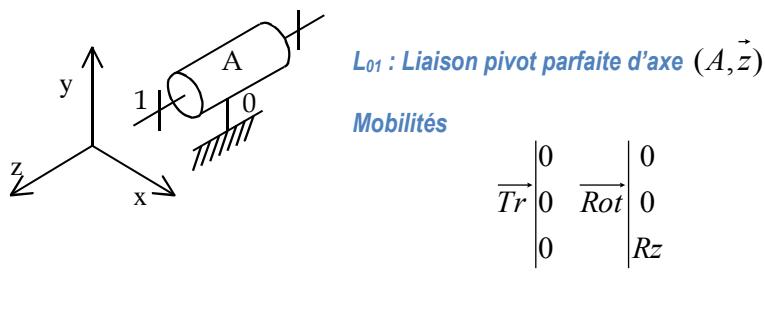
Ce modèle est certes, très théorique, mais bien pratique pour réaliser nos calculs de mécanique.

5.1 Méthode

Une Force \vec{F} , intégralement portée par \vec{x} , ne pourra être transmise par une liaison, que si cette dernière dispose d'un « obstacle » (de la matière en contact) dans cette même direction \vec{x} , interdisant la translation d'une pièce par rapport à l'autre.

Un Moment \vec{M}_A , intégralement porté par \vec{y} , ne pourra être transmis par une liaison, que si celle-ci dispose d'un « obstacle » dans cette même direction \vec{y} , interdisant la rotation d'une pièce par rapport à l'autre.

5.2 Application: La liaison pivot

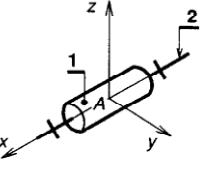
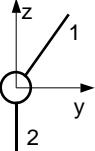
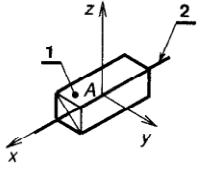
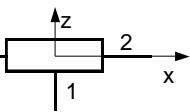
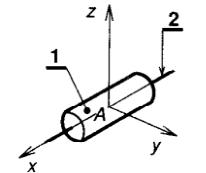
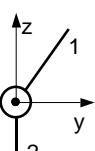
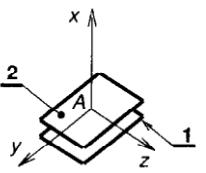
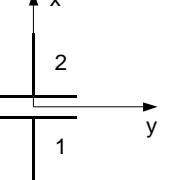
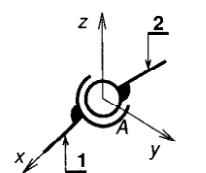
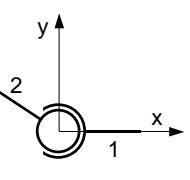
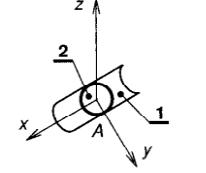
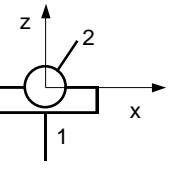
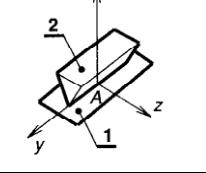
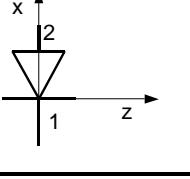


Torseur des actions mécaniques transmissibles par L₀₁

$$\overrightarrow{Tr} \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \quad \overrightarrow{Rot} \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ Rz \end{vmatrix}$$

$$\left\{ \tau_{(0 \rightarrow 1)} \right\}_A \begin{Bmatrix} X_{01} & L_{01} \\ Y_{01} & M_{01} \\ Z_{01} & 0 \end{Bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$$

Torseur des actions mécaniques transmissibles par une liaison parfaite

Désignation de la liaison	Schématisation spatiale	Mobilités	Torseur d'action mécanique transmissible	Torseur d'action mécanique Simplifié	Schématisation plane
Pivot d'axe (A, \vec{x})		$\overrightarrow{Tr} \begin{vmatrix} 0 & \xrightarrow{Rot} Rx \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}_A$	$\begin{Bmatrix} X_{12} & 0 \\ Y_{12} & M_{12} \\ Z_{12} & N_{12} \end{Bmatrix}_A$	Symétrie par rapport à (A, \vec{y}, \vec{z}) $\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ Y_{12} & 0 \\ Z_{12} & 0 \end{Bmatrix}_A$	
Glissière d'axe (A, \vec{x})		$\overrightarrow{Tr} \begin{vmatrix} Tx & 0 \\ 0 & \xrightarrow{Rot} 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}_A$	$\begin{Bmatrix} 0 & L_{12} \\ Y_{12} & M_{12} \\ Z_{12} & N_{12} \end{Bmatrix}_A$	Symétrie par rapport à (A, \vec{x}, \vec{z}) $\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & M_{12} \\ Z_{12} & 0 \end{Bmatrix}_A$	
Pivot glissant d'axe (A, \vec{x})		$\overrightarrow{Tr} \begin{vmatrix} Tx & \xrightarrow{Rot} Rx \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}_A$	$\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y_{12} & M_{12} \\ Z_{12} & N_{12} \end{Bmatrix}_A$	Symétrie par rapport à (A, \vec{y}, \vec{z}) $\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ Y_{12} & 0 \\ Z_{12} & 0 \end{Bmatrix}_A$	
Appui plan de normale (A, \vec{x})		$\overrightarrow{Tr} \begin{vmatrix} 0 & \xrightarrow{Rot} Rx \\ Ty & 0 \\ Tz & 0 \end{vmatrix}_A$	$\begin{Bmatrix} X_{12} & 0 \\ 0 & M_{12} \\ 0 & N_{12} \end{Bmatrix}_A$	Symétrie par rapport à (A, \vec{x}, \vec{y}) $\begin{Bmatrix} X_{12} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & N_{12} \end{Bmatrix}_A$	
Rotule de centre A		$\overrightarrow{Tr} \begin{vmatrix} 0 & \xrightarrow{Rot} Rx \\ 0 & Ry \\ 0 & Rz \end{vmatrix}_A$	$\begin{Bmatrix} X_{12} & 0 \\ Y_{12} & 0 \\ Z_{12} & 0 \end{Bmatrix}_A$	Symétrie par rapport à (A, \vec{x}, \vec{y}) $\begin{Bmatrix} X_{12} & 0 \\ Y_{12} & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_A$	
Linéaire annulaire d'axe (A, \vec{x})		$\overrightarrow{Tr} \begin{vmatrix} Tx & \xrightarrow{Rot} Rx \\ 0 & Ry \\ 0 & Rz \end{vmatrix}_A$	$\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y_{12} & 0 \\ Z_{12} & 0 \end{Bmatrix}_A$	Symétrie par rapport à (A, \vec{x}, \vec{z}) $\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ Z_{12} & 0 \end{Bmatrix}_A$	
Linéaire rectiligne de normale (A, \vec{x}) et de contact (A, \vec{y})		$\overrightarrow{Tr} \begin{vmatrix} 0 & \xrightarrow{Rot} Rx \\ Ty & 0 \\ Tz & 0 \end{vmatrix}_A$	$\begin{Bmatrix} X_{12} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & N_{12} \end{Bmatrix}_A$	Symétrie par rapport à (A, \vec{x}, \vec{z}) $\begin{Bmatrix} X_{12} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_A$	

Ce tableau n'est pas exhaustif

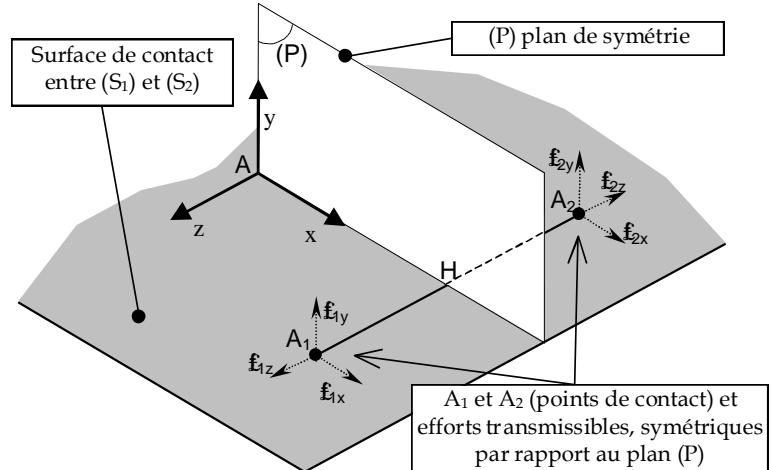
NB : Le torseur des actions mécaniques transmissibles par une liaison glissière hélicoïdale n'est pas modélisable aussi simplement. Dans le chapitre suivant, nous mettrons en place un Principe que nous utiliserons pour déterminer (entre autres) les inconnues de liaisons...

8 - Cas des problèmes admettant un Plan de Symétrie

Dans certains cas, l'étude du mécanisme dans l'espace peut être délicate et longue. On recherche alors une possibilité de réduire l'étude à un problème plan, sous certaines hypothèses.

6.1 Hypothèses

- La surface de contact possède une géométrie qui présente une symétrie par rapport à un plan. Il devra en être de même pour les actions mécaniques extérieures.
- Nous choisissons alors un repère local dont les axes sont confondus avec les axes du plan de symétrie.



6.2 Simplification

Lorsque les hypothèses précédentes sont réunies, l'écriture du torseur d'action mécanique transmissible par la liaison se simplifie. Il subsiste :

- Les composantes de la résultante contenues dans le plan de symétrie,
- La composante du moment portée par l'axe perpendiculaire au plan de symétrie .

Dans notre exemple, le plan de symétrie est (A, \vec{x}, \vec{y}) .

Allure générale (3D) :

$$\left\{ \tau_{(2 \rightarrow 1)} \right\}_A \begin{Bmatrix} X_{21} & L_{21} \\ Y_{21} & M_{21} \\ Z_{21} & N_{21} \end{Bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})} \quad (6 \text{ inconnues})$$

Simplification :

$$\left\{ \tau_{(2 \rightarrow 1)} \right\}_A \begin{Bmatrix} X_{21} & L_{21} \\ Y_{21} & M_{21} \\ Z_{21} & N_{21} \end{Bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$$

Allure simplifiée (2D) :

$$\left\{ \tau_{(2 \rightarrow 1)} \right\}_A \begin{Bmatrix} X_{21} & 0 \\ Y_{21} & 0 \\ 0 & N_{21} \end{Bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})} \quad (3 \text{ inconnues})$$

7 – Isolement des solides et bilan des actions mécaniques

7 – 1 Isolement des solides

Isoler un solide, c'est :

- « effacer » mentalement tout ce qu'il y a autour de ce solide,
- Représenter des actions mécaniques aux points de contact avec les autres solides

Exemple :

Grue roulante

Elle est utilisée dans les ateliers de réparation automobile pour la dépose ou la repose de charges lourdes (moteurs).

Nous avons une charge de 500 kg à installer au bout du crochet 6.

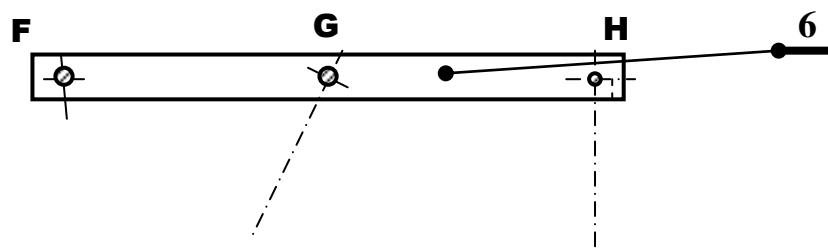
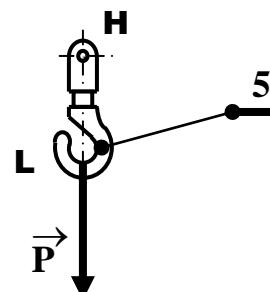
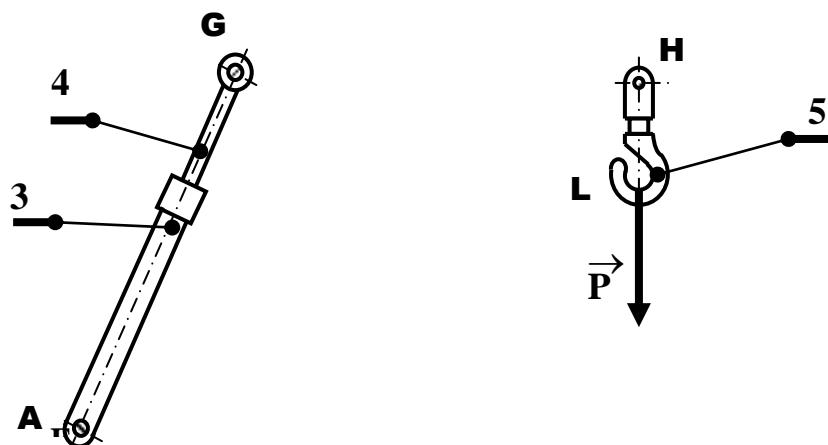
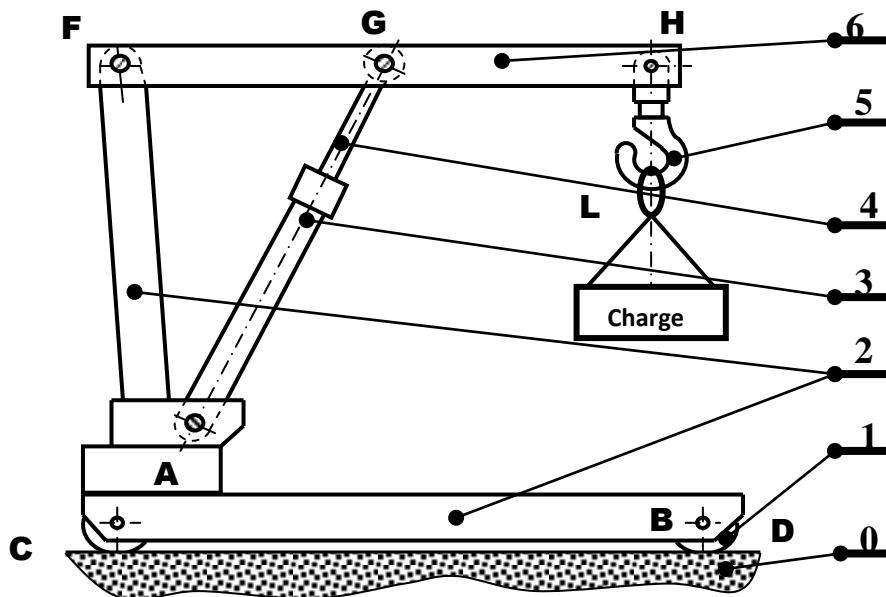
Or, nous n'avons aucune indication concernant la charge maximum qu'il est possible de déplacer à l'aide de cette grue roulante.(pas de plaque indicatrice)

Il faut donc faire une étude statique pour connaître la charge maximum applicable au bout du crochet 6.

Sachant que le vérin 4 peut développer un effort de 1500 daN, nous allons isoler les différents éléments de la grue pour déterminer la charge P maximum.

Ordre d'isolement des solides

On isolera d'abord les solides soumis à 2 forces car leur équilibre statique impose que les 2 forces soient égales et directement opposées. Ces **2 actions ont donc même direction** : la droite joignant les points d'application des 2 forces considérées

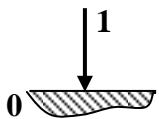
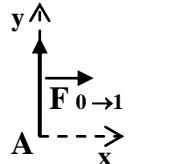
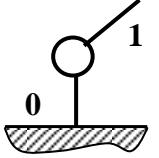
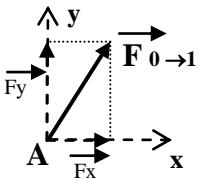
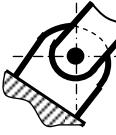
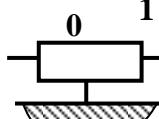
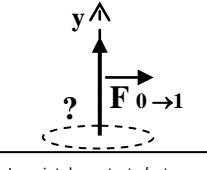
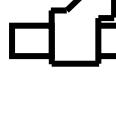
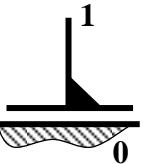
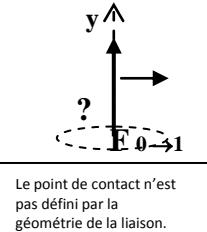
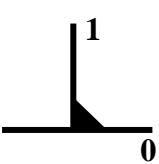
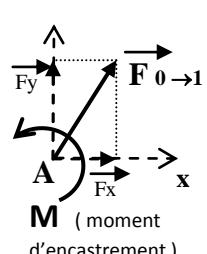
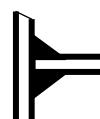
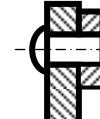


7 – 2 Bilan des actions mécaniques

L'objet du bilan des actions mécaniques est de faire l'**inventaire des caractéristiques** connues et inconnues des forces appliquées au solide.

Ce bilan se formalise par la **réalisation d'un tableau** qui reprend toutes les caractéristiques de chacune des forces appliquées.

Avant de faire le **bilan** des actions appliquées aux solides, il est important de rappeler les **caractéristiques des actions mécaniques transmises par les liaisons usuelles** dans le plan.

Type de la liaison	Schématisation usuelle (dans le plan)	Action de contact entre les solides 0 et 1	Nombre d'inconnues	Exemples de solutions constructives assimilables à ce type de liaison
Appui simple			1 inconnue : - la norme Sont connus : - point d'application ; - direction ; - sens.	 Contact ponctuel  Galet  Patin
Articulation ou pivot			2 inconnues : - la norme ; - direction . Sont connus : - un point de la direction : le centre de l'articulation ; - sens.	 Pivot  Pivot glissant (courte)  Sphérique
Glissière		 <div style="border: 1px solid black; padding: 2px;">Le point de contact n'est pas défini par la géométrie de la liaison.</div>	2 inconnues : - la norme ; - le point d'application . Sont connus : - direction; - sens.	 Liaison glissière (mors mobile / mors fixe d'étau)  Pivot glissant (longue)
Appui plan		 <div style="border: 1px solid black; padding: 2px;">Le point de contact n'est pas défini par la géométrie de la liaison.</div>	2 inconnues : - la norme ; - le point d'application . Sont connus : - direction; - sens.	Pièce prismatique en contact sur une surface plane
Encastrement		 M (moment d'encastrement)	3 inconnues : - la norme ; - la direction ; - le sens. Sont connus : - point d'application (éventuellement) ;	 Soudure  Rivet

Corps du vérin 3 + tige 4

Point d'application	Nom de la liaison	Force	Direction	Sens	Norme
E		\rightarrow $\mathbf{F}_E \ 2 \rightarrow 3$			
G		\rightarrow $\mathbf{F}_G \ 6 \rightarrow 4$			1500 daN

Crochet 5

Point d'application	Nom de la liaison	Force	Direction	Sens	Norme
H		\rightarrow $\mathbf{F}_H \ 6 \rightarrow 5$			
L		\rightarrow $\mathbf{F}_L \text{ charge} \rightarrow 5$			

Flèche 6

Point d'application	Nom de la liaison	Force	Direction	Sens	Norme
F		\rightarrow $\mathbf{F}_F \ 2 \rightarrow 6$			
G		\rightarrow $\mathbf{F}_G \ 4 \rightarrow 6$			
H		\rightarrow $\mathbf{F}_H \ 5 \rightarrow 6$			

FROTTEMENT – LOIS DE COULOMB

1 - Objectif de cette partie du cours et préalable

L'objectif du cours est de permettre de modéliser et de résoudre les problèmes avec des contacts de frottement.

Précisons :

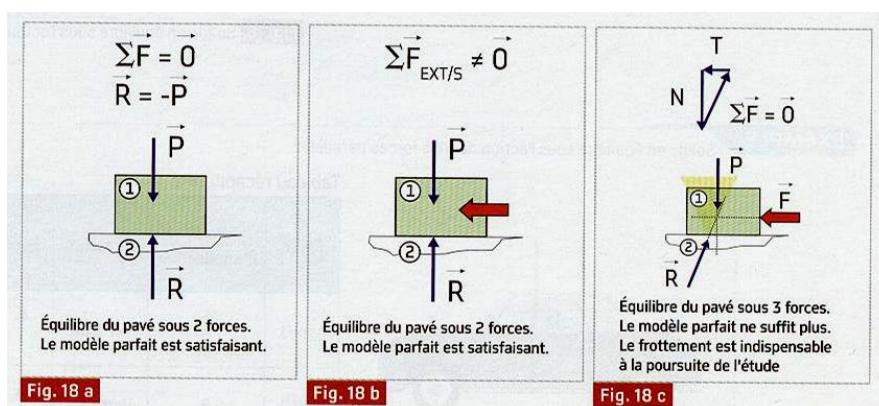
- Lorsque deux solides en contact ont un **mouvement** l'un par rapport à l'autre, on dit qu'il y a **frottement de glissement** entre ces solides.
- Lorsque deux solides tendent à glisser mais n'ont **pas de mouvement** l'un par rapport à l'autre, on dit qu'il y a **adhérence** entre ces solides.

Les phénomènes de frottement sont parfois néfastes et on cherche alors à les diminuer : roulements, engrenages... Parfois, il sont bénéfiques et on les utilise : embrayage, frein...

Au repos, le solide est en équilibre sous l'action de 2 forces (fig 18a)

Si on cherche à déplacer un solide selon une direction parallèle au plan de contact, (fig 18b) on constate qu'il y a une résistance au déplacement relatif des 2 solides (fig 18c)

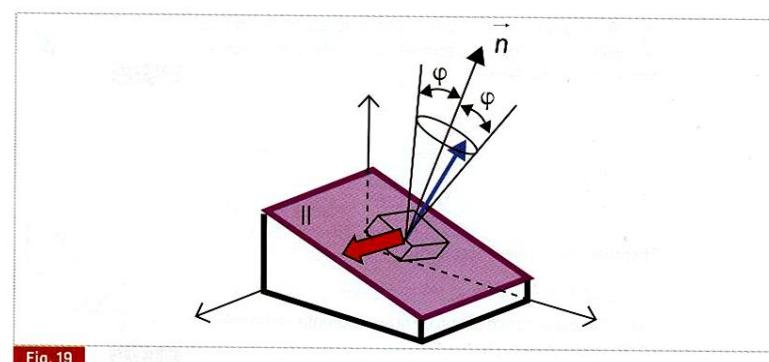
Dans ce cas le solide est soumis à 3 forces et pour qu'il y ait équilibre, il faut que l'action du sol sur le solide 2 soit inclinée.



Propriétés de la force de frottement statique :

- La force se situe dans le plan tangent et s'oppose au déplacement relatif des 2 solides
- La force est indépendante de la taille et de la forme de la surface de contact
- La force est proportionnelle à la charge qui est une force perpendiculaire au plan de contact
- Coefficient d'adhérence : $\mu_0 = T / N = \text{Effort tangentiel} / \text{Effort normal}$

Le support de l'action s'incline de manière à s'opposer au déplacement. L'action de contact va donc évoluer dans un « cône » appelé « cône d'adhérence »



2 - Mise en place des lois de Coulomb autour d'un point de contact

Soit un solide 1 en **contact avec frottement** au point A avec un solide 2 (Fig. 1). Le solide 1 étant isolé, l'action que 2 exerce sur 1 en A est un glisseur tel que $\overrightarrow{R_{2 \rightarrow 1}} = \overrightarrow{N_{2 \rightarrow 1}} + \overrightarrow{T_{2 \rightarrow 1}}$

Considérons les situations d'étude possibles :

Situation d'adhérence (Fig. 1)

– Pas de mouvement relatif 1/2.

– $\overrightarrow{R_{2 \rightarrow 1}}$ est inclinée de l'angle α par rapport à la normale \vec{n}

– $\overrightarrow{R_{2 \rightarrow 1}}$ est à l'intérieur du « **cône de frottement** » d'axe (A, \vec{n}) et de demi angle au sommet φ , « **l'angle de frottement** ».

$$\text{Adhérence : } \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{V_{A,1/2}} = \vec{0} \\ \alpha < \varphi \\ \|\overrightarrow{T_{2/1}}\| = \|\overrightarrow{N_{2/1}}\| \tan \alpha \\ \text{Signe de } \overrightarrow{T_{2/1}} \text{ tel que } \overrightarrow{T_{2/1}} \cdot \vec{t} < 0 \end{array} \right.$$

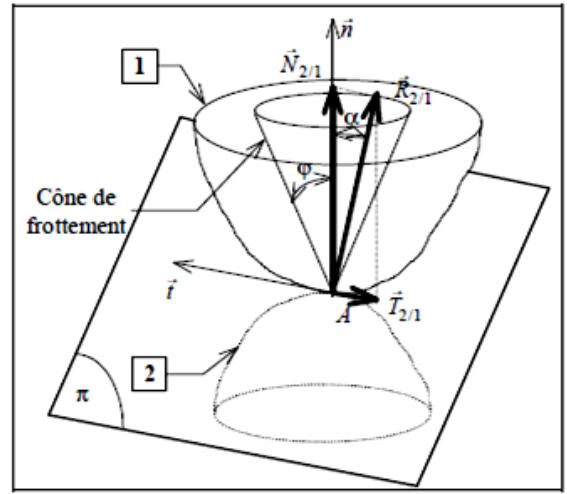


Fig. 1

Situation transitoire - équilibre strict (Fig. 2)

– Pas de mouvement relatif 1/2.

– $\overrightarrow{R_{2 \rightarrow 1}}$ est inclinée de l'angle $\alpha = \varphi$; soit **sur le cône de frottement**.

$$\text{Équilibre strict : } \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{V_{A,1/2}} = \vec{0} \\ \alpha = \varphi \\ \|\overrightarrow{T_{2/1}}\| = \|\overrightarrow{N_{2/1}}\| \tan \alpha \\ \text{Signe de } \overrightarrow{T_{2/1}} \text{ tel que } \overrightarrow{T_{2/1}} \cdot \vec{t} < 0 \end{array} \right.$$

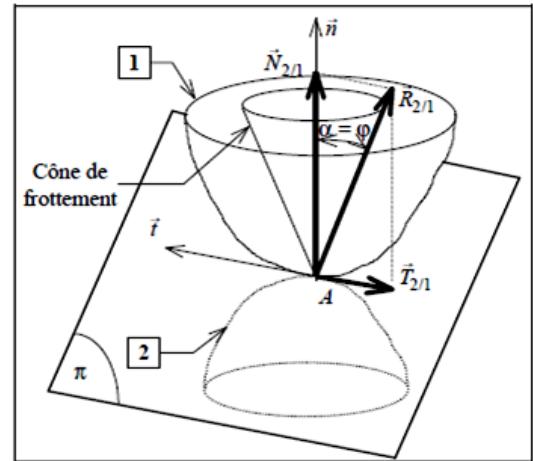


Fig. 2

Situation de glissement (Fig. 3)

– Existence d'un mouvement 1/2. Il n'y a pas d'équilibre statique.

– $\overrightarrow{R_{2 \rightarrow 1}}$ reste inclinée sur le cône de frottement.

$$\text{Glissement : } \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{V_{A,1/2}} \neq \vec{0} \\ \alpha = \varphi \\ \|\overrightarrow{T_{2/1}}\| = \|\overrightarrow{N_{2/1}}\| \tan \alpha \\ \text{Signe de } \overrightarrow{T_{2/1}} \text{ tel que } \overrightarrow{T_{2/1}} \cdot \overrightarrow{V_{A,1/2}} < 0 \end{array} \right.$$

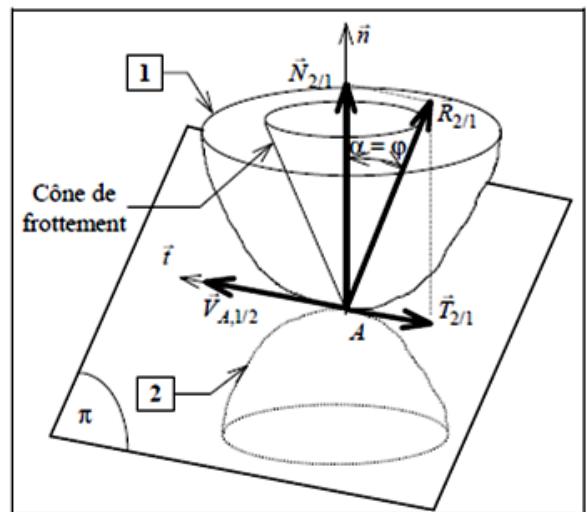


Fig. 3

A retenir

Il est **physiquement impossible** que $\vec{R}_{2 \rightarrow 1}$ soit hors du cône de frottement.

3 - Coefficient ou Facteur de frottement

On note m ou f le coefficient ou facteur de frottement avec :

$$\mu = f = \tan \varphi \quad (\varphi \text{ angle de frottement}).$$

Ce coefficient de frottement ne dépend pas de l'intensité des actions mécaniques, ni de la forme et de l'étendue des surfaces de contact. Il dépend avant tout de la nature des matériaux en contact et dans une moindre mesure de la qualité de l'état des surfaces en contact.

Exemples : (En gras, des valeurs « repères »)

Matériaux en contact	Nature du frottement	facteur f
Acier/Fonte	Sec	0,19
Acier/Bronze	Gras	0,16
	Bon graissage	0,10
Acier trempé/Aacier trempé	Graissage moyen	0,10
Acier trempé/Bronze	Graissage sous pression	0,05
Plastique/Plastique	Bon graissage	0,02 à 0,08
Garniture frein/Fonte	Sec, $t^{\circ}\text{C} = 140^{\circ}\text{max}$	0,35 à 0,40
PTFE/Aacier	Sec	0,22
Pneus/route goudronnée	Route sèche	0,6 à 0,7
	Route mouillée	0,35 à 0,6
	Route verglacée	0,1

Type de palier	facteur f
Palier à roulement	0,0015 à 0,0050
Coussinet autolubrifiants	0,03 à 0,25

Précision

En réalité, le cône de frottement jusqu'à l'équilibre strict est **légèrement plus grand** que le cône en phase de glissement (voir figure 4 d'évolution réelle de l'angle α).

On devrait distinguer un **angle d'adhérence** φ_a et un **angle de frottement de glissement** φ_f . Mais ces angles étant très proches, on adopte un angle φ commun dans les calculs courants de mécanique

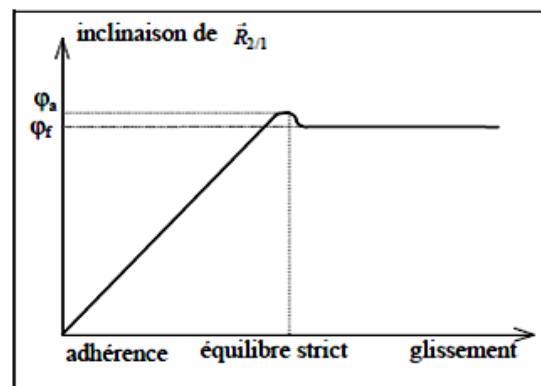


Fig. 4

4 - Méthode de résolution d'un problème avec frottement

Lors d'une résolution, si on ne sait pas à priori si les solides 1 et 2 sont en état équilibre statique. On procède ainsi :

1) Hypothèse sur la situation au contact de frottement :

On fait l'hypothèse que l'on est dans le cas de l'adhérence ou à la limite du glissement (soit à l'équilibre strict).

– *Hypothèse de l'adhérence* : les actions mécaniques ont une direction inconnue.

– *Hypothèse de l'équilibre strict* : les actions mécaniques ont une direction connue (μ est donné).

2) Démarche de résolution :

On applique le PFS en supposant qu'il y a équilibre. On en déduit les actions mécaniques inconnues, soit

par exemple pour un contact quasi-ponctuel, l'inclinaison α de $\overrightarrow{R_{2 \rightarrow 1}}$

. On rencontre trois cas :

– $\alpha < \varphi$: il y a bien **équilibre et adhérence**,

– $\alpha = \varphi$: il y a **équilibre strict**,

– $\alpha > \varphi$: situation **impossible. L'hypothèse énoncée est fausse. Il y a frottement de glissement.**

L'inclinaison réelle de l'effort est $\alpha = \varphi$. Il faut considérer le problème en dynamique.

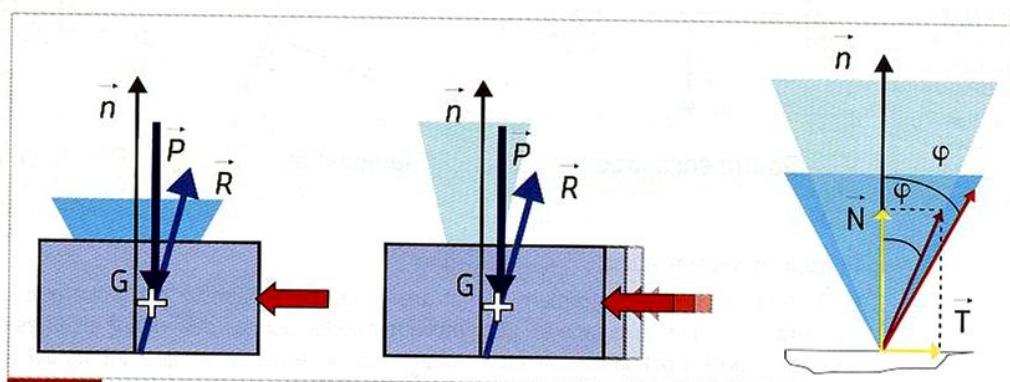


Fig. 20 Solide en contact plan avec frottement

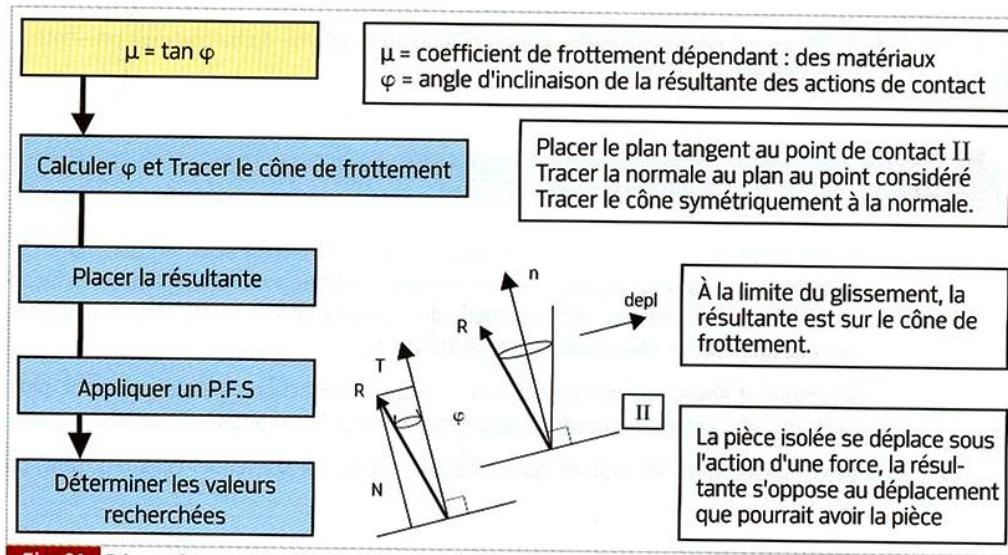


Fig. 21 Démarche pour étudier l'équilibre statique d'un solide en liaison réelle

5 - Exemples de modèles courants de liaisons réelles - cas plan

Hypothèses considérées

– On se place dans un **contact de frottement sans déformation** des pièces et **avec jeu** dans les liaisons si besoin.

– Pour simplifier l'écriture, on considère des liaisons avec un **plan** (A , \vec{x} , \vec{y}) **de symétrie**.

– On se place à l'**équilibre strict ou en situation de glissement**.

On évite tant que possible les modèles complexes dont le traitement alourdit considérablement les calculs sans apporter un gain de précision significatif, surtout en avant-projet.

Liaison ponctuelle de normale (A , \vec{y}) (Fig. 5)

Torseur d'action transmissible dans la liaison

$$\left\{ \tau_{(2 \rightarrow 1)} \right\} = A \begin{Bmatrix} \vec{R}_{(2 \rightarrow 1)} \\ \vec{0} \end{Bmatrix} = A \begin{Bmatrix} X_{21} & 0 \\ Y_{21} & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})} \quad \text{avec : } X_{21} = Y_{21} \tan \varphi .$$

A noter : Si la tendance au mouvement est :

– suivant + \vec{x} : $X_{21} < 0$. – suivant – \vec{x} : $X_{21} > 0$.

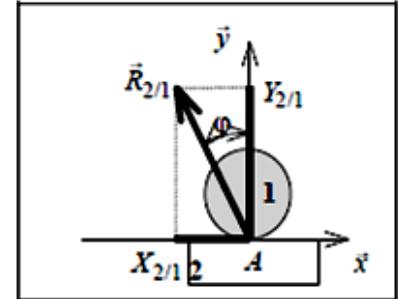


Fig. 5

Liaison appui plan de normale (A , \vec{y}) (Fig. 6)

Torseur d'action transmissible dans la liaison

En tout point M de la surface, la pression de contact

engendre un effort élémentaire transmissible $d\vec{R}_{2 \rightarrow 1}$.

L'action résultante est un glisseur $\vec{R}_{2 \rightarrow 1}$ de support passant par un point A à **déterminer** où le moment résultant est nul.

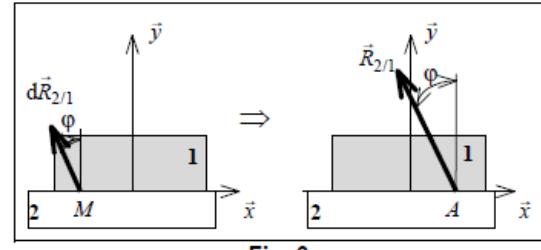


Fig. 6

$$\left\{ \tau_{(2 \rightarrow 1)} \right\} = A \begin{Bmatrix} \vec{R}_{(2 \rightarrow 1)} \\ \vec{0} \end{Bmatrix} = A \begin{Bmatrix} X_{21} & 0 \\ Y_{21} & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})} \quad \text{avec } X_{21} = Y_{21} \tan \varphi \quad \text{et point } A \text{ à déterminer.}$$

En un autre point I , le moment résultant du glisseur vaut :

$$\overrightarrow{M_{I2 \rightarrow 1}} = \overrightarrow{N_{2 \rightarrow 1}} \vec{z} = \overrightarrow{R_{2 \rightarrow 1}} \wedge \overrightarrow{AI}$$

Liaison glissière d'axe (A , \vec{x}) (Fig. 7)

– En raison du jeu et en fonction de la tendance au mouvement de 2/1, on suppose qu'il y a **contact aux seuls points extrêmes opposés H et K** (ou H' et K'), **hypothèse à vérifier** si non évidente.

Torseur d'action transmissible dans la liaison

La liaison se ramène à deux contacts ponctuels réels.

$$\left\{ \tau_{1(2 \rightarrow 1)} \right\} = K \begin{Bmatrix} \vec{K}_{(2 \rightarrow 1)} \\ \vec{0} \end{Bmatrix} \quad \text{et} \quad \left\{ \tau_{2(2 \rightarrow 1)} \right\} = H \begin{Bmatrix} \vec{H}_{(2 \rightarrow 1)} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$$

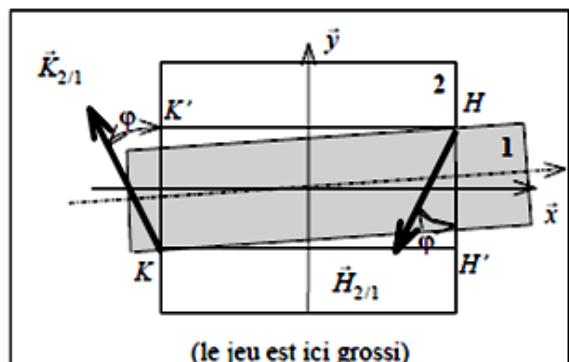


Fig. 7

Liaison pivot glissant d'axe (A, \vec{z}).- Résistance au pivotement de la liaison

- Contact entre deux cylindres de diamètre nominal $d = 2R$.
- En raison du jeu dans la liaison, le **contact a lieu sur une génératrice** (A, \vec{z}) du cylindre.

Torseur d'action transmissible dans la liaison

En A , la vitesse linéaire est perpendiculaire au rayon $OA = R$:

$$\overrightarrow{V}_{A,1/2} = R \omega_{1/2} \hat{t}$$

L'action transmissible est un glisseur $\overrightarrow{R}_{2 \rightarrow 1}$ en A :

$$\{\tau_{(2 \rightarrow 1)}\} = A \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R}_{(2 \rightarrow 1)} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\} \text{ avec } \overrightarrow{R}_{2 \rightarrow 1} \text{ tel que :}$$

- son support est incliné de φ par rapport à \vec{n} donc il est **tangent au cercle de rayon r tel que : $r = R \sin \varphi$** ,
- son support est du **côté opposé** par rapport à (A, \vec{n}) au vecteur vitesse $\overrightarrow{V}_{A,1/2}$

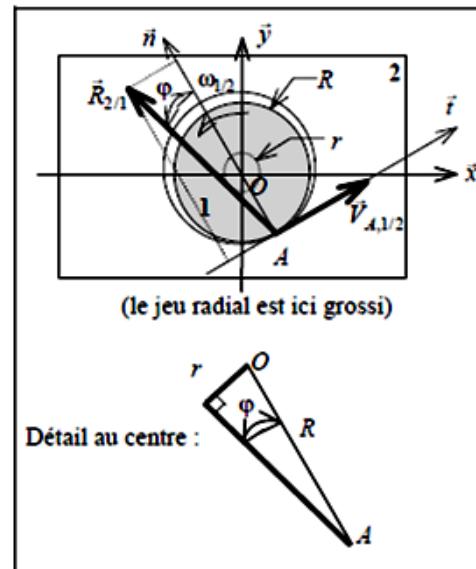


Fig. 8

Résistance au pivotement de la liaison

Écriture du torseur d'action transmissible au centre O de la liaison :

$$\{\tau_{(2 \rightarrow 1)}\} = A \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R}_{(2 \rightarrow 1)} \\ \overrightarrow{M}_{O(2 \rightarrow 1)} \end{array} \right\} \text{ tel que : } \overrightarrow{M}_0 = \mathbf{N}_{2 \rightarrow 1} \vec{z} = \overrightarrow{R}_{2 \rightarrow 1} \wedge \overrightarrow{AO} \text{ couple résistant au pivotement}$$

Application au cas de la figure 8 : $\mathbf{N}_{2 \rightarrow 1} = -R \sin \varphi \parallel \overrightarrow{R}_{2 \rightarrow 1} \parallel = -r \parallel \overrightarrow{R}_{2 \rightarrow 1} \parallel$

PRINCIPE FONDAMENTAL DE LA STATIQUE

La statique est un cas particulier de la dynamique. Le principe fondamental de la statique s'applique à des systèmes matériels en équilibre par rapport à un repère galiléen ou pour lesquels les effets d'inertie peuvent être négligés. On peut alors déterminer pour une configuration du système matériel, les relations entre les actions mécaniques connues et inconnues.

1 – EXTÉRIEUR D'UN SYSTÈME MATÉRIEL :

1.1 – Définition :

L'extérieur d'un système matériel E est le complémentaire de E par rapport à l'univers matériel.

On le note \bar{E} .

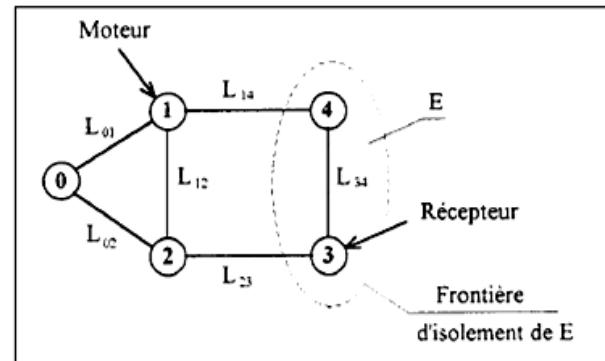
Dans la pratique, l'extérieur d'un système matériel E est tout ce qui n'est pas E et qui est susceptible d'exercer une action mécanique sur E .

1.2 – Frontière d'isolement d'un système matériel :

La frontière d'isolement d'un système matériel E est la surface fermée qui sépare E de l'extérieur.

Exemple :

Le graphe ci-contre représente le graphe des liaisons d'un mécanisme relié à un moteur et à un récepteur. Si on considère le système matériel E constitué des solides 3 et 4, la frontière d'isolement sépare $E = \{ 3, 4 \}$ de l'extérieur $\bar{E} = \{ 1, 2, \text{récepteur, pesanteur} \}$.



2 – ACTIONS MÉCANIQUES EXTÉRIEURES ET INTÉRIEURES :

Une action mécanique *extérieure* au système matériel E est une action mécanique qui provient de l'extérieur \bar{E} .

Une action mécanique *intérieure* au système matériel E est une action mécanique s'exerçant mutuellement entre deux éléments de E .

Dans l'exemple précédent, les actions mécaniques extérieures à E sont :

- l'action mécanique de 2 sur 3 (action transmissible par la liaison L_{2-3}) ;
- l'action mécanique de 1 sur 4 (action transmissible par la liaison L_{1-4}) ;
- l'action mécanique du récepteur sur 3 ;
- l'action mécanique de la pesanteur.

L'action mécanique intérieure à E est l'action mécanique entre 3 et 4 (action de la liaison L_{3-4}).

3 – ÉQUILIBRE D'UN SYSTÈME MATÉRIEL :

3.1 – Définition :

Un système matériel E est en équilibre par rapport à un repère R si, au cours du temps, chaque point de E conserve une position fixe par rapport au repère R.

3.2 – Cas particulier du solide :

Un solide S est en équilibre par rapport à un repère R si les paramètres qui définissent sa position dans R sont constants au cours du temps.

4 – PRINCIPE FONDAMENTAL :

4.1 – Enoncé :

Pour qu'un système matériel E soit en équilibre par rapport à un repère galiléen, il faut que le torseur des actions mécaniques extérieures à E soit nul.

Si on note E l'extérieur de E , le principe fondamental s'écrit :

Remarques :

- Pour la plupart des mécanismes étudiés en laboratoire, un repère lié à la terre constitue une bonne approximation d'un repère galiléen.
- Le principe fondamental énonce simplement une condition nécessaire d'équilibre, mais non pas suffisante pour traduire l'équilibre d'un système matériel.
- Il existe des systèmes matériels pour lesquels le torseur des actions mécaniques extérieures est nul, mais qui ne sont pas en équilibre :
 - une paire de ciseaux soumise à la seule action de deux doigts (figure 4.1) ;
 - un arbre dynamiquement équilibré en rotation uniforme par rapport à un palier.

4.2 – Conditions nécessaire et suffisante d'équilibre :

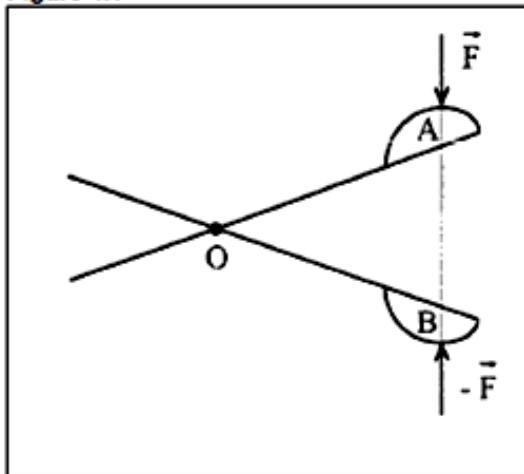
Pour qu'un système matériel E soit en équilibre par rapport à un repère galiléen, il faut et il suffit que :

– il soit en équilibre au début de l'étude,

– pour tout sous-système matériel e de E : $\{T_{\bar{e} \rightarrow e}\} = \{0\}$

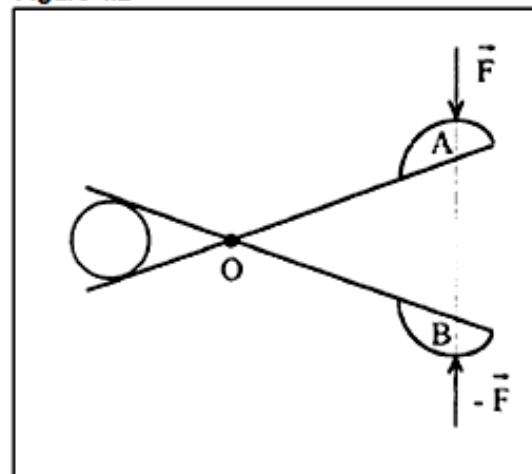
Exemple de la paire de ciseaux serrant un objet (figure 4.2).

Figure 4.1



système matériel non en équilibre

Figure 4.2



système matériel en équilibre

5 – THÉORÈMES GÉNÉRAUX DE LA STATIQUE :

En écrivant qu'en tout point de l'espace, les éléments de réduction du torseur des actions mécaniques extérieures à E sont nuls, on obtient deux équations vectorielles appelées théorèmes généraux de la statique.

$$\{T_{\bar{E} \rightarrow E}\} = A \begin{Bmatrix} \vec{R}_{\bar{E} \rightarrow E} \\ \vec{M}_{A \bar{E} \rightarrow E} \end{Bmatrix}$$

5.1 – Théorème de la résultante statique :

Pour un système matériel E en équilibre par rapport à un repère galiléen, la résultante du torseur des actions mécaniques extérieures à E est nulle.

$$\vec{R}_{\bar{E} \rightarrow E} = \vec{0}$$

5.2 – Théorème du moment statique :

Pour un système matériel E en équilibre par rapport à un repère galiléen, le moment du torseur des actions mécaniques extérieures à E est nul.

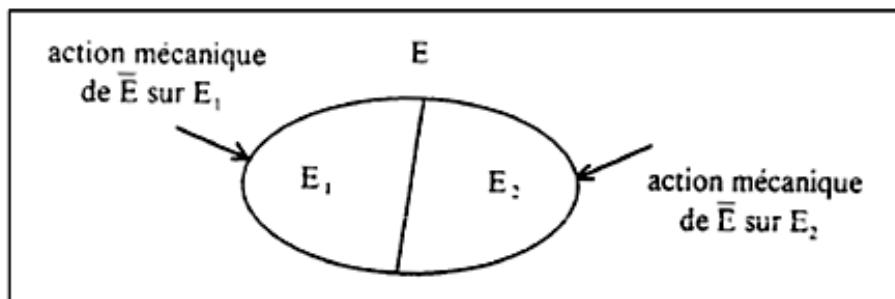
$$\vec{M}_{A_{\bar{E} \rightarrow E}} = \vec{0}$$

Remarques :

- L'application du principe fondamental de la statique à un système matériel conduit à écrire deux équations vectorielles, dont les projections sur une base orthonormée directe donnent, au maximum, six équations scalaires indépendantes (trois dans le plan).
- Le principe fondamental de la statique est un cas particulier du principe fondamental de la dynamique. L'application du principe fondamental de la dynamique se ramène au principe fondamental de la statique, lorsque le *torseur dynamique* du mouvement du système matériel par rapport au repère galiléen est nul.
- Le torseur dynamique d'un solide fait intervenir, dans les éléments de réduction, des accélérations linéaires et angulaires, ainsi que les caractéristiques d'inertie du solide.
- En pratique, on peut appliquer le principe fondamental de la statique à un solide :
 - en mouvement de *translation uniforme* par rapport à un repère galiléen ;
 - en mouvement de *rotation uniforme* par rapport à un repère galiléen (solide dynamiquement équilibré) ;
 - en mouvement *quelconque* si les effets d'inertie peuvent être négligés.

6 – THÉORÈME DES ACTIONS MUTUELLES :

Soit une partition du système matériel E en sous-systèmes E_1 et E_2 . Appliquons le principe fondamental de la statique successivement à E , E_1 et E_2 .



Théorème :

L'action mécanique d'un système matériel E_1 sur un système matériel E_2

($E_1 \subset E_2$) est opposée à l'action mécanique de E_2 sur E_1 .

$$\{T_{(E_2 \rightarrow E_1)}\} = - \{T_{(E_1 \rightarrow E_2)}\}$$

7 – SOLIDE EN ÉQUILIBRE SOUS L’ACTION DE DEUX GLISSEURS :

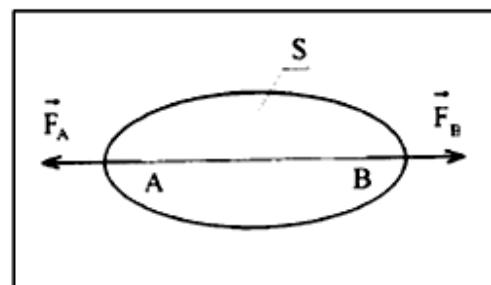
Soit un solide S en équilibre par rapport à un repère

galiléen sous l’action de deux glisseurs (A , \vec{F}_A) et (B , \vec{F}_B)

Le principe fondamental de la statique appliqué à S se traduit par les deux équations vectorielles :

$$\vec{F}_A + \vec{F}_B = \vec{0}$$

$$\vec{AB} \wedge \vec{F}_B = \vec{0}$$



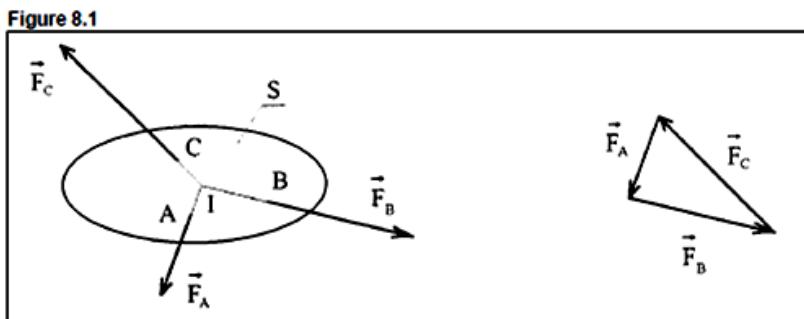
Conclusion :

Si un solide est en équilibre par rapport à un repère galiléen sous l’action de deux glisseurs, les résultantes de ces deux glisseurs sont directement opposées.

8 – SOLIDE EN ÉQUILIBRE SOUS L’ACTION DE TROIS GLISSEURS :

Soit un solide S en équilibre par rapport à un repère galiléen sous l’action de trois glisseurs (A , \vec{F}_A), (B , \vec{F}_B)

et (C , \vec{F}_C)



Le principe fondamental de la statique appliqué à S se traduit par les deux équations vectorielles :

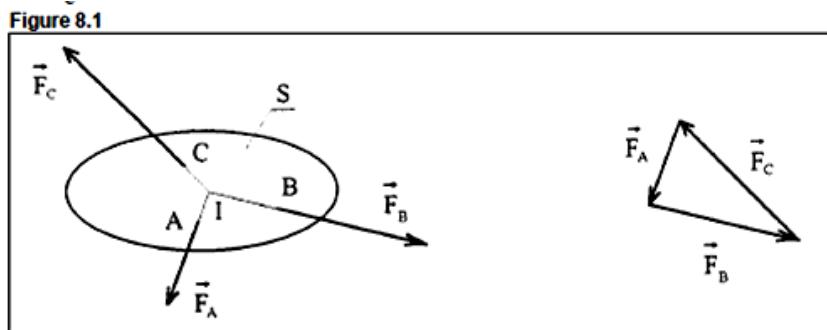
$$\vec{F}_A + \vec{F}_B + \vec{F}_C = \vec{0}$$

$$\vec{AB} \wedge \vec{F}_B + \vec{AC} \wedge \vec{F}_C = \vec{0}$$

Conclusion :

Si un solide est en équilibre par rapport à un repère galiléen sous l’action de trois glisseurs, les résultantes de ces trois glisseurs sont :

- coplanaires,
- concourantes en même point, ou parallèles,
- de somme vectorielle nulle.



La figure 8.3 montre une construction géométrique traduisant l’équation du moment statique au point A .

9 – SCHÉMA D'ARCHITECTURE D'UN MÉCANISME :

Le *schéma cinématique minimal* d'un mécanisme permet de visualiser les mouvements relatifs des pièces principales d'un mécanisme. Ce schéma cinématique minimal est construit à partir du graphe des liaisons du mécanisme, rendu minimal en considérant des liaisons équivalentes aux liaisons placées en parallèle ou en série entre les pièces principales du mécanisme.

Le *schéma d'architecture* d'un mécanisme, plus près de la réalité technologique, est destiné, une fois le niveau de modélisation choisi, au calcul des torseurs d'action mécanique transmissible des différentes liaisons.

Le niveau de modélisation choisi tient compte du choix des constituants adoptés pour réaliser certaines fonctions du mécanisme.

Le schéma d'architecture est construit de façon analogue au schéma cinématique minimal d'un mécanisme, mais les liaisons y occupent une position relative précise, définie par leur repère local. Sur ce schéma figurent également les actions mécaniques extérieures au mécanisme, de façon à écrire simplement, si possible en lisant les figures, les équations scalaires traduisant le principe fondamental de la statique.

On appelle *graphe des liaisons d'architecture* le graphe des liaisons correspondant au schéma d'architecture du mécanisme.

Exemple : – SYSTÈME DE COMMANDE D'UNE TABLE EN TRANSLATION –

La figure 9.1 représente le *graphe minimal des liaisons* et la figure 9.2 le *schéma cinématique minimal* d'un mécanisme composé d'une table 2, animée d'un mouvement de translation rectiligne de direction \vec{x} par rapport à un bâti 0, et d'une vis 1 en liaison pivot d'axe (O, \vec{x}) avec le bâti 0. La table et la vis ont une liaison glissière hélicoïdale d'axe (O, \vec{x})

Figure 9.1

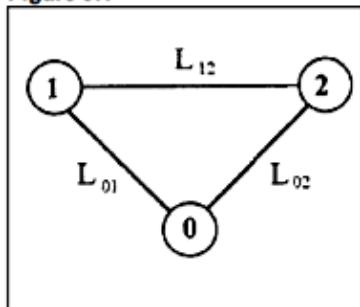
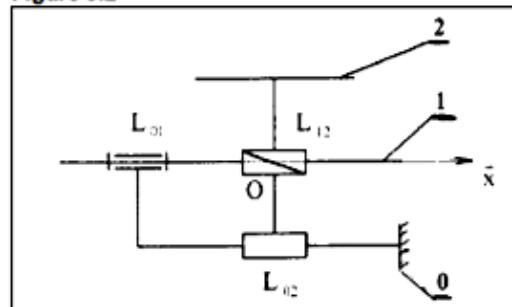


Figure 9.2



Si on envisage de réaliser la *liaison glissière* par une association en parallèle, entre la table et le bâti, par quatre douilles à billes glissant sur deux tiges cylindriques parallèles, modélisables par des liaisons linéaires annulaires, et la liaison pivot par association en parallèle entre la vis et le bâti, par deux roulements à billes situés à chaque extrémité de la vis, modélisable, l'un par une liaison rotule et l'autre par une liaison linéaire annulaire, la figure 9.3 représente le *graphe des liaisons d'architecture* et la figure 9.4 le *schéma d'architecture* correspondant

Figure 9.3

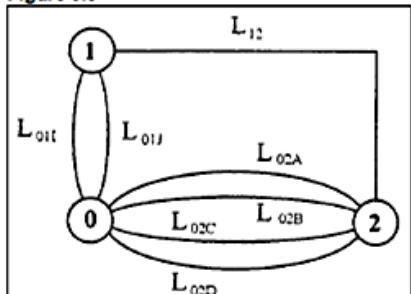
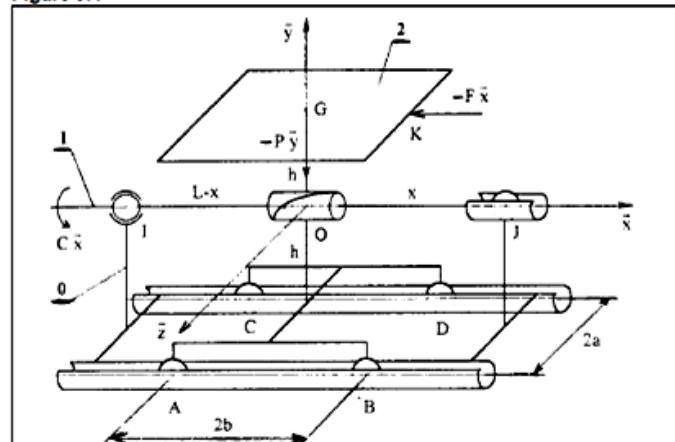
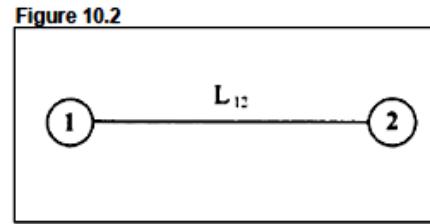
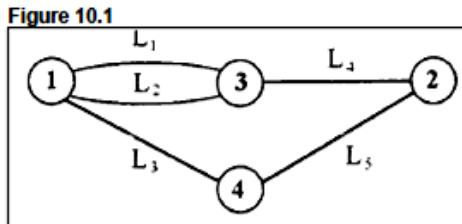


Figure 9.4



10 – LIAISON ÉQUIVALENTE :

Supposons qu'il existe entre deux solides **1** et **2** plusieurs liaisons réalisées avec ou sans pièces intermédiaires (figure 10.1).



Afin de déterminer le torseur d'action mécanique transmissible de la *liaison cinématique équivalente* (figure 10.2) aux liaisons placées en parallèle ou en série entre les solides **1** et **2**, on suppose les liaisons sans frottement et les pièces intermédiaires de masse nulle.

Notation utilisée :

- torseur d'action mécanique transmissible de la liaison L_i , dans le repère local $R_i(O_i, \vec{x}_i, \vec{y}_i, \vec{z}_i)$ associé à la liaison :

$$\{\tau_i\} = \begin{Bmatrix} \vec{R}_i \\ M_{O_i} \end{Bmatrix}_{O_i} = \begin{Bmatrix} X_i & | & L_i \\ Y_i & | & M_i \\ Z_i & | & N_i \end{Bmatrix}_{R_i}$$

- torseur d'action mécanique transmissible de la liaison cinématique équivalente aux liaisons placées entre les solides **1** et **2** dans le repère local $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$:

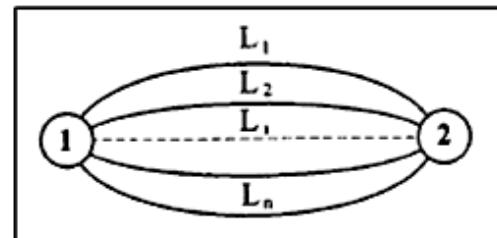
$$\{\tau\} = \begin{Bmatrix} \vec{R} \\ M_O \end{Bmatrix}_O = \begin{Bmatrix} X & | & L \\ Y & | & M \\ Z & | & N \end{Bmatrix}_R$$

10.1 – Liaisons en parallèle :

Soient n liaisons disposées en parallèle entre deux solides **1** et **2**.

Dans cette association de liaisons, le torseur d'action mécanique transmissible de la liaison équivalente s'obtient en appliquant, par exemple, le principe fondamental de la statique au solide **2**. On suppose qu'en plus de l'action mécanique due aux n liaisons s'exerce sur le solide **2** une action mécanique

représentée par le torseur $\{T_0\}$:



$$\sum_{i=1}^n \{\tau_i\} + \{T_0\} = \{0\}$$

En écrivant le principe fondamental avec le torseur de la liaison équivalente :

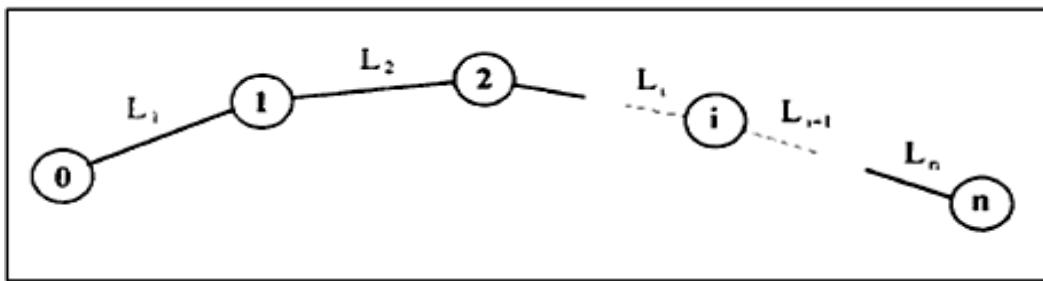
$$\{\tau\} + \{T_0\} = \{0\}$$

L'expression du torseur d'action mécanique transmissible de la liaison équivalente en fonction des torseurs des n liaisons en parallèle est :

$$\{\tau\} = \sum_{i=1}^n \{\tau_i\}$$

10.2 – Liaisons en série :

Soient n liaisons disposées en série entre deux solides **0** et **n** par l'intermédiaire de $n - 1$ solides.



Le torseur d'action mécanique $\{T_i\}$ de la liaison L_i , représente dans cette étude l'action mécanique du solide $i - 1$ sur le solide i .

Le torseur d'action mécanique $\{T\}$ de la liaison équivalente L_{0n} , représente l'action mécanique du solide **0** sur le solide **n**.

Le torseur d'action mécanique transmissible de la liaison équivalente s'obtient en appliquant le principe fondamental de la statique à chaque solide intermédiaire i , en supposant qu'aucune action mécanique extérieure ne s'exerce sur les solides intermédiaires :

$$\{T_i\} - \{T_{i+1}\} = \{0\}$$

Cette relation montre que les torseurs d'action mécanique transmissible des liaisons L_i sont égaux.

Par suite, le torseur d'action transmissible de la liaison équivalente vérifie :

$$\{T\} = \{T_i\} \quad \forall i$$

Méthode de résolution en statique analytique

Remarque

On entend apporter ici une **méthode très générale**. Certaines étapes de résolution peuvent être simplifiées ou plus longues suivant les problèmes.

Préalable

- Poser le **problème** en indiquant quelles sont les actions mécaniques à déterminer dans le mécanisme étudié.
- Choisir les **unités de travail**.

Etape 1

- Définir le **système** de solides étudié ainsi que le solide de référence (bâti).

Etape 2

- **Modéliser et faire le bilan** des actions mécaniques en s'aidant si besoin (cas de plusieurs solides) d'un graphe des actions mécaniques (voir application « Suspension de voiture »).
- Prendre en compte les **éventuelles symétries** pour la modélisation des actions mécaniques.
Remarque : A ce stade, ne pas écrire les torseurs si possible. Identifier par contre le nombre de composantes connues/inconnues.
- **Cas d'une résolution informatique** ⇒ Introduction des données dans un logiciel de calcul. Cette résolution concerne toutes les inconnues existantes (alors que l'on ne recherche éventuellement que certains résultats).

Etape 3

- Compter le **nombre d'inconnues statiques indépendants** N_i total recherchées. **Ne pas compter deux fois des composantes d'actions réciproques**. Répertorier les **éventuelles relations supplémentaires** N_{sup} (loi de frottement, loi de comportement d'efforts, ...).
- Choisir le nombre et l'ordre des isolements minimum nécessaires pour résoudre : 1 isolement donne **au plus** 6 équations algébriques **Ne indépendantes** pour un problème dans l'espace (3 dans un problème plan).

$$N_i \leq N_e + N_{sup}$$

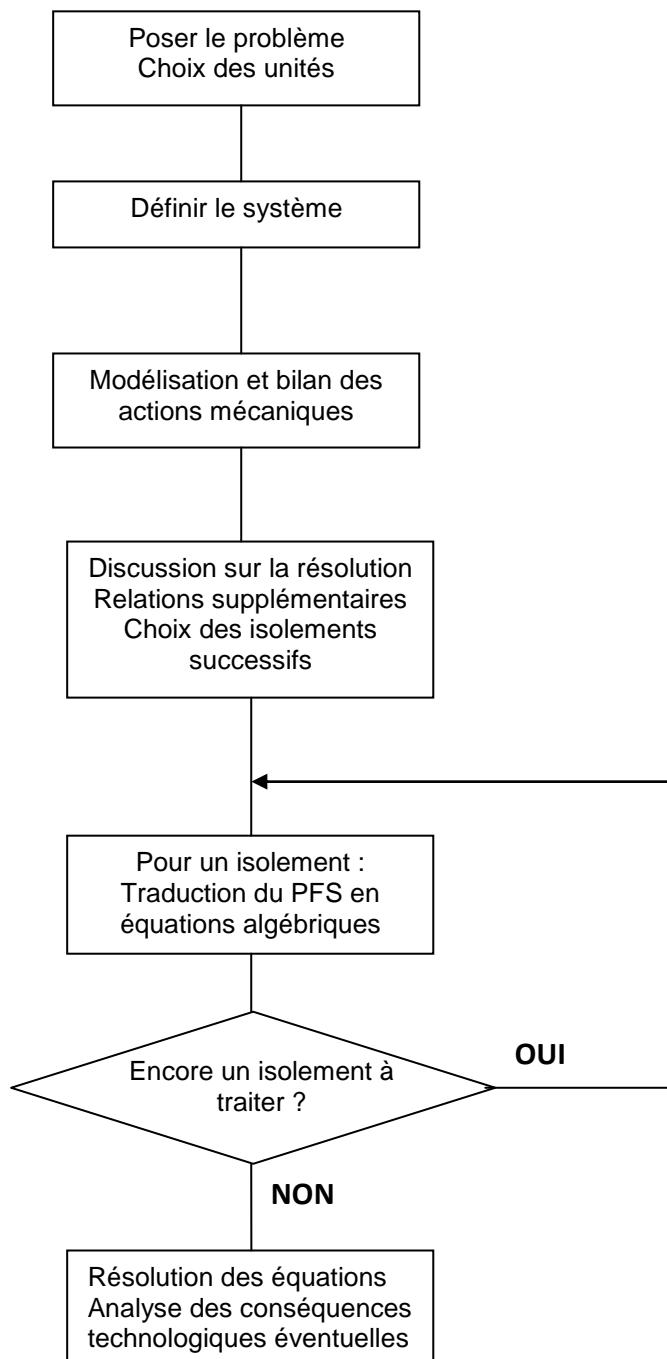
Etape 4

- Pour chaque isolement, **écrire les torseurs d'actions mécaniques** en présence en définissant les variables de travail.
- **Traduire le PFS** pour chaque isolement en écrivant les théorèmes généraux. **Attention** à réduire les torseurs **au même point** de calcul (à choisir judicieusement) et à exprimer les vecteurs **dans une même base**.

Etape 5

- **Résoudre les équations seulement après** avoir effectuer tous les isolements. Compléter le système d'équation par **les éventuelles relations supplémentaires** (relations géométriques, loi de frottement, loi de comportement d'efforts, ...).
- **Rassembler les résultats** et examiner par la suite les **conséquences technologiques du problème** : hypothèse d'équilibre satisfait ou non, risque de basculement, arc-boutement, calcul de composants standards (coussinets, roulements, assemblages boulonnés, ...), calcul de résistance des matériaux, ...

Résumé de la méthode :



Méthode de résolution en statique graphique

1 - Introduction

La statique graphique s'applique à des **problèmes plans isostatiques** : le plan de travail est un plan de symétrie pour les actions mécaniques.

– Deux types de résolutions :

- **Action mécanique résultante et statiquement équivalente** à un ensemble de glisseurs ;
- **Équilibre d'un système** sollicité par **2 à 4 glisseurs**.

– Deux types de méthode existent :

- la **méthode directe**, conséquence graphique du P.F.S dans le plan soit :

$$\vec{R}_{\bar{s} \rightarrow s} = \vec{0} \text{ et } \vec{M}_{O_{\bar{s} \rightarrow s}} = \vec{0}$$

- la **méthode du funiculaire et du dynamique** d'application plus générale.

Préparation de la résolution

– Disposer d'un **croquis à l'échelle** du système isolé. **Les échelles en longueur et norme des forces sont à définir**.

– Effectuer le **bilan des actions mécaniques** avec pour chaque glisseur :

- **le point d'application** (soit un des points de l'axe central du glisseur) ;
- **le support du glisseur** (= axe central) s'il est connu ;
- **le sens et la norme** du glisseur s'ils sont connus.

2- Méthodes de résolutions graphiques

Nous ne traiterons pas tous les cas d'étude possibles mais la méthode du funiculaire et dynamique pourra être étendue à tout autre cas.

Action statiquement équivalente à des glisseurs donnés non concourants en un point - méthode vectorielle directe

Système proposé : Gousset de structure

La figure 1 présente un gousset supportant plusieurs glisseurs dont trois connus dont on souhaite connaître le système équivalent.

Type de données : Cas de 3 glisseurs \vec{A} , \vec{B} et \vec{C} non concourants en un point.

Démarche

Somme deux à deux : déterminer l'intersection I_1 de \vec{A} et \vec{B} et tracer leur résultante \vec{R}_1 en cette intersection.

Poursuivre la même manipulation avec le glisseur \vec{C} (et ainsi de suite en cas d'autres glisseurs à additionner).

Echelle des forces : 1 mm \Leftrightarrow 10 N

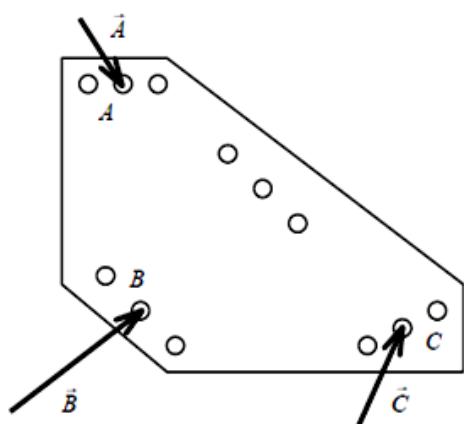


fig 1

Système en équilibre sous l'action de deux glisseurs

Système proposé : Pompe hydraulique à main

La figure 2 présente une pompe hydraulique à main. Etudions l'équilibre de la bielle 4 schématisée figure 3

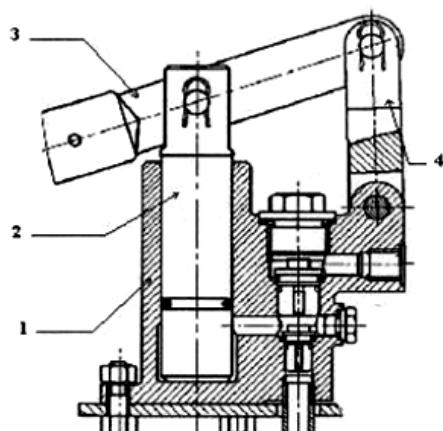


Fig. 2



Fig. 3

Type de données

Le système est soumis à deux glisseurs, un étant connu ou non.

Démarche

Pour résoudre l'équilibre, il faut connaître un des glisseurs. Autrement, on n'en déduit uniquement la direction des glisseurs puisque le P.F.S. implique que les glisseurs sont directement opposés.

Système en équilibre sous l'action de trois glisseurs

Cas 1 d'étude : 3 glisseurs non parallèles

Système proposé : Crampon d'ablocage

La figure 4 présente un crampon d'ablocage permettant de participer au bridage d'une pièce sur une machine-outil.

L'effort \vec{F} de blocage entre 3 et la pièce doit être de 300 N. Les actions dans la goupille 5 et la vis 4 sont à déterminer en vue de leur dimensionnement.

Type de données

On dispose d'un glisseur connu, et d'une direction connue.

Démarche

Pour qu'il y est équilibre, les glisseurs doivent être concourants (satisfaction du moment résultant nul au point de « concurrence »). En déterminant le point de « concurrence » des glisseurs, on dispose alors de toutes les directions. Construire ensuite un polygone fermé des glisseurs pour obtenir les normes et sens (satisfaction de la résultante nulle).

Echelle des forces : 1 mm \leftrightarrow 10 N

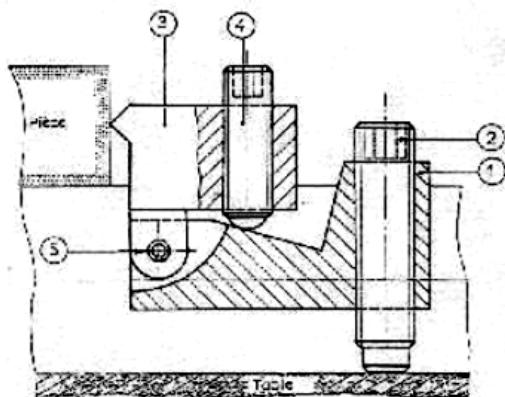


Fig. 4

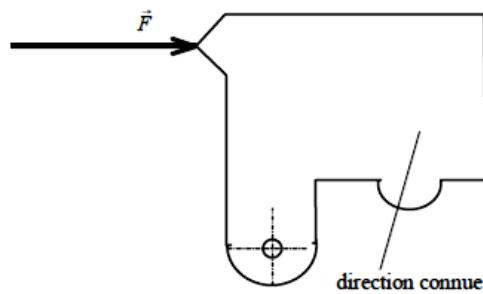


Fig. 5

Cas 2 d'étude : 3 glisseurs parallèles (funiculaire et dynamique fermés)

Système proposé : Voiture à l'arrêt

La figure 6 présente une voiture à l'arrêt de poids 2100 daN. On souhaite déterminer la répartition de la réaction du sol au niveau de chaque roue en A et B.

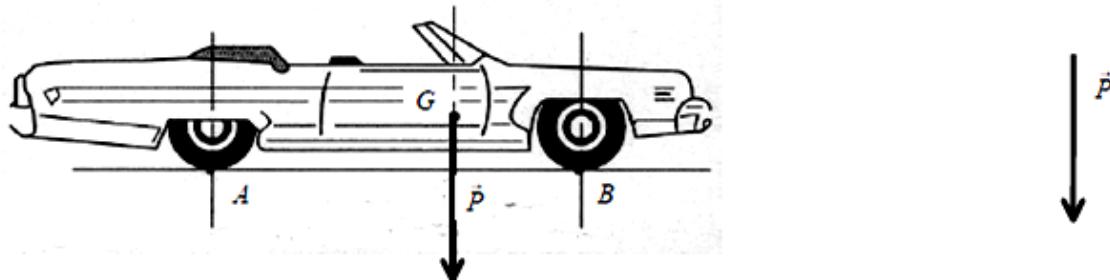


Fig. 6

Présentation de la méthode du funiculaire et dynamique

Le principe repose sur l'élaboration de **deux constructions** :

- **Construction d'un dynamique** : Cette figure illustre la somme des glisseurs. On choisit un pôle P quelconque à partir duquel on trace des « rayons polaires » jusqu'aux extrémités des glisseurs. Ces rayons polaires sont numérotés successivement 0, 1, 2, 3, ...
- **Construction d'un funiculaire** : Cette figure illustre la position relative des glisseurs. Pour chaque glisseur donné, on construit sur le funiculaire des **parallèles aux rayons polaires qui encadrent ce glisseur** de telles que **ces parallèles se coupent sur le support du glisseur**.

Propriétés :

- Si le **moment résultant** des glisseurs est **nul** alors le **funiculaire est fermée** (= parallèles des rayons polaires extrêmes confondus), sinon il est ouvert.
- Si la **résultante** des glisseurs est **nulle** (mais pas nécessairement le moment résultant) alors le **dynamique est fermée** (= polygone des glisseurs fermé), sinon il est ouvert.

Directives méthodologiques :

- Le point « pôle P » du dynamique est choisi de préférence de telle sorte que les rayons polaires ne forment pas d'angles trop aigus entre-eux.
- Lorsque seul le point d'application A d'un glisseur est connu sur le funiculaire, on commence à tracer ce dernier par les deux parallèles aux rayons polaires correspondants qui passent par A.
- Lorsque le support du glisseur est connu sur le funiculaire, l'intersection de celui-ci et d'une parallèle aux rayons polaires correspondants impose le point de passage pour la deuxième parallèle.
- Le report du funiculaire vers le dynamique des directions de rayons polaires déterminés lors de la construction permet de compléter la résolution du dynamique.

Type de données

En général on dispose d'un glisseur connu et des deux autres supports parallèles.

Démarche

On trace le dynamique à partir du glisseur connu, ici \vec{P} . Puis on trace le funiculaire en reportant les rayons polaires associés à \vec{P} dans le dynamique, ceci en un point quelconque du support de \vec{P} . On en déduit la ligne de fermeture donnant le rayon polaire manquant.

Echelle des forces : 1 mm \Leftrightarrow 100 daN

Cas 3 d'étude : 3 glisseurs non parallèles, point concourant éloigné (Funiculaire et dynamique fermés)

Système proposé : Pompe hydraulique à main

Reprendons la pompe hydraulique à main de la figure 2 et étudions l'équilibre du levier **3** schématisé figure 7. On dispose de l'effort résistant \vec{B} du piston soit 350 N. Déterminons l'effort nécessaire de la **main** en A ainsi que dans la bielle **4** en C.

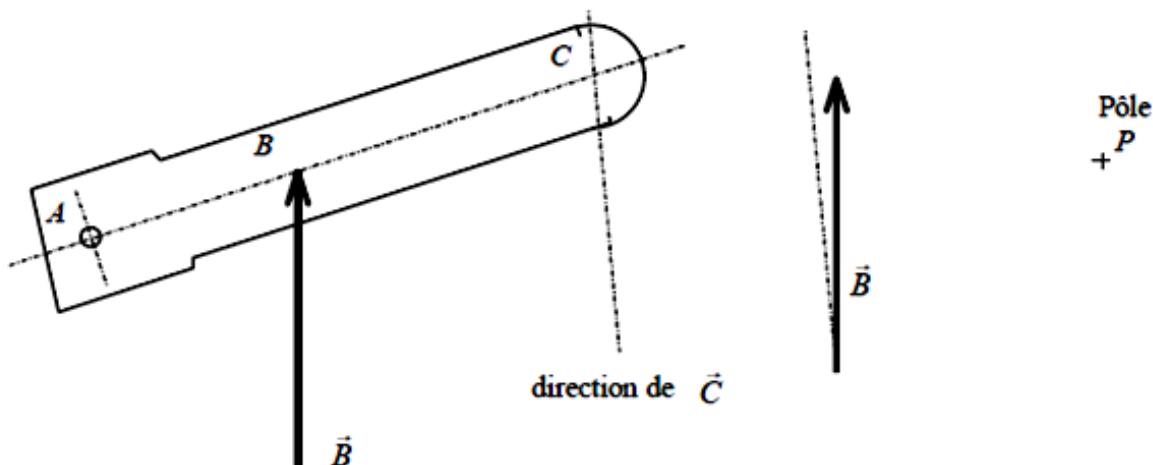


Fig. 7

Type de données

Bien que similaire au cas 1, c'est un cas de configuration géométrique particulière.

Démarche

On met en place sur le dynamique le glisseur connu ainsi que la direction connue. On trace le funiculaire **à partir du point d'application du glisseur entièrement inconnu**. On en déduit la ligne de fermeture donnant le rayon polaire manquant.

Echelle des forces : 1 mm \Leftrightarrow 10 N

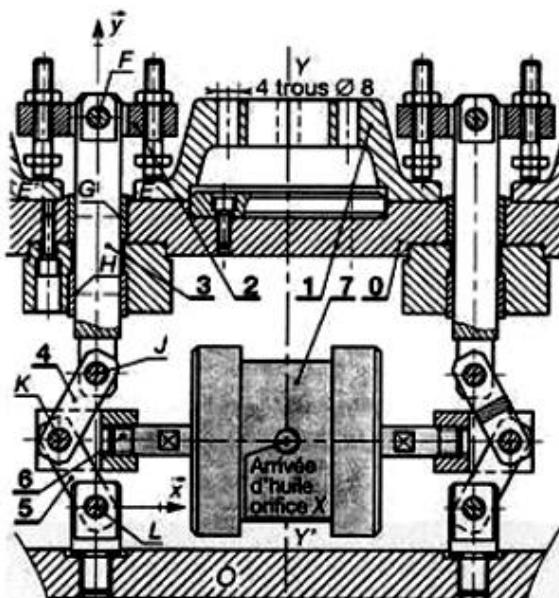


Fig. 9

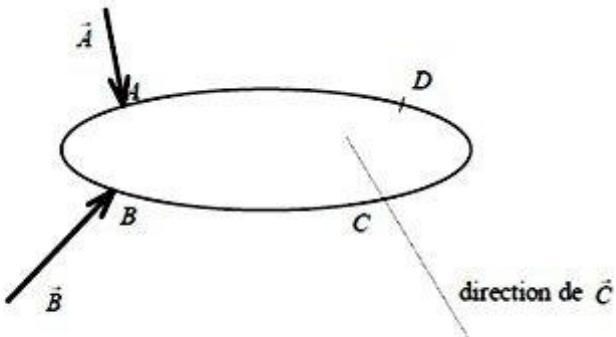
Cas 1 d'étude : 2 glisseurs connus + une direction

Type de données

2 glisseurs sur 4 sont entièrement connus, une autre direction est également donnée. Configuration de la figure 8.

Démarche

Déterminer le glisseur résultant à \vec{A} et \vec{B} ; ainsi on retombe dans le cas d'un système soumis à trois glisseurs (§2.3).



A faire librement en guise d'exercice et en dehors du cours

Fig. 8

Cas 2 d'étude : 1 glisseur connu + trois directions (Méthode de Culmann)

Système proposé : Montage d'usinage

La figure 9 présente un montage d'usinage et son mécanisme de bridage. L'action mécanique F de bridage nécessaire est de 300 daN. En étudiant l'axe 3, on souhaite déterminer les efforts dans les **coussinets** et dans la bielle 4.

En fonction du sens d'application de l'effort de bridage et du jeu de guidage, on suppose que les contacts dans les coussinets se concentrent en G et H . Les efforts \vec{G} et \vec{H} sont de directions connues car inclinés sur le cône de frottement et opposés à la tendance au mouvement (on devance un résultat de cours prochain). L'action \vec{J} dans la bielle a pour direction (KJ) (cf §2.2)

Type de données

1 glisseur sur 4 est entièrement connu, les trois autres directions sont données.

Démarche

On applique la **méthode de Culmann** basée sur la détermination des résultantes de deux paires de glisseurs (Fig. 10).

En pratique : Déterminer l'intersection de deux glisseurs (par ex. M intersection de \vec{F} et \vec{G}) puis celle des deux autres glisseurs (ici N intersection de \vec{H} et \vec{J}) (MN) est la « **droite de Culmann** ». La résultante des deux premiers glisseurs (ici notée \vec{R}_1 en M) est directement opposée à celle des deux autres glisseurs (ici notée $\vec{R}_2 = -\vec{R}_1$ en N) sur (MN).

Déterminer une de ces résultantes à partir du glisseur connu (ici à partir de \vec{F} connu et des deux directions de \vec{G} et de \vec{R}_1 , on obtient \vec{G} et \vec{R}_1). En déduire l'autre résultante directement opposée (\vec{R}_2 , puis les deux autres glisseurs inconnus (\vec{R}_2 étant déterminé, on obtient \vec{H} et \vec{J} à partir de leur direction)).

Echelle des forces : 1 mm \Leftrightarrow 10 daN

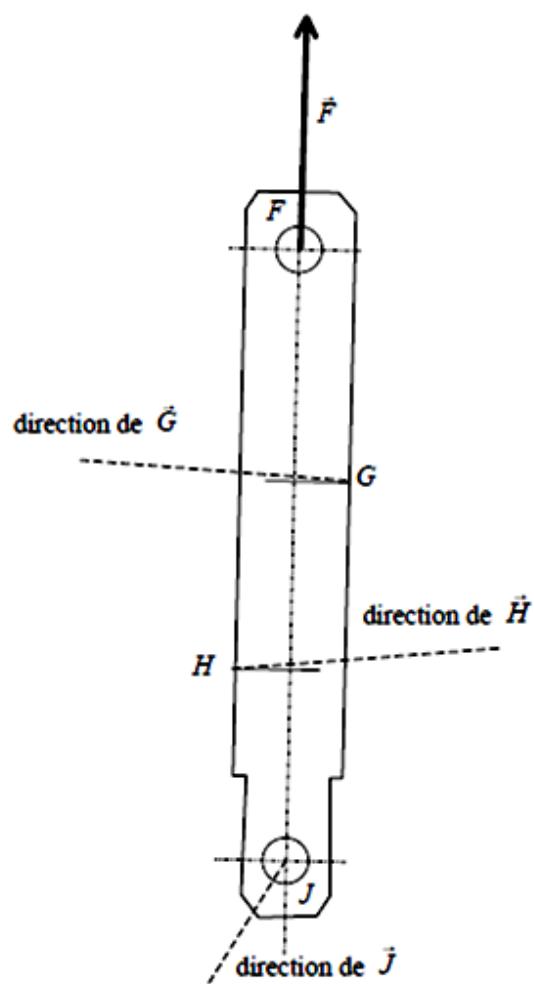


Fig. 10

Action statiquement équivalente à des glisseurs par la méthode du funiculaire et dynamique

Cas 1 d'étude : L'action statiquement équivalente est un glisseur (Funiculaire et dynamique ouverts)

Système proposé : Poutre sur deux appuis

Soit une pièce mécanique modélisée par une poutre, sur deux appuis et sollicitée par 3 glisseurs \vec{A} , \vec{B} et \vec{C} (Fig. 11).

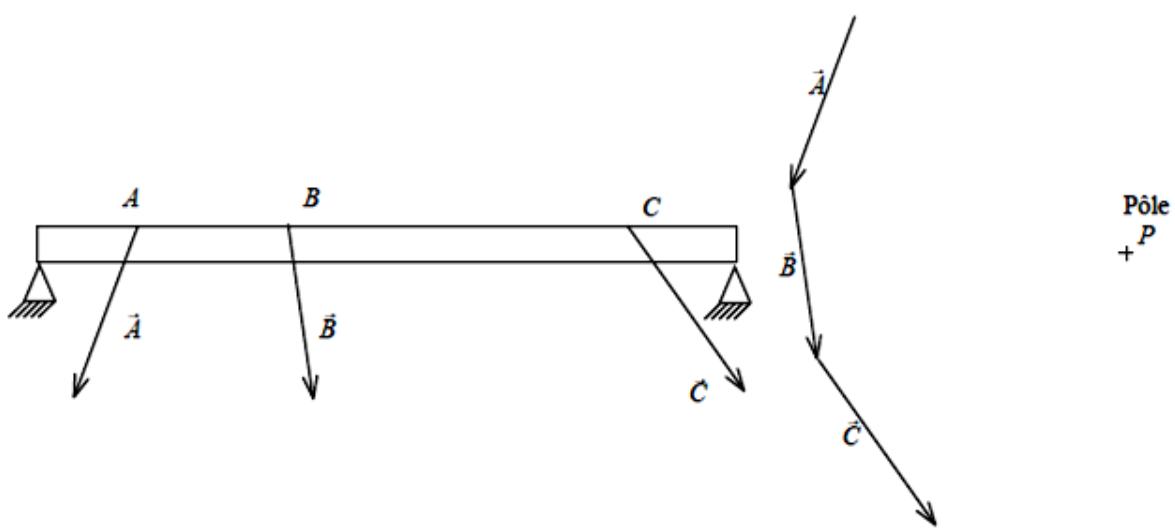
Type de données

3 glisseurs entièrement connus

Démarche

Déterminer la résultante à l'aide du dynamique et définir des rayons polaires. Tracer le funiculaire à partir du support d'un des glisseurs. Les côtés extrêmes du funiculaires ne sont pas confondus ; ils sont **sécants** en un point / du support (= axe central) de la résultante.

Echelle des forces : 1 mm \Leftrightarrow 10 daN



Cas 2 d'étude : L'action statiquement équivalente est un couple (Funiculaire ouvert et dynamique fermé)

Système proposé : Poutre sur deux appuis

Reprenez le cas précédent mais avec 3 glisseurs \vec{A} , \vec{B} et \vec{C} différents (Fig. 12).

Type de données

3 glisseurs entièrement connus

Démarche

Déterminer la résultante à l'aide du dynamique. On note que l'on tombe ici dans un **cas particulier** : le dynamique est

fermé ce qui se traduit par : $\vec{R}_{\bar{s} \rightarrow s} = \vec{0}$

Définir les rayons polaires (le premier et le dernier rayon polaire sont évidemment confondus). Tracer le funiculaire à partir d'un des supports de glisseur : on constate que les parallèles au premier et au dernier rayon polaire sont **parallèles mais non confondus (on distingue 0' et 3')**. Le funiculaire est donc ouvert soit : $\vec{M}_{\bar{s} \rightarrow s} \neq \vec{0}$ L'action statiquement équivalente est un couple $\vec{M}_{\bar{s} \rightarrow s}$ dont on peut déterminer la valeur à l'aide du croquis (utilisation du moment scalaire).

Echelle des forces : 1 mm \Leftrightarrow 10 daN

Echelle des longueurs : 1/10^{ème}

Résultat à noter

La somme de glisseurs coplanaires n'est pas toujours un glisseur. Elle est parfois, cas particulier, un couple.

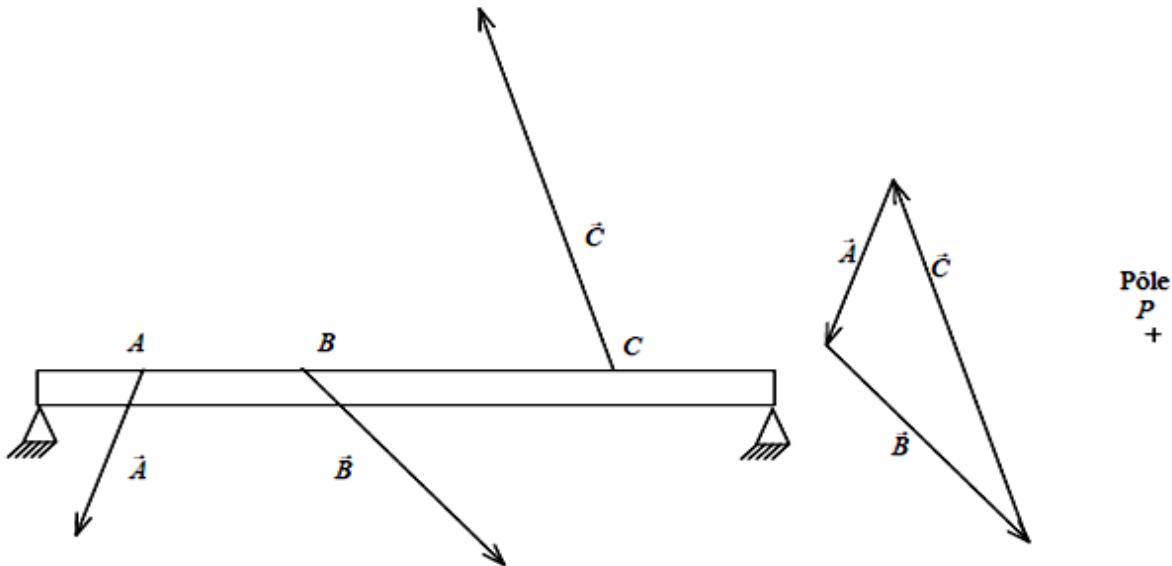


Fig. 12

Calcul du couple :

Exemple de résolution 1 : Suspension de VTT

Suspension arrière de VTT par « ressort pneumatique »

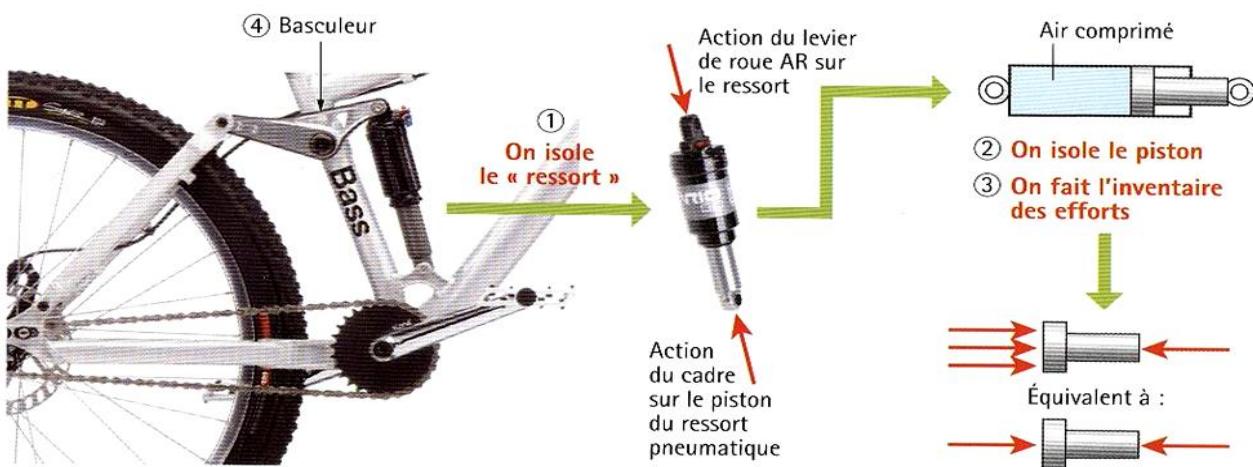
- Problème technique posé : déterminer la condition d'équilibre du ressort pneumatique afin de calculer ultérieurement la pression nécessaire de l'air comprimé dans le cylindre.

• Hypothèses :

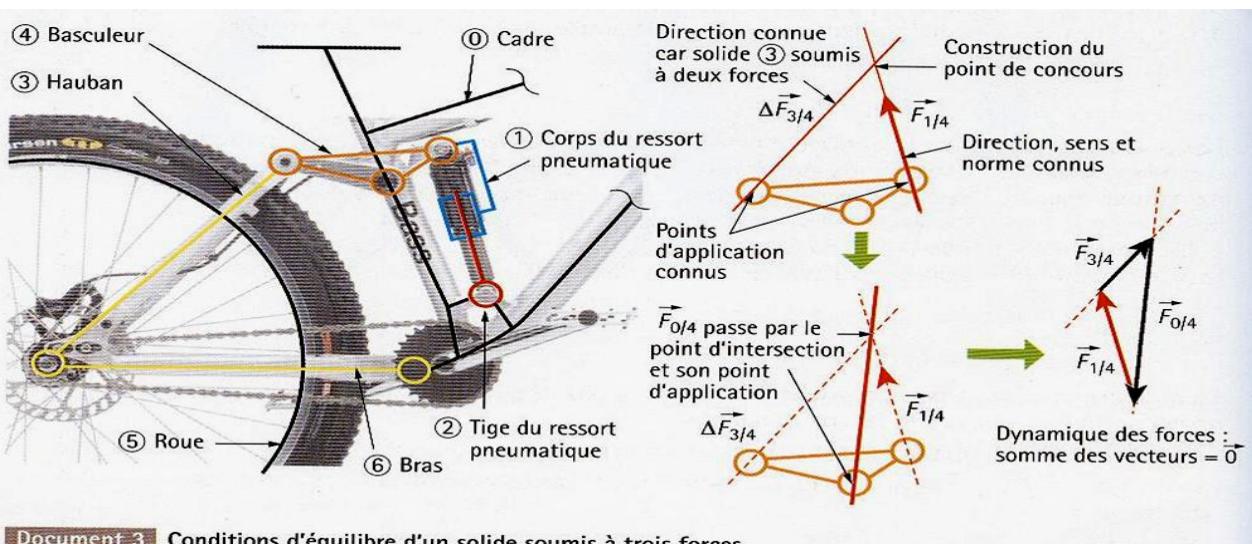
- l'action de l'air sur le piston est uniformément répartie et peut être représentée par une force (résultante des forces élémentaires agissant par unité de surface) ;
- les frottements sont négligés devant les autres efforts ;
- l'effet de la pesanteur est négligé devant les autres efforts.



En suivant la démarche du document 2, on conclut que le piston est soumis à deux forces.



Document 2 Détermination des conditions d'équilibre du piston de ressort pneumatique



Document 3 Conditions d'équilibre d'un solide soumis à trois forces

Exemple de résolution 2 : Sécateur électrique

Exemple : Sécateur électrique

Le système étudié est un sécateur électrique. Un moteur électrique, par l'intermédiaire d'un réducteur (non représenté) exerce un couple sur la vis.

On s'intéresse plus particulièrement au mécanisme qui permet d'actionner la lame du sécateur à partir du couple sur la vis.

Nous voulons savoir si l'effort développé par la biellette 3 est suffisant pour découper une branche de diamètre 20 mm.

Le but de l'étude est donc de **DETERMINER :**

- l'ensemble des efforts qui s'exercent sur les différentes pièces pour les dimensionner ultérieurement,
- **l'effort de coupe** exercé par la lame sur la branche pour couper une branche de diamètre 20 mm, connaissant l'effort exercé par l'écrou 4 sur les biellettes 3 et 3'.

Pour cela on suppose le système en équilibre (pas de mouvements).

Hypothèses :

1. Le poids des pièces sera négligé
2. Les liaisons seront supposées parfaites
3. Le problème est supposé plan
4. Les biellettes 3 et 3' seront assimilées à une seule biellette 3 dans le plan. L'effort de l'écrou sur cette biellette 3 a pour module $\|\vec{B}_{4 \rightarrow 3}\| = 500 \text{ N}$ et est dirigé de C vers B.
5. L'effort de coupe minimal pour une branche de diamètre 20 mm a pour module

$$\|\vec{E}_{I \rightarrow 2}\| = 300 \text{ N}$$

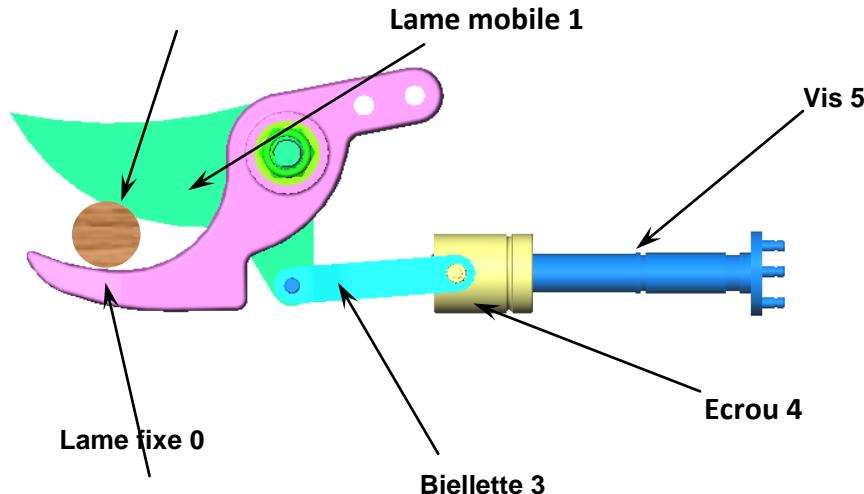
Branche à couper 2

Détail du fonctionnement :

Un moteur électrique entraîne la vis (5) en rotation. Le couple sur la vis génère un effort sur l'écrou (4)

(système vis-écrou)

L'écrou entraîne (par l'intermédiaire de la biellette) la lame mobile (1) en rotation autour de la lame fixe (0) (mouvement de



Mise en place du modèle d'étude :

Action de l'écrou 4 sur la biellette 3 en B
modélisée par le torseur : (valeurs en N)

$$\left\{ \mathcal{T}(3 \rightarrow 4) \right\}_B = \begin{Bmatrix} -292 & 0 \\ -67 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}$$

Positions des différents points
 (valeurs en mm)

$$\overrightarrow{OE} = 25 \hat{y}$$

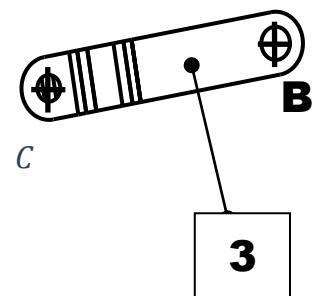
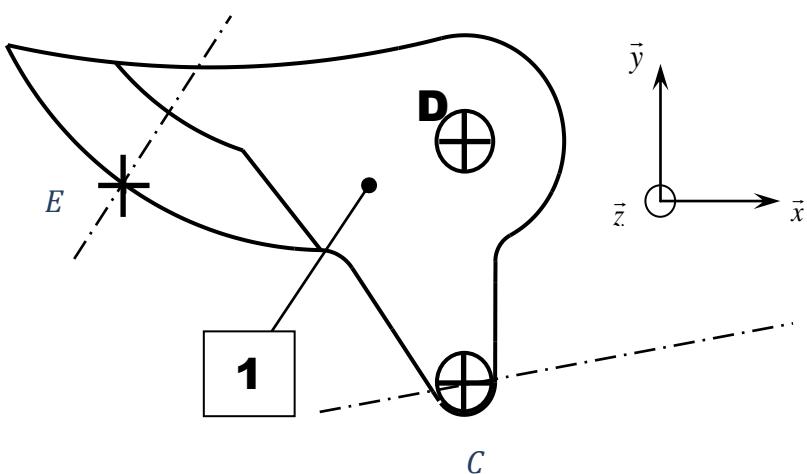
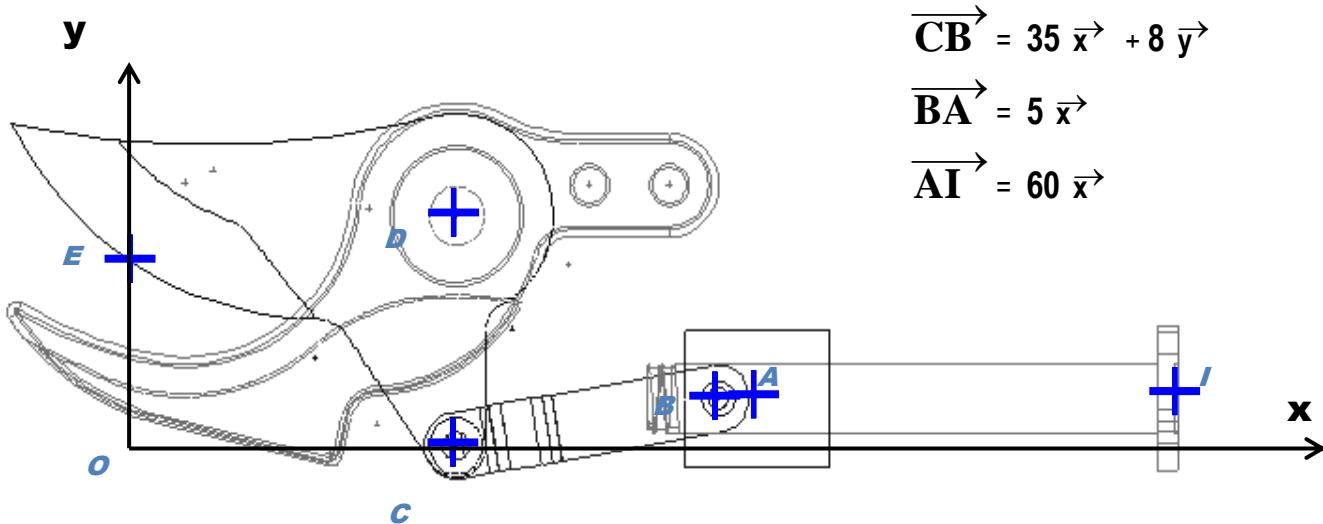
$$\overrightarrow{OC} = 45 \hat{x}$$

$$\overrightarrow{ED} = 45 \hat{x} + 10 \hat{y}$$

$$\overrightarrow{CB} = 35 \hat{x} + 8 \hat{y}$$

$$\overrightarrow{BA} = 5 \hat{x}$$

$$\overrightarrow{AI} = 60 \hat{x}$$



NOTIONS DE TORSEURS

1 – DÉFINITION D'UN TORSEUR :

- Soit (E) l'espace affine à trois dimensions et (E) l'espace vectoriel associé. Un torseur $\{T\}$ est l'ensemble défini dans ces deux espaces :

- d'un vecteur noté \vec{R} appelé *résultante du torseur* $\{T\}$
- d'un champ vectoriel noté \vec{M}_A et vérifiant la relation :
$$\forall A, \forall B \quad \vec{M}_B = \vec{M}_A + \vec{BA} \wedge \vec{R}$$

\vec{M}_A est appelé *moment au point A* du torseur $\{T\}$.

- \vec{R} et \vec{M}_A sont appelés *éléments de réduction au point A* du torseur.

- La notation utilisée pour exprimer le torseur $\{T\}$, défini au point A, est : $\{\tau\}_A = \left\{ \begin{array}{c} \vec{R} \\ \vec{M}_A \end{array} \right\}$

Remarque : Expression d'un torseur dans un référentiel R :

Soit un référentiel $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ de l'espace vectoriel (E) ayant pour base $B(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$.

Les éléments de réduction \vec{R} et \vec{M}_A du torseur $\{T\}$ peuvent s'exprimer par rapport référentiel R par :

$$\vec{R} = X\vec{x} + Y\vec{y} + Z\vec{z}$$

$$\vec{M}_A = L\vec{x} + M\vec{y} + N\vec{z}$$

La notation utilisée pour exprimer le torseur $\{T\}$ dans le référentiel R est alors :

$$\{\tau\}_R = \left\{ \begin{array}{c} \vec{R} \\ \vec{M}_A \end{array} \right\}_R = \left\{ \begin{array}{c|c} X & L \\ Y & M \\ Z & N \end{array} \right\}_R$$

2 – CHANGEMENT DE CENTRE DE RÉDUCTION :

- Soit le torseur $\{T\}$ ayant pour éléments de réduction au point A : $\{\tau\}_A = \left\{ \begin{array}{c} \vec{R} \\ \vec{M}_A \end{array} \right\}$

Par définition, la réduction en un point quelconque B du torseur $\{T\}$ a pour expression :

$$\{\tau\}_B = \left\{ \begin{array}{c} \vec{R} \\ \vec{M}_B = \vec{M}_A + \vec{BA} \wedge \vec{R} \end{array} \right\}$$

3 – ÉGALITÉ DE DEUX TORSEURS :

Deux torseurs $\{T\}$ et $\{T'\}$ sont égaux s'ils ont même éléments de réduction en un même point.

Soient : $\{\tau\}_A = \left\{ \begin{array}{c} \vec{R} \\ \vec{M}_A \end{array} \right\}$ et $\{\tau'\}_A = \left\{ \begin{array}{c} \vec{R}' \\ \vec{M}'_A \end{array} \right\}$ alors $\{T\} = \{T'\}$ si $\vec{R} = \vec{R}'$ et $\vec{M}_A = \vec{M}'_A$.

4 – TORSEUR ASSOCIÉ A UN ENSEMBLE DE GLISSEURS :

4.1 – Ensemble de glisseurs finis :

Un ensemble fini de n glisseurs ($\overrightarrow{P_i}, \overrightarrow{V_i}$) répond à la définition du torseur (voir *champs de vecteurs § 4*) :

$$\left\{ T(\overrightarrow{V_i}) \right\} = \begin{cases} \overrightarrow{R} = \sum_{i=1}^n \overrightarrow{V_i} \\ \overrightarrow{M_A} = \sum_{i=1}^n \overrightarrow{AP} \wedge \overrightarrow{V_i} \end{cases} \quad A$$

4.2 – Ensemble infini de glisseurs :

Un ensemble infini de glisseurs ($P, \overrightarrow{F_{(P)}}$) répond aussi à la définition du torseur (*champs de vecteurs § 4*) :

$$\left\{ T(\overrightarrow{F_{(P)}}) \right\} = \begin{cases} \overrightarrow{R} = \int_{P \in E} \overrightarrow{F_{(P)}} d\mu \\ \overrightarrow{M_A} = \int_{P \in E} \overrightarrow{AP} \wedge \overrightarrow{F_{(P)}} d\mu \end{cases} \quad A$$

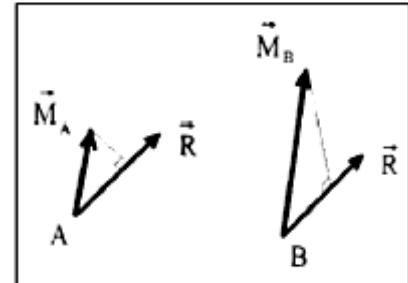
5 – INVARIANTS DU TORSEUR :

Entre deux points A et B de l'espace, deux éléments du torseur $\{T\}$ sont conservés, qui constituent les *deux invariants* du torseur :

- *premier invariant* : la résultante \overrightarrow{R} du torseur ;
- *second invariant* : la projection du moment du torseur sur sa résultante

En effet : $\forall A, \forall B \quad \overrightarrow{M_B} = \overrightarrow{M_A} + \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{R}$

donc : $\forall A, \forall B \quad \boxed{\overrightarrow{R} \cdot \overrightarrow{M_B} = \overrightarrow{R} \cdot \overrightarrow{M_A}}$



6 – POINT CENTRAL, AXE CENTRAL, MOMENT CENTRAL D'UN TORSEUR :

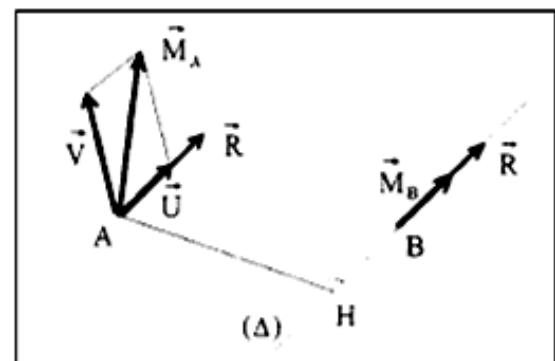
6.1 – Point central :

Un point central est un point où le moment du torseur à même direction que la résultante.

6.2 – Axe central :

L'axe central d'un torseur est l'ensemble des points centraux. L'ensemble des points centraux se situent sur une droite ((Δ)), appelée axe central du torseur, de même direction que la résultante et passant par le point H tel que :

$$\boxed{\overrightarrow{AH} = \frac{\overrightarrow{R} \wedge \overrightarrow{M_A}}{\overrightarrow{R}^2}}$$



6.3 – Moment central :

Le moment central est le moment du torseur en un point de l'axe central.

– Le moment central d'un torseur est le même en tout point de l'axe central.

– La norme du moment central est minimum pour les points centraux. Par suite, si le moment d'un torseur est nul en un point, ce point appartient à l'axe central de ce torseur.

7 – OPÉRATIONS SUR LES TORSEURS :

7.1 – Addition :

Soient deux torseurs $\{T_1\}$ et $\{T_2\}$ écrits au même point A :

$$\text{Soient : } \{\tau\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{R}_1 \\ M_A^1 \end{array} \right\} \text{ et } \{\tau'\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{R}_2 \\ M_A^2 \end{array} \right\}$$

Le torseur $\{T\}$, somme des deux torseurs $\{T_1\}$ et $\{T_2\}$, noté $\{T\} = \{T_1\} + \{T_2\}$, est le torseur tel que ses éléments de réduction au point A s'expriment par :

$$\{T\} = \{T_1\} + \{T_2\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{R} = \vec{R}_1 + \vec{R}_2 \\ M_A = M_A^1 + M_A^2 \end{array} \right\}$$

Remarque :

Pour additionner deux torseurs, il faut au préalable les écrire au même point.

7.2 – Multiplication par un scalaire :

$$\text{Soit } \lambda \in R \text{ et } \{\tau\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{R} \\ M_A \end{array} \right\} \text{ donc } \{\lambda \tau\} = \left\{ \begin{array}{l} \lambda \vec{R} \\ \lambda M_A \end{array} \right\}$$

8 – TORSEURS PARTICULIERS :

8.1 – Torseur nul :

Le *torseur nul* noté $\{0\}$ est un torseur dont les éléments de réduction en un point quelconque A sont nuls :

$$\{\tau\} = \{0\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \vec{R} = \vec{0} \\ M_A = \vec{0} \end{array} \right\}$$

8.2 – Torseur couple :

Un *torseur couple* $\{C\}$ est un torseur dont la résultante est nulle : $\{C\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{R} = \vec{0} \\ M_A = \vec{0} \end{array} \right\}$ avec $\vec{M}_A \neq \vec{0}$

8.3 – Torseur à résultante :

Un *torseur à résultante* est un torseur dont le moment central est nul.

$$\{T\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{R} \\ \vec{0} \end{array} \right\} \text{ avec } \vec{R} \neq \vec{0} \text{ et } B \in \Delta: \text{axe central du torseur}$$

Propriétés :

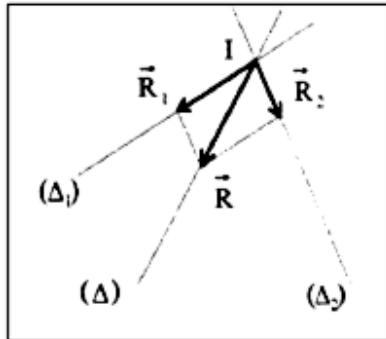
- Le torseur $\{\tau\}_A = \left\{ \begin{array}{c} \vec{R} \\ \vec{M}_A \end{array} \right\}$ avec $\vec{R} \neq \vec{0}$ et $\vec{M}_A \neq \vec{0}$

est un torseur à résultante si ces deux éléments de réduction sont orthogonaux.

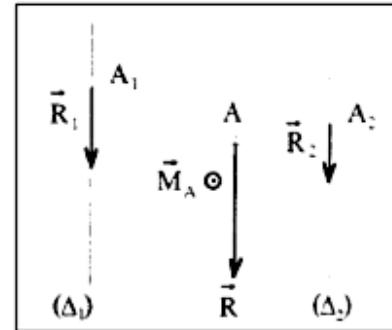
• La somme de deux torseurs à résultante, dont les axes centraux sont concourants, est un torseur à résultante dont l'axe central passe par le point d'intersection des axes centraux des deux torseurs.

• La somme de deux torseurs à résultante dont les axes centraux sont parallèles, est un torseur à résultante dont l'axe central est parallèle aux axes centraux des deux torseurs.

torseurs à résultante à axes concourants



torseurs à résultante à axes parallèles



9 – PRODUIT OU MOMENT DE DEUX TORSEURS :

Soient deux torseurs $\{T_1\}$ et $\{T_2\}$ écrits au même point A :

$$\text{Soient : } \{\tau\}_A = \left\{ \begin{array}{c} \vec{R}_1 \\ \vec{M}_{A^1} \end{array} \right\} \text{ et } \{\tau'\}_A = \left\{ \begin{array}{c} \vec{R}_2 \\ \vec{M}_{A^2} \end{array} \right\}$$

Le torseur $\{T\}$, produit des deux torseurs $\{T_1\}$ et $\{T_2\}$, noté $\{T\} = \{T_1\} \otimes \{T_2\}$, est le nombre réel tel que ses éléments de réduction au point A s'expriment par :

$$\{\tau\}_A = \{\tau_1\}_A \otimes \{\tau_2\}_A = \vec{R}_1 \cdot \vec{M}_{A^2} + \vec{R}_2 \cdot \vec{M}_{A^1}$$

Le produit de deux torseurs est indépendant du point choisi pour exprimer les torseurs.

Remarque :

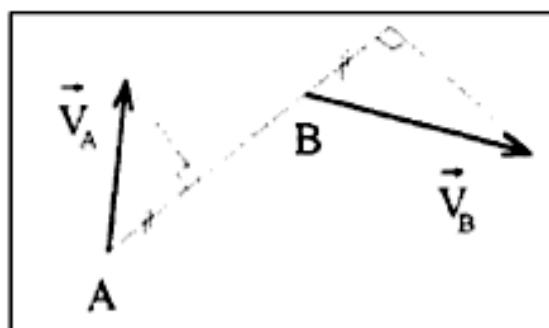
Cette notion de produit de torseur sert à exprimer la puissance d'une action mécanique extérieure à un solide.

10 – CHAMPS ÉQUIPROJECTIF DE VECTEURS :

10.1 – Définition :

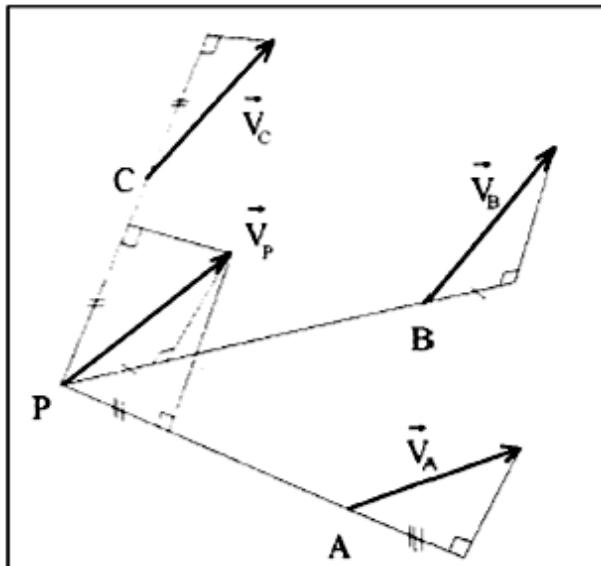
Un champ de vecteurs \vec{V} est équiprojectif si :

$$\forall A, \forall B \quad \overrightarrow{AB} \cdot \vec{V}_A = \overrightarrow{AB} \cdot \vec{V}_B$$



10.2 – Propriétés :

- Si \vec{V}_1 et \vec{V}_2 sont deux champs de vecteurs équiprojectifs, le champ de vecteurs $\lambda_1 \vec{V}_1 + \lambda_2 \vec{V}_2$ est équiprojectif.
- Si un champ de vecteurs équiprojectif est connu en trois points A, B, C , non alignés de l'espace, il est connu en tout point P .



10.3 – Théorème :

Le champ des moments d'un torseur est équiprojectif. On a donc la relation :

$$\forall A, \forall B \quad \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{M}_A = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{M}_B$$

Conséquence : Le champ des vecteurs vitesse d'un solide est nécessairement équiprojectif pour respecter l'indéformabilité du solide. Par conséquent, il est représentable par un torseur, dont le vecteur moment est le vecteur vitesse du point considéré. On montre que la résultante du torseur est le vecteur rotation de ce solide.

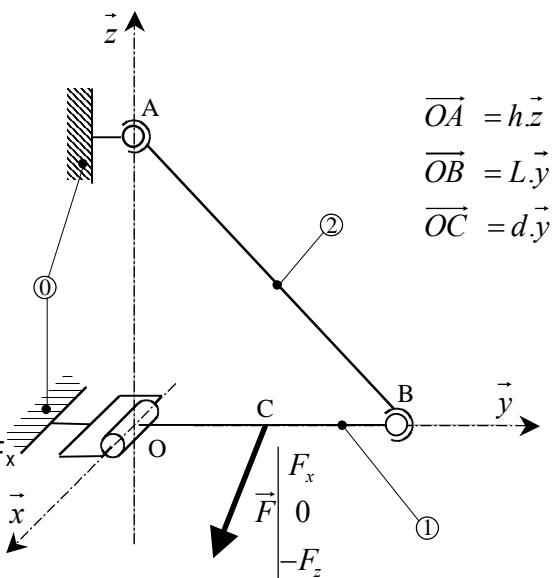
APPLICATIONS

1 Etude d'un portique

Nous souhaitons étudier l'équilibre du **portique** représenté ci-contre. Nous émettrons les hypothèses suivantes :

- les liaisons sont supposées parfaites.
- Nous négligerons le poids du tirant 2 par rapport aux autres efforts mis en jeu.

Nous souhaitons exprimer les actions mécaniques dans les liaisons centrées en O, A et B en fonction des paramètres d , h , L , F_x et F_z .



*Si nous nous limitons à l'étude de la géométrie du portique, nous constatons que le plan (O, \vec{y}, \vec{z}) est un plan de symétrie pour le mécanisme. Mais lorsque nous examinons l'effort \vec{F} qui s'applique au point C nous constatons que cet effort n'est pas intégralement porté par le plan (O, \vec{y}, \vec{z}) . Ce problème ne peut donc pas être traité dans le plan. C'est un véritable **problème 3D**... que nous traiterons avec l'outil « Torseur ».*

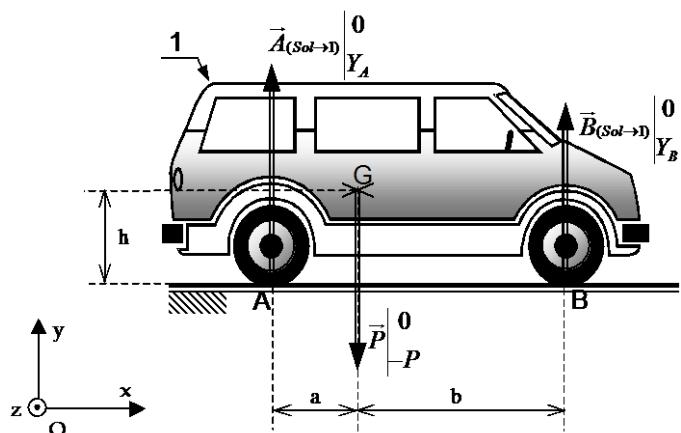
2 - Equilibre d'un véhicule sur un sol horizontal.

1°) Réaliser le graphe des interactions

2°) Isoler l'ensemble qui permettra de déterminer les actions en A et B

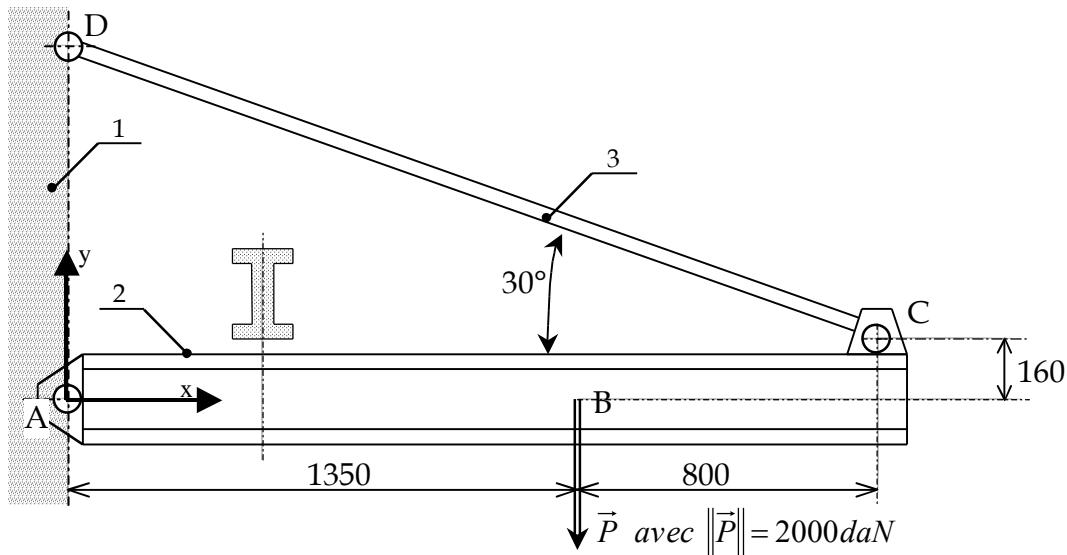
3°) Appliquer PFS et écrire les équations qui en découlent

4°) Résoudre les équations puis déterminer les actions en A et B



3 – Potence à tirant

Une potence 2 est supportée par un mur 1 et par un tirant 3. Sur cette potence, en B, se situe un palan dont le poids est connu. Les points A, C et D sont des articulations, modélisées par des pivots parfaits. L'ensemble est supposé en équilibre. On néglige les poids de la potence 2 et du tirant 3 par rapport aux autres efforts mis en jeu.



Déterminer les actions en A, C et D

Préciser la démarche suivie et la justifier