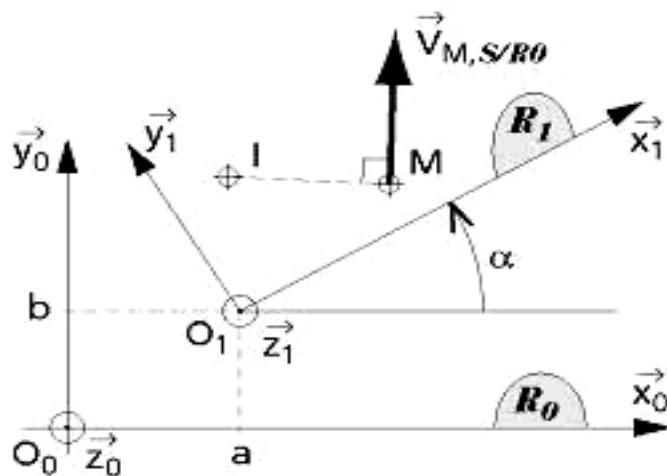
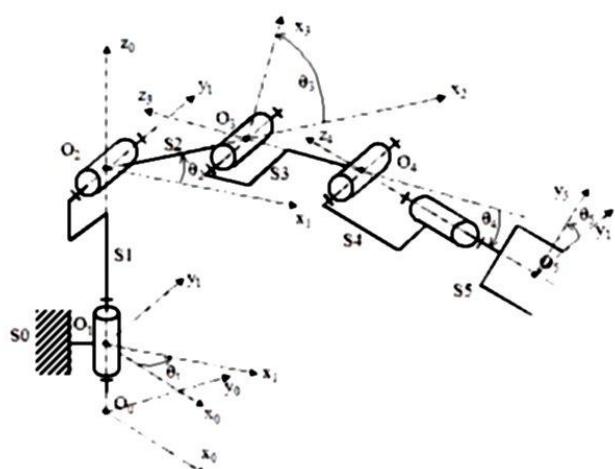
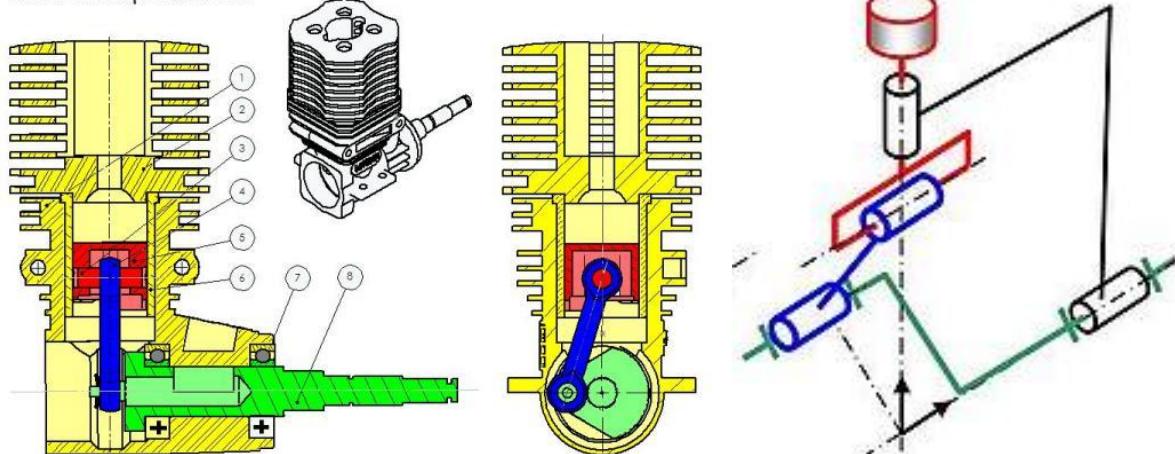


Mécanique du solide rigide

Comportement cinématique des systèmes mécaniques



Moteur Thermique 2,5cm³ HPI



Sommaire

Cinématique - Généralités	3
Paramétrage des mécanismes	20
Vecteur position, vitesse et accélération d'un point d'un solide	28
Cinématique du solide en translation ou en rotation	32
Composition des mouvements	47
Mouvement plan sur plan	75

CINÉMATIQUE - GENERALITÉS

Objectifs :

- Identifier les notions de solide, de repère de référence, de mouvement absolu ou relatif ;
- Identifier les principaux mouvements des solides
- Identifier la notion de trajectoire ;

La cinématique étudie le mouvement des corps en s'intéressant à la position, la vitesse, l'accélération et la trajectoire des solides étudiés.

1 - Solide ou repère de référence – Référentiel :

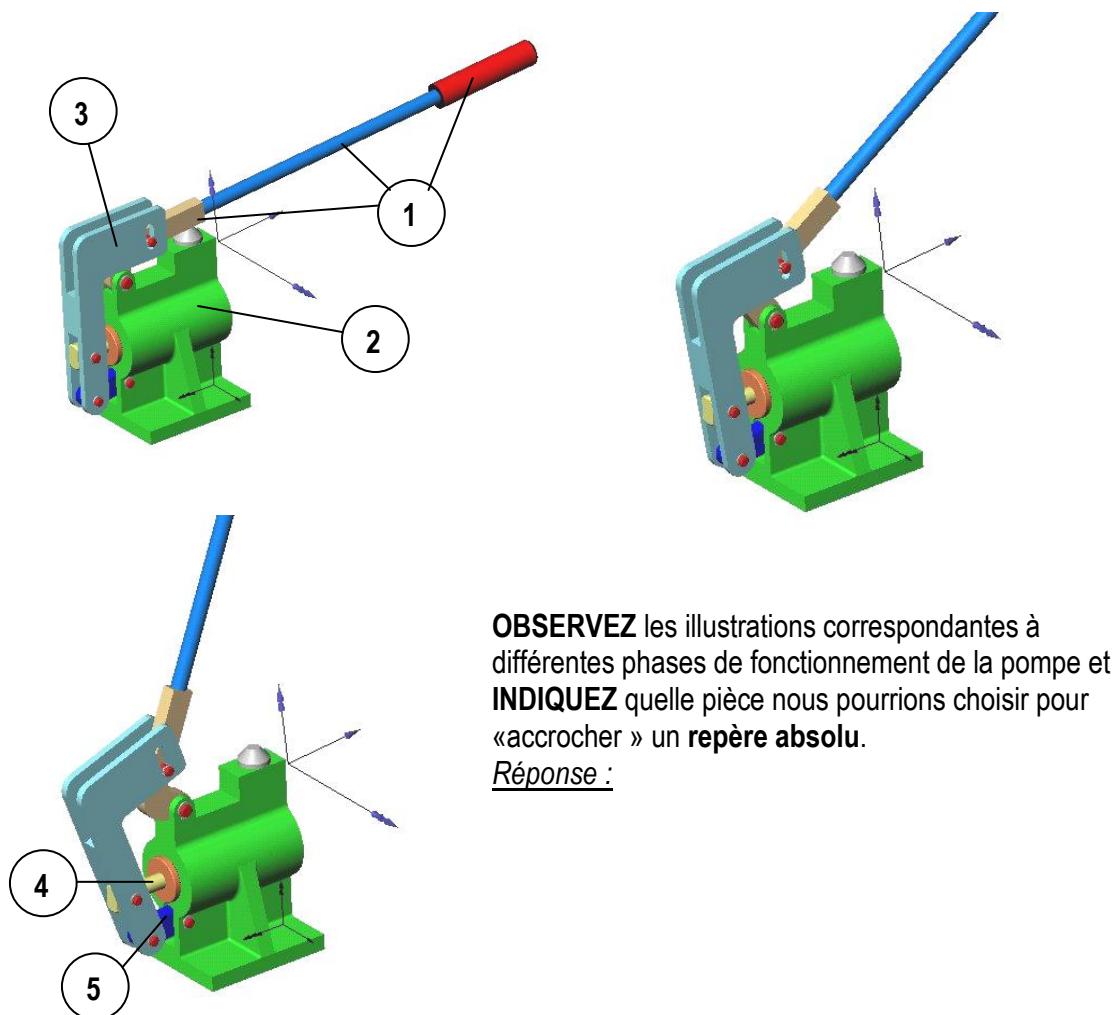
1 – 1 Repère et solide de référence :

En cinématique, le mouvement d'un solide peut être défini par rapport à un autre solide choisi comme référence et appelé solide de référence.

Il existe 2 types de repères de référence :

- le **repère absolu** qui est lié à une **pièce fixe** d'un mécanisme ;
- le **repère relatif** qui est lié à un **pièce pouvant être mobile** dans un mécanisme.

Exemple : Pompe à main



1 – 2 Repère de temps :

En mécanique, le temps est considéré comme absolu et uniforme. (chaque fragment de temps est identique au suivant).

L'unité de base légale du temps est la **seconde (s)**.

1 – 3 Système de référence ou référentiel :

REFERENTIEL = REPERE DE REFERENCE + REPERE DE TEMPS

Repère de référence :

La position d'un solide en mouvement est repérée en permanence par rapport à un même point.

Repère de temps :

Dès le début de la mise en mouvement du solide, l'écoulement du temps est mesuré au cours du mouvement du solide.

2 - Mouvements absolu et relatif :

2 – 1 Mouvement absolu :

Le mouvement d'un solide est dit **absolu** s'il est défini ou décrit par rapport à un référentiel absolu.

2 – 2 Mouvement relatif :

Le mouvement d'un solide est dit **relatif** s'il est défini par rapport à un référentiel relatif.

2 – 3 Exemples :

- Dans l'exemple de la pompe à main, **CITEZ** les 3 solides qui réalisent un **mouvement absolu** (par rapport au repère absolu que vous avez défini)

Réponse :

CITEZ 3 mouvements relatifs (réalisés entre les pièces mobiles de la pompe)

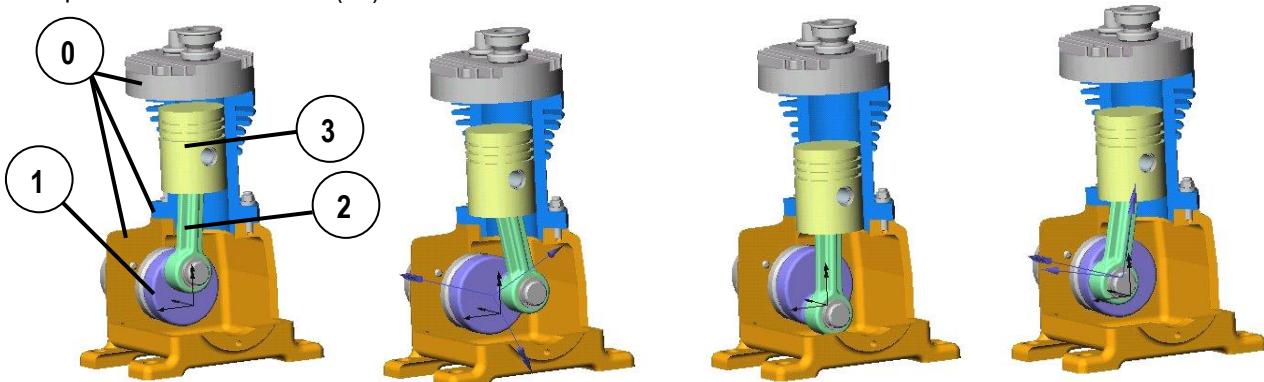
Réponse :

Mouvement relatif 1 : entre la pièce n° et la pièce n°

Mouvement relatif 2 : entre la pièce n° et la pièce n°

Mouvement relatif 3 : entre la pièce n° et la pièce n°

- **Compresseur à piston** : **OBSERVEZ** les différentes positions du piston (3) au cours d'une rotation complète de l'arbre moteur (1)



DONNEZ le repère (ou numéro) de la pièce (fixe) que l'on peut choisir pour définir le repère absolu.

Réponse :

CITEZ 2 mouvements absolus (réalisés entre les pièces fixes du compresseur)

Réponse :

Mouvement absolu 1 : entre la pièce n° et la pièce n°

Mouvement absolu 2 : entre la pièce n° et la pièce n°

CITEZ 2 mouvements relatifs (réalisés entre les pièces mobiles du compresseur)

Réponse :

Mouvement relatif 1 : entre la pièce n° et la pièce n°

Mouvement relatif 2 : entre la pièce n° et la pièce n°

3 – Principaux mouvements plans des solides :

Un solide exécute un mouvement plan lorsque tous les points qui le constituent se déplacent dans des plans parallèles entre eux.

D'autre part, nous dirons qu'un mécanisme est plan, lorsque tous les points des solides qui le constituent se déplacent dans des plans parallèles entre eux.

Comment reconnaître un mécanisme plan ?

- Il ne doit pas y avoir de solide animé d'un mouvement hélicoïdal (le mouvement hélicoïdal n'est pas un mouvement plan) ;
- Tous les axes des liaisons pivot présentes dans le mécanisme doivent être parallèles et perpendiculaires au plan de déplacement des solides.

Exemples :

Parmi les mécanismes ci-dessous, **INDIQUEZ** ceux qui sont plans et ceux qui ne le sont pas.

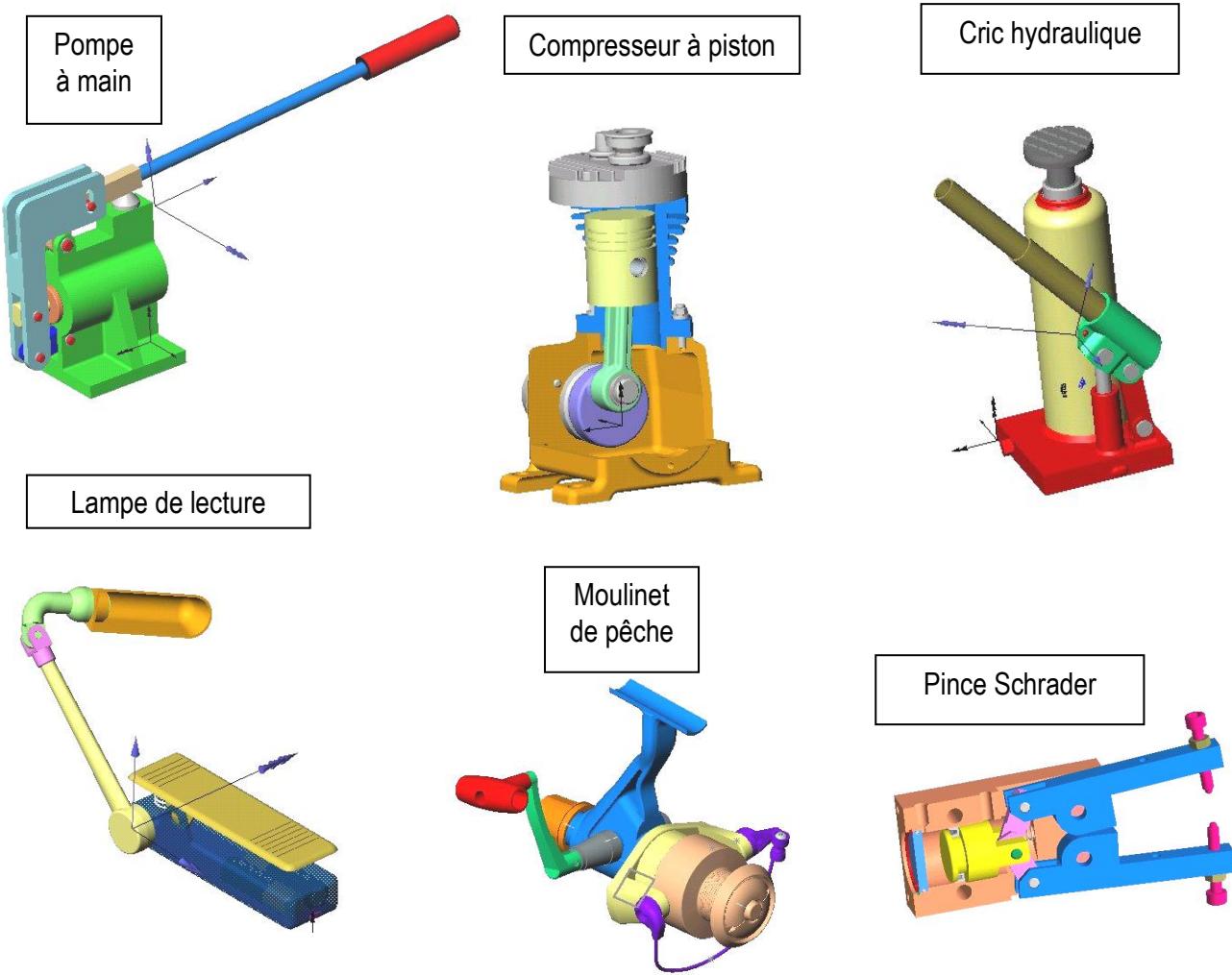


Tableau des principaux mouvements plans des solides :

Mouvements	Propriétés	Exemple	Caractéristiques fondamentales
Translation rectiligne	<p>Position initiale Position finale</p>	Coulisseau 	Le solide reste parallèle à lui-même : $A_1 B_1 // A_0 B_0$ $A_0 A_1 = B_0 B_1$ Les trajectoires de chaque point sont des droites .
Translation curviligne	<p>Position initiale Position finale</p>	Essuie-glace d'autobus 	Le solide reste parallèle à lui-même : $A_1 B_1 // A_0 B_0$ Les courbes ($A_0 A_1$) et ($B_0 B_1$) sont identiques . Les trajectoires de chaque point sont des courbes quelconques . Ces courbes peuvent être : - des arcs de cercles (essuie-glace d'autobus); - des portions d'ellipses; ou toute autre courbe de forme quelconque.
Rotation (d'axe fixe)	<p>Arc de cercle de centre A $A = A_1 = A_0$</p>	Porte 	Les points du solide décrivent des cercles centrés sur l'axe de rotation
Mouvement plan général	<p>Translation Rotation de centre B_1</p>	Bielle de moteur 	Tous les points du solide se déplacent dans des plans parallèles entre eux au cours du mouvement

Exemple 1 : Pompe à main

OBSERVEZ les différentes positions du mécanisme ci-contre.

INDIQUEZ la nature des liaisons aux points A, B, C, D :

Point A :

Point B :

Point C :

Point D :

INDIQUEZ la nature des mouvements ci-dessous : (*mouvement de translation, mouvement de rotation, mouvement plan quelconque*)

- Mvt 1 / 2 :

- Mvt 3 / 2 :

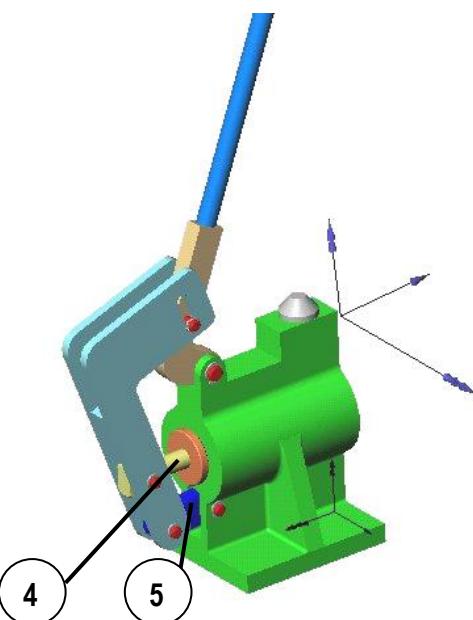
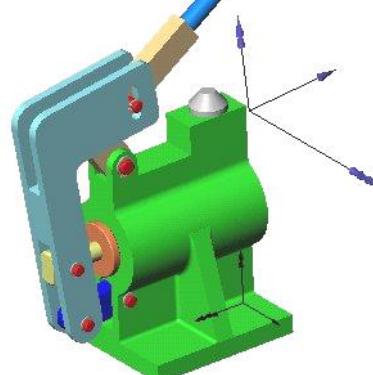
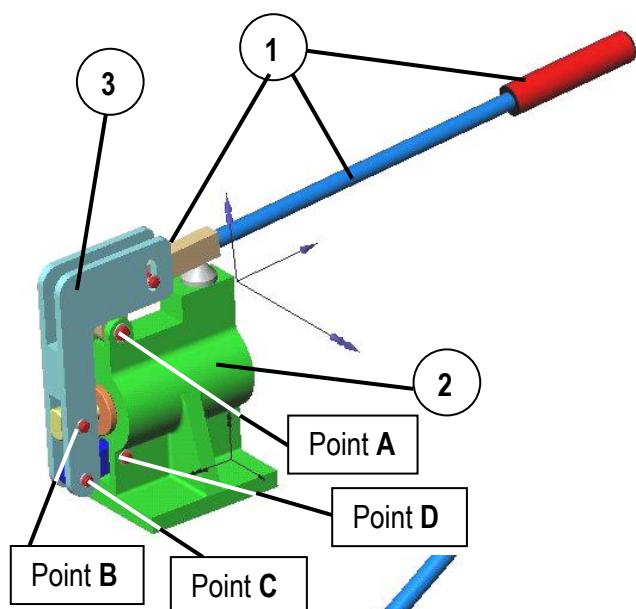
- Mvt 4 / 2 :

- Mvt 5 / 2 :

- Mvt 3 / 4 :

- Mvt 5 / 3 :

- Mvt 3 / 2 :



Exemple 2 : Pince schrader

OBSERVEZ les différentes positions du mécanisme ci-contre.

INDIQUEZ la nature des liaisons aux points A, B, C :

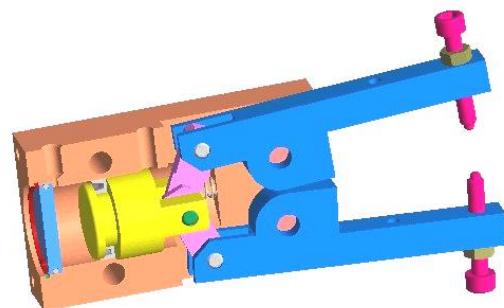
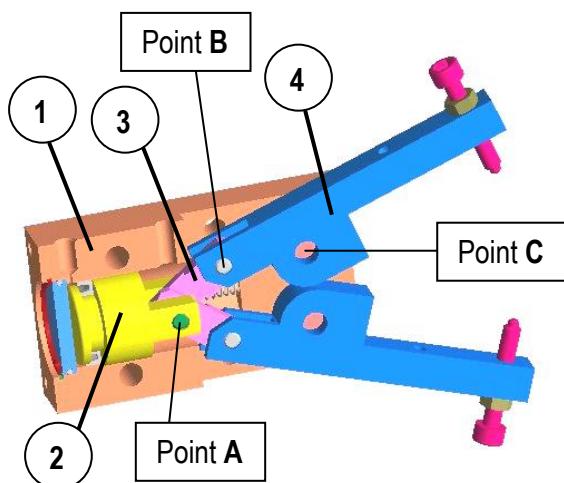
Point A :

Point B :

Point C :

INDIQUEZ la nature des mouvements ci-dessous : (*mouvement de translation, mouvement de rotation, mouvement plan quelconque*)

- Mvt 2 / 1 :
-
- Mvt 3 / 2 :
-
- Mvt 4 / 3 :
-
- Mvt 4 / 1 :
-



Exemple 3 : Pompe à pied

OBSERVEZ les différentes positions du mécanisme ci-contre.

INDIQUEZ la nature des liaisons aux points

A, B, C :

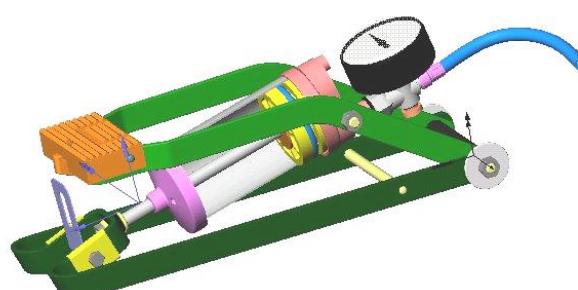
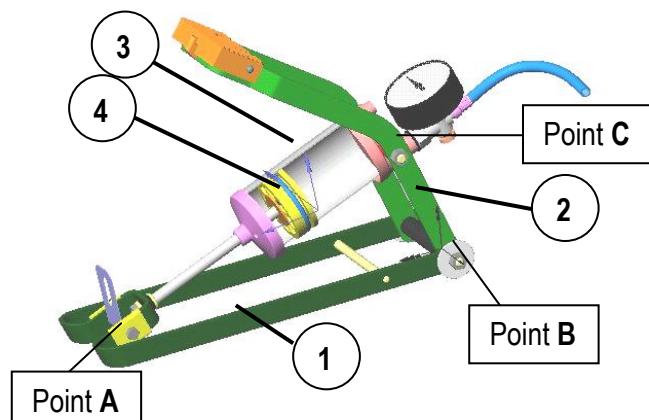
Point A :

Point B :

Point C :

INDIQUEZ la nature des mouvements ci-dessous : (*mouvement de translation, mouvement de rotation, mouvement plan quelconque*)

- Mvt 2 / 1 :
-
- Mvt 3 / 2 :
-
- Mvt 4 / 3 :
-
- Mvt 4 / 1 :



4 – Trajectoire d'un point :

La **trajectoire d'un point M d'un solide (S)** en mouvement, est la **courbe géométrique décrite** par ce point au cours du mouvement du solide (S).

Remarque :

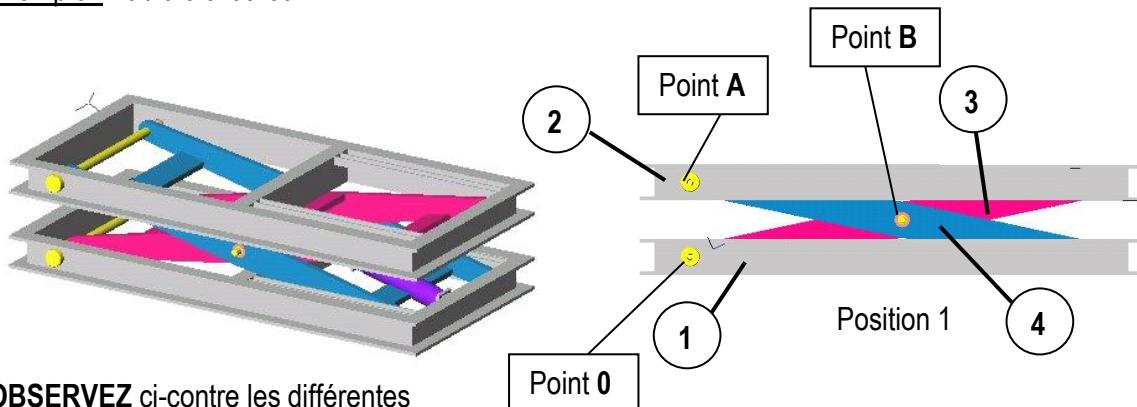
On considère toujours la **trajectoire d'un point M appartenant à un solide (S) en mouvement par rapport à un autre solide (S₀)** que l'on note $T_{M \in S / S_0}$

De la même façon, **ECRIVEZ** ci-dessous la notation de la trajectoire d'un **point A appartenant à un solide (1)** par rapport à un **solide (0)**

Réponse :

La **trajectoire d'un point M d'un solide (S)** en mouvement correspond donc aux **positions successives** de ce point au cours du mouvement du solide (S).

Exemple : Table élévatrice



OBSERVEZ ci-contre les différentes positions de la table élévatrice .

INDIQUEZ la nature des liaisons aux points

O, A, B :

Point O :

Point A :

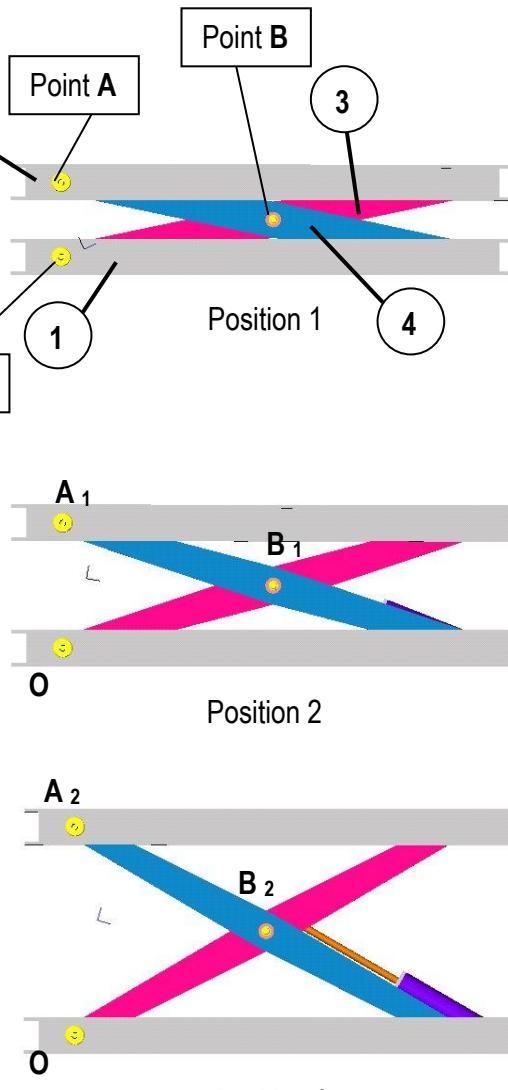
Point B :

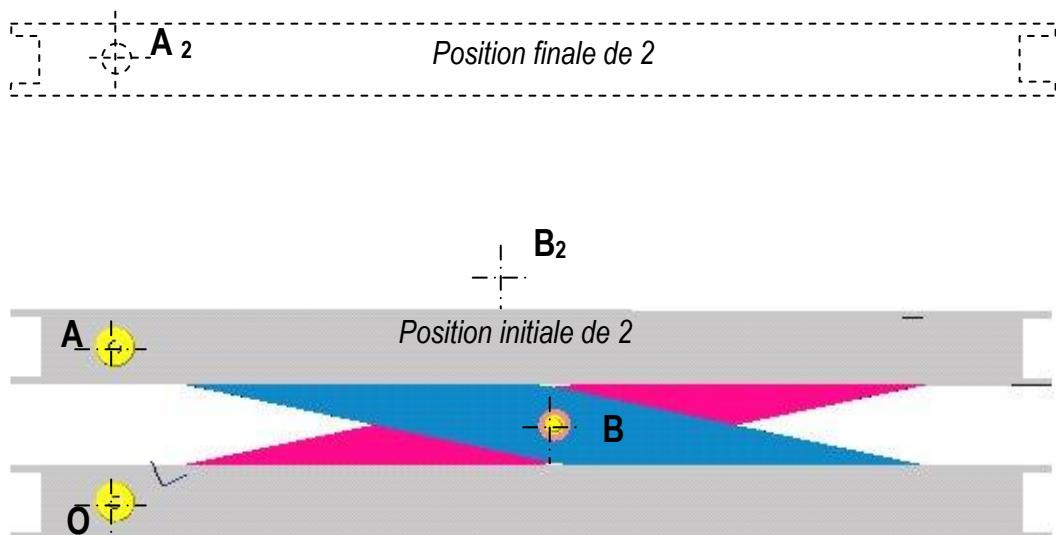
INDIQUEZ la nature des mouvements ci-dessous : (*mouvement de translation, mouvement de rotation, mouvement plan quelconque*)

- Mvt 2 / 1 :
-
- Mvt 3 / 1 :
-
- Mvt 4 / 1 :
-

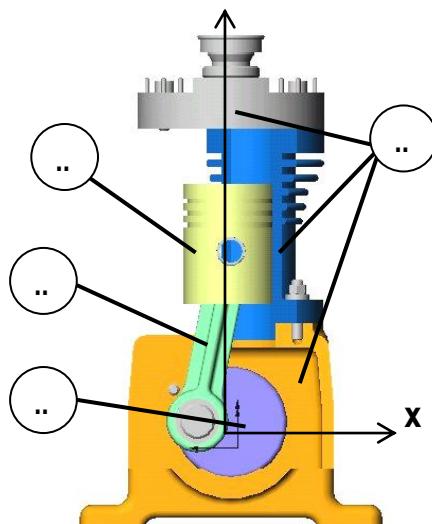
D'après l'observation des différentes positions de la table élévatrice, **TRACEZ** sur le dessin ci-dessous les trajectoires :

- du point A appartenant à 2 par rapport à 1 : $T_{A \in 2 / 1}$
- du point B appartenant à 3 par rapport à 1 : $T_{B \in 3 / 1}$





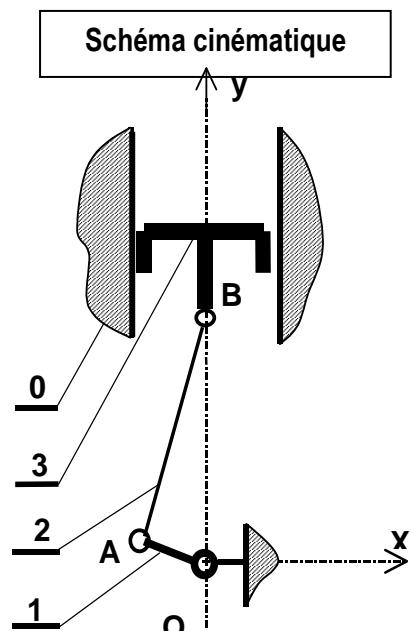
5 – Analyse des mouvements dans un mécanisme : Compresseur à piston :



Sur l'illustration ci-contre du compresseur, **COMPLETEZ** les repères de chacune des pièces (correspondants au schéma cinématique)

Données :

- $d(O,A) = 24 \text{ mm}$
- $\omega_{1/0} = +100 \text{ rad/s}$
- bâti : 0
- manivelle : 1
- bielle : 2
- piston : 3



5 – 1 Analyse des liaisons, des mouvements et des trajectoires :

LIAISONS	TYPES	MOUVEMENTS	TRAJECTOIRES
1/0			$\tau_{A \in 1/0} :$
3/0			$\tau_{B \in 3/0} :$
2/1			$\tau_{A \in 2/1} :$
3/2			$\tau_{B \in 3/2} :$
2/0			$\tau_{A \in 2/0} :$ $\tau_{B \in 2/0} :$

Remarques :

- 1) La méthode ci-dessus sera utilisée pour chaque mécanisme étudié.
- 2) Le mouvement recueilli dans le mécanisme ne correspond pas toujours aux degrés de liberté (voir liaison pivot-glissant ci-dessus).
- 3) Dans certains cas, le type de la liaison (liaison ponctuelle, par exemple) ne permet pas de conclure sur la nature du mouvement et de la trajectoire. On recueillera alors un mouvement complexe (ce ne sera ni translation ni une rotation par rapport à un axe).
- 4) Si il n'existe pas de liaison entre deux solides, on ne peut pas conclure sur la nature du mouvement et de la trajectoire. On recueillera alors un mouvement complexe (ce ne sera ni translation ni une rotation par rapport à un axe).

5 – 2 Construction d'une position quelconque du mécanisme :

La nouvelle position de la manivelle (1) est horizontale.

En DEDUIRE la position de la bielle (2) et du piston (3).

Hypothèse: les longueurs des pièces (manivelle et bielle) sont constantes (solides indéformables).

Méthode:

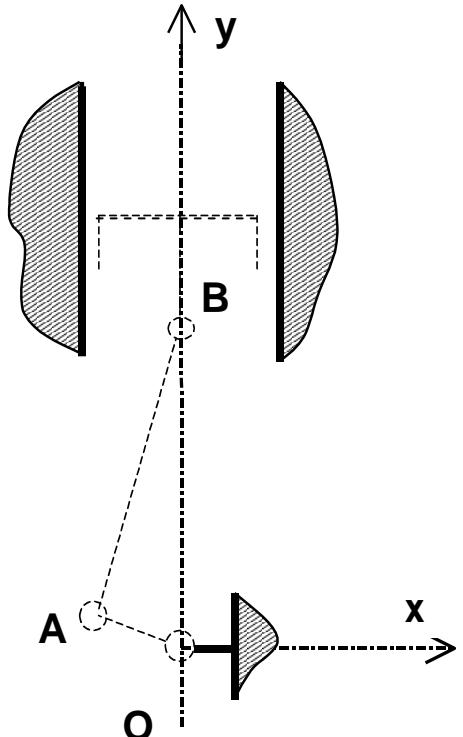
Tracer $\tau A \in 1/0$ en rouge.

En déduire la nouvelle position de A

Tracer $\tau B \in 3/0$ en vert.

En déduire la nouvelle position de B.

Sur cette même figure, **EFFECTUEZ** un tracé pour DETERMINER graphiquement la **course du piston (3)** (Attention à l'échelle !)



6 - Etude du solide en translation rectiligne

La position du solide est définie par la distance (ou abscisse) x , mesurée à partir du point O pris comme référence ou origine.

● Vitesse moyenne V_{moy} :

La vitesse moyenne d'un point A entre les instants t_0 et t_1 est égale à la distance parcourue divisée par le temps mis pour parcourir cette distance.

$$V_{moy} = \frac{x_1 - x_0}{t_1 - t_0} \quad \text{unités : m.s}^{-1} \text{ ou m / s}$$

● Vitesse instantanée v :

$$v = \frac{dx}{dt} \quad \text{unités : m.s}^{-1} \text{ ou m / s}$$

● Accélération instantanée a :

$$a = \frac{dv}{dt} \quad \text{unités : m.s}^{-2} \text{ ou m / s}^2$$

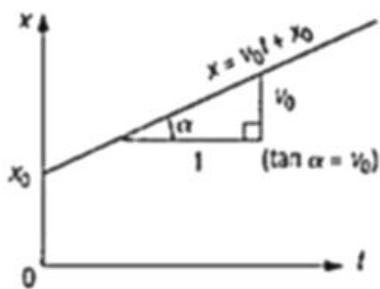
Equations du mouvement

6 – 1 Mouvement rectiligne uniforme :

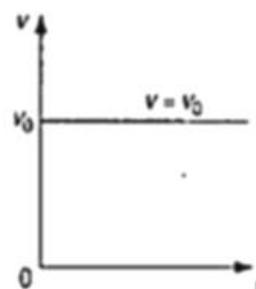
C'est le mouvement le plus simple sans accélération ($a = 0$) et avec une vitesse constante au cours du temps.

$$\text{Equations du mouvement :} \quad \mathbf{a = 0} \quad \mathbf{v = v_0 = Constante} \quad \mathbf{x = v_0 t + x_0}$$

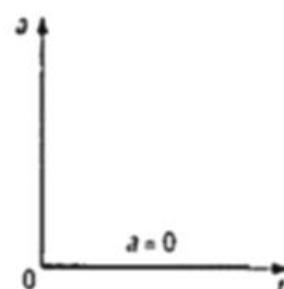
Allure typique des graphes :



Espaces



Vitesse



Accélération

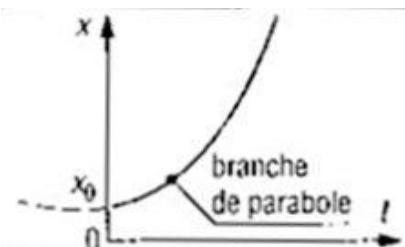
6 – 2 Mouvement rectiligne uniformément accéléré :

L'accélération reste constante au cours du temps.

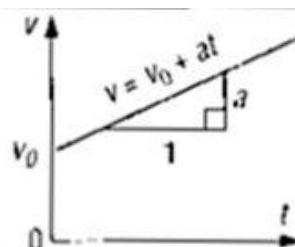
Equations du mouvement :

$$\mathbf{a = a_0 = Constante} \quad \mathbf{v = v_0 + a t} \quad \mathbf{x = x_0 + v_0 t + a \frac{t^2}{2}}$$

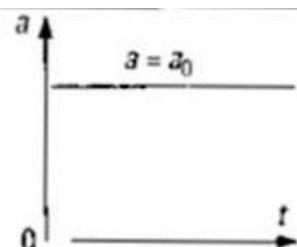
Allure typique des graphes :



Espaces



Vitesse



Accélération

6 – 3 Exemple : Presse à décolleter

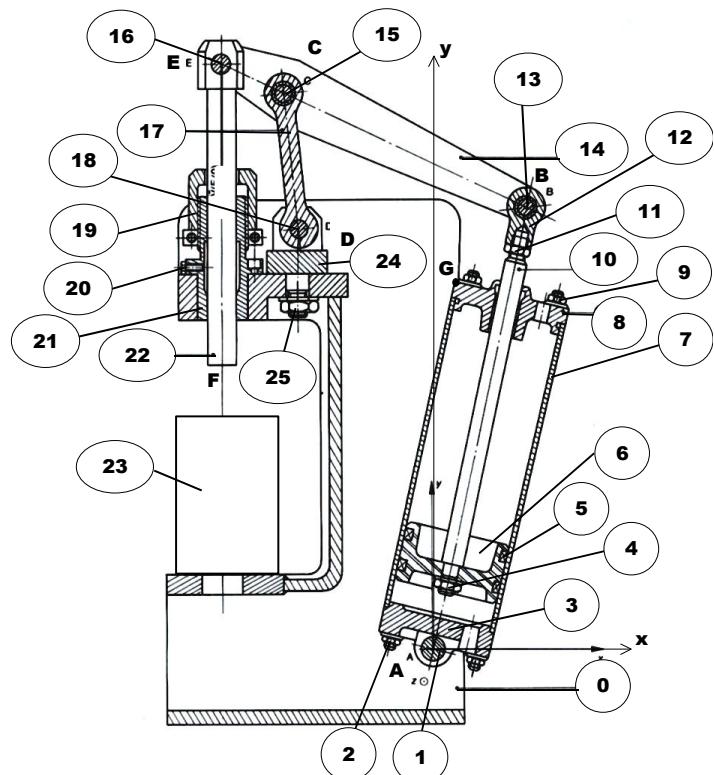
Sur la presse à décolleter représentée ci-dessous, un seul solide est animé d'un mouvement de translation par rapport au bâti fixe (0) . Lequel ?

Réponse :

Ce solide est-il animé d'un mouvement de translation rectiligne ?

Réponse :

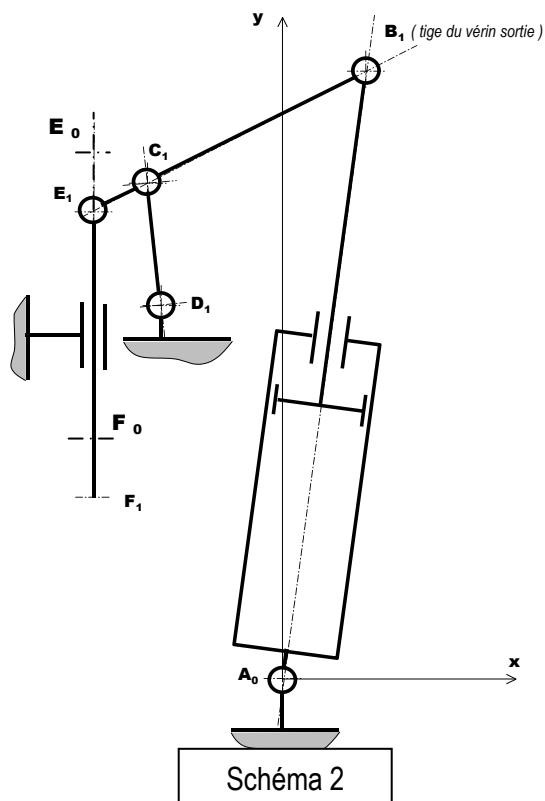
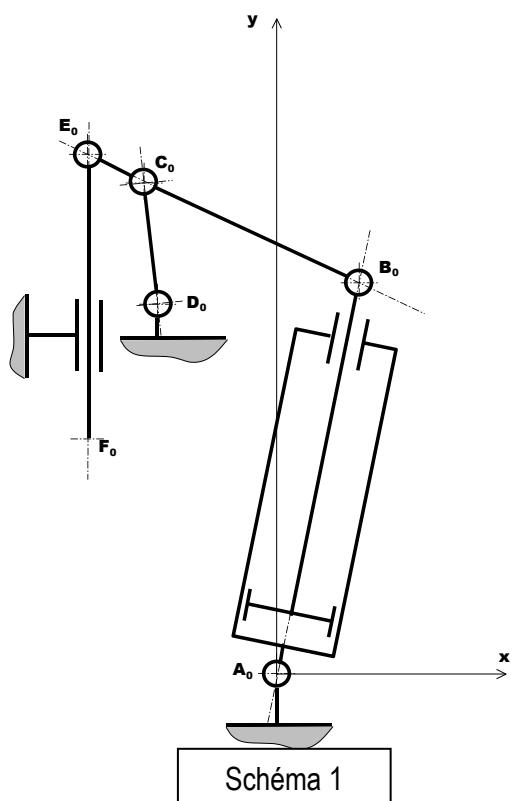
REPRESENTEZ la trajectoire du point F appartenant à ce solide par rapport au bâti.



- 0 : Bâti
- 1 : Axe
- 2 : Ecrou
- 3 : Flasque arrière
- 4 : Ecrou
- 5 : Joint
- 6 : Piston
- 7 : Cylindre
- 8 : Flasque avant

- 9 : Ecrou
- 10 : Tige
- 11 : Ecrou
- 12 : Support d'axe
- 13 : Axe
- 14 : Palonnier
- 15 : Axe
- 16 : Axe
- 17 : Bielle

- 18 : Axe
- 19 : Ecrou de guide
- 20 : Vis
- 21 : Guide de poinçon
- 22 : Poinçon
- 23 : Pièce à décolleter
- 24 : Support de bielle
- 25 : Ecrou



Les schémas ci-dessus représentent la presse dans 2 positions :

- en début de course ;
- en fin de course.

Sur le schéma 2, **TRACEZ** les trajectoires des points E et F

Que peut-on constater ?

Réponse :

Sachant que la distance réelle BC vaut 180 mm, **DETERMINEZ** la course du poinçon (F_0F_1)

Réponse :

A l'instant $t = 0$, la vitesse du poinçon est nulle, le poinçon est en position haute ($E_0 ; F_0$)

Dans la 1^{ère} phase, le poinçon atteint une vitesse de 20 mm / s en 0,5 s .

Dans la 2^{ème} phase , le poinçon évolue à vitesse constante pendant 1,5 s

Dans la 3^{ème} phase, le poinçon décélère pour arriver à une vitesse nulle au point F_1 (Durée : 4 s)

Les accélérations et les décélérations sont constantes.

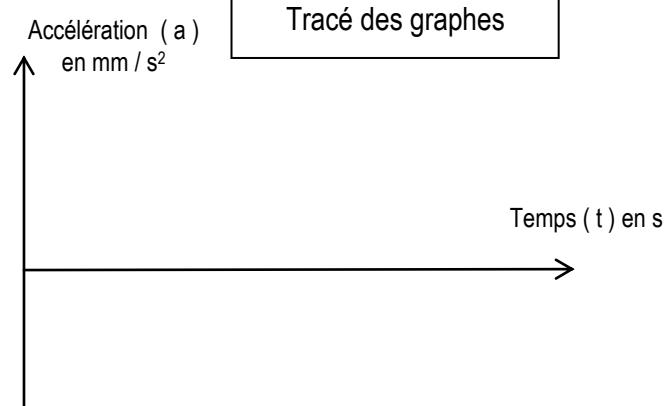
DETERMINEZ les équations de ce mouvement pour chacune des 3 phases.

TRACEZ les graphes des espaces, des vitesses et des accélérations.

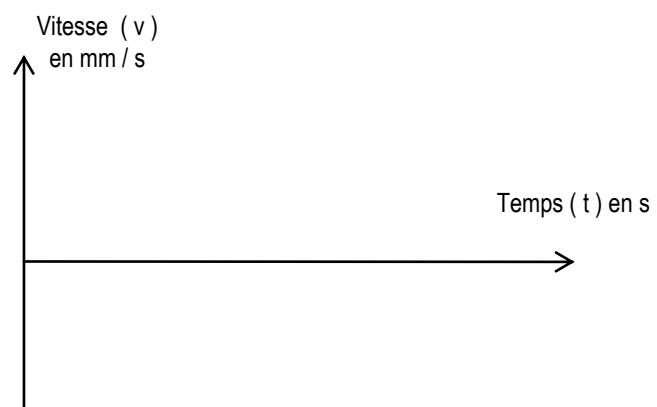
Détermination des équations du mouvement pour chacune des 3 phases

Tracé des graphes

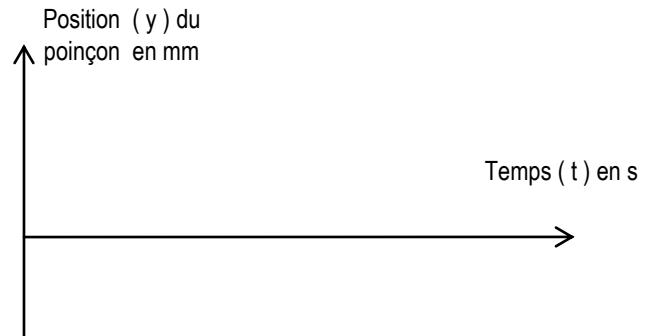
● Phase 1 :



● Phase 2 :



● Phase 3 :



6 – 4 Convoyeur aérien

Mise en situation :

La figure ci-contre représente un convoyeur aérien mécanisé qui permet de transporter des charges suspendues par le crochet 7. Le chariot roule sur deux rails constitués par deux cornières 6' et 6''.

Le chariot se déplace vers le bas, la position du point E est définie par $\mathbf{IE} = \mathbf{OB} = \mathbf{x}(t)$.

Questions :

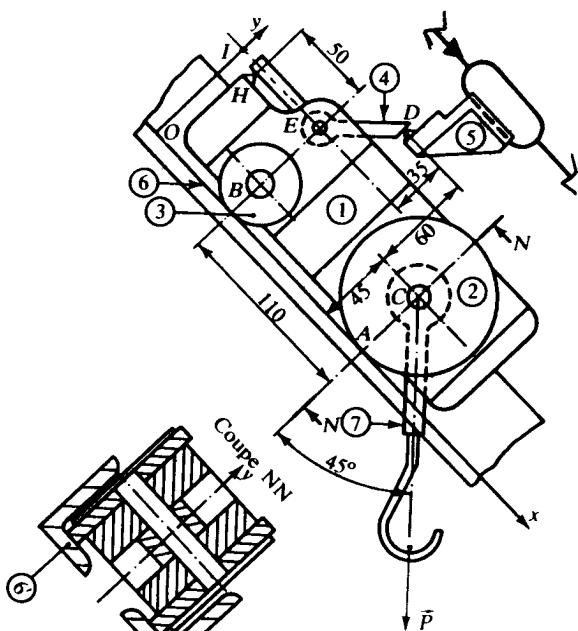
Analyse :

- Donner le type du mouvement de 1/6.
- Quelle est la trajectoire $T(E \in l/6)$?

Première phase :

Dans une première phase qui dure 3 secondes, à partir de $t_i = 0$ s le convoyeur subit une accélération de $0,4 \text{ m/s}^2$, en partant d'une vitesse nulle et d'une position $x_i = 0,4 \text{ m}$.

- Quel est le type de mouvement ? En déduire l'équation de l'accélération $a(t)$.
- Déterminer l'équation de la vitesse $v(t)$. Calculer la valeur de la vitesse v à 1 et à 3 secondes.
- Déterminer l'équation de la position $x(t)$. Calculer la valeur du déplacement x à 1 s et à 3 s.
- Tracer les graphes représentant les lois de mouvement de cette première phase sur la page 2/2.



Deuxième phase :

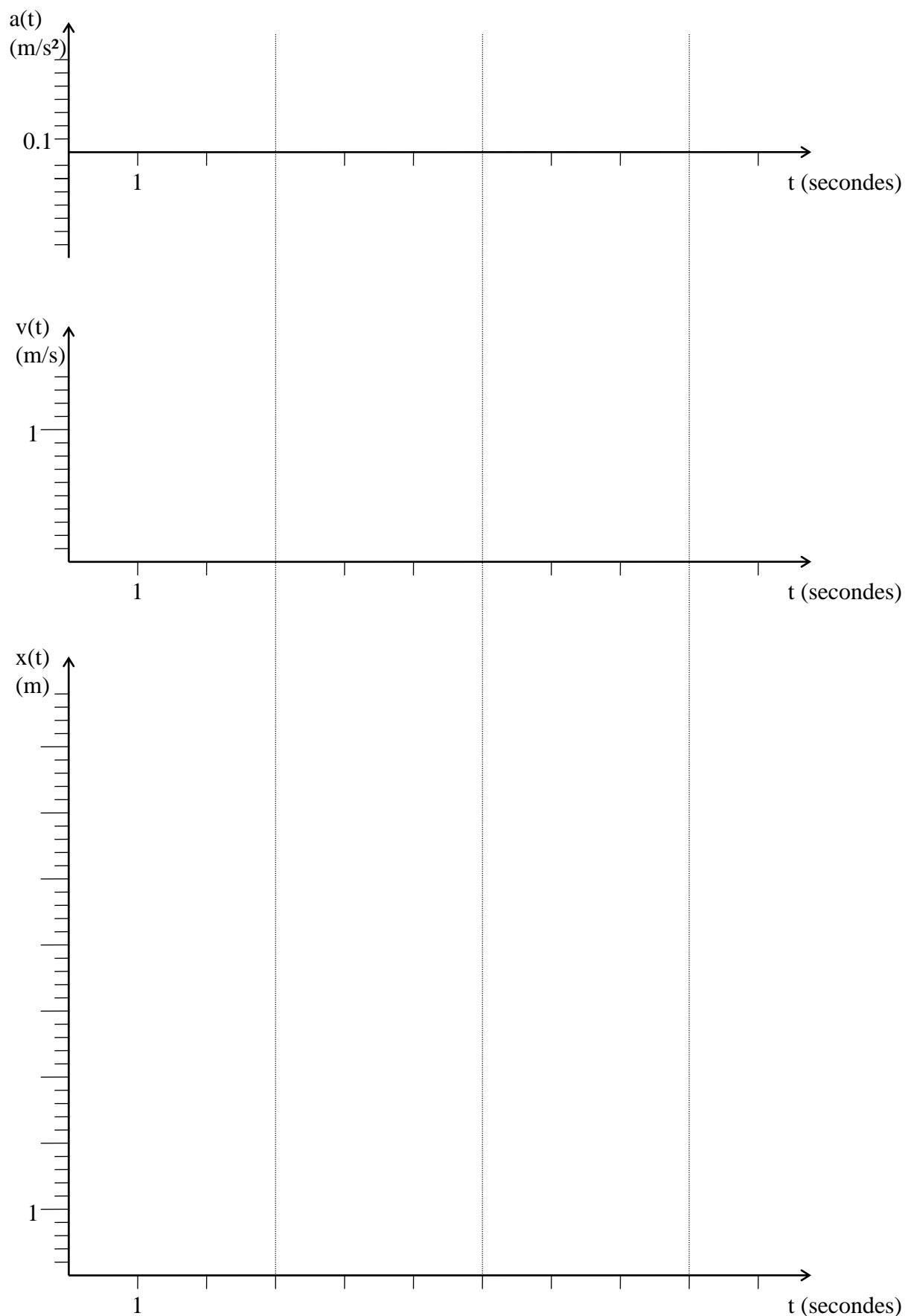
Dans cette deuxième phase qui dure également 3 secondes, le convoyeur avance cette fois à vitesse constante.

- Quel est le type de mouvement ?
- Déterminer l'équation de la vitesse $v(t)$. Calculer la valeur de la vitesse v à 3 et à 6 secondes.
- Déterminer l'équation de la position $x(t)$. Calculer la valeur du déplacement x à 3 s et à 6 s.
- Tracer les graphes représentant les lois de mouvement de cette deuxième phase sur la page 2/2.

Troisième phase :

Dans une troisième phase finale, le mouvement du point E $\in l/6$ est uniformément décéléré. Le convoyeur freine pour arriver à une vitesse nulle et parcourt 1,2 m pendant cette phase.

- Quel est le type de mouvement ? En déduire l'équation de l'accélération $a(t)$.
- Déterminer l'équation de la vitesse $v(t)$.
- Déterminer l'équation de la position $x(t)$.
- Tracer les graphes représentant les lois de mouvement de cette troisième phase sur la page 2/2.



7 – Solide en mouvement de rotation :

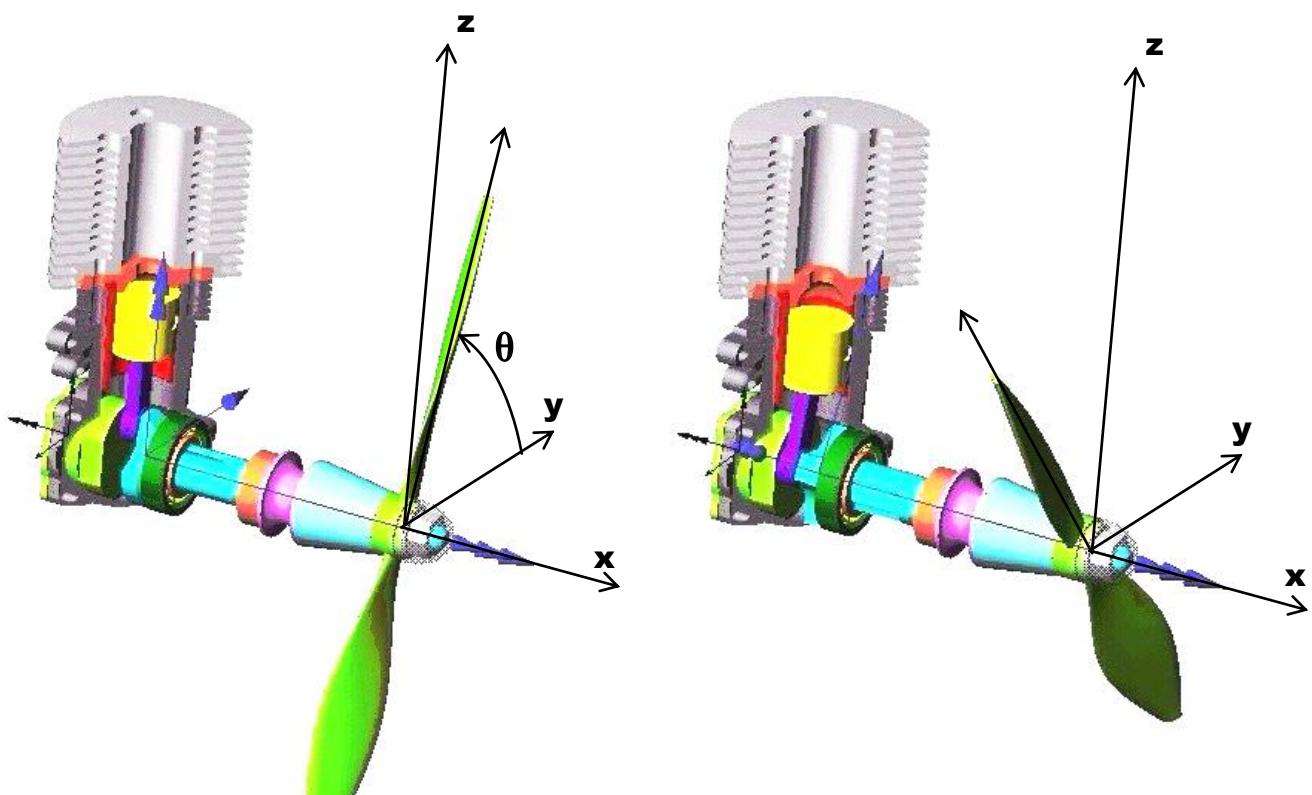
7 – 1 Angle de rotation θ :

Le mouvement angulaire d'un solide (rotation) est repéré par un angle θ .

Les illustrations ci-dessous montrent l'hélice d'un moteur de modélisme dans 2 positions différentes.

Sur la 1^{ère} illustration l'angle θ repère la position de l'hélice par rapport à l'axe Oy.

INDIQUEZ l'angle θ sur la 2^{ième} figure.



7 – 2 Vitesse angulaire ou vitesse de rotation ω :

- Vitesse angulaire moyenne ω_{moy} :

$$\omega_{\text{moy}} = \frac{\theta_1 - \theta_0}{t_1 - t_0} \quad \text{unités : rad.s}^{-1} \text{ ou rad / s}$$

- Vitesse angulaire instantanée ω :

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} \quad \text{unités : rad.s}^{-1} \text{ ou rad / s}$$

Remarque : Si N est la vitesse de rotation en tours / minutes alors $\omega = \frac{\pi N}{30}$

7 – 3 Accélération angulaire α :

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2} \quad \text{unités : rad.s}^{-2} \text{ ou rad / s}^2$$

7 – 4 Mouvement de rotation uniforme :

L'accélération angulaire est nulle.

Équations du mouvement : $\alpha = 0$ $\omega = \omega_0 = \text{Constante}$ $\theta = \omega_0 t + \theta_0$

7 – 5 Mouvement de rotation uniformément accéléré :

L'accélération angulaire reste constante au cours du temps.

Équations du mouvement :

$$\alpha = \alpha_0 = \text{Constante} \quad \omega = \omega_0 + \alpha t \quad \theta = \theta_0 + \omega_0 t + \alpha \frac{t^2}{2}$$

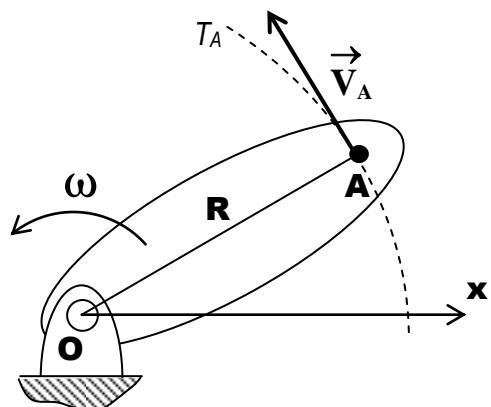
7 – 6 Vitesse d'un point A appartenant à un solide en rotation :

La trajectoire du point A, T_A , est le cercle de centre O et de rayon $OA = R$.

\vec{V}_A est tangente en A au cercle (T_A), elle est également perpendiculaire en A à OA.

La norme de \vec{V}_A est proportionnelle à OA et donnée par :

$$\|\vec{V}_A\| = \omega \cdot OA = \omega \cdot R$$

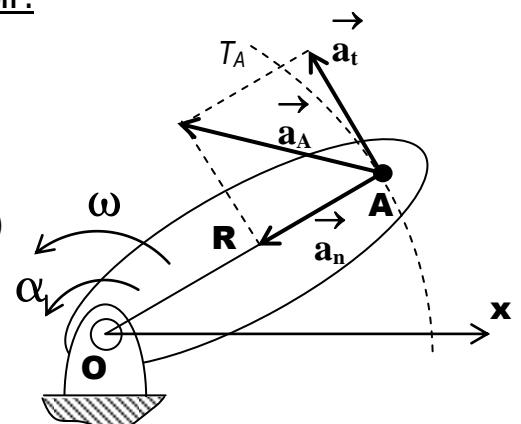


7 – 7 Accélération d'un point A appartenant à un solide en rotation :

L'accélération \vec{a}_A est la somme vectorielle :

- de l'accélération normale \vec{a}_n (dirigée de A vers O) ;
- de l'accélération tangentielle \vec{a}_t (tangente à TA ou perpendiculaire à OA)

$$\vec{a}_A = \vec{a}_n + \vec{a}_t \quad a_t = \alpha \cdot R = \alpha \cdot OA \quad a_n = \omega^2 \cdot R = \frac{V_A^2}{R}$$



7 – 8 Application :

Reprenez le moteur de modélisme précédent.
Nous nous intéressons au mouvement de l'hélice.
La vitesse de rotation de l'hélice est de 3000 tr / mn ,
 $OA = OB = 100 \text{ mm}$

1 - DETERMINEZ les vitesses aux points A , B et D.

$$\|\vec{V}_A\| = \dots$$

$$\|\vec{V}_B\| = \dots$$

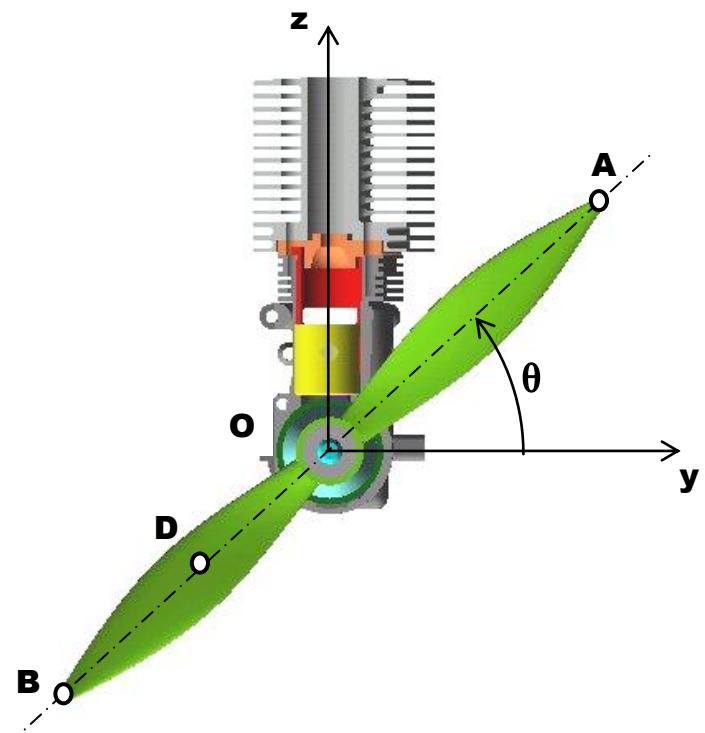
$$\|\vec{V}_D\| = \dots$$

2 - TRACEZ les vecteurs vitesse aux points A, B et D
(sur la figure ci-contre)

Echelle : 1 cm pour 10 m / s

3 – Dès que le moteur est coupé, l'hélice fait 50 tours avant de s'immobiliser.

DETERMINEZ la décélération angulaire, l'accélération tangentielle en A et le temps que le moteur met pour s'arrêter (t_A)



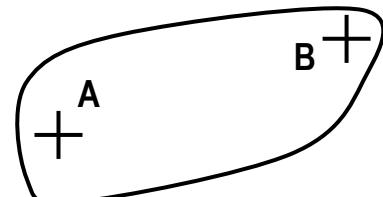
PARAMETRAGE DES MECANISMES

Objectifs :

- Modéliser les pièces mécaniques ;
- Modéliser les liaisons ;
- Repérer la position des solides mobiles

1 – Modélisation des pièces mécaniques : Définition du solide indéformable :

Une pièce mécanique (S) peut être considérée comme un solide indéformable si quels que soient les points A et B de (S), la distance AB reste constante au cours du temps.



2 – Modélisation cinématique des liaisons parfaites dans l'espace :

En cinématique, une liaison est parfaite si **les surfaces de liaison sont géométriquement parfaites, indéformables, et les ajustements sans jeu.**

- Les composantes de la **vitesse angulaire** $\overrightarrow{\Omega}_{1/2}$ résultante du **torseur cinématique**, sont nulles sur les axes (A, \vec{x}) et (A, \vec{y}) autour desquels la rotation de 1 par rapport à 2 est impossible.
- Les composantes de la **vitesse linéaire** $\overrightarrow{V}_{A \in 1/2}$ moment du **torseur cinématique**, sont nulles sur l'axe (A, \vec{z}) selon lequel la translation de 1 par rapport à 2 est impossible.
- Ecriture du torseur cinématique : $A\{\vartheta_{1/2}\} = A\{\overrightarrow{\Omega}_{1/2}, \overrightarrow{V}_{A \in 1/2}\} = \begin{cases} \omega_x & \vartheta_x \\ \omega_y & \vartheta_y \\ \omega_z & \vartheta_z \end{cases}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$

$$A\{\vartheta_{1/2}\} = A\{\overrightarrow{\Omega}_{1/2}, \overrightarrow{V}_{A \in 1/2}\} = \begin{cases} \omega_x & \vartheta_x \\ \omega_y & \vartheta_y \\ \omega_z & \vartheta_z \end{cases}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$$

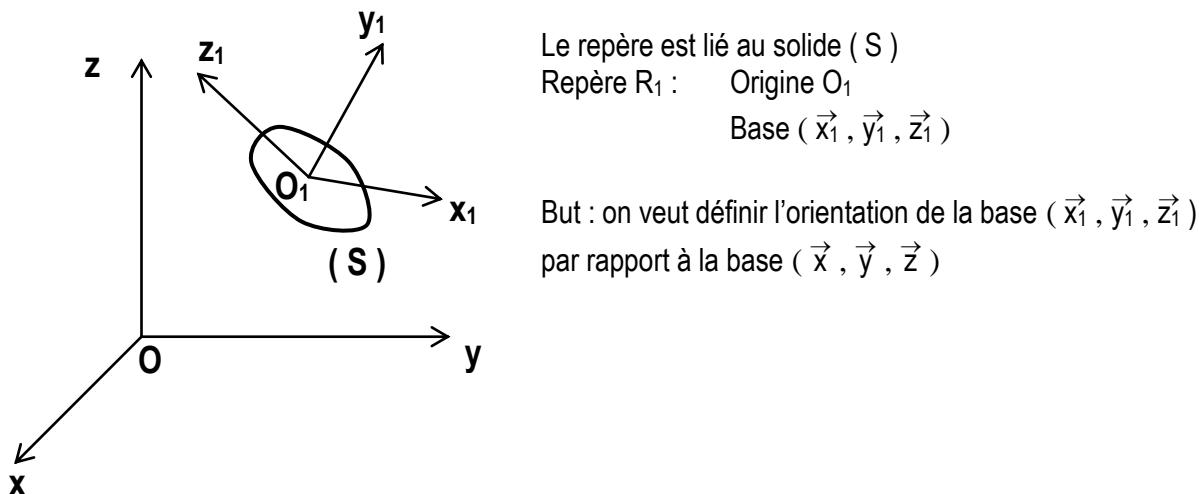
Liaison	Schématisation	Rotation	$\{ \vartheta_{1/2} \}$	Translation	Représentation de $\{ \vartheta_{1/2} \}$
Encastrement ou fixe : $\forall (A, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ quelconque **		$R_x \quad 0$ $R_y \quad 0$ $R_z \quad 0$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ A & 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}}$	$0 \quad T_x$ $0 \quad T_y$ $0 \quad T_z$	
Pivot De centre : A D'axe : (A, \vec{z})		$R_x \quad 0$ $R_y \quad 0$ $R_z \quad 1$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ A & \omega_z \end{pmatrix}_{\mathcal{R}}$	$0 \quad T_x$ $0 \quad T_y$ $0 \quad T_z$	
Glissière De centre : A D'axe : (A, \vec{x})		$R_x \quad 0$ $R_y \quad 0$ $R_z \quad 0$	$\begin{pmatrix} 0 & v_x \\ 0 & 0 \\ A & 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}}$	$1 \quad T_x$ $0 \quad T_y$ $0 \quad T_z$	

Liaison	Schématisation	Rotation	$\{ \theta_{1/2} \}$	Translation	Représentation de $\{ \theta_{1/2} \}$
Hélicoïdale Centre A Axe (A, \vec{x})		$R_x = 1$ $R_y = 0$ $R_z = 0$	$\begin{pmatrix} \omega_x & v_x \\ 0 & 0 \\ A & 0 & 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}}$ $\omega_x = \lambda \cdot v_x \quad n_c = 1$	$1 \quad T_x$ $0 \quad T_y$ $0 \quad T_z$	
Pivot glissant Centre A Axe (A, \vec{x})		$R_x = 1$ $R_y = 0$ $R_z = 0$	$\begin{pmatrix} \omega_x & v_x \\ 0 & 0 \\ A & 0 & 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}}$ $n_c = 2$	$1 \quad T_x$ $0 \quad T_y$ $0 \quad T_z$	
Sphérique à doigt Centre A Axe doigt (A, \vec{z}) Rainure dans (A, \vec{x}, \vec{z})		$R_x = 0$ $R_y = 1$ $R_z = 1$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \omega_y & 0 \\ A & \omega_z & 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}}$ $n_c = 2$	$0 \quad T_x$ $0 \quad T_y$ $0 \quad T_z$	
Appui-plan Centre A Normale (A, \vec{z})		$R_x = 0$ $R_y = 0$ $R_z = 1$	$\begin{pmatrix} 0 & v_x \\ 0 & v_y \\ A & \omega_z & 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}}$ $n_c = 3$	$1 \quad T_x$ $1 \quad T_y$ $0 \quad T_z$	
Rotule ou sphérique Centre A		$R_x = 1$ $R_y = 1$ $R_z = 1$	$\begin{pmatrix} \omega_x & 0 \\ \omega_y & 0 \\ A & \omega_z & 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}}$ $n_c = 3$	$0 \quad T_x$ $0 \quad T_y$ $0 \quad T_z$	
Linéaire rectiligne Centre A Normale (A, \vec{z}) Arête (A, \vec{x})		$R_x = 1$ $R_y = 0$ $R_z = 1$	$\begin{pmatrix} \omega_x & v_x \\ 0 & v_y \\ A & \omega_z & 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}}$ $n_c = 4$	$1 \quad T_x$ $1 \quad T_y$ $0 \quad T_z$	
Sphère-cylindre (Linéaire annulaire) Centre A Axe (A, \vec{x})		$R_x = 1$ $R_y = 1$ $R_z = 1$	$\begin{pmatrix} \omega_x & v_x \\ \omega_y & 0 \\ A & \omega_z & 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}}$ $n_c = 4$	$1 \quad T_x$ $0 \quad T_y$ $0 \quad T_z$	
Sphère-plan (Ponctuelle) Normale (A, \vec{z})		$R_x = 1$ $R_y = 1$ $R_z = 1$	$\begin{pmatrix} \omega_x & v_x \\ \omega_y & v_y \\ A & \omega_z & 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}}$ $n_c = 5$	$1 \quad T_x$ $1 \quad T_y$ $0 \quad T_z$	

3 – Nombre de degrés de liberté d'une liaison :

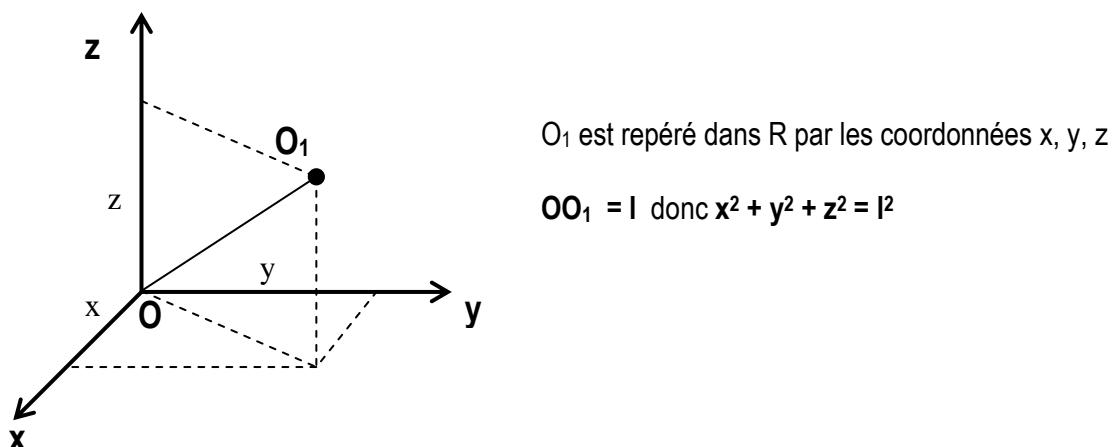
Le nombre de degrés de liberté d'une liaison est le nombre de mouvements indépendants de rotation et de translation suivant (O, \vec{x}), (O, \vec{y}), (O, \vec{z}) que la liaison autorise.

4 – Paramétrage de la position d'un solide par rapport à un repère :

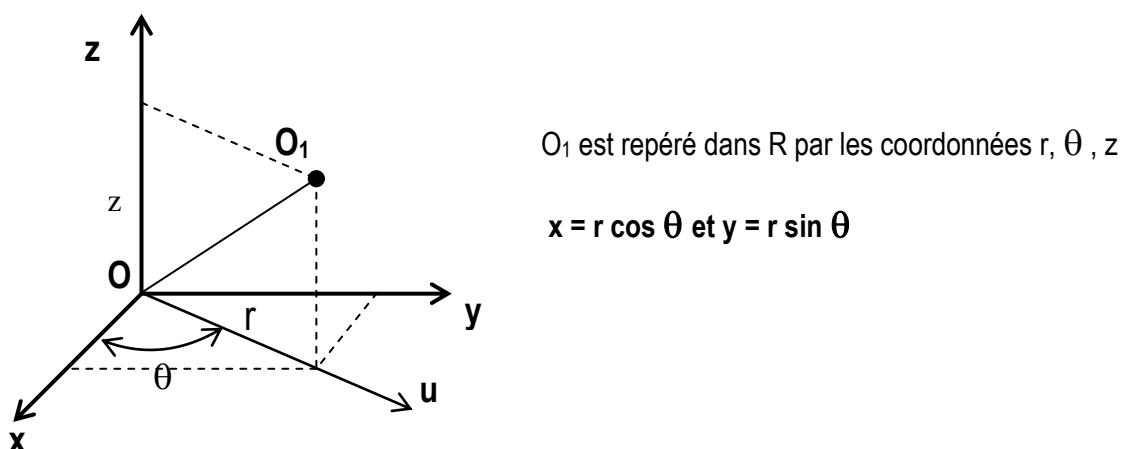


4 – 1 Paramétrage de la position de l'origine O_1 :

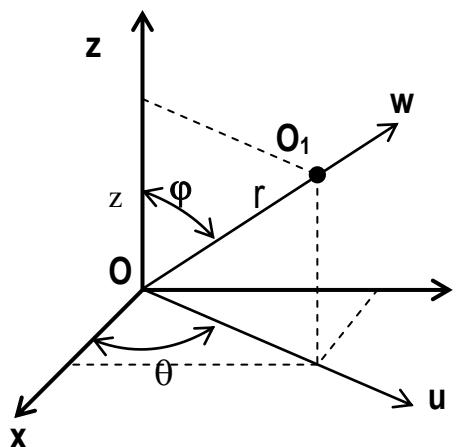
- Coordonnées cartésiennes :



- Coordonnées cylindriques :



• Coordonnées sphériques :



O_1 est repéré dans R par les coordonnées r, θ, z

$$x = r \sin \varphi \cos \theta \text{ et } y = r \sin \varphi \sin \theta$$

$$z = r \cos \varphi$$

4 – 2 Paramétrage de l'orientation de la base ($\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1$) :

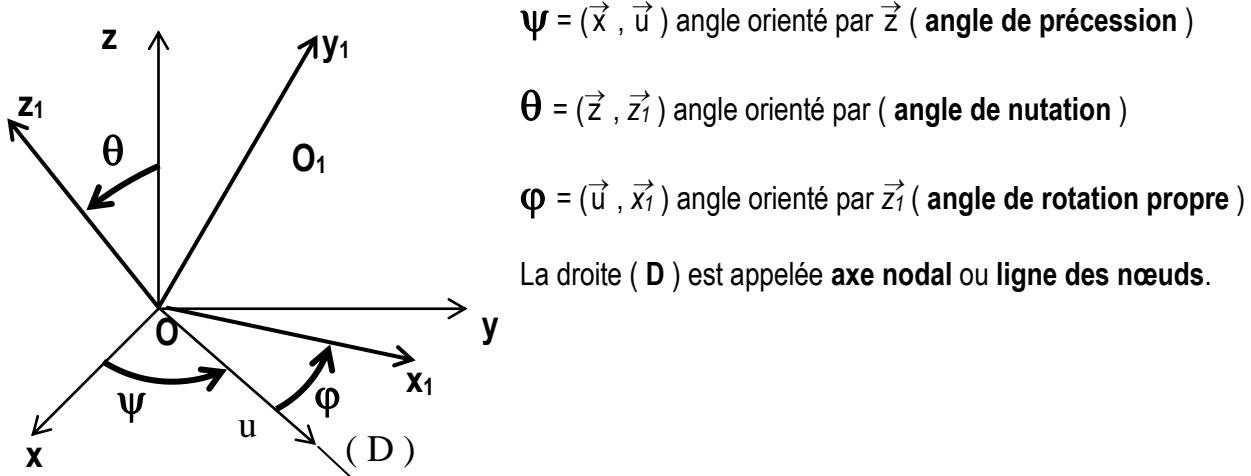
• Nombre de paramètres indépendants positionnant un solide dans un repère :

Pour définir la position de O_1 dans R , 3 paramètres sont nécessaires.

Pour orienter la base ($\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1$), il faut 3 paramètres indépendants.

Les 3 paramètres choisis sont généralement les angles d'Euler.

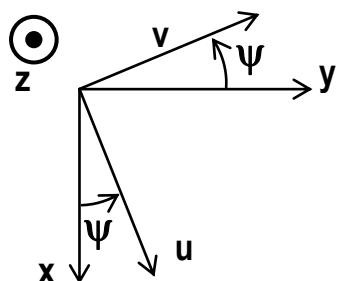
• Les angles d'Euler :



Les bases intermédiaires :

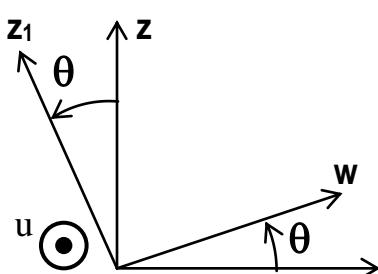
$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{z}) = 1^{\text{ère}}$ base intermédiaire

$(\vec{u}, \vec{w}, \vec{z}_1) = 2^{\text{ème}}$ base intermédiaire



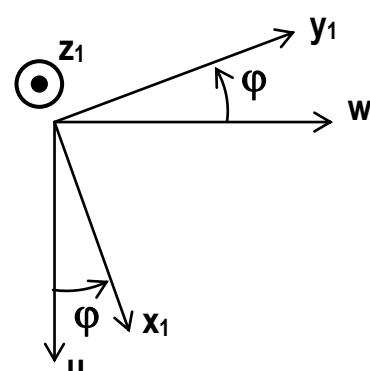
1^{ère} rotation (\vec{z}, Ψ)

$(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) \rightarrow (\vec{u}, \vec{v}, \vec{z})$



2^{ème} rotation (\vec{u}, Θ)

$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{z}) \rightarrow (\vec{u}, \vec{w}, \vec{z}_1)$



3^{ème} rotation (\vec{z}_1, Φ)

$(\vec{u}, \vec{w}, \vec{z}_1) \rightarrow (\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$

5 – Schéma cinématique des mécanismes :

5 – 1 Modélisation des liaisons du mécanisme :

Définitions :

Deux pièces n'ayant aucun mouvement relatif sont dites cinématiquement équivalentes.

Par suite, un ensemble de pièces cinématiquement équivalentes constitue une **classe d'équivalence** cinématique.

5 – 2 Positionner les liaisons normalisées et les solides schématisés :

Placer les liaisons symbolisées dans leur position relative sur le dessin.

5 – 3 Paramétrage de la position des solides schématisés :

Faire des schémas de telle façon que les **projections** des vecteurs **sur les axes** soient **positives** et que les angles soient entre 0 et $\pi/2$

Exemple : Réducteur à engrenages

Le dessin ci-contre représente un réducteur à engrenages .

L'engrenage est cylindrique droit à profil en développante de cercle, d'angle de pression $\alpha = 20^\circ$

Pour établir le schéma cinématique de ce réducteur, on considère qu'il est constitué de 3 classes d'équivalence représentées par (S_1), (S_2) et (S_0).

Soit $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ un repère orthonormé direct lié à (S_0).

L_{10} : liaison pivot d'axe (A, \vec{x})

L_{20} : liaison pivot d'axe (O, \vec{x})

L_{12} : liaison linéaire rectiligne d'axe (I, \vec{x}) et de normale orientée suivant la droite de pression de l'engrenage

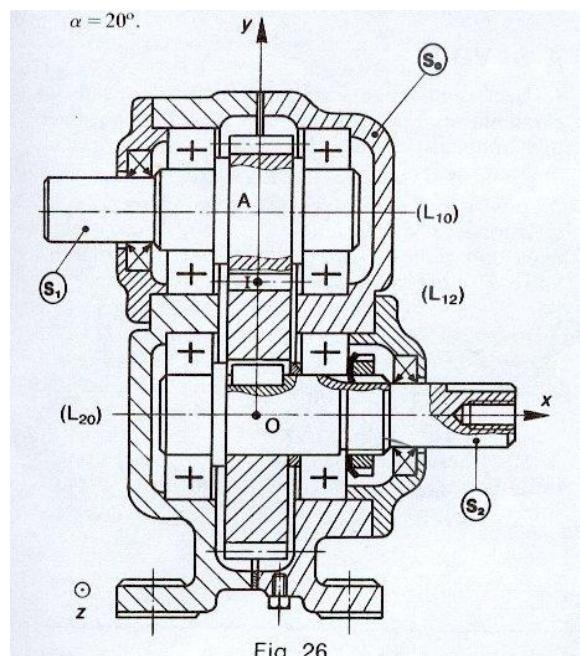


Fig. 26

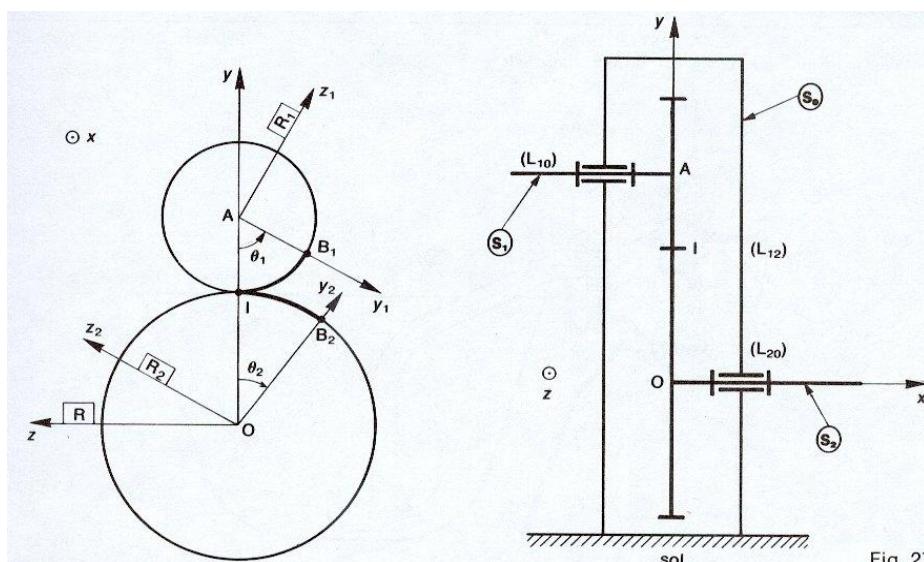


Fig. 27

6 – Loi d'entrée-sortie du mécanisme :

C'est la relation qui existe entre les paramètres de position de la pièce d'entrée et les paramètres de position de la pièce de sortie.

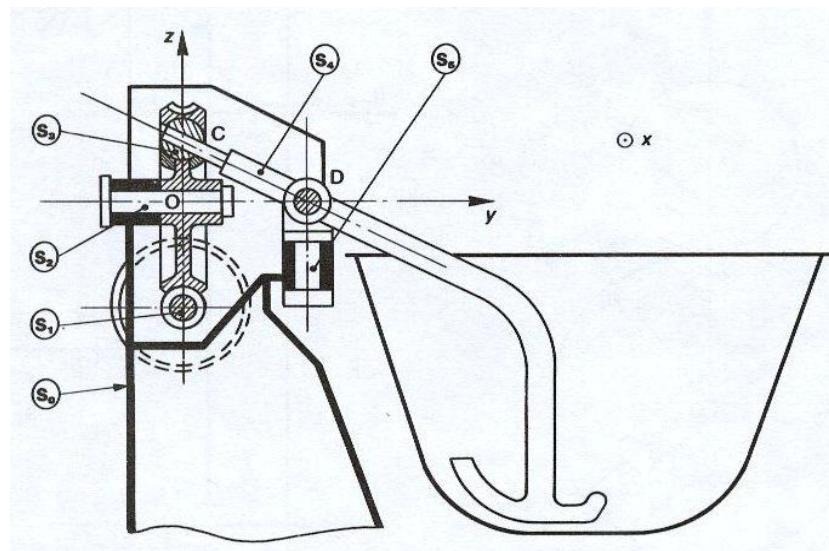
7 – Problème : Mélangeur :

On donne le dessin d'un mélangeur ci-contre.

Le moteur entraîne l'arbre (S_1) qui communique son mouvement au bras mélangeur (S_4) par l'intermédiaire d'un système roue et vis sans fin.

La vis est à un filet à droite et la roue à n dents.

(S_4) prend appui sur (S_2) par l'intermédiaire de (S_3), et sur (S_0) par l'intermédiaire de (S_5).



- 1) On demande d'établir le schéma cinématique spatial paramétré de ce mécanisme.
- 2) Déterminer la loi d'entrée-sortie du mélangeur.

7 – Exemples d'application

Objectifs :

Décoder la nature des liaisons entre les pièces d'un dessin d'ensemble de mécanisme ;
Modéliser ces liaisons sous forme de schéma cinématique ;
Paramétrier ce schéma cinématique et faire apparaître les paramètres d'entrée et de sortie du mécanisme étudié.

1 - La figure ci-contre représente le guidage en rotation du plateau (2) dans le bâti (1) d'un montage d'usinage, par l'intermédiaire de l'arbre (3)

QUESTIONS :

- a) Modéliser la liaison entre le plateau (2) et l'arbre (3)
- b) Modéliser les liaisons entre l'arbre (3) et le bâti (1)
- c) Concevoir le schéma cinématique du mécanisme

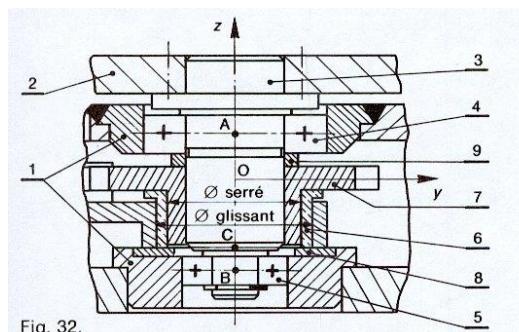


Fig. 32.

2 – La figure ci-dessous représente un mécanisme utilisé dans les silos à céréales permettant d'actionner un trieur à grains.

Un moteur électrique entraîne l'arbre (1) d'un mouvement de rotation uniforme.

Par l'intermédiaire de la bielle (2) , le coulisseau (3) est animé d'un mouvement de translation alternatif.

QUESTIONS :

- Modéliser les liaisons
- Réaliser les schémas cinématiques spatial et plan du mécanisme
- Paramétrier le schéma cinématique plan en précisant les bases intermédiaires
- Etablir la loi « entrée-sortie » , on pose $AB = d$, $AG = h$ et a le rayon de la manivelle BE

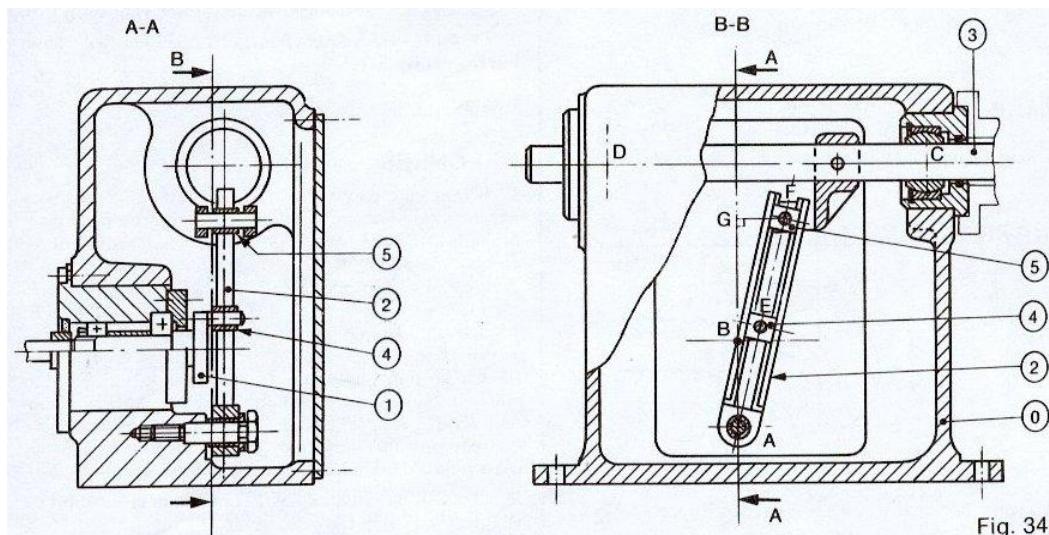


Fig. 34.

3 - La figure ci-dessous représente le régulateur centrifuge du système DIRAVI CITROEN entraîné à partir de la boîte de vitesses par un flexible monté sur l'arbre (20).

Ce système permet de « durcir » la direction en fonction de la vitesse du véhicule.

QUESTIONS :

- Modéliser les liaisons (excepté le limiteur de couple constitué des pièces 22, 23, 24, 25, 26 que l'on suppose liées à l'arbre 20)
- Tracer le schéma cinématique correspondant. Repérer les ensembles de pièces cinématiquement liées par leur numéro de classe d'équivalence (exemple : { 90, 91, 92 } sera repéré par 9)
- Paramétrier la position d'une masselotte par rapport au bâti.

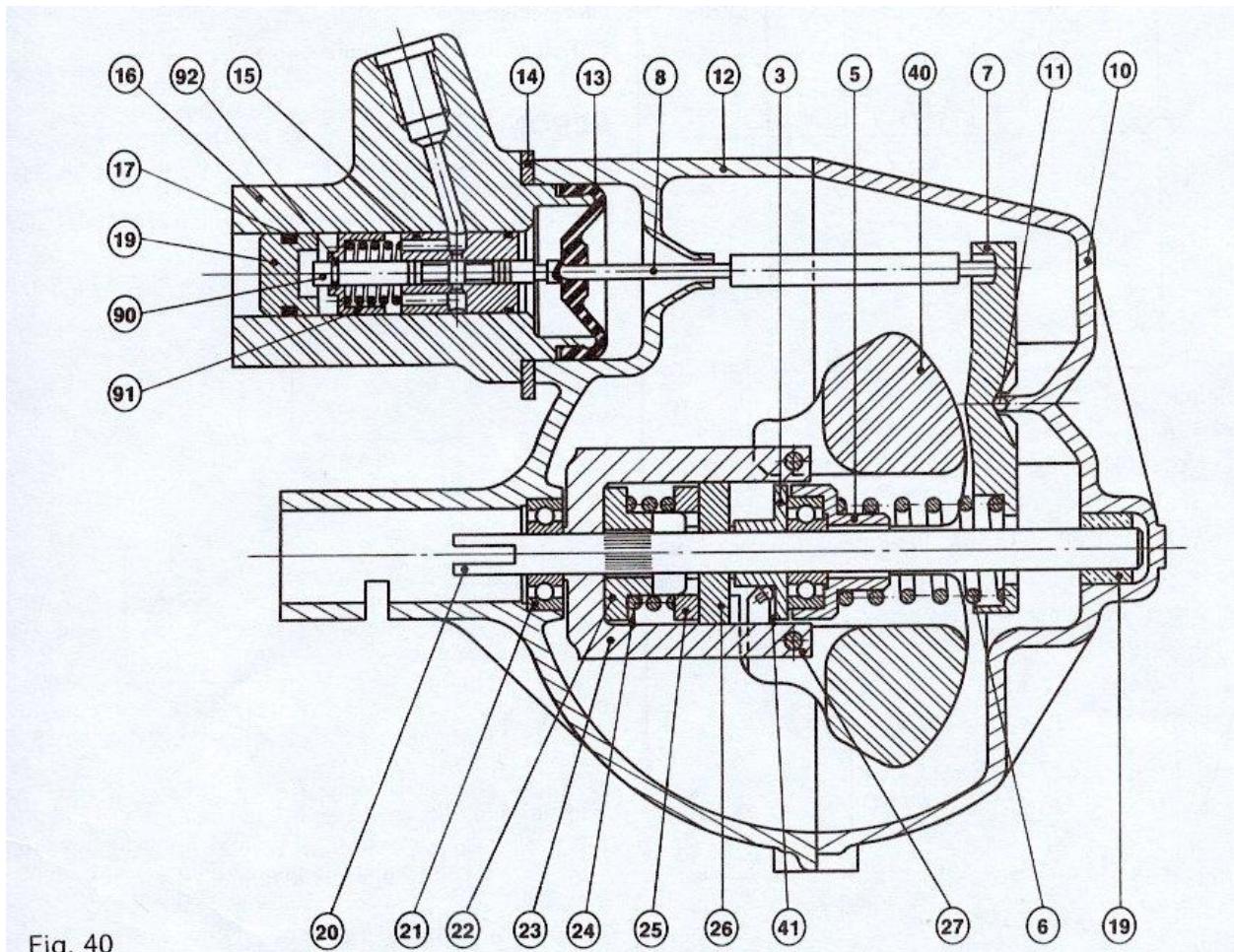


Fig. 40

VECTEUR POSITION , VITESSE ET ACCELERATION D'UN POINT D'UN SOLIDE

Objectifs :

- Déterminer la vitesse d'un point d'un solide ;
- Déterminer l'accélération d'un point d'un solide.

1 – Mesure du temps :

La seconde est l'unité de mesure du temps équivalent à la durée de 9162631770 périodes de la radiation correspondant à la transition entre 2 niveaux hyperfins de l'état fondamental de l'atome de césium 133.

2 – Vecteur position d'un point d'un solide :

Le vecteur position d'un point P (t) du solide (S) dans le repère (R) , à la date t, est le vecteur $\overrightarrow{OP}(t)$ où O est l'origine du repère R.

3 – Vecteur vitesse d'un point d'un solide :

Le vecteur vitesse du point P (t) du solide (S) par rapport au repère (R) , à la date t, est la dérivée par rapport à t , pour un observateur lié au repère (R), du vecteur position $\overrightarrow{OP}(t)$

$$\overrightarrow{V_{P \in S/R}} = \left[\frac{d}{dt} \overrightarrow{OP}(t) \right]_R$$

4 – Vecteur accélération d'un point d'un solide :

Le vecteur accélération du point P (t) du solide (S) par rapport au repère (R) , à la date t, est la dérivée par rapport à t , pour un observateur lié au repère (R), du vecteur vitesse $\overrightarrow{V_{P \in S/R}}$

$$\overrightarrow{\Gamma_{P \in S/R}} = \left[\frac{d}{dt} \overrightarrow{V_{P \in S/R}} \right]_R$$

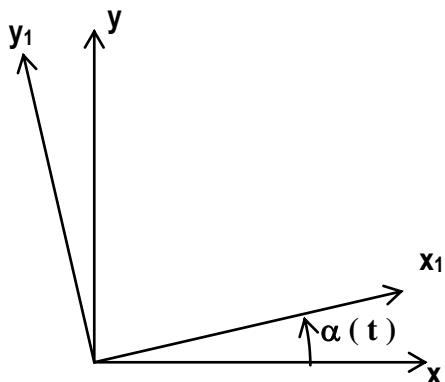
5 – Calcul du vecteur vitesse et du vecteur accélération d'un point d'un solide :

On va écrire la relation entre la dérivée d'un vecteur $\overrightarrow{U}(t)$ dans la base du repère $R = (\mathbf{O}, \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}, \overrightarrow{z})$ et la dérivée d'un vecteur $\overrightarrow{U}(t)$ dans la base du repère $R_1 = (\mathbf{O}_1, \overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{y_1}, \overrightarrow{z_1})$

$$\overrightarrow{U}(t) = a(t) \overrightarrow{x_1} + b(t) \overrightarrow{y_1} + c(t) \overrightarrow{z_1}$$

5 – 1 Cas particulier : $\vec{z} = \vec{z}_1$

$\alpha(t) = (\vec{x}, \vec{y}_1)$, on établit :



$$\left[\frac{d}{dt} \vec{x}_1 \right]_R = \vec{z} \times \vec{x}_1$$

$$\left[\frac{d}{dt} \vec{y}_1 \right]_R = \vec{z} \times \vec{y}_1$$

$$\vec{\Omega}_{R_1/R} = \alpha' \vec{z}$$

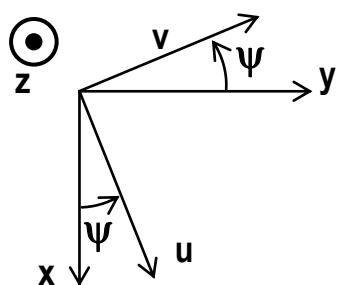
$\vec{\Omega}_{R_1/R}$ est le vecteur rotation de la base R_1 par rapport à la base R .

Donc $\left[\frac{d}{dt} \vec{u}(t) \right]_R = \left[\frac{d}{dt} \vec{u}(t) \right]_{R1} + \vec{\Omega}_{R_1/R} \times \vec{u}(t)$

5 – 2 Cas général : $\vec{\Omega}_{R_1/R} = \psi' \vec{z} + \theta' \vec{u} + \phi' \vec{z}_1$ ψ, θ, ϕ sont les 3 angles d'Euler.

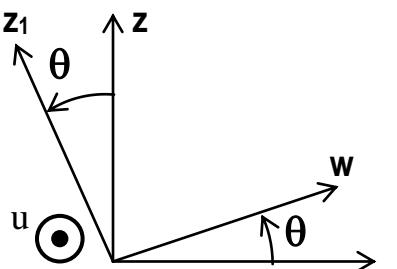
Les bases intermédiaires : $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{z})$ = 1^{ère} base intermédiaire

$(\vec{u}, \vec{w}, \vec{z}_1)$ = 2^{ième} base intermédiaire



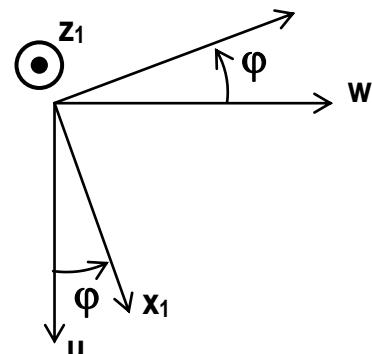
1^{ère} rotation (\vec{z}, ψ)

$$(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) \rightarrow (\vec{u}, \vec{v}, \vec{z})$$



2^{ième} rotation (\vec{u}, θ)

$$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{z}) \rightarrow (\vec{u}, \vec{w}, \vec{z}_1)$$



3^{ème} rotation (\vec{z}_1, ϕ)

$$(\vec{u}, \vec{w}, \vec{z}_1) \rightarrow (\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$$

$$\left[\frac{d}{d\psi} \vec{x}_1 \right]_R = \vec{z} \times \vec{x}_1 ; \quad \left[\frac{d}{d\theta} \vec{x}_1 \right]_R = \vec{u} \times \vec{x}_1 ; \quad \left[\frac{d}{d\phi} \vec{x}_1 \right]_R = \vec{z}_1 \times \vec{x}_1$$

On trouve la même relation, mais $\vec{\Omega}_{R_1/R}$ a 3 composantes correspondant à un mouvement dans l'espace de la base de R_1 par rapport à celle de R

Donc $\left[\frac{d}{dt} \vec{u}(t) \right]_R = \left[\frac{d}{dt} \vec{u}(t) \right]_{R1} + \vec{\Omega}_{R_1/R} \times \vec{u}(t)$

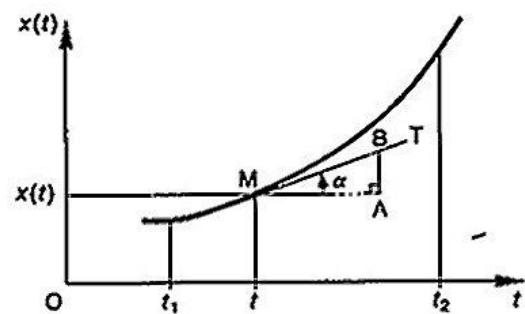
6 – Déivation graphique :

La méthode de déivation graphique d'une fonction $x(t)$ dont on connaît la courbe représentative sur un intervalle $[t_1, t_2]$ est une méthode basée sur l'interprétation de $\frac{d}{dt} x(t)$ de la fonction $x(t)$

Soit la courbe $x(t)$, soit α , l'angle de la tangente au point M, nous avons :

$$\frac{d}{dt} x(t) = \operatorname{tg} \alpha = \frac{AB}{MA}$$

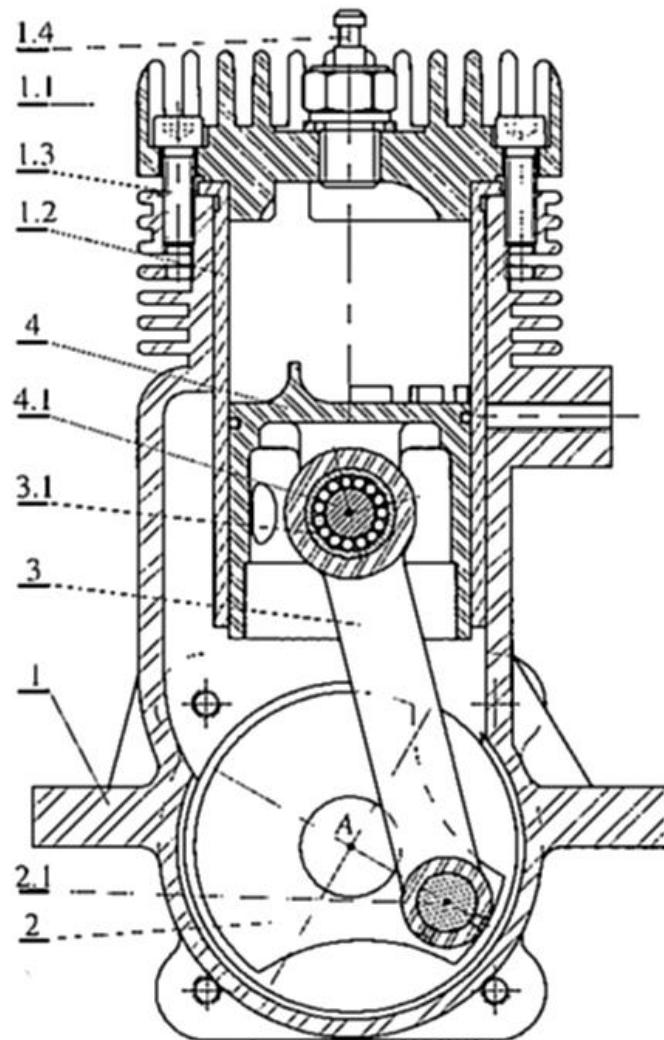
La valeur de la dérivée s'obtient par le calcul du rapport $\frac{AB}{MA}$



7 – Application :

Le dessin page suivante représente un micromoteur, on demande :

- De réaliser le schéma cinématique plan du système ;
- D'indiquer les paramètres d'entrée et de sortie ;
- De calculer analytiquement la vitesse linéaire du centre de l'articulation bielle / piston sachant que le vilebrequin tourne à une **vitesse constante $\omega = 452,4 \text{ rad/s}$** ;
- De calculer analytiquement l'accélération du centre de l'articulation bielle / piston
- De déterminer graphiquement la courbe représentative de la position du piston par rapport au corps en fonction de la position angulaire de la manivelle.
- D'en déduire par déivation graphique la courbe représentative de la vitesse du piston par rapport au corps en fonction de la position angulaire de la manivelle.
- D'en déduire par déivation graphique la courbe représentative de l'accélération du piston par rapport au corps en fonction de la position angulaire de la manivelle.



Rep.	Désignation	2	Vilebrequin
1	Corps	2.1	Maneton
1.1	Culasse	3	Bielle
1.2	Chemise	3.1	Coussinet
1.3	Vis	4	Piston
1.4	Bougie	4.1	Axe

Echelle 1

CINÉMATIQUE DU SOLIDE EN TRANSLATION OU EN ROTATION

1 – SOLIDE

Soient **A** et **B**, deux points quelconques d'un élément, si la distance $d(A, B)$ reste constante au cours du temps, cet élément sera considéré comme un solide.

Au sens mécanique, un solide est donc indéformable. C'est une des hypothèses les plus importantes de la **mécanique générale**.

L'étude qui consiste à établir les relations entre chargement et déformation du solide s'appelle la **mécanique des milieux continus** (dont une des applications est la R.D.M.).

De la définition mécanicienne du solide, on peut développer une définition mathématique.

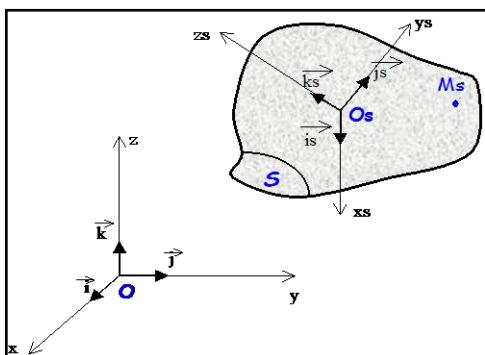
La distance $d(A, B)$ est égale au module du vecteur \vec{AB} . D'où :

$$\forall A, B \in S \quad \text{si } \|\vec{AB}\| = \text{cste au cours du temps} ; \quad S \text{ est un solide.}$$

2 - REPERAGE D'UN SOLIDE

On introduit deux repères :

- Le repère fixe (ou galiléen) que l'on connaît déjà. Un repère lié à la terre étant suffisant comme repère fixe, pour l'observation de la plupart des mécanismes. Ce repère sera noté **R_o** (O, i, j, k)
- Un repère lié au solide, permettant de connaître la position de tous les points du solide par rapport à un point particulier qui sera l'origine du solide. Ce repère sera noté **R_s** (O_s, i_s, j_s, k_s).



Ce double paramétrage est généralement important, car il favorise la compréhension du mouvement du solide. En effet, il faut très vite différencier cinématique du point et cinématique du solide. On qualifie uniquement le mouvement du solide par l'orientation prise par l'ensemble des points du solide par rapport au repère fixe. Si l'ensemble des points du solide est repéré par **R_s** le mouvement du solide est défini par l'orientation de **R_s** par rapport à **R_o**.

Soit **M_s** un point quelconque du solide **S**, on a :

$$\vec{O_s M_s} = a \cdot \vec{i_s} + b \cdot \vec{j_s} + c \cdot \vec{k_s} \quad \text{avec } (a, b, c) \text{ constants}$$

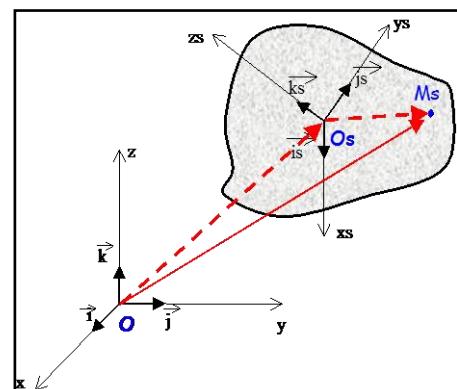
Dans le repère **R_o** on a :

$$\vec{O M_s} = \vec{O O_s} + \vec{O_s M_s} \quad (\text{décomposition de Chasles})$$

La connaissance de la position de **R_s** par rapport à **R_o** permet de déterminer la position de tous les points du solide.

La cinématique du solide revient à :

- Déterminer les caractéristiques d'un point particulier du solide : le point origine **O_s** du repère **R_s**.
- Déterminer l'orientation du repère **R_s** par rapport à **R_o** au cours du temps.



3 - CHAMP DES VITESSES D'UN SOLIDE

Le mouvement de \mathbf{R}_s par rapport à \mathbf{R}_o peut être de deux natures :

- Variation de \mathbf{O}_s par rapport à \mathbf{O} .
- Variation des vecteurs de base de \mathbf{R}_s (i_s, j_s, k_s) par rapport aux vecteurs de base de \mathbf{R}_o (i, j, k).

La variation de \mathbf{O}_s par rapport à \mathbf{O} est repérée par une distance et sa vitesse instantanée est décrit par le vecteur : $\overrightarrow{\mathbf{V}}_{\mathbf{O}_s \in \mathbf{S}/\mathbf{R}_o}$.

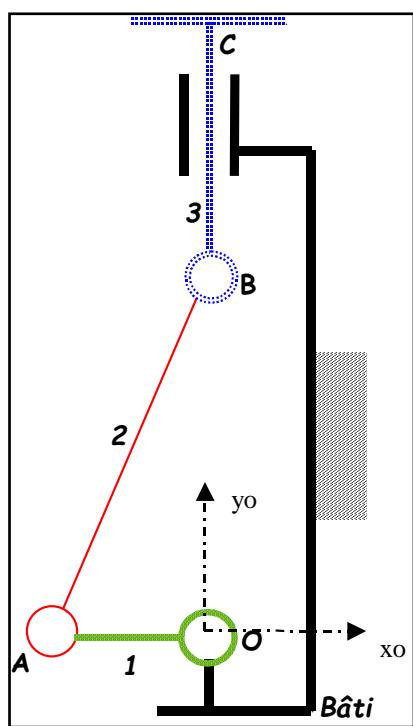
La variation des vecteurs de base de \mathbf{R}_s par rapport aux vecteurs de base de \mathbf{R}_o est repérée par un angle. Sa variation instantanée est décrit par le vecteur vitesse de Rotation : $\overrightarrow{\Omega}_{\mathbf{R}_s/\mathbf{R}_o}$

La vitesse d'un point quelconque \mathbf{M} du Solide est définie par :

$$\overrightarrow{\mathbf{V}}_{\mathbf{M}_s \in \mathbf{S}/\mathbf{R}_o} = \overrightarrow{\mathbf{V}}_{\mathbf{O}_s \in \mathbf{S}/\mathbf{R}_o} + \overrightarrow{\mathbf{M}_s \mathbf{O}_s} \times \overrightarrow{\Omega}_{\mathbf{R}_s/\mathbf{R}_o}$$

Relation fondamentale de la cinématique

Application :



Pour vous entraîner à cette notation, déterminer les relations fondamentales existantes au sein du système bielle - manivelle (une relation par solide).

A chaque solide est lié un repère (non représenté), noté :

Pour le Bâti : \mathbf{R}_0

Pour la Manivelle 1 : \mathbf{R}_1

Pour la Bielle 2 : \mathbf{R}_2

Pour le Piston 3 : \mathbf{R}_3

Pour la manivelle, deux points sont représentatifs de sa géométrie: les points \mathbf{O} et \mathbf{A} .

$$\text{D'où : } \overrightarrow{\mathbf{V}}_{\mathbf{A} \in 1/\mathbf{R}_0} = \overrightarrow{\mathbf{V}}_{\mathbf{O} \in 1/\mathbf{R}_0} + \overrightarrow{\mathbf{AO}} \times \overrightarrow{\Omega}_{\mathbf{R}_1/\mathbf{R}_0} \quad \boxed{1}$$

Pour la bielle, les deux points représentatifs de sa géométrie sont \mathbf{A} et \mathbf{B} .

$$\text{D'où : } \overrightarrow{\mathbf{V}}_{\mathbf{B} \in 1/\mathbf{R}_0} = \overrightarrow{\mathbf{V}}_{\mathbf{A} \in 1/\mathbf{R}_0} + \overrightarrow{\mathbf{BA}} \times \overrightarrow{\Omega}_{\mathbf{R}_2/\mathbf{R}_0} \quad \boxed{2}$$

Pour le piston, les deux points représentatifs sont \mathbf{B} et \mathbf{C} .

$$\text{D'où : } \overrightarrow{\mathbf{V}}_{\mathbf{C} \in 1/\mathbf{R}_0} = \overrightarrow{\mathbf{V}}_{\mathbf{B} \in 1/\mathbf{R}_0} + \overrightarrow{\mathbf{CB}} \times \overrightarrow{\Omega}_{\mathbf{R}_3/\mathbf{R}_0} \quad \boxed{3}$$

L'observation permet de définir certaines propriétés sur les mouvements. Notamment, dans le mouvement de 1 par rapport au **bâti**, le point \mathbf{O} a une vitesse nulle (point fixe). L'équation **1** devient :

$$\overrightarrow{\mathbf{V}}_{\mathbf{A} \in 1/\mathbf{R}_0} = \overrightarrow{\mathbf{AO}} \times \overrightarrow{\Omega}_{\mathbf{R}_1/\mathbf{R}_0}$$

C'est l'équation cinématique typique d'un **Mouvement de Rotation autour d'un axe fixe**.

Dans le mouvement de **3** par rapport au **bâti**, le solide ne change pas d'orientation. Il n'y a donc pas de variation angulaire entre \mathbf{R}_3 et le repère fixe \mathbf{R}_0 . Ce qui implique que $\overrightarrow{\Omega_{\mathbf{R}^3/\mathbf{R}^0}} = \mathbf{0}$.

L'équation 3 devient : $\overrightarrow{V_{C \in 1/\mathbf{R}_0}} = \overrightarrow{V_{B \in 1/\mathbf{R}_0}}$

Ce qui se traduit par le fait que tous les points de **3** ont la même vitesse instantanée. C'est l'équation cinématique typique d'un **Mouvement de Translation**.

L'ensemble des vecteurs vitesses instantanées d'un solide en mouvement est appelé le **Champ des Vecteurs Vitesses**.

4 - TORSEUR CINÉMATIQUE

Comme nous l'avons remarqué ci-dessus, la cinématique d'un solide est complètement définie si on connaît au moins deux caractéristiques cinématiques :

- ◆ La vitesse instantanée d'un point $\overrightarrow{V_{Ms \in S/\mathbf{R}_0}}$
- ◆ La vitesse de Rotation du solide par rapport au repère fixe $\overrightarrow{\Omega_{Rs/\mathbf{R}_0}}$.

Le **torseur cinématique** du Solide **S**, représente l'état cinématique du solide étudié, dont $\overrightarrow{V_{Ms \in S/\mathbf{R}_0}}$ et $\overrightarrow{\Omega_{Rs/\mathbf{R}_0}}$ sont les composantes.

NOTATION :

$$\boxed{\left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{V_{S/\mathbf{R}_0}} \\ M \end{array} \right\} : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{\Omega_{S/\mathbf{R}_0}} \\ \overrightarrow{V_{M \in S/\mathbf{R}_0}} \end{array} \right\}_{\mathbf{R}_0(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})}}$$

5 - CINÉMATIQUE DU SOLIDE EN TRANSLATION

5 – 1 Définition :

Soit **S** un Solide en mouvement dans un repère fixe \mathbf{R}_0 . On associe au solide **S**, le repère lié \mathbf{R}_s (Os, is, js, ks).

Le solide **S** est animé d'un **mouvement de translation**, si le champ des vecteurs vitesses à la forme suivante:

$$\text{Soit } Os \in S ; \forall Ms \in S \quad \overrightarrow{V_{Ms \in S/\mathbf{R}_0}} = \overrightarrow{V_{Os \in S/\mathbf{R}_0}}$$

Par identification avec la relation fondamentale de la cinématique, on remarque que le vecteur vitesse de Rotation est nul : $\overrightarrow{\Omega_{S/\mathbf{R}_0}} = \mathbf{0}$

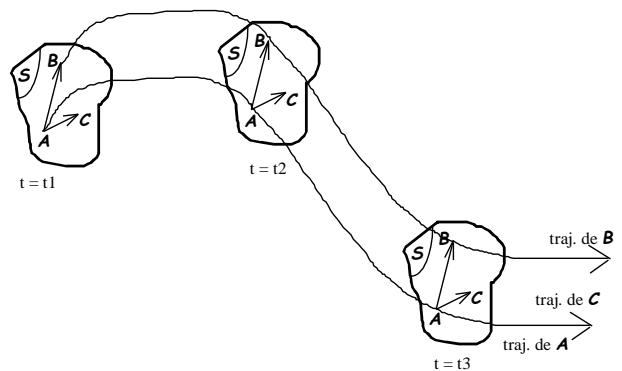
Le torseur cinématique d'un solide en translation s'écrit toujours :

$$\boxed{\left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{V_{S/\mathbf{R}_0}} \\ M \end{array} \right\} : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{0} \\ \overrightarrow{V_{M \in S/\mathbf{R}_0}} \end{array} \right\}_{\mathbf{R}_0(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})}}$$

5–2 Autre définition :

Soient **A**, **B** et **C** trois points non alignés du solide **S**, si les vecteurs \vec{AB} et \vec{AC} restent équipollents à eux-mêmes au cours du mouvement, le mouvement du solide **S** est un mouvement de translation. Et ceci quelle que soit la trajectoire, qui peut être quelconque.

La définition de la translation apparaît clairement comme une propriété sur l'orientation du solide uniquement. Les positions successivement prises par **S**, ne sont pas contenues dans la définition de la Translation. Pour définir la trajectoire, il suffit de déterminer le mouvement d'un des points du solide.



5–3 Différents types de translation :

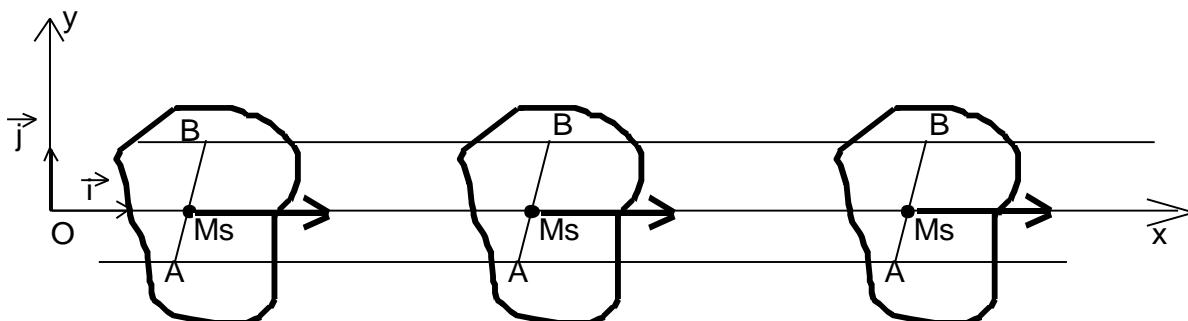
On parle de **translation plane** lorsque les trajectoires des points du solide restent dans un plan fixe (cas de la figure ci-dessus).

On parle de **translation rectiligne** si les trajectoires des points du solide sont des droites parallèles.

Exemple : Translation Rectiligne uniforme suivant l'axe x

Rectiligne : La trajectoire est une droite.

Uniforme : Le champ des Vecteurs Vitesses est constant au cours du temps.



Soit **Ms** un point du solide tel que : $OMs = xm \cdot i$

$$\text{On a : } \overrightarrow{V_{Ms \in S/Ro}} = \frac{d\overrightarrow{xm}}{dt} \cdot i$$

Comme la vitesse est uniforme, la dérivée de xm par rapport au temps est égale à une constante.

$$\frac{d\overrightarrow{xm}}{dt} = \text{cste} = \overrightarrow{vo}$$

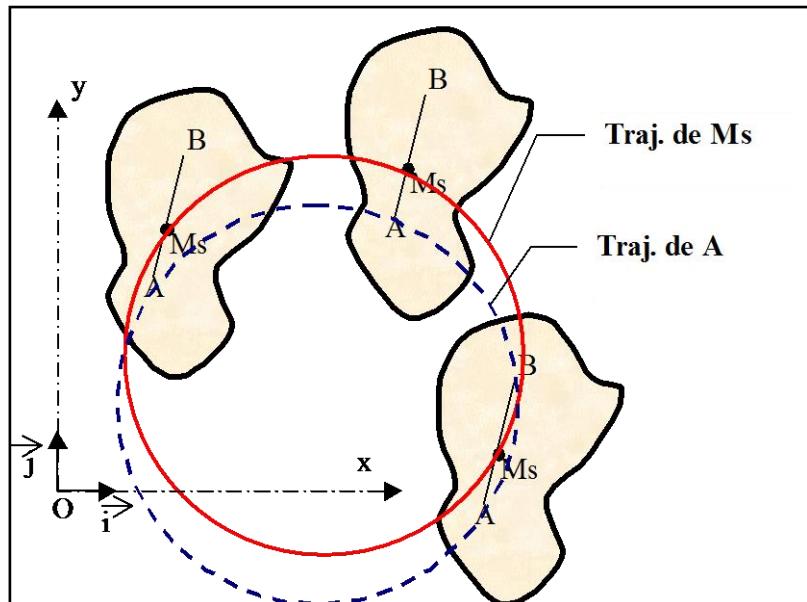
L'équation du mouvement s'écrit $\overrightarrow{xm} = \overrightarrow{vo} \cdot t + \overrightarrow{x_0}$
 $\overrightarrow{x_0}$ étant une constante initiale (à l'instant $t = 0$).

Conséquence :

$$\xrightarrow{\text{L'accélération est nulle}} \overrightarrow{\Gamma_{Ms \in S/Ro}} = \overrightarrow{0}$$

On parle de **translation circulaire** lorsque les trajectoires des points du solide sont des cercles de diamètre identique (cas de l'essuie-glace étudié ci-dessous).

Il s'agit d'un mouvement assez particulier, qu'il faut savoir repérer dans un mécanisme donné, pour pouvoir établir les propriétés particulières de la translation.



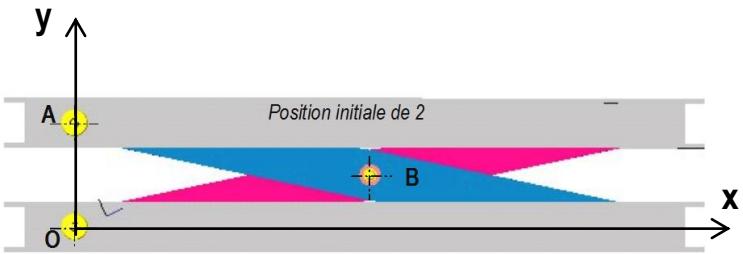
Application : Table élévatrice

1 - Vecteur position :

Le **vecteur position** permet de définir la position d'un point dans le repère de référence.

Par exemple, sur la table élévatrice,

le vecteur \overrightarrow{OB} permet de définir la **position du point B dans le repère** (O, x, y)



TRACEZ le vecteur \overrightarrow{OB} sur le dessin ci-contre.

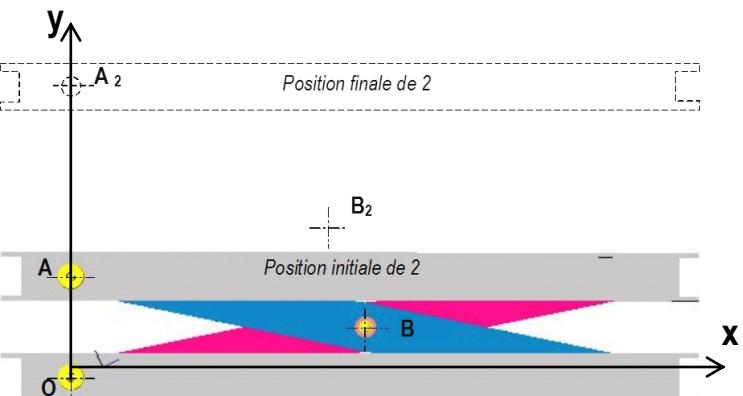
Sur ce même dessin, **MESUREZ** les projections en mm de \overrightarrow{OB} sur Ox et Oy et **ÉCRIVEZ** \overrightarrow{OB} en fonction de ses coordonnées (en mm) sur Ox et Oy : $\overrightarrow{OB} = \dots \overrightarrow{x} + \dots \overrightarrow{y}$

2 - Vecteur déplacement :

Le vecteur déplacement mesure la distance entre 2 positions d'un même point appartenant à un même solide en mouvement.

Par exemple, sur la table

élévatrice, le vecteur $\overrightarrow{BB_2}$ permet de **définir la distance entre la position initiale du point B et la position finale du point B dans le repère** (O, x, y)



TRACEZ le vecteur $\overrightarrow{BB_2}$ sur le dessin ci-dessus (page précédente).

Sur ce même dessin, **MESUREZ** les projections en mm de $\overrightarrow{BB_2}$ sur Ox et Oy et **ÉCRIVEZ** \overrightarrow{OB} en fonction de ses coordonnées sur Ox et Oy : $\overrightarrow{BB_2} = \dots \overrightarrow{x} + \dots \overrightarrow{y}$

3 - Vecteur vitesse \vec{V}_M

Rappel: Si $\overrightarrow{M_1 M_2}$ désigne le déplacement du point M pendant la durée $\Delta t = t_2 - t_1$, on définit la **vitesse**

moyenne de M_1 à M_2 par : $\vec{V}_{moy} = \frac{\overrightarrow{M_1 M_2}}{\Delta t}$

Si l'intervalle de temps Δt devient très petit (ou tend vers 0) la vitesse moyenne tend vers la **vitesse**

instantannée \vec{V}_M : $\vec{V}_M = \frac{d(\overrightarrow{OM})}{dt}$ la norme \vec{V}_M de s'exprime en m / s

La vitesse instantannée \vec{V}_M est la dérivée par rapport au temps du vecteur position \overrightarrow{OM}

Si le vecteur \vec{V}_M a pour coordonnées X_M et Y_M alors les coordonnées du vecteur vitesse seront obtenues en dérivant X_M et Y_M par rapport au temps.

Sachant que la table met 10 s pour passer à la position finale 2 et que la distance (OB) réelle est de 900 mm, on demande :

- de **DETERMINER** les distances réelles (AA_2) et (BB_2) ;
- de **DETERMINER** les vitesses moyennes du point A et du point B.

Réponses:

$$AA_2 = \dots \text{mm} \text{ et } BB_2 = \dots \text{mm}$$

$$V_{moy(A)} = \dots \text{mm / s} \text{ et } V_{moy(B)} = \dots \text{mm / s}$$

Sachant que les coordonnées du point B (en mm) dans le repère (O, \vec{x} , \vec{y}) sont données par les relations (en début de phase de montée) :

$$X_B = 880 - 1,5 t^2 \quad (t = \text{temps en seconde})$$

$$Y_B = 152 + 10 t^2 \quad (t = \text{temps en seconde})$$

DETERMINEZ les coordonnées du vecteur vitesse en B \vec{V}_B (en dérivant les coordonnées X_B et Y_B par rapport au temps t)

Réponse: $\vec{V}_B = \dots \vec{x} + \dots \vec{y}$

La vitesse \vec{V}_B est maximum pour $t = 2$ s, **DETERMINEZ** les coordonnées de \vec{V}_B (en mm / s)

Réponse: Sur Ox $V_{Bx} = \dots \text{mm / s}$ et sur Oy $V_{By} = \dots \text{mm / s}$

Sachant que la norme de \vec{V}_B se détermine par $\|\vec{V}_B\| = \sqrt{V_{Bx}^2 + V_{By}^2}$

DETERMINEZ la norme de \vec{V}_B en mm / s : $\|\vec{V}_B\| = \dots \text{mm / s}$

6 – 2 Vecteur accélération \vec{a}_M

Rappel:

L'accélération \vec{a}_M s'obtient en dérivant (par rapport au temps) la vitesse \vec{V}_M .

L'accélération instantannée \vec{a}_M est la dérivée par rapport au temps du vecteur vitesse \vec{V}_M .

$$\vec{a}_M = \frac{d(\vec{V}_M)}{dt} \text{ la norme } \vec{a}_M \text{ de s'exprime en m / s}^2$$

REPRENEZ les coordonnées de \vec{V}_B

A partir de ces coordonnées, **DETERMINEZ** les coordonnées du vecteur accélération \vec{a}_B

Réponse : $\vec{a}_B = \dots \vec{x} + \dots \vec{y}$

DETERMINEZ la norme du vecteur accélération \vec{a}_B (en mm / s²) au point B.

Réponse : $\|\vec{a}_B\| = \dots \text{mm / s}^2$

Application : Translation circulaire / Etude d'un essuie-glace d'autobus.

Le système proposé sur la figure ci-dessous à échelle réduite est un essuie glace d'autobus.

Les biellettes 2 et 3 (une biellette d'entraînement, une biellette de maintien), sont

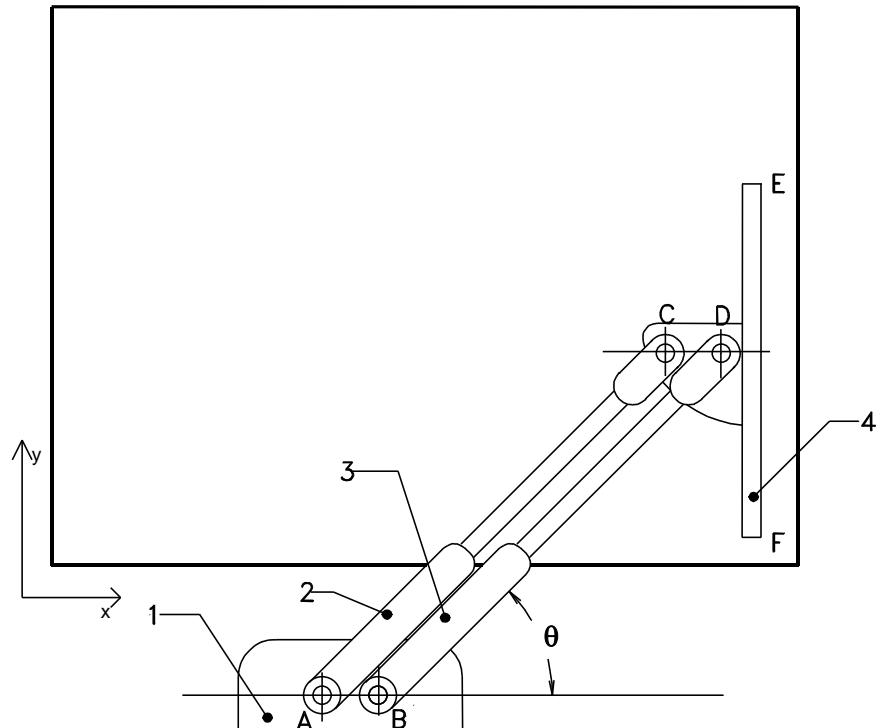
articulées respectivement en A et en B, par rapport à la carrosserie du bus (1). Elles entraînent en C et D l'essuie-glace 4. La vitre du pare-brise est supposée plane. Les liaisons en A, B, C et D sont des liaisons pivots. Les dimensions nécessaires seront relevées sur la figure.

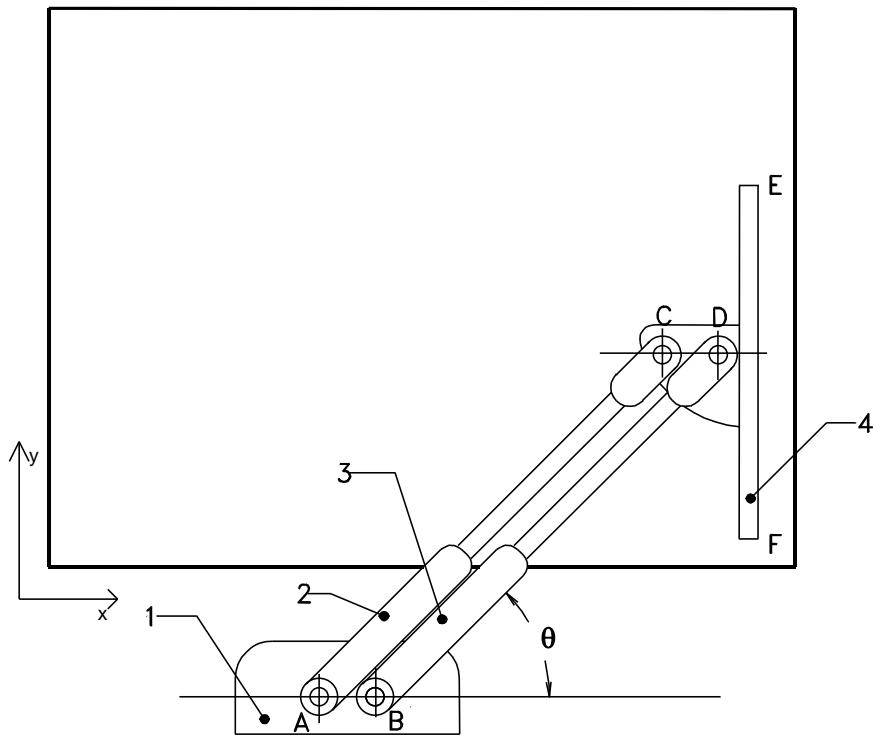
1) Déterminer la trajectoire du point D.

2) Quelles sont les conditions sur les longueurs de bielette pour que l'essuie-glace soit en translation circulaire ?

3) Tracer les trajectoires des points E et F dans le mouvement de 4 par rapport à 1 (les conditions du 2 étant réalisées).

4) Mettre en place pour la position représentée sur la figure, les vecteurs vitesses aux points C, D, E et F.





6 - CINÉMATIQUE DU SOLIDE EN ROTATION AUTOUR D'UN AXE FIXE.

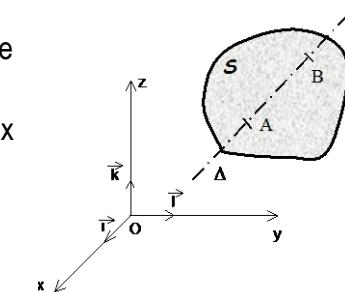
6 – 1 Définition :

Un solide S est animé d'un mouvement de Rotation autour d'un axe fixe dans \mathcal{R}_0 , noté Δ , si :

$\exists A, B \in S$ tels que A et B coïncident en permanence avec deux points A_0 et B_0 de Δ .

Conséquence

A et B sont deux points fixes. D'où : $\overrightarrow{V_{A \in S/R_0}} = \overrightarrow{0}$ et $\overrightarrow{V_{B \in S/R_0}} = \overrightarrow{0}$
De même pour tous les points situés sur l'axe Δ .



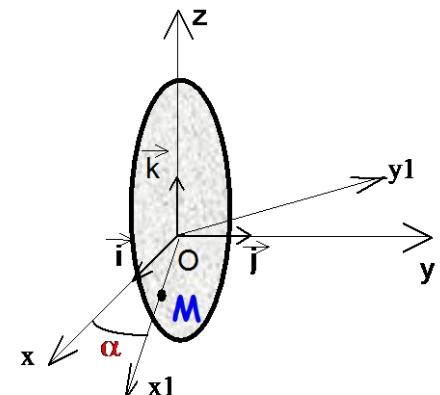
6 – 2 Champ des vitesses du solide en rotation autour d'un axe fixe.

Lorsqu'on étudie un solide en Rotation autour d'un axe fixe, on lie un repère au solide de telle façon que l'axe de rotation soit un des axes du repère. De plus, si l'ensemble de l'étude cinématique le permet, il vaut mieux aussi utiliser l'axe Δ comme axe du repère fixe \mathcal{R}_0 .

Dans l'étude qui suit, on va supposer un solide en rotation autour de l'axe z (O, \vec{k}) du repère fixe. Le repère lié à S est défini par \mathcal{R}_1 ($O, \vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}$). Dans ce cas, la vitesse d'un point M du Solide (de coordonnées xm et ym) est définie par :

$$\overrightarrow{V_{M \in S/R_0}} = \frac{dxm}{dt} \vec{i} + \frac{dym}{dt} \vec{j}$$

Si on introduit l'angle α , angle d'orientation entre le repère fixe \mathcal{R}_0 et le repère mobile \mathcal{R}_1 , le vecteur position a les coordonnées suivantes:



$$\overrightarrow{OM} = xm \cdot \vec{i} + ym \cdot \vec{j} = R \cdot \cos \alpha \cdot \vec{i} + R \cdot \sin \alpha \cdot \vec{j}$$

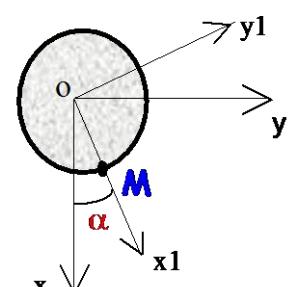
(xm, ym) sont appelées coordonnées cartésiennes.

(R, α) sont appelées coordonnées polaires.

Si le solide tourne autour de l'axe z , l'angle α varie en fonction du temps. Donc la vitesse du point M s'écrit :

$$\overrightarrow{V_{M \in S/R_0}} = -R \cdot \frac{d\alpha}{dt} \cdot \sin(\alpha) \cdot \vec{i} + R \cdot \frac{d\alpha}{dt} \cdot \cos(\alpha) \cdot \vec{j}$$

$$\text{Soit } \overrightarrow{V_{M \in S/R_0}} = -R \cdot \frac{d\alpha}{dt} \cdot (\sin(\alpha) \cdot \vec{i} - \cos(\alpha) \cdot \vec{j})$$



Il apparaît deux propriétés essentielles sur le champ des vecteurs vitesses d'un solide en rotation autour d'un axe fixe :

➤ La vitesse instantanée en M est proportionnelle à R , la distance du point M à l'axe passant par O .

➤ La vitesse instantanée en M est proportionnelle à $\frac{d\alpha}{dt}$, qui représente la variation instantanée de l'angle α .

Cette variation instantanée est définie comme la vitesse angulaire que l'on notera ω .

La vitesse de Rotation que l'on note $\overrightarrow{\Omega_{S/R_0}}$ est définie par :
$$\boxed{\overrightarrow{\Omega_{S/R_0}} = \frac{d\alpha}{dt} \cdot \vec{k}}$$

C'est un vecteur porté par l'axe de rotation.

$\overrightarrow{\Omega_{S/Ro}}$, \overrightarrow{OM} et $\overrightarrow{V_{M \in S/Ro}}$ doivent former un trièdre direct. Ce sont des vecteurs orthogonaux deux à deux. La relation vectorielle existante entre ces trois vecteurs est :

$$\boxed{\overrightarrow{V_{M \in S/Ro}} = \overrightarrow{\Omega_{S/Ro}} \times \overrightarrow{OM}}$$

Remarque

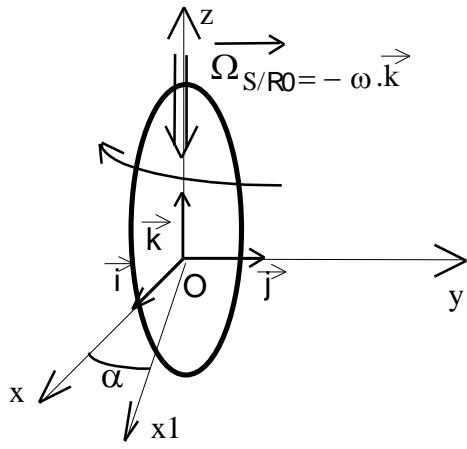
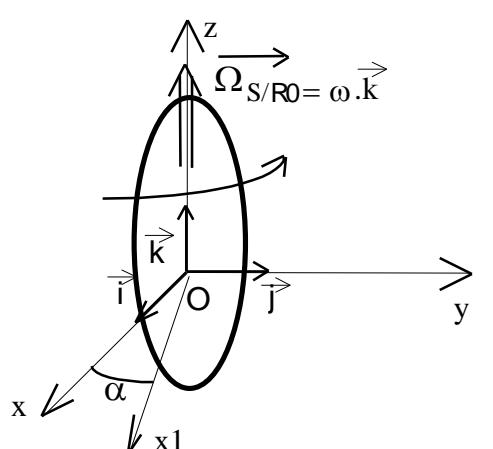
La relation fondamentale de la cinématique, vue dans le cadre général de la cinématique du solide s'écrit :

$$\overrightarrow{V_{M \in S/Ro}} = \overrightarrow{V_{O \in S/Ro}} + \overrightarrow{\Omega_{S/Ro}} \times \overrightarrow{OM}$$

Pour le solide en rotation autour de l'axe z, la vitesse du point O est nulle. On retrouve bien la relation 1

Le mouvement de Rotation est donc caractérisé par deux paramètres :

- L'axe de Rotation défini par un point et un vecteur unitaire (exemple : O, \vec{k})
- Le vecteur Rotation Instantanée $\overrightarrow{\Omega_{S/Ro}}$ porté par l'axe de rotation. Son signe définit le sens de rotation. (-positif si le sens est direct ; -négatif si le sens est inverse)



Sens Inverse

6 – 3 Torseur cinématique du mouvement de rotation autour d'un axe fixe

On définit le Torseur Cinématique en un point comme un ensemble, caractérisant le mouvement du solide en ce point. Le Torseur est composé d'une résultante, qui est le vecteur vitesse de Rotation instantanée et d'un Moment, qui est la vitesse instantanée au point considéré. Soit :

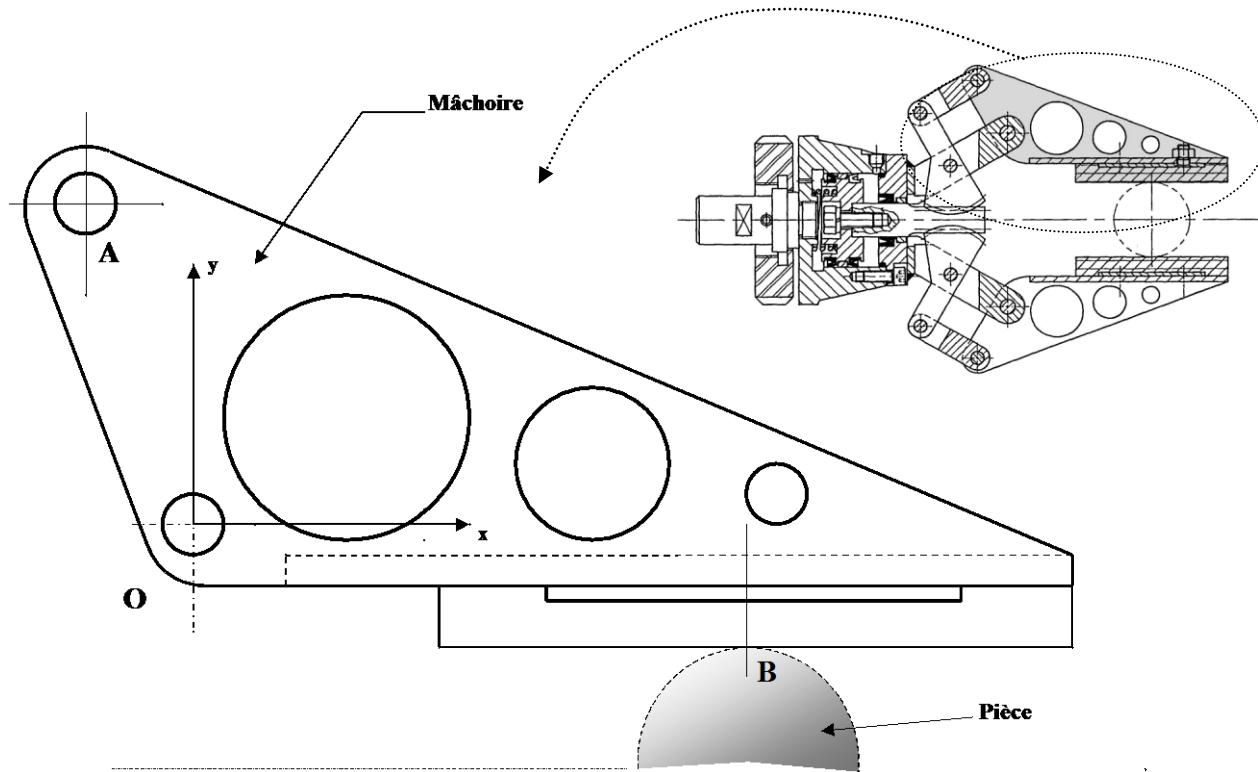
$$\left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{V_{S/Ro}} \\ M \end{array} \right\} : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{\Omega_{S/Ro}} \\ \overrightarrow{V_{M \in S/Ro}} \\ \Re o(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}) \end{array} \right\}$$

Pour le solide en rotation autour d'un axe fixe, comme $\overrightarrow{\Omega_{S/Ro}}$ et $\overrightarrow{V_{M \in S/Ro}}$ sont deux vecteurs orthogonaux, le Torseur Cinématique est un glisseur, dont une des réductions peut s'écrire :

$$\left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{V_{S/Ro}} \\ Point \text{ où } passe \text{ l'axe de rotation} \end{array} \right\} : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{\Omega_{S/Ro}} = \frac{d\alpha}{dt} \cdot \vec{k} \\ \vec{o} \\ \Re o(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}) \end{array} \right\} \quad \begin{array}{l} \text{Vecteur unitaire de l'axe de rotation} \\ \downarrow \end{array}$$

7 - APPLICATION 1 : PINCE DE ROBOT

Etude du mouvement de rotation de la mâchoire d'une pince de Robot. La pince est en train de se fermer.



La mâchoire est une pièce en rotation autour de l'axe z (O, \vec{k}) perpendiculaire au plan ci-dessus. Les données sont les suivantes:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OA} &= -16. \vec{i} + 47. \vec{j} \quad (\text{en mm}) \\ \overrightarrow{OB} &= 84. \vec{i} - 18. \vec{j}\end{aligned}$$

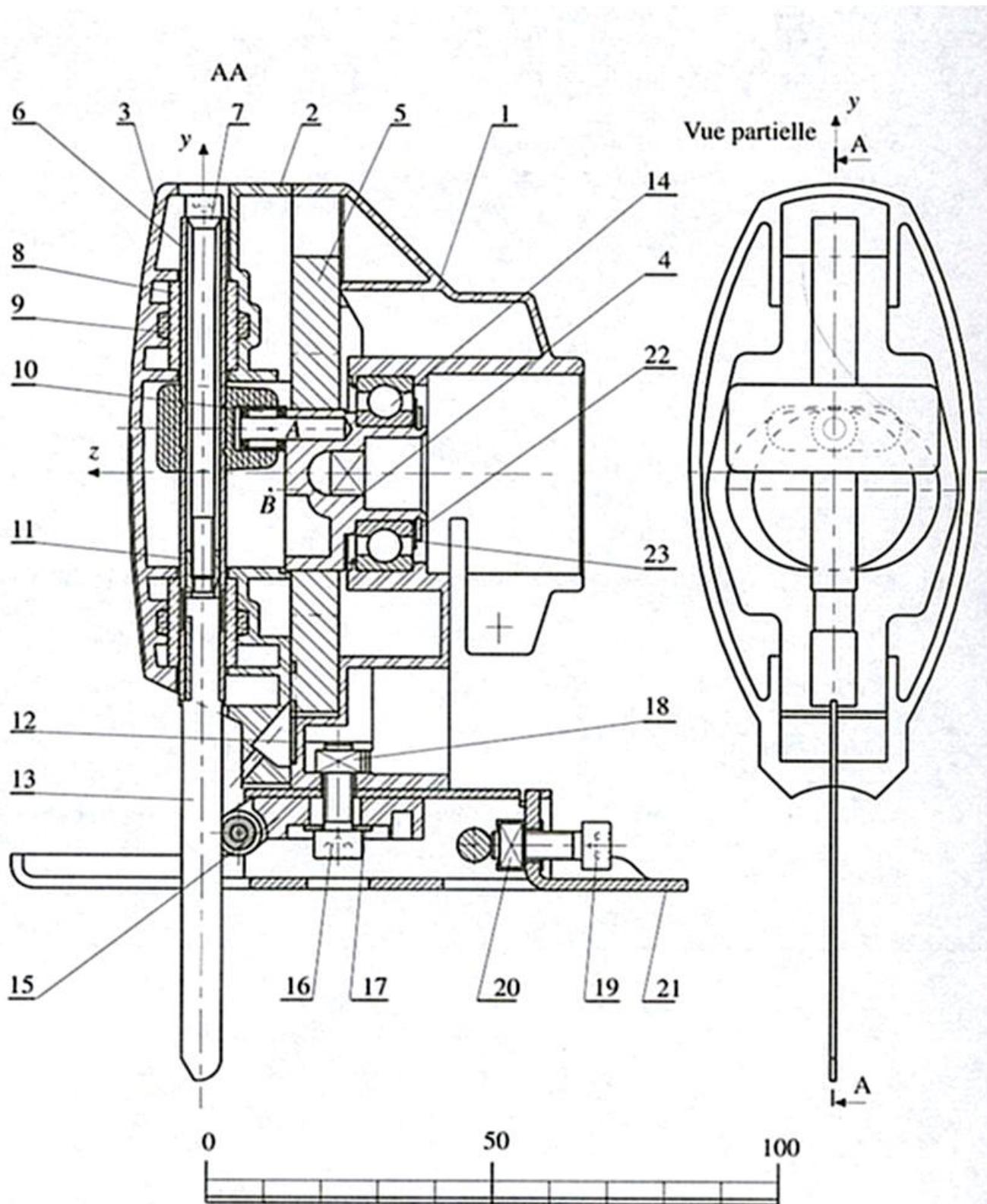
Le module de la vitesse instantanée en A est égale à $0,2 \text{ m.s}^{-1}$.

- 1) Déterminer le Vecteur Vitesse en A, et le tracer.
- 2) Déterminer la vitesse angulaire ω et le vecteur Rotation Ω_{S/\vec{k}_O} .
- 3) En déduire la vitesse en B.
 - a)- Analytiquement.
 - b)- Graphiquement (par proportionnalité).
 - c)- Graphiquement (par équiprojectivité).

8 – APPLICATION 2 : SCIE SAUTEUSE

Ci-dessous est représenté un mécanisme de scie sauteuse portative.

Il se fixe par adhérence , du corps (1) sur un moteur dont l'extrémité carrée de l'arbre entraîne en rotation la pièce (4) . Guidée par un roulement (14), cette pièce tourne à une fréquence variable pouvant atteindre 3000 tr/mn.



La pièce (4) est munie d'un cylindre de centre B excentré par rapport à l'axe de la broche d'une valeur $e = 3 \text{ mm}$ et d'un maneton de centre A distant de $r = 8 \text{ mm}$ de l'axe de rotation .

Celui-ci , entouré d'une douille à aiguilles (10) coulisse dans une rainure , perpendiculaire au plan de coupe AA et solidaire de l'ensemble porte-scie. L'excentrique de centre B se loge dans un alésage oblong pratiqué dans (5) .Il entraîne cette pièce dans un mouvement de translation alternatif, opposé à celui de la scie, mais de moindre amplitude.

Rep.	Nb.	Désignation	Matière	Observations
1	1	Corps	Z-A4G	
2	1	Entretroise	Z-A4G	
3	1	Capot	Z-A4G	
4	1	Plateau excent.	35CD4	
5	1	Masse d'équilibrage	Acier fritté	
6	1	Broche	XC10	Baladeur surmoulé
7	1	Vis de lame		CHC M5 65
8	2	Coussinet	Bronze	Autolubrifiant
9	2	Jonc de coussinet		
10	1	Douille à aiguille		INA HK0408 TN
11	1	Douille à lame		
12	1	Plaquette	XC 38	Trempé-polished
13	1	Lame de scie		
14	1	Roulement		Serti dans 1
15	1	Doigts porte-poulie	Z-A4U1G	
16	1	Vis de fixation		CHC M 15
17	1	Rondelle		
18	1	Ecrou		Q M5
19	1	Vis de fixation		CHC M5 15
20	1	Ecrou		Q M5
21	1	Table mobile	E24	
22	1	Anneau élastique		
23	1	Rondelle déflecteur		

But de l'étude :

Rechercher sur la durée d'un cycle (coupe et remontée de la lame) la **zone dans laquelle la vitesse de coupe est supérieure à la vitesse de coupe du matériau** (condition d'utilisation correcte de l'appareil)

Hypothèses :

- $(\mathbf{O}, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$: repère lié au corps (1) ;
- $(\mathbf{O}, \vec{x}_4, \vec{y}_4, \vec{z})$: repère tournant lié à l'arbre (4) ;
- Mouvement du moteur : Rotation uniforme $N = 1000 \text{ tr/mn}$;
- Origine des temps : $t = 0$
- Origine des espaces angulaires : $\alpha_0 = \pi/2$, ce qui correspond au point mort haut .

Questions :

- a) Etablir le schéma cinématique minimal du mécanisme en 2 vues
- b) Ecrire la loi du mouvement du moteur en fonction de t (temps en seconde) et de ω (en rad/s)
- c) Ecrire les expressions littérales :
 - de la position de la lame ;
 - de vitesse de la lame ;
 - de l'accélération de la lame.
- d) Tracer les courbes de la position, de la vitesse et de l'accélération de la lame.

Application : Table vibrante

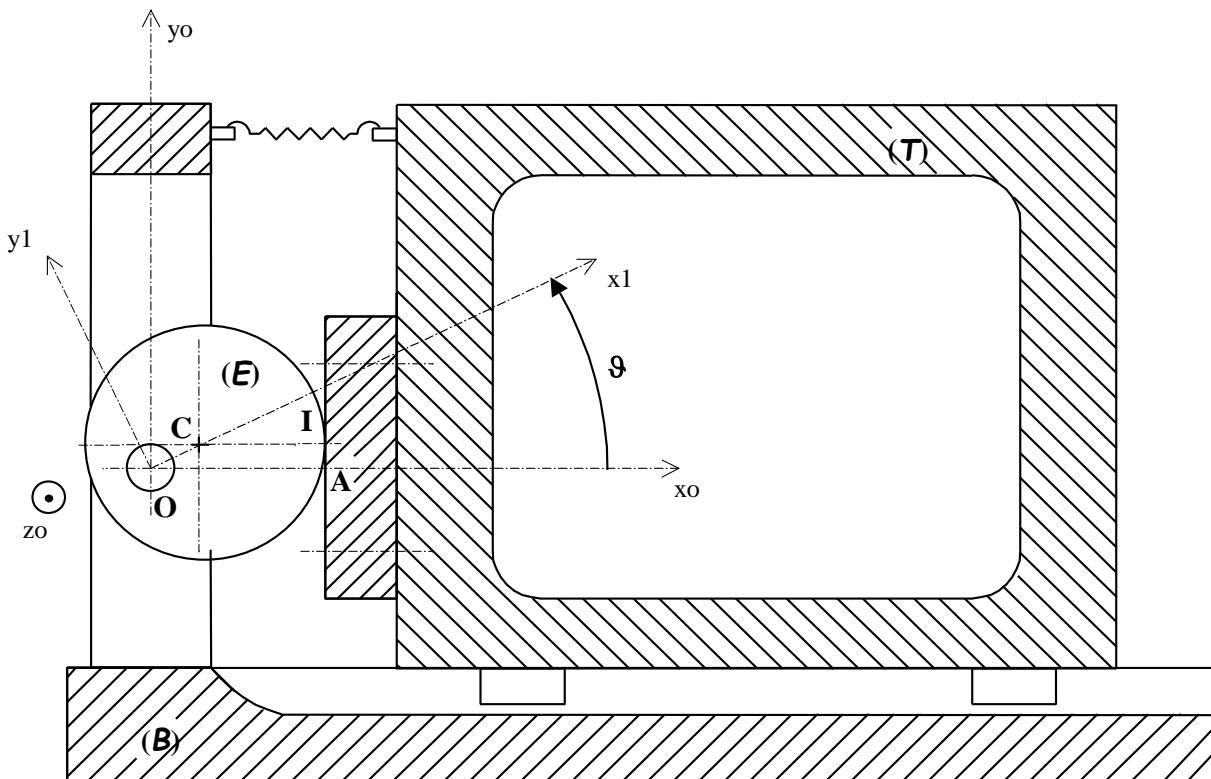
La figure ci-dessous représente un dispositif de commande de table vibrante.

L'excentrique (E) est un disque de centre C et de rayon a , qui tourne autour de l'axe (O , \vec{z}_o) fixe par rapport au bâti (B).

La table schématisée par le rectangle (T) est en liaison glissière d'axe (O , \vec{x}_o) avec le bâti (B).

Le ressort assure le maintien du contact entre (E) et (T).

L'excentration OC vaut $a/2$.



Soit \mathcal{R}_o (O , \vec{x}_o , \vec{y}_o , \vec{z}_o) le repère lié au bâti et \mathcal{R}_1 (O , \vec{x}_1 , \vec{y}_1 , \vec{z}_1) le repère lié à l'excentrique.
Soit A le point de la table (T) du plan de contact avec l'excentrique (E), situé sur l'axe (O , \vec{x}_o).

On pose : $\overrightarrow{OA} = \mathbf{x}(t) \cdot \vec{x}_o$ et $\vartheta = (\vec{x}_o, \vec{x}_1)$ avec $\vartheta = \omega \cdot t$ (ω constante)

Rayon de l'excentrique : $a = 10 \text{ mm}$;

Vitesse de rotation uniforme de l'excentrique : $\omega = 10,47 \text{ rad.s}^{-1}$ ($= 100 \text{ tr/min}$).

Questions:

- 1) Exprimer $x(t)$ en fonction de a , ω et t .
- 2) Construire la courbe représentative de la fonction $x(t)$ pour $t \in [0 ; 0,6]$, t exprimé en secondes.
- 3) Exprimer le vecteur vitesse du point A par rapport au bâti : $\overrightarrow{V_{A/Ro}}$.
- 4) Construire la courbe représentative de la valeur algébrique $v(t)$ du vecteur vitesse $\overrightarrow{V_{A/Ro}} = v(t) \cdot \vec{x}_o$ pour $t \in [0 ; 0,6]$, t en secondes.
- 5) Exprimer le vecteur accélération du point A par rapport au bâti : $\overrightarrow{\Gamma_{A/Ro}}$.
- 6) Construire la courbe représentative de la valeur algébrique $\gamma(t)$ du vecteur accélération $\overrightarrow{\Gamma_{A/Ro}} = \gamma(t) \cdot \vec{x}_o$ pour $t \in [0 ; 0,6]$ (t en secondes).

COMPOSITION DES MOUVEMENTS

1 – Définitions :

La transmission d'un mouvement ou la transformation d'un mouvement passe souvent par un ensemble de pièces intermédiaires en liaisons les unes par rapport aux autres. Cela se justifie, par la difficile adaptation directe entre un actionneur et l'effecteur du mécanisme.

Dans un système mécanique on peut qualifier le mouvement de deux manières :

ABSOLUE : Il s'agit de toute caractéristique cinématique déterminée par rapport au repère fixe.

Exemple:

- $\overrightarrow{V_A \in S_1 / R_0}$: Vitesse du point A appartenant au solide **S1** par rapport au repère fixe **R0**.

RELATIF : toute caractéristique cinématique déterminée par rapport à un repère mobile (un solide auquel on aura associé un repère). Il faudra bien veiller à identifier le repère mobile, car il peut exister plusieurs mouvements relatifs.

Exemple:

- $\overrightarrow{V_A \in S_1 / S_2}$: Vitesse du point A appartenant au solide **S1** par rapport au solide **S2**.

Remarque :

Il existe éventuellement un troisième terme, dont l'intérêt est essentiellement pédagogique :

ENTRAINEMENT : On qualifiera de caractéristique d'entraînement, tout terme cinématique ayant une quelconque influence sur le mouvement de la pièce étudiée.

La vitesse d'entraînement est en fait une vitesse absolue particulière.

2 - Exemples de composition de vitesses :

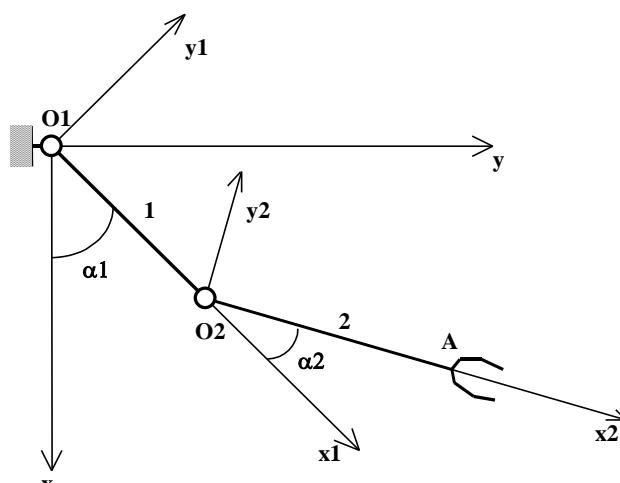
- Exemple 1 : Etude d'un bras articulé.

Le bras 1 est articulé en **O₁** par rapport au bâti.
Le bras 2 est articulé en **A** par rapport au bras 1.

Les angles α_1 et α_2 varient au cours du temps.

Le mouvement du bras 1 par rapport au bâti (supposé fixe) est un **mouvement Absolu**, que l'on peut décrire comme un mouvement de rotation autour d'un axe fixe (**O₁, ẑ**).

Le mouvement du bras 2 par rapport au bâti est aussi un **mouvement Absolu**. Par contre, il est impossible de qualifier simplement ce mouvement. C'est un mouvement plan sur plan puisque le bras 2 reste dans le plan (**O₁, x̂, ŷ**) quels que soient les angles α_1 et α_2 .



Le mouvement du bras 2 par rapport au bras 1 est un **mouvement Relatif**, que l'on peut décrire comme un mouvement de rotation autour de l'axe (**O₂, ẑ**).

Il existe un mouvement d'entraînement dû à l'influence du mouvement absolu de 1 sur le bras 2. Pour s'en convaincre et faire apparaître uniquement le **mouvement d'entraînement**, il suffit d'annuler le mouvement relatif entre 2 et 1 $\alpha_2 = \text{cste.}$

Dans ce cas le bras 2 se comporte comme une extension du bras 1 et subit le même mouvement que le bras 1. Le mouvement d'entraînement de 2 est le mouvement de rotation du bras 1 par rapport au bâti.

De cette étude simple, on peut établir une constatation importante :

Le mouvement absolu du bras 2 par rapport au bâti est une combinaison du mouvement relatif du bras 2 par rapport au bras 1 et du mouvement absolu du bras 1 par rapport au bâti.

• Exemple 2 : Transformation de mouvement.

L'excentrique 1 est en Rotation uniforme autour de l'axe (O, z) par rapport au bâti. L'axe 2 est en translation rectiligne suivant l'axe (O, y) par rapport au bâti.

Soit $\mathbf{R}_0 = (\mathbf{O}, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ le repère fixe.

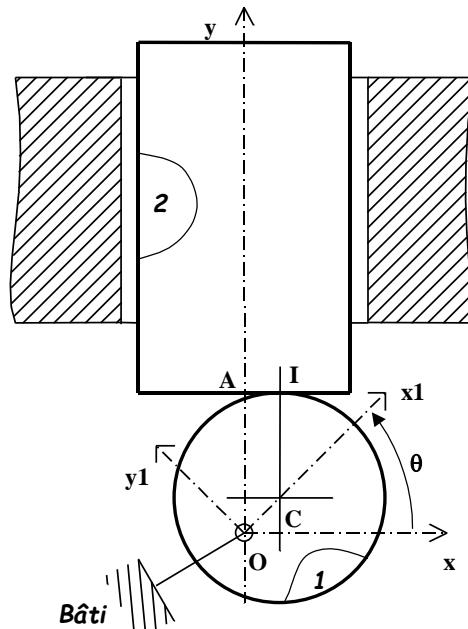
Soit $\mathbf{R}_1 = (\mathbf{O}_1, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ le repère lié à l'excentrique 1.

L'excentricité est $\overrightarrow{OC} = e \cdot \vec{x}_1$

Le mouvement de 1 par rapport au bâti est un mouvement absolu simple.

Le mouvement de 2 par rapport au bâti est un mouvement absolu simple.

Il reste que le mouvement de 2 par rapport au bâti est dû au mouvement de 1 par rapport au bâti. Pour déterminer ce mouvement de translation rectiligne, il faut passer par l'analyse cinématique du point de contact I.



La vitesse $\overrightarrow{V}_{I \in S_1 / R_0}$ est une vitesse Absolue, elle est perpendiculaire au vecteur position OI.

La vitesse $\overrightarrow{V}_{I \in S_2 / R_0}$ est une vitesse Absolue, elle est portée par l'axe y (translation).

Le point I se déplace. Il s'agit d'un point géométrique coïncidant entre un point réel de 1 et un point réel de 2 à un instant donné. Il est ici difficile de distinguer pour ce point une vitesse d'entraînement, puisque ce point I, pour une position donnée, appartient à la fois à la tige 2 et à l'excentrique 1.

$\overrightarrow{V}_{I \in S_2 / S_1}$ est la vitesse relative. Cette vitesse relative est, dans le cas (exclusif) de l'étude du point de contact, appelée vitesse de glissement.

Remarques générales sur la vitesse de glissement.

Rem 1 : Lorsque deux solides **S1** et **S2** sont en contact en un point I, il faut distinguer en ce point, à un instant donné :

- le point lié à **S1**
- le point lié à **S2**
- le point géométrique de contact, qui se déplace sur **S1** et sur **S2**.

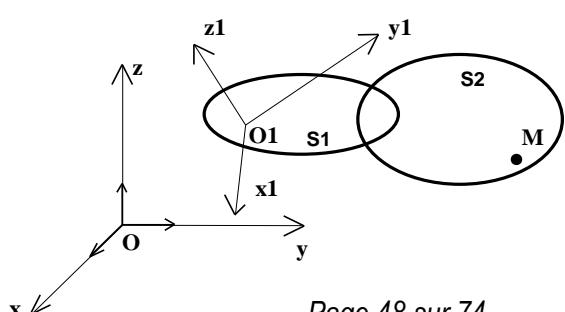
(Pour l'exemple exposé plus haut, le point géométrique I parcourt tout le périmètre de l'excentrique 1, et seulement un segment de droite de longueur $2.e$ sur le fond de la tige 2).

Rem 2 : On dira que **S2** roule sans glisser par rapport à **S1**, si : $\overrightarrow{V}_{I \in S_2 / S_1} = \vec{0}$

3 – Composition des vecteurs vitesse :

Soit $\mathbf{R}_0 = (\mathbf{O}, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ un repère fixe.

Soit $\mathbf{R}_1 = (\mathbf{O}_1, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ le repère lié au solide **S1**.



Le solide **S1** est en mouvement par rapport au repère fixe **R₀**, et **S2** est en mouvement par rapport au repère fixe **R₀** et au repère lié à **S1**, **R₁**.

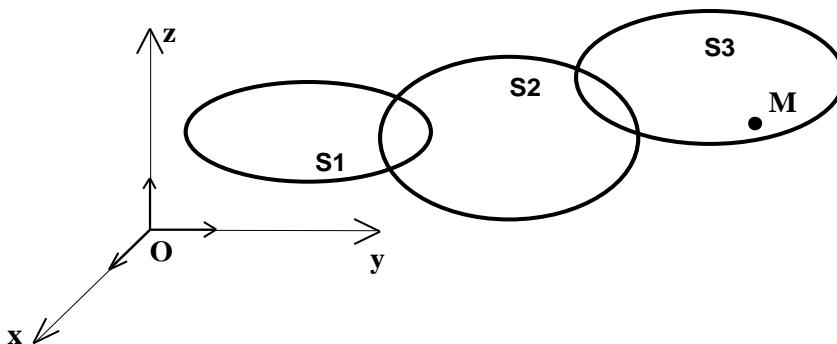
Soit **M** un point quelconque de **S2**. La relation de composition des vecteurs vitesses instantanées s'écrit:

$$\overrightarrow{V}_{M \in S_2 / R_0} = \overrightarrow{V}_{M \in S_2 / S_1} + \overrightarrow{V}_{M \in S_1 / R_0}$$

La vitesse d'entraînement au point **M** est ici claire. Pour la calculer, on suppose le point **M** appartenant au mouvement de **S1**, même si ce point n'appartient pas réellement à la matière de **S1**.

$\overrightarrow{V}_{M \in S_1 / R_0}$ doit se lire : vitesse du point **M** dans le mouvement de **S1** par rapport au repère fixe **R₀**.

Il est à remarquer, dans la relation de composition de vitesse, que les trois vitesses s'écrivent au même point **M**. Il y a égalité qu'à cette unique condition.



Cette relation peut se généraliser, évidemment, à plusieurs solides. Imaginons le cas de figure suivant : On peut écrire les deux relations de composition de vitesses suivantes :

$$\overrightarrow{V}_{M \in S_2 / R_0} = \overrightarrow{V}_{M \in S_2 / S_1} + \overrightarrow{V}_{M \in S_1 / R_0}$$

$$\overrightarrow{V}_{M \in S_3 / R_0} = \overrightarrow{V}_{M \in S_3 / S_2} + \overrightarrow{V}_{M \in S_2 / R_0}$$

En combinant ces deux relations, par l'intermédiaire de la vitesse $\overrightarrow{V}_{M \in S_2 / R_0}$ on aboutit à la relation :

$$\overrightarrow{V}_{M \in S_3 / R_0} = \overrightarrow{V}_{M \in S_3 / S_2} + \overrightarrow{V}_{M \in S_2 / S_1} + \overrightarrow{V}_{M \in S_2 / R_0}$$

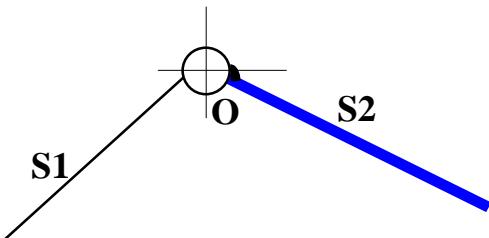
On remarque qu'il y a deux vitesses relatives et une vitesse d'entraînement.

Cas particulier : Composition des vecteurs vitesses au centre de liaison.

Si le centre de liaison est un point coïncidant avec les mêmes points de **S1** et de **S2**, à tout instant, alors la vitesse relative entre ces deux solides au centre de liaison est nulle, puisqu'il n'y a pas évolution.

Et donc: $\overrightarrow{V}_{M \in S_1 / R_0} = \overrightarrow{V}_{M \in S_2 / R_0}$

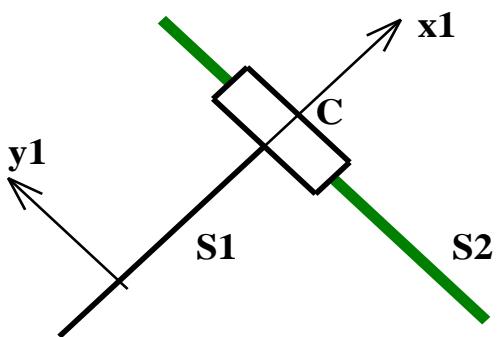
Application courante: Liaison Pivot.



Soit **O** le centre de liaison pivot entre **S1** et **S2** :

$$\overrightarrow{V_{O \in S_1 / R_0}} = \overrightarrow{V_{O \in S_2 / R_0}}$$

Etude d'une liaison glissière.



Lors de l'évolution de **S2** par rapport à **S1**, le centre de liaison **C** ne coïncide pas avec le même point de **S2**, il y a mouvement relatif (ou glissement puisque c'est le lieu du contact).

Toutefois le mouvement relatif de ce point est connu : c'est un mouvement rectiligne suivant la direction y_1 , ce qui indique la direction de la vitesse relative entre **S2** et **S1**.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{V_{C \in S_2 / R_0}} &= \overrightarrow{V_{C \in S_2 / S_1}} + \overrightarrow{V_{C \in S_1 / R_0}} \\ \overrightarrow{V_{C \in S_2 / R_0}} &= v \vec{y_1} + \overrightarrow{V_{C \in S_1 / R_0}} \end{aligned}$$

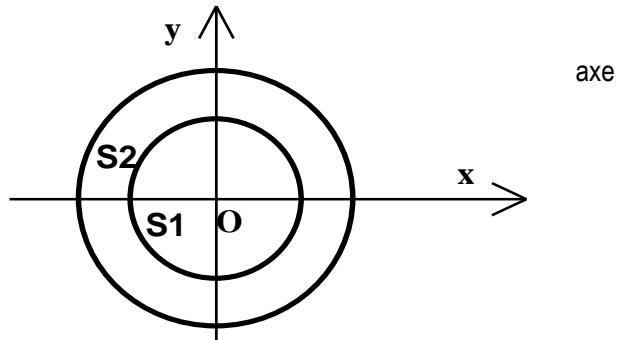
4 - Composition des Vecteurs Rotation :

Soit **S2** et **S1** deux solides en rotation autour du même fixe (O, \vec{z}).

La composition des vecteurs rotations s'écrit :

$$\overrightarrow{\Omega_{S_2 / R_0}} = \overrightarrow{\Omega_{S_2 / S_1}} + \overrightarrow{\Omega_{S_1 / R_0}}$$

La relation est indépendante du point considéré.



Selon le solide étudié, on qualifie les vecteurs Rotations des mêmes termes que les vecteurs vitesses. Soit:

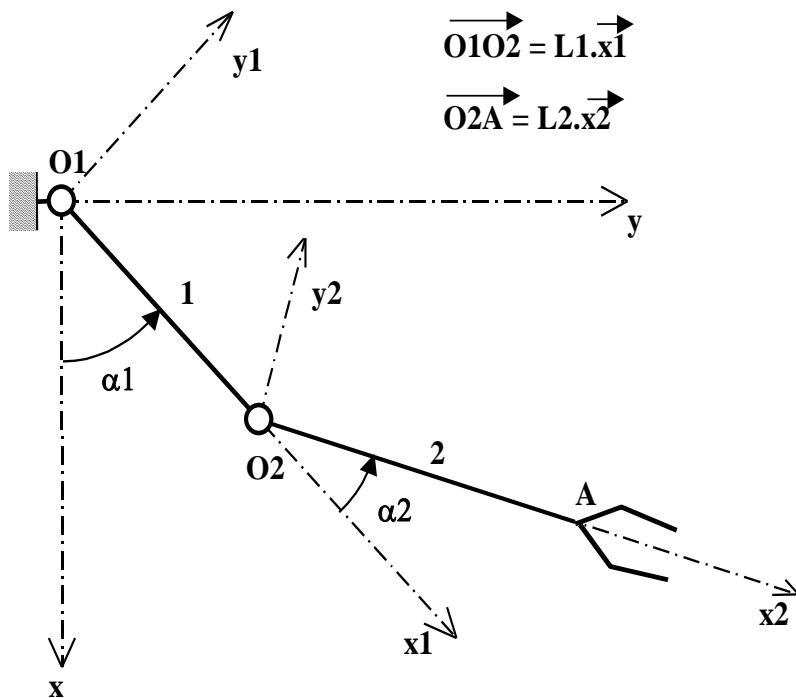
$\overrightarrow{\Omega_{S_2 / R_0}}$ est la vitesse de Rotation absolue de **S2** par rapport au repère fixe.

$\overrightarrow{\Omega_{S_2 / S_1}}$ est la vitesse de Rotation relative.

Eventuellement $\overrightarrow{\Omega_{S_1 / R_0}}$ est la vitesse de Rotation d'entraînement.

5 – Application 1 :

Reprendons l'étude du bras articulé. Nous allons calculer la vitesse du point **A** appartenant à **2** par rapport au repère fixe R_0 .



On définit les repères suivants :

$\mathbf{R}_0 = (\mathbf{O}_1, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ est le repère fixe lié au bâti.

$\mathbf{R}_1 = (\mathbf{O}_1, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z})$ est le repère lié au bras 1.

$\mathbf{R}_2 = (\mathbf{O}_2, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z})$ est le repère lié au bras 2.

Les angles α_1 et α_2 varient uniformément au cours du temps.

Pour déterminer la vitesse $\overrightarrow{\mathbf{V}}_{A \in 2/R_0}$, on utilise la relation de composition des vecteurs vitesses :

$$\overrightarrow{\mathbf{V}}_{A \in 2/R_0} = \overrightarrow{\mathbf{V}}_{A \in 2/1} + \overrightarrow{\mathbf{V}}_{A \in 1/R_0}$$

On demande de **calculer les vitesses** suivantes :

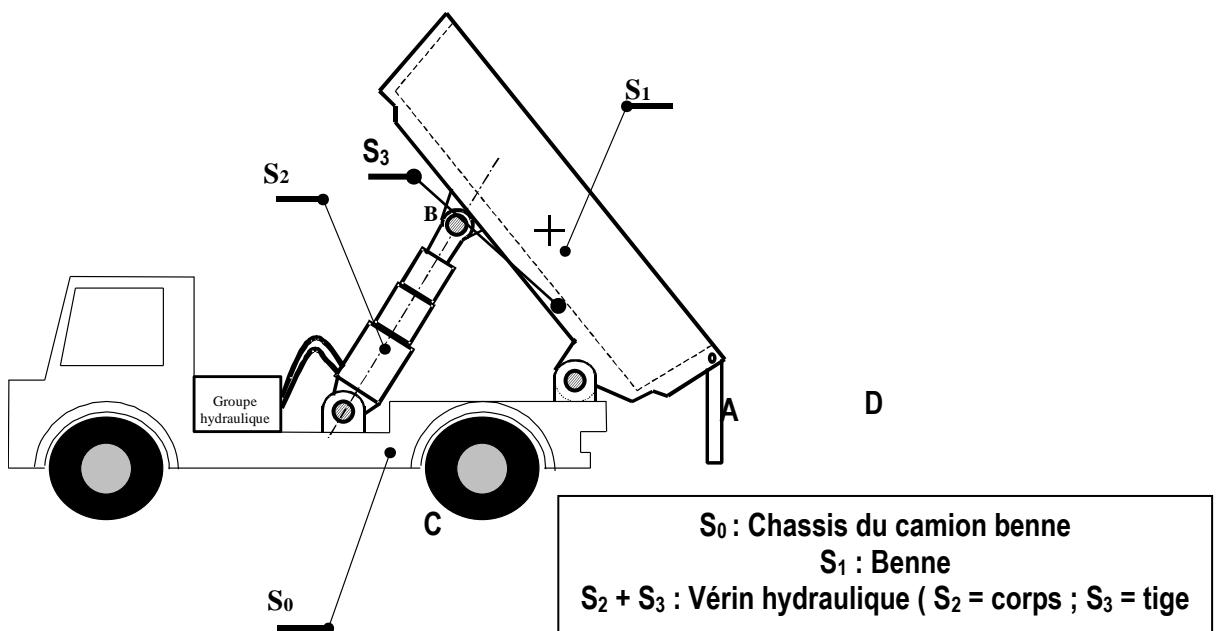
1) $\overrightarrow{\mathbf{V}}_{O_2 \in 1/R_0}$ et en déduire la vitesse $\overrightarrow{\mathbf{V}}_{A \in 1/R_0}$

2) La vitesse Relative $\overrightarrow{\mathbf{V}}_{A \in 2/1}$

3) La vitesse Absolue $\overrightarrow{\mathbf{V}}_{A \in 2/R_0}$

4) Déterminer graphiquement le C.I.R du bras 2 par rapport à \mathbf{R}_0 .

6 – Application 2 : Camion en déchargement



S₂ + S₃ est un vérin hydraulique dont le corps **S₂** est en liaison pivot en C avec **S₀** et la tige **S₃** est articulée en B sur la benne.

Au cours du déchargement , le solide **S₃** se déplace dans un mouvement de translation rectiligne de direction BC par rapport à **S₂**. La vitesse de ce mouvement est appelée vitesse de déploiement du vérin .

Son module V s'obtient par la relation $V = Q / S$.

Q est le débit volumique de l'huile injectée dans le vérin ($0,4 \cdot 10^6 \text{ mm}^3 / \text{s}$) et **S** est l'aire de la section du piston de diamètre 100 mm.

1) Déterminez $\overrightarrow{V_B} \in S_1 / R_0$

2) Déterminez $\overrightarrow{V_D} \in S_1 / R_0$

7 – Application 3 : Presse à genouillère

Nous nous plaçons dans le cas où la tige du vérin est en train de sortir.

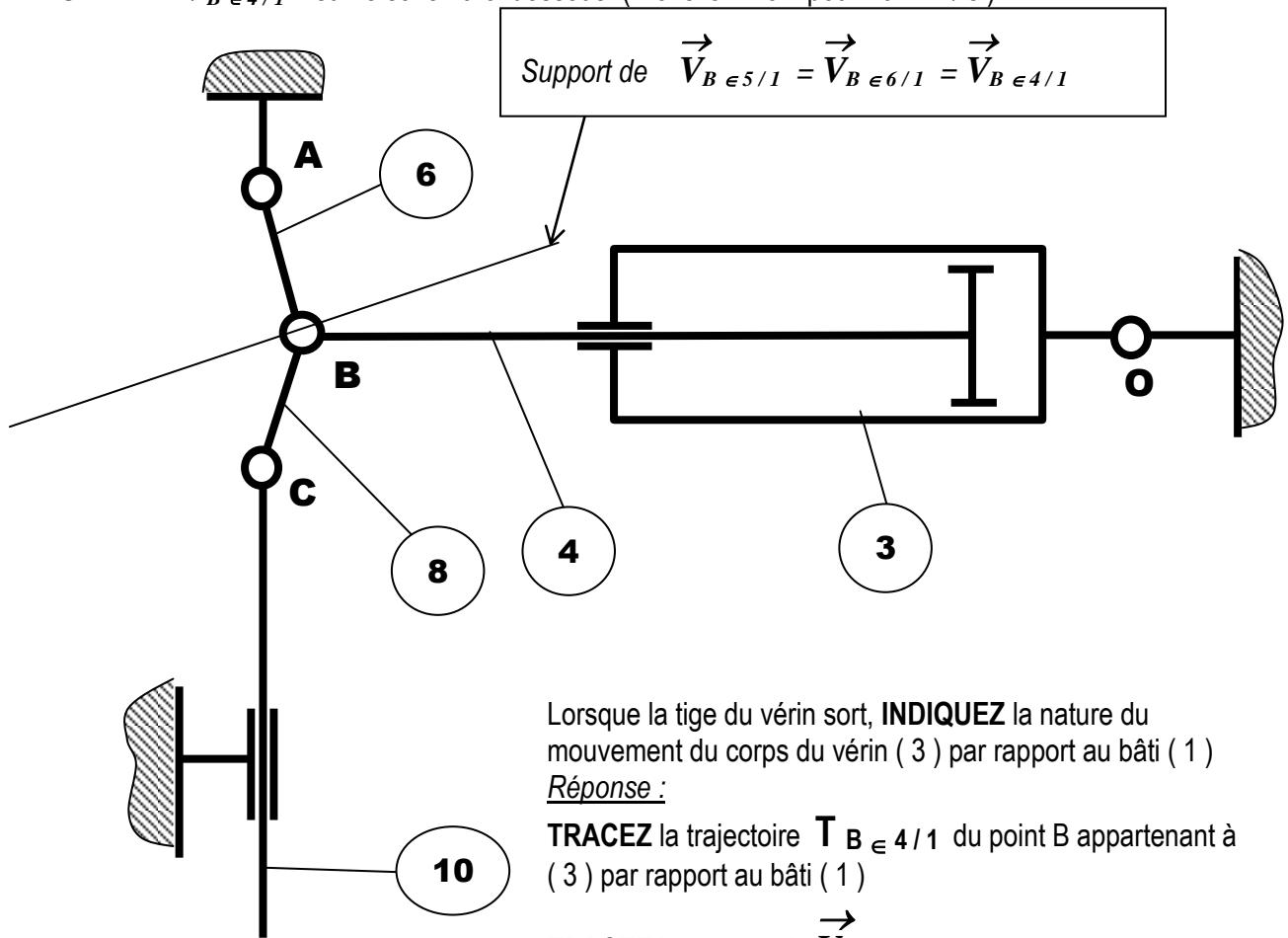
Nous voulons déterminer la vitesse de sortie de la tige ($\vec{V}_{B \in 4/3}$)

En appliquant le théorème de l'équiprojectivité des vitesses à la biellette (8), nous avons déterminé

graphiquement $\vec{V}_{B \in 5/1} = \vec{V}_{B \in 4/1} = \vec{V}_{B \in 6/1}$

$$\|\vec{V}_{B \in 5/1}\| = 45 \text{ mm/s}$$

REPRESENTEZ $\vec{V}_{B \in 4/1}$ sur le schéma ci-dessous (Echelle : 1 cm pour 10 mm/s)



TRACEZ la trajectoire $T_{B \in 4/3}$ du point B appartenant à (3) par rapport au corps du vérin (3)

TRACEZ le support de $\vec{V}_{B \in 4/3}$

ÉCRIVEZ la relation de composition des vitesses au point B puis **DETERMINEZ** la norme de $\vec{V}_{B \in 4/3}$

Réponse : Au point B nous avons :

Mouvement absolu = ;

Mouvement relatif = ;

Mouvement d'entraînement =

Relation de composition des vitesses en B :

$$\dots = \dots + \dots$$

De cette relation on déduit la norme de graphiquement.

$$\dots = \dots \text{ mm / s}$$

8 – Application 4 : Presse à décolleter

Reprendons l'exemple de la presse à décolleter.

Nous nous plaçons toujours dans le cas où la tige du vérin est en train de sortir.

Nous voulons déterminer la vitesse de sortie de la tige ($\vec{V}_{B \in 10/7}$)

En appliquant le théorème du centre instantané de rotation (CIR) au palonnier (14) , nous avons

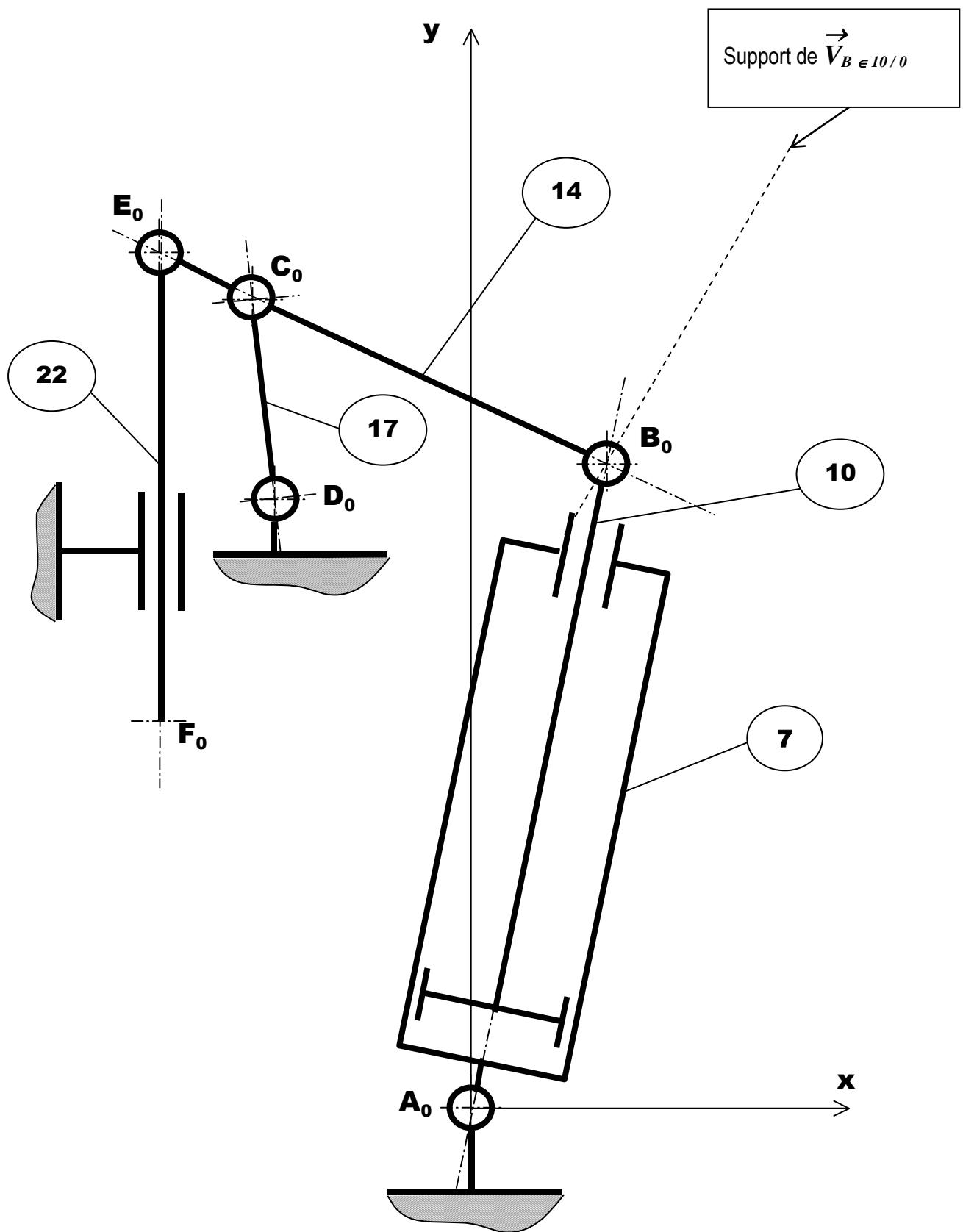
déterminé graphiquement $\vec{V}_{B \in 10/0} = \vec{V}_{B \in 14/0}$

$$\| \vec{V}_{B \in 10/0} \| = 250 \text{ mm / s}$$

REPRESENTEZ $\vec{V}_{B \in 10/0}$ sur le schéma ci-dessous (Echelle : 1 cm pour 50 mm / s)

EFFECTUEZ la même démarche que précédemment (sur la presse à genouillère) pour **DETERMINER**

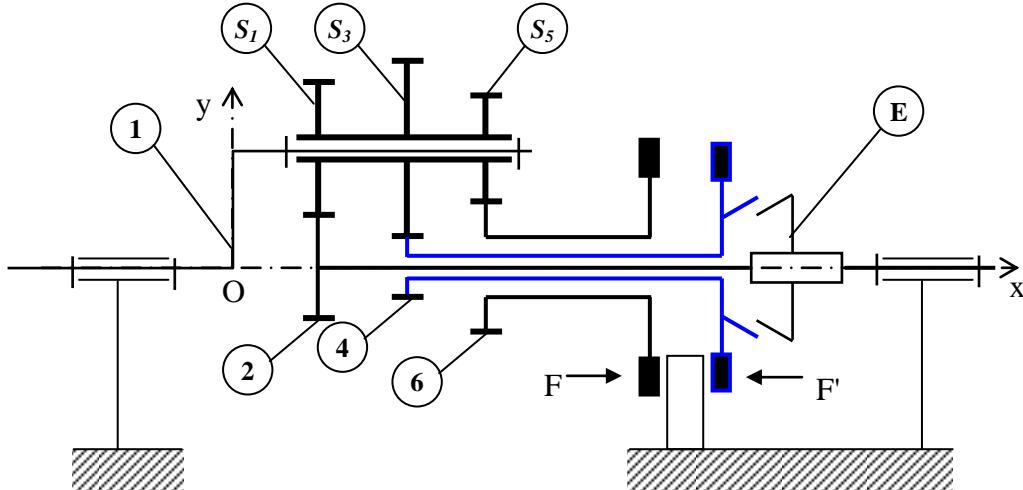
$$\vec{V}_{B \in 10/7}$$



6 – Application 5 : Mécanisme de changement de vitesse

Un mécanisme de changement de vitesse, à deux vitesses et une marche arrière est représenté ci-dessous.

$\mathcal{R}(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ est un repère lié au bâti (S_0) de ce mécanisme. L'arbre moteur (1) a une liaison pivot d'axe (O, \vec{x}) avec (S_0). (M) porte un satellite (S), d'axe parallèle à \vec{x} , constitué de trois roues dentées (S_1), (S_3) et (S_5) qui engrènent respectivement avec les 3 roues dentées (2), (4) et (6), d'axe (O, \vec{x}). L'arbre (2) est l'arbre de sortie du mécanisme.



Les roues (4) et (6) peuvent être immobilisées par rapport au bâti (S_0) par deux freins à commande électromagnétique F et F' . Un embrayage (E) permet la solidarisation des roues (2) et (4).

$$\begin{array}{ll} \text{On note les vitesses de rotation : } \Omega_{1/\mathcal{R}} = \omega_{1/\mathcal{R}} \cdot \vec{x} & \Omega_{S/1} = \omega_{S/1} \cdot \vec{x} \\ \Omega_{2/\mathcal{R}} = \omega_{2/\mathcal{R}} \cdot \vec{x} & \Omega_{4/\mathcal{R}} = \omega_{4/\mathcal{R}} \cdot \vec{x} \\ \Omega_{6/\mathcal{R}} = \omega_{6/\mathcal{R}} \cdot \vec{x} & \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} \text{Nombre de dents de la roue} & S_1 : Z_1 = 36 & S_3 : Z_3 = 48 \\ & 2 : Z_2 = 36 & 4 : Z_4 = 24 \\ & & 6 : Z_6 = 42 \end{array} \quad S_5 : Z_5 = 30$$

Questions :

1- Déterminer la relation entre les vitesses de rotation suivantes :

- a) $\omega_{1/\mathcal{R}}, \omega_{S/1}$ et $\omega_{2/\mathcal{R}}$
- b) $\omega_{1/\mathcal{R}}, \omega_{S/1}$ et $\omega_{4/\mathcal{R}}$
- c) $\omega_{1/\mathcal{R}}, \omega_{S/1}$ et $\omega_{6/\mathcal{R}}$

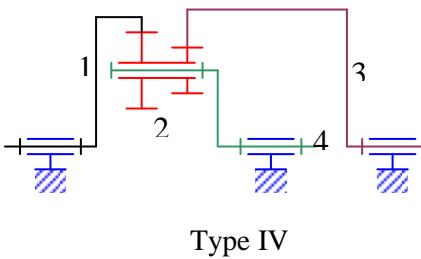
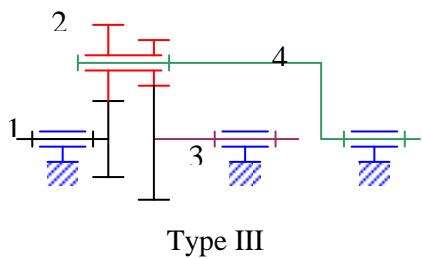
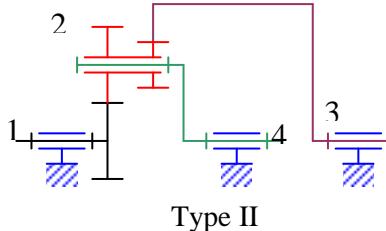
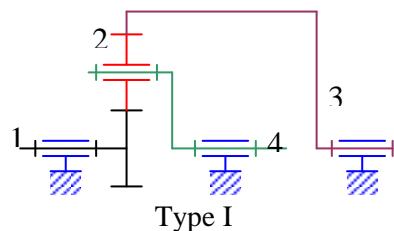
2- Déterminer le rapport $\omega_{2/\mathcal{R}}/\omega_{1/\mathcal{R}}$ dans chacun des cas suivants :

- a) Première vitesse : (F)^o desserré, (F')^o serré, (E) débrayé.
- b) Deuxième vitesse : (F) et (F')^o desserrés, (E) embrayé.
- c) Marche arrière : (F)^o serré, (F')^o desserré, (E) débrayé.

7 – Application 6 : Trains planétaires

Un train planétaire (ou épicycloïdal) est plan si tous les axes de rotation des différents pignons sont parallèles.

Il existe 4 types de trains planétaires plans simples :



Quel que soit le type de train, la formule de Willis peut s'appliquer.

1 - Formule de Willis :

Pour un observateur lié au porte satellites **4**, le train est vu comme un train simple à axes fixes. Dans ce cas, on exprime **la raison basique** du train épicycloïdal :

$$\lambda = \frac{\omega_{3/4}}{\omega_{1/4}} = (-1)^n \cdot \frac{\prod Z_{menantes}}{\prod Z_{menées}}$$

(n représente le nombre de contacts extérieurs)

Relation qui peut s'écrire :

$$\lambda = \frac{\omega_{3/0} - \omega_{4/0}}{\omega_{1/0} - \omega_{4/0}} = (-1)^n \cdot \frac{\prod Z_{menantes}}{\prod Z_{menées}}$$

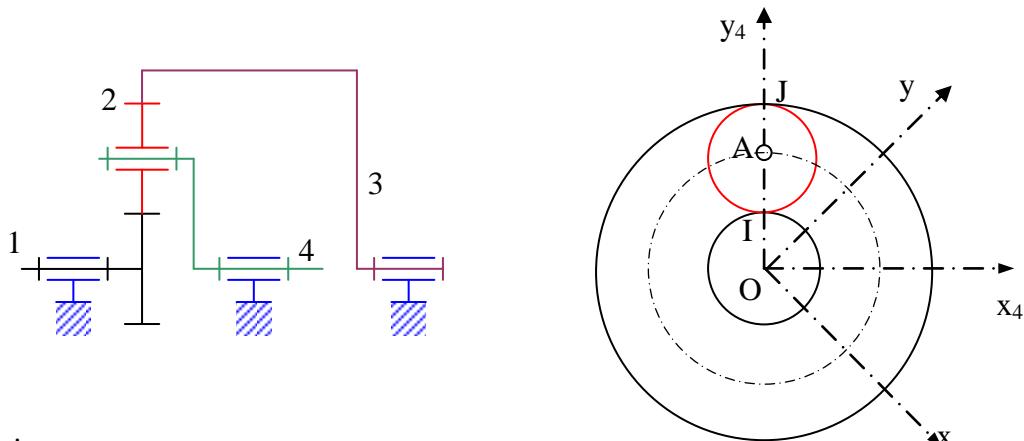
Type I : $\lambda = (-1)^1 \cdot \frac{Z_1 \cdot Z_2}{Z_2 \cdot Z_3} = -\frac{Z_1}{Z_3}$

Type II : $\lambda = (-1)^1 \cdot \frac{Z_1 \cdot Z_{2'}}{Z_2 \cdot Z_3} = -\frac{Z_1 \cdot Z_{2'}}{Z_2 \cdot Z_3}$

Type III : $\lambda = (-1)^2 \cdot \frac{Z_1 \cdot Z_{2'}}{Z_2 \cdot Z_3} = \frac{Z_1 \cdot Z_{2'}}{Z_2 \cdot Z_3}$

Type IV : $\lambda = (-1)^0 \cdot \frac{Z_1 \cdot Z_{2'}}{Z_2 \cdot Z_3} = \frac{Z_1 \cdot Z_{2'}}{Z_2 \cdot Z_3}$

2 - Champ des vecteurs vitesses sur les différents pignons (cas du type I) :



Données :

Le repère $R_0(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ est le repère fixe lié au bâti.

Le repère $R_4(O_4, \vec{x}_4, \vec{y}_4, \vec{z}_4)$ est le repère fixe lié au bâti.

Soit Z_1, Z_2 et Z_3 le nombre de dents respectivement du planétaire **1**, du satellite **2** et du planétaire (couronne) **3**.

Soit r_1, r_2 et r_3 les rayons primitifs respectivement du planétaire **1**, du satellite **2** et du planétaire (couronne) **3**.

On note m le module de fonctionnement des engrenages.

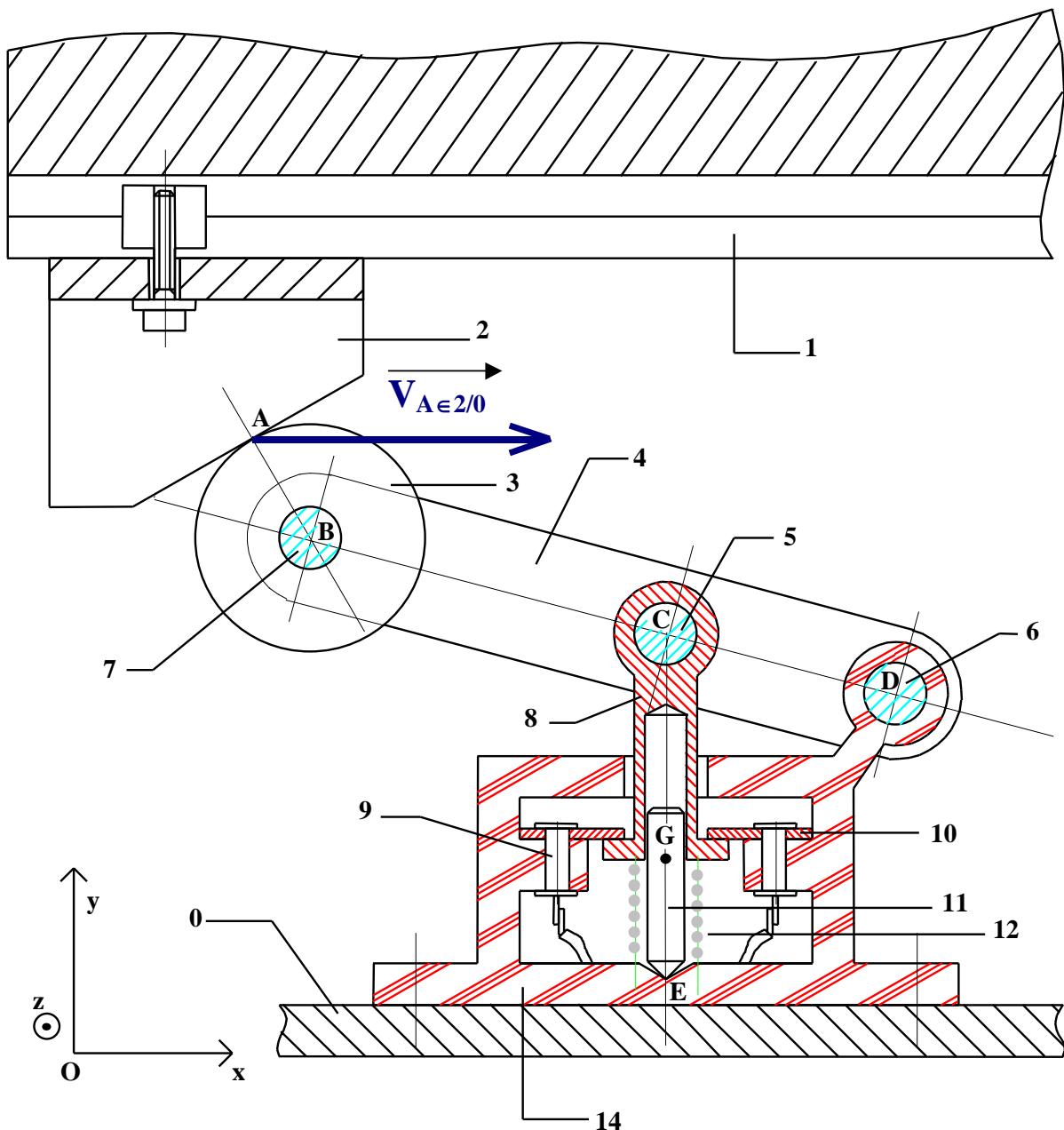
$$\text{On rappelle que } m = \frac{Z_1}{2.r_1} = \frac{Z_2}{2.r_2} = \frac{Z_3}{2.r_3}$$

Questions :

- 1) Exprimer les conditions de roulement sans glissements aux points **I** et **J** (points de contact respectivement entre les cercles primitifs de **1** et **2** et entre les cercles primitifs de **2** et **3**).
- 2) En considérant le planétaire **3** fixe par rapport au bâti, déterminer la relation existante entre la vitesse angulaire absolue de **1** (ω_1) et la vitesse angulaire absolue de **4** (ω_4).
- 3) Tracer le champ des vecteurs vitesses lié au mouvement du planétaire **1**.
- 4) Tracer le champ des vecteurs vitesses lié au mouvement du satellite **2**.
- 5) Tracer le champ des vecteurs vitesses lié au mouvement du porte-satellite **4**.
- 6) Déterminer le torseur cinématique au point **A** du mouvement du satellite **2** par rapport au bâti.

7 – Application 6 : Interrupteur de fin de course

La course d'une table de rectifieuse plane est réglée au moyen de deux interrupteurs de fin de course commandés par des butées réglables.



La figure ci-dessous donne le plan de l'un de ces ensembles.

Lorsque la butée 2 liée à la table 1, vient en contact avec le galet 3, sa vitesse de translation est :

$$V_{A \in 2/0} = V \cdot \bar{x} \quad \text{avec} \quad V = 1 \text{ m.s}^{-1}$$

Le galet roule sans glisser sur la pente de la butée 2.

Soient respectivement B, C et D les centres des articulations entre 7 et 3, 8 et 5, 6 et 14. Le ressort 12 est destiné à ramener le bras 4 en position initiale.

Le contact 8 est métallique et assure, en position "repos" le passage du courant électrique entre les deux plots 10, et en position "action" la coupure du courant électrique.

Le guide 11 est en liaison pivot glissant avec 8, et se termine dans sa partie basse par un cône à 90° en appui ponctuel au sommet E de la cuvette conique à 120° creusée dans le bâti 14.

Questions :

1) Représenter le vecteur vitesse du point **A** supposé lié à la roue **3** par rapport au bâti **0** : $\overrightarrow{V_{A \in 3/0}}$

2) Déterminer graphiquement le vecteur vitesse du point **B** par rapport au bâti **0** : $\overrightarrow{V_{B \in 4/0}}$

3) Déterminer le vecteur vitesse du point **C** par rapport au bâti **0** : $\overrightarrow{V_{C \in 4/0}}$

4) Déterminer le vecteur vitesse du point **C** par rapport au guide **11** : $\overrightarrow{V_{C \in 4/11}}$
En déduire le vecteur vitesse du point **E** supposé lié à **8** par rapport à **11**.

5) Déterminer le vecteur vitesse du point **E** supposé lié à **8** par rapport à **0** : $\overrightarrow{V_{E \in 8/0}}$

6) Déterminer les caractéristiques du mouvement de **8/0**.

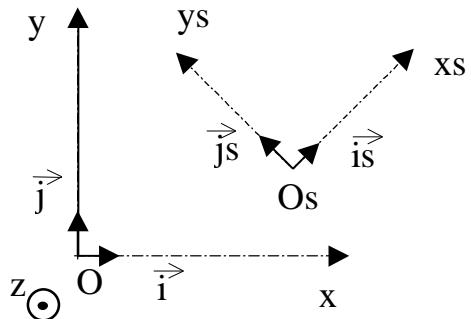
MOUVEMENT PLAN SUR PLAN

1 – Définition :

Soit $\mathbf{R}_0 = (\mathbf{O}, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ un repère fixe et $\mathbf{R}_s = (\mathbf{O}, \vec{x}_s, \vec{y}_s, \vec{z}_s)$ un repère lié au solide S .

S est en **Mouvement PLAN sur PLAN** par rapport au repère fixe \mathbf{R}_0 si un plan de \mathbf{R}_s reste confondu, à tout instant, avec un plan de \mathbf{R}_0 .

Dans la figure ci-contre les deux plans plan (O, \vec{x}, \vec{y}) et $(O, \vec{x}_s, \vec{y}_s)$ restent confondus.



Propriétés

Toutes les trajectoires sont contenues dans ce plan (O, \vec{x}, \vec{y}) ou dans des plans parallèles. Par conséquence, tout vecteur vitesse instantané d'un point du solide S coïncide avec un vecteur du plan (O, \vec{x}, \vec{y})

$$\forall M \in S \quad \overrightarrow{V_{M \in S/R_0}} \cdot \vec{z} = \vec{0}$$

En conséquence (avec la relation fondamentale de la cinématique) :

$$\forall M, N \in S; \quad \overrightarrow{V_{M \in S/R_0}} = \overrightarrow{V_{N \in S/R_0}} + \overrightarrow{MN} \times \overrightarrow{\Omega_{S/R_0}}$$

Autre conséquence :

Le vecteur Rotation $\overrightarrow{\Omega_{S/R_0}}$ est porté par l'axe \vec{z} .

En effet, d'une manière générale, le résultat d'un produit vectoriel est un vecteur orthogonal aux vecteurs de l'opération :

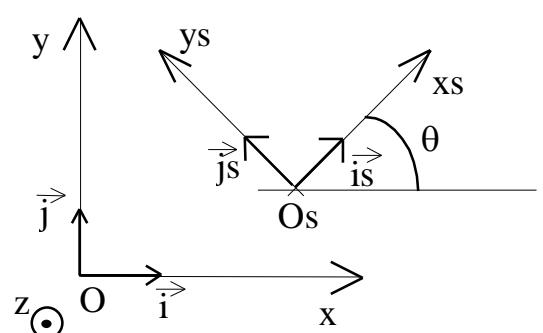
Comme $\overrightarrow{V_{M \in S/R_0}}$ et $\overrightarrow{V_{N \in S/R_0}}$ appartiennent au plan (O, \vec{x}, \vec{y}) (conséquence du mouvement plan sur plan), le résultat du produit vectoriel $\overrightarrow{MN} \times \overrightarrow{\Omega_{S/R_0}}$ doit appartenir au plan (O, \vec{x}, \vec{y}) .

Si le vecteur \overrightarrow{MN} appartient au plan (O, \vec{x}, \vec{y}) alors, pour que le résultat du produit vectoriel soit dans le plan (O, \vec{x}, \vec{y}) , il faut que $\overrightarrow{\Omega_{S/R_0}}$ soit porté par l'axe \vec{z} .

Si le vecteur \overrightarrow{MN} est porté par l'axe \vec{z} (donc perpendiculaire au plan définissant le mouvement), le produit vectoriel est nul (car les deux vecteurs \overrightarrow{MN} et $\overrightarrow{\Omega_{S/R_0}}$ sont colinéaires). Donc les vitesses des deux points sont identiques.

$$\overrightarrow{\Omega_{S/R_0}} = \frac{d\theta}{dt} \vec{z} \quad \theta \text{ étant l'angle que fait la direction}$$

xs avec la direction du repère fixe x au cours du temps.



On peut voir le mouvement plan sur plan, comme la combinaison d'une translation plane et d'une rotation autour d'un axe fixe \vec{z}

Dans ce mouvement particulier, il existe néanmoins, un point très important le Centre Instantané de Rotation.

2 - Centre Instantané de Rotation (C.I.R) :

Soit un solide **S** en mouvement plan dans le plan (O, \vec{x}, \vec{y}) , on appelle **Centre Instantané de Rotation**, un point appartenant au mouvement de **S** et de vitesse nulle.

$$\text{Soit } I \text{ le C.I.R de } S \quad \square \quad \overrightarrow{V}_{I \in S / R_0} = \vec{0}$$

La connaissance de ce point particulier, se répercute sur la relation fondamentale de la cinématique :

$$\forall M \in S \quad ; \quad \overrightarrow{V}_{M \in S / R_0} = \overrightarrow{V}_{I \in S / R_0} + \overrightarrow{MI} \times \overrightarrow{\Omega_{S / R_0}}$$

$$\text{Et donc : } \overrightarrow{V}_{M \in S / R_0} = \overrightarrow{MI} \times \overrightarrow{\Omega_{S / R_0}} \text{ (puisque } \overrightarrow{V}_{I \in S / R_0} = \vec{0} \text{)}$$

La connaissance du C.I.R **I**, permet de se ramener à un problème de cinématique du solide en rotation autour d'un axe (**I**, \vec{z}) Attention, il ne s'agit que d'un centre de rotation instantané, n'ayant qu'une existence fictive, valable que pour une position donnée.

Ce Centre Instantané de Rotation est unique.

Dans l'évolution d'un Mouvement Plan sur Plan d'un solide **S** par rapport à un repère fixe, on peut toujours définir un centre instantané de rotation :

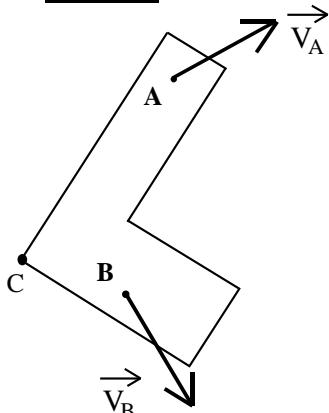
- La trajectoire du C.I.R dans le plan fixe (O, \vec{x}, \vec{y}) est appelée **la base** du mouvement plan sur plan.
- La trajectoire du C.I.R dans le plan mobile $(O, \vec{x}_s, \vec{y}_s)$ est appelée **la roulanle** du mouvement plan sur plan.

3 - Recherche du Centre Instantané de Rotation :

Pour la détermination de ce point de vitesse nulle, il suffit d'adapter certaines propriétés du mouvement de Rotation autour d'un axe fixe. Notamment, chaque vecteur vitesse est perpendiculaire à son vecteur position.

Pour le mouvement plan sur plan, il suffira, pour chaque position, de connaître deux vecteurs vitesses non parallèles pour déterminer le C.I.R: celui-ci est à l'intersection des perpendiculaires aux vitesses.

Exemple :



Soit **S** un solide en mouvement plan sur plan.

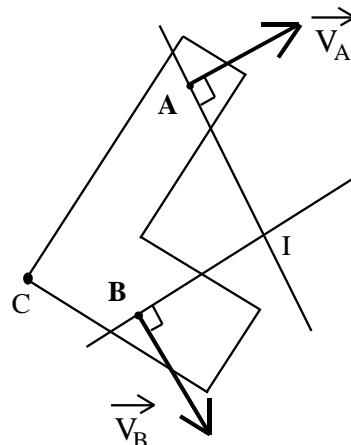
Soient **A** et **B** deux points de **S** de vitesses connues.

On souhaite déterminer le Centre Instantané de Rotation pour cette position et en déduire la vitesse du point **C**.

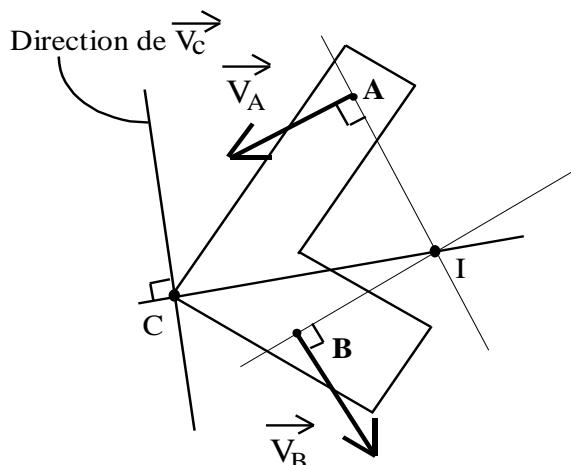
Détermination du C.I.R.

Le C.I.R, noté **I**, se détermine à partir des perpendiculaires des vitesses connues. Pour cette position, on retrouve la proportionnalité

$$\frac{\|V_A\|}{\|IA\|} = \frac{\|V_B\|}{\|IB\|}$$



deux suivante:

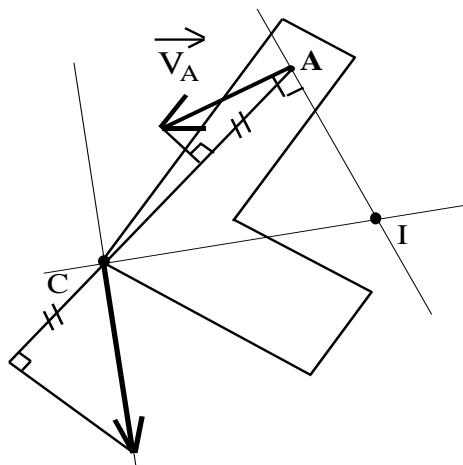


Vitesse en C.

La direction de la vitesse en **C** est perpendiculaire à la direction IC.

Pour déterminer le module de ce vecteur vitesse, on peut appliquer l'équiprojectivité, ou tracer le champ des vecteurs vitesses sur le rayon IC.

Le point **I** est souvent un point géométrique qui n'appartient pas réellement au solide, il contribue à la compréhension du mouvement plan.



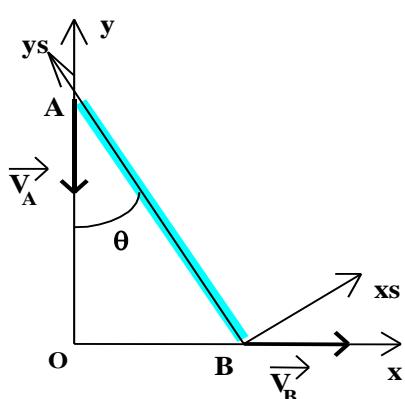
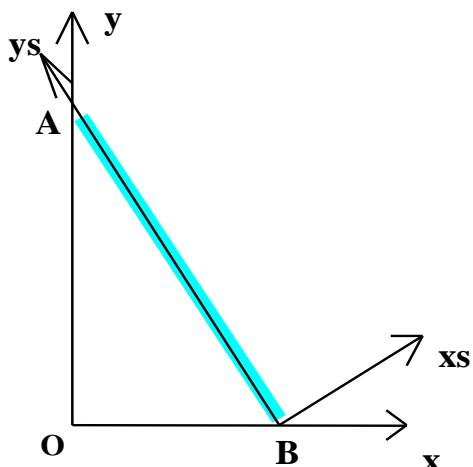
4 – Application 1:

Echelle posée contre un mur.

Cet exemple, couramment exposé, à l'avantage d'avoir la description d'un mouvement plan très simple (et ayant aussi des applications constructives intéressantes).

On étudie le glissement de l'échelle. Celle-ci est en contact en **A** et en **B** respectivement sur le mur et sur le sol.

- Soit (O, \vec{x}, \vec{y}) le plan fixe
- Soit $(O, \vec{x}_s, \vec{y}_s)$ le plan mobile associé à l'échelle.
- L'échelle à une longueur L



La trajectoire du point **A** est la droite verticale y , et la trajectoire du point **B** est la droite horizontale x .

Le paramètre de position du mouvement au cours du temps est l'angle d'inclinaison de l'échelle θ .

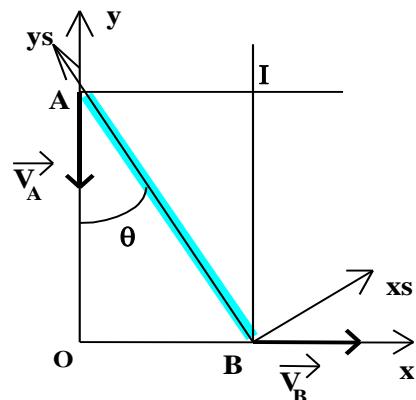
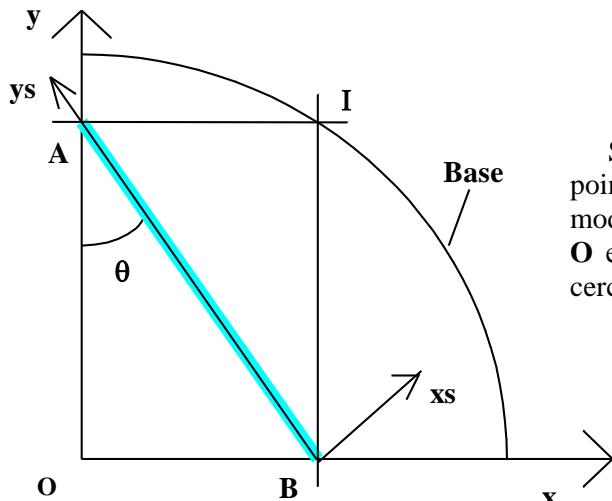
Les directions des vecteurs vitesses en **A** et en **B** sont donc connues à tout instant.

La détermination du point **I** (C.I.R), s'effectue en prenant l'intersection des perpendiculaires aux deux directions des vecteurs vitesses connus.

Déterminons la base et la roulante du mouvement plan sur plan.

Les composantes du point **I** dans le repère (O, \vec{x}, \vec{y}) s'écrivent :

$$\overrightarrow{OI} = L \sin(\theta) \cdot \vec{x} + L \cos(\theta) \cdot \vec{y}$$



Si on fait évoluer θ au cours du temps, le point **I** décrit un arc de cercle, de rayon le module de \overrightarrow{OI} (soit $L = \text{cste}$), de centre le point **O** et d'amplitude 90° . La base est un quart de cercle.

Les composantes du point **I** dans le repère $(B, \vec{x}_s, \vec{y}_s)$ sont :

$$\overrightarrow{BI} = L \cos(\theta) (\sin(\theta) \cdot \vec{x}_s + \cos(\theta) \cdot \vec{y}_s)$$

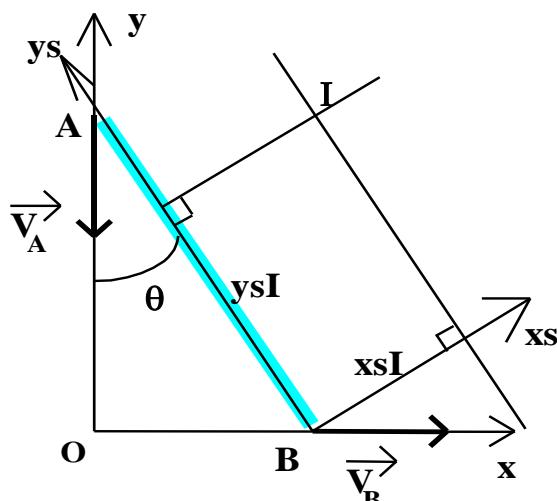
En introduisant certaines relations trigonométriques, comme :

$$\sin(2\theta) = 2 \sin(\theta) \cos(\theta)$$

$$\cos^2(\theta) = \frac{1 + \cos(2\theta)}{2}$$

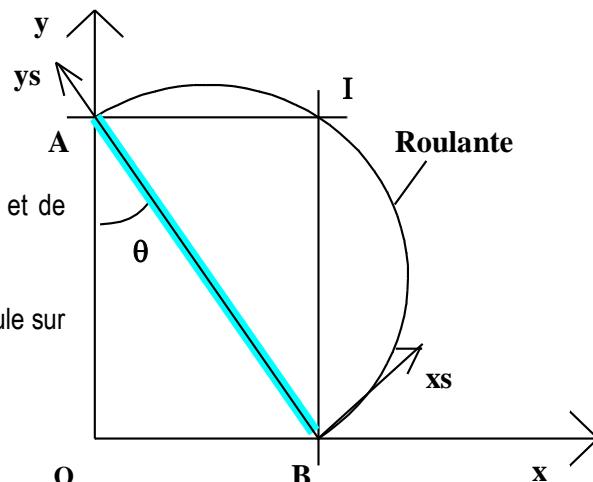
Les coordonnées du vecteur \overrightarrow{BI} dans le repère $(B, \vec{x}_s, \vec{y}_s)$ deviennent :

$$\begin{cases} x_{sI} = L \cos(\theta) \sin(\theta) = \frac{L \sin(2\theta)}{2} \\ y_{sI} = L \cos^2(\theta) = \frac{L}{2} + \frac{L \cos(2\theta)}{2} \end{cases}$$



Si on déplace l'origine de $L/2$ vers les y_s positifs, on trouve l'équation paramétrée d'un cercle de rayon $L/2$, de rayon $L/2$, de centre le milieu de l'échelle et d'amplitude 2 fois celle de θ , soit 180° .

$$\begin{cases} xsI = \frac{L \sin(2\theta)}{2} \\ (ysI - \frac{L}{2}) = \frac{L \cos(2\theta)}{2} \end{cases}$$

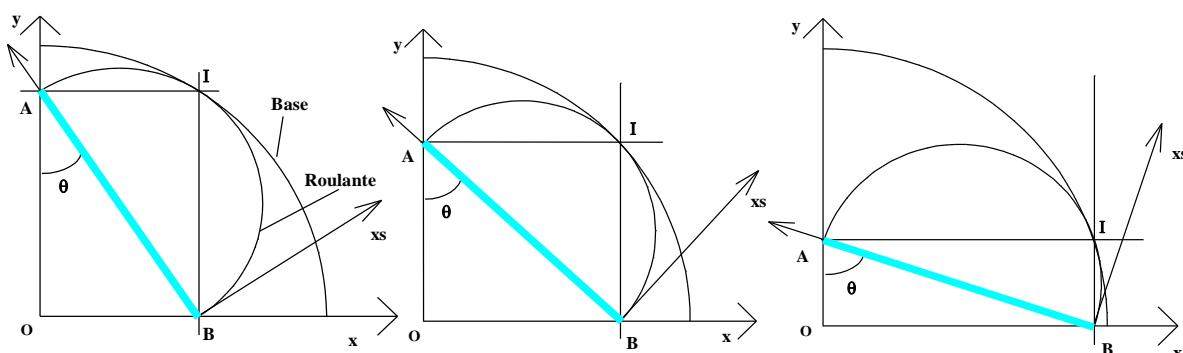


La roulante est donc un demi-cercle de rayon $L/2$ et de centre $(0, L/2)$ dans le repère $(B, \vec{x}_s, \vec{y}_s)$.

Le terme "roulante" vient du fait que cette courbe roule sur la base, au cours du mouvement.

Differentes évolutions de l'échelle au cours de son glissement.

Remarquer la roulante "roulant" sur la base.



5 – Application 2 : Presse à décollerter

Le vérin (10 + 11 + 8 + 7) permet de commander la descente du poinçon (22).

Problème :

On veut régler le débit dans le vérin afin d'obtenir une vitesse du poinçon minimale (cf configuration de la figure ci-contre)

Pour cela il faut déterminer la vitesse $\vec{V}_{F \in 22/0}$ du point F.

Nous connaissons la vitesse du poinçon qui est

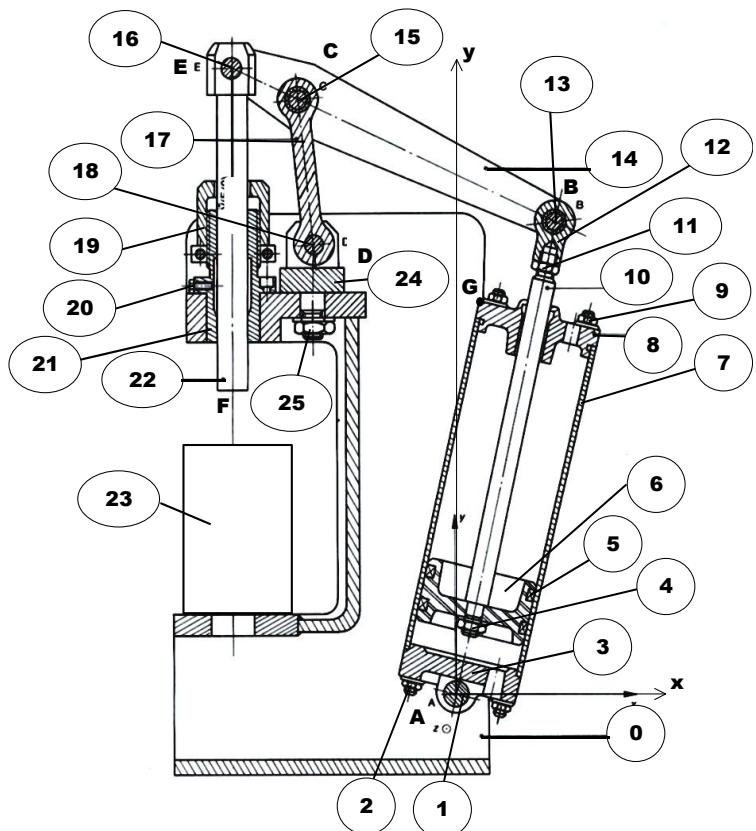
imposée : $\|\vec{V}_{poinçon}\| = 50 \text{ mm/s}$

Nous allons utiliser la propriété du centre instantané de rotation (CIR) pour déterminer la

norme de $\vec{V}_{B \in 10/0}$

INDIQUEZ la nature du mouvement du poinçon (22) par rapport au bâti (0)

Réponse :



Sur le schéma page suivante :

- **TRACEZ** le vecteur vitesse $\vec{V}_F \in 22/0$ (Echelle 1 cm pour 20 mm / s)

- **TRACEZ** le vecteur vitesse $\vec{V}_E \in 22/0$ (Echelle 1 cm pour 20 mm / s)

Que peut-on dire de $\vec{V}_E \in 22/0$, $\vec{V}_E \in 16/0$ et de $\vec{V}_E \in 14/0$? Pourquoi ?

Réponse :

Quel est le mouvement de la biellette (17) par rapport au bâti (0) ?

Réponse :

Sur le schéma page suivante, **TRACEZ** la droite support du vecteur $\vec{V}_C \in 17/0$

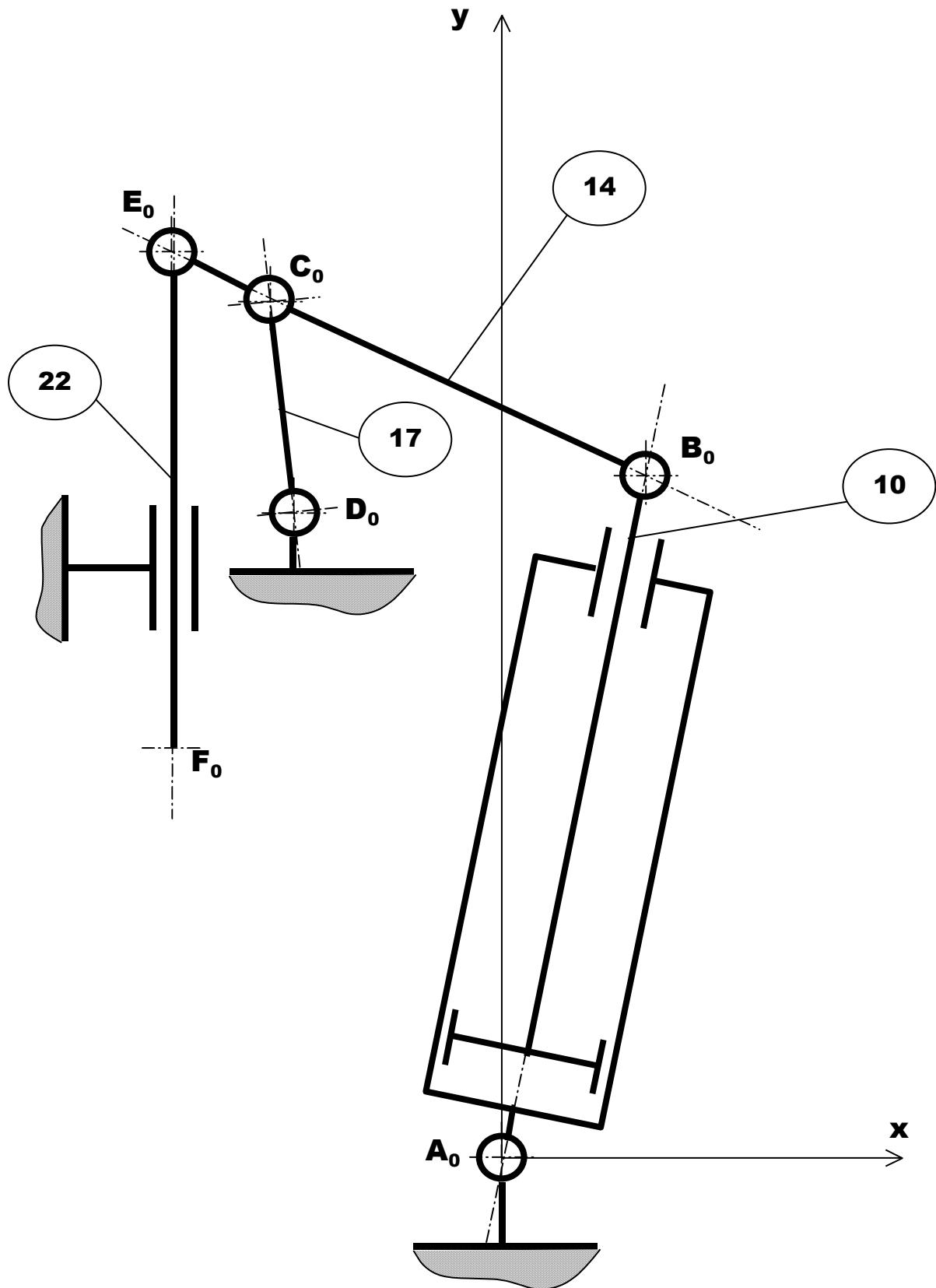
Que peut-on dire des vitesses $\vec{V}_C \in 17/0$ et $\vec{V}_C \in 14/0$?

Réponse :

DETERMINEZ graphiquement le centre instantané de rotation (CIR) du mouvement du palonnier (14) par rapport au bâti (0)

A l'aide du CIR du mouvement de (14) / (0), **DETERMINEZ** graphiquement les caractéristiques (direction,

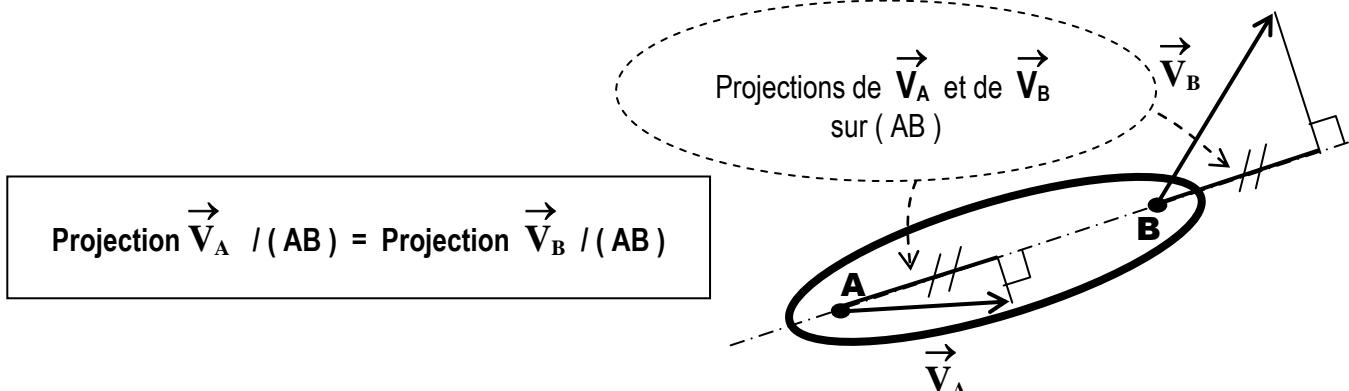
sens et norme) de $\vec{V}_C \in 14/0$ et de $\vec{V}_B \in 14/0$



6 – Théorème de l'équiprojectivité :

Enoncé :

Soient deux points A et B appartenant à un même solide et \vec{V}_A et \vec{V}_B les vecteurs-vitesses respectifs, la projection orthogonale de \vec{V}_A sur (AB) est égale à la projection orthogonale de \vec{V}_B sur (AB).



Exemple d'application : Presse à genouillère

Le vérin (3 + 4) permet de commander la descente du poinçon (10).

Problème :

On veut régler le débit dans le vérin afin d'obtenir une vitesse du poinçon minimale en fin de course (cf configuration de la figure ci-contre)
Pour cela il faut déterminer la vitesse

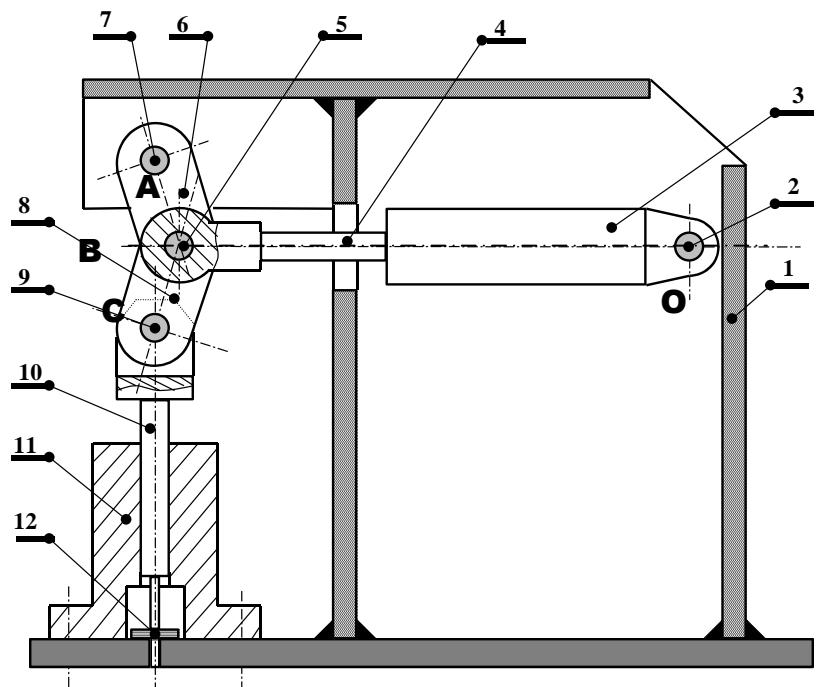
$\vec{V}_{B \in 5/1}$ du point B.

Nous connaissons la vitesse du poinçon qui est

imposée : $\| \vec{V}_{\text{poinçon}} \| = 30 \text{ mm/s}$

Nous allons utiliser la propriété de l'équiprojectivité pour déterminer la norme de

$\vec{V}_{B \in 5/1}$



- 1 : Bâti
- 2 : Axe
- 3 : Corps du vérin
- 4 : Tige du vérin

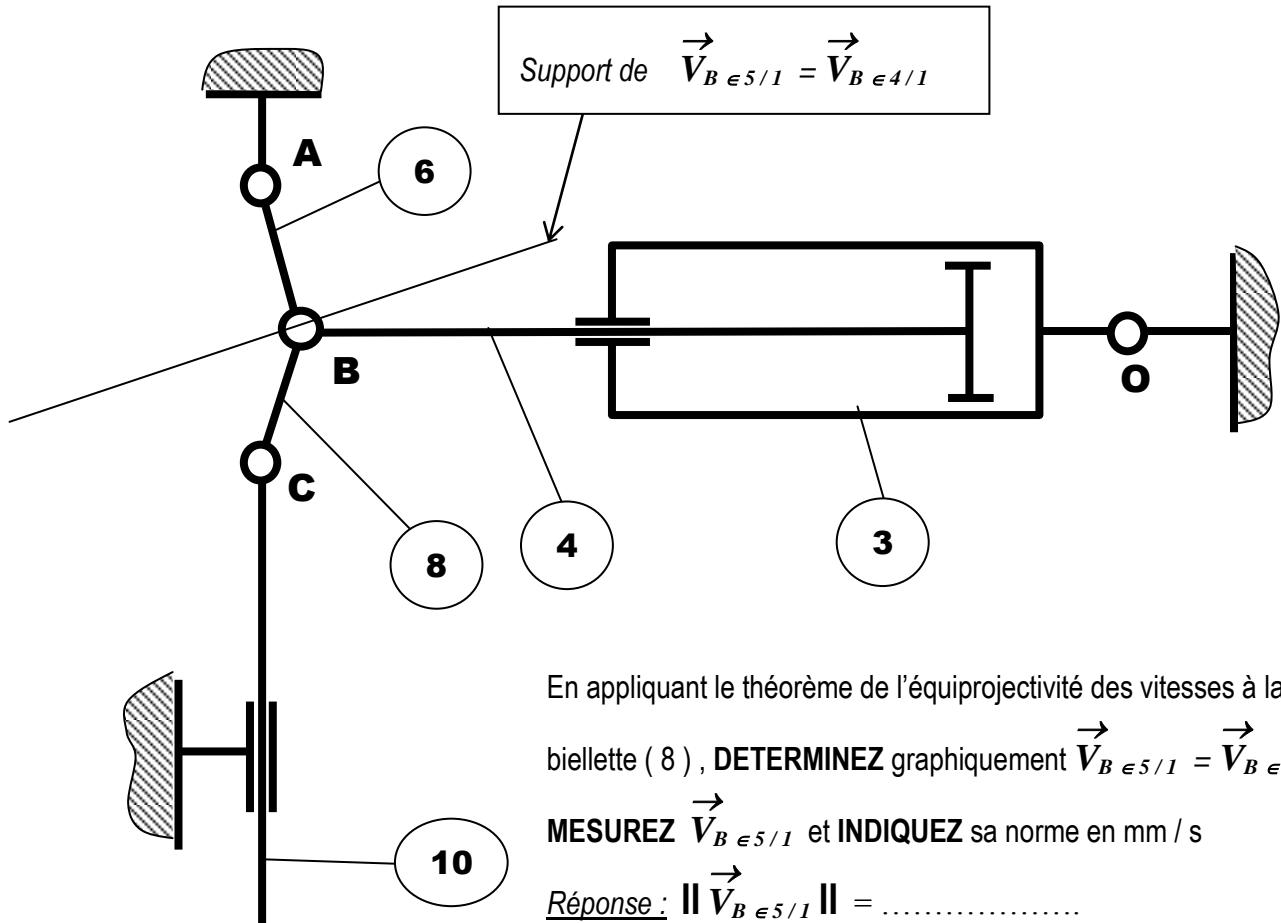
- 5 : Axe
- 6 : Biellette
- 7 : Axe
- 8 : Biellette

- 9 : Axe
- 10 : Poinçon
- 11 : Guide
- 12 : Pièce à poinçonner

INDIQUEZ la nature du mouvement du poinçon (10) par rapport au bâti (1)

Réponse :

Sur le schéma ci-après, **TRACEZ** le vecteur vitesse $\vec{V}_{C \in 10/1}$ (Echelle 1 cm pour 10 mm/s)



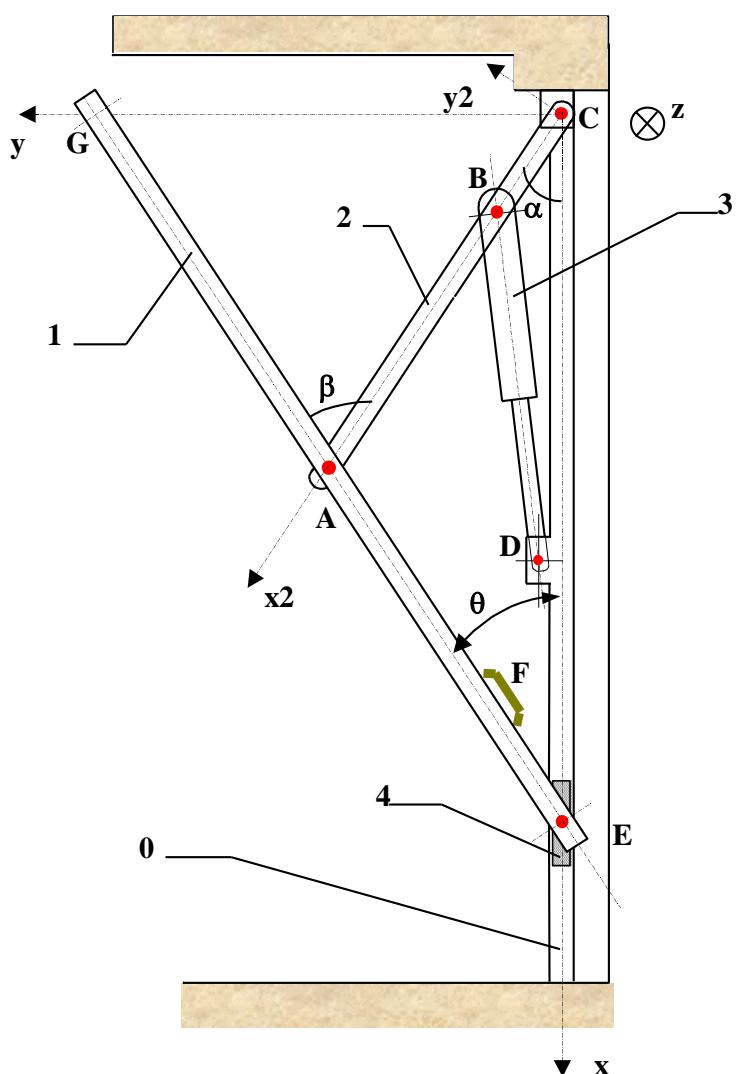
APPLICATION

Porte de garage basculante

La porte de garage basculante se compose d'un panneau **1** articulé en **A** sur une barre **2**. Cette barre **2** est articulée au point **C** par rapport aux rails de guidage verticaux **0** fixe par rapport au sol. Le panneau **1** est liée au point **E** à un patin de guidage **5** (et à son symétrique **5'** pour l'autre rail). Le patin **5** coulisse verticalement suivant l'axe (**C**, \vec{x}).

L'ensemble **3** est un équilibrEUR accompagnant le mouvement de levage du panneau **1**. Il est articulé en **D** par rapport au rail **0** et en **B** par rapport à la barre **2**. L'ensemble se compose de 2 tubes télescopiques et d'un ressort de compression.

Les liaisons en **A**, **B**, **C**, **D** et **E** sont des liaisons pivots supposées parfaites. La liaison entre **0** et le patin **5** est une liaison glissière dont le centre de liaison est le point **E**.



DONNEES :

$(C, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$: repère fixe

$(C, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z})$: repère lié à la barre **2**.

$$\|\overrightarrow{AG}\| = \|\overrightarrow{AC}\| = 905$$

$$\|\overrightarrow{AE}\| = 905$$

$$\|\overrightarrow{V_{F \in 1/0}}\| = 40 \text{ cm.s}^{-1}$$

On étudie le mouvement ouvrant de la porte.

Etude Géométrique.

- 1) Exprimer le vecteur position \overrightarrow{CA} :
 - a) dans le repère lié à la barre 2 ($C, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}$)
 - b) dans le repère fixe ($C, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$)
- 2) Déterminer une relation entre les angles α et θ . (expliquer la démarche).
- 3) Exprimer l'angle β en fonction de θ .
- 4) Quelle est la particularité du triangle (C, E, G), au cours du temps.
- 5) En déduire les vecteurs \overrightarrow{CG} et \overrightarrow{CE} , en fonction de θ , dans le repère fixe.
- 6) Exprimer le vecteur \overrightarrow{AE} dans le repère fixe.
- 7) Pour quelle valeur de θ la barre 2 est perpendiculaire au panneau 1.

Etude Cinématique.

1) Définir la nature du mouvement de la barre 2 par rapport à 0. En déduire (sur le **DOCUMENT I**) la direction de $\overrightarrow{V_{A \in 2/0}}$

2) Définir la nature du mouvement du patin 5 par rapport à 0. En déduire (sur le **DOCUMENT I**) la direction de $\overrightarrow{V_{E \in 5/0}}$

3) Déterminer la nature du mouvement du panneau 1 par rapport à 0. En déduire le Centre Instantanée de Rotation I pour la position donnée dans le **DOCUMENT I**.

4) Déterminer graphiquement:

a) $\overrightarrow{V_{F \in 1/0}}$

b) $\overrightarrow{V_{A \in 1/0}}$

c) $\overrightarrow{V_{E \in 1/0}}$

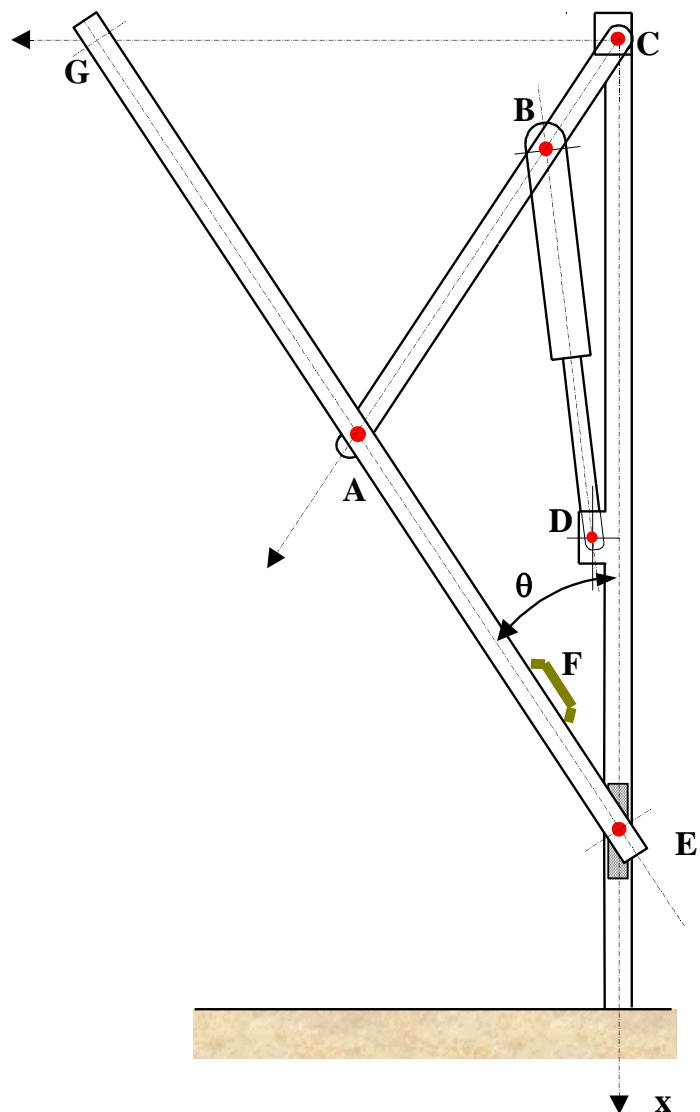
Justifier vos constructions, en rappelant les principes utilisés.

5) Déterminer la vitesse du point G dans le mouvement de 1/0 et en déduire sa trajectoire.

6) Déterminer les coordonnées analytiques du C.I.R I.

7) Déterminer le vecteur Rotation $\overrightarrow{\Omega_{1/0}}$

DOCUMENT 1
(à utiliser pour les constructions graphiques)



Echelle des vitesses : 10 cm/s → 1 cm

APPLICATIONS DE CINEMATIQUE

Poulie réductrice REDEX

Le dessin page suivante représente une poulie réductrice REDEX qui se monte sur l'axe de l'appareil commandé.

Le corps (5) est entraîné par cinq courroies trapézoïdales (8), et porte les axes porte-satellites (9). Trois satellites (10) roulent sur un planétaire (24) immobilisé en rotation par un bras de réaction, non représenté sur le dessin , fixé sur le fourreau (18).

Trois autres satellites (6) entraînent le deuxième planétaire (31), solidaires du moyeu (32), lequel est claveté sur l'axe de l'appareil commandé.

Les nombres de dents des pignons (24), (10), (6), (31) sont donnés par le tableau figurant à côté du dessin.

Questions :

- a) Etablir le schéma cinématique de ce mécanisme.
- b) Déterminer la vitesse de rotation ω_2 de l'arbre de sortie (32) par rapport au bâti (0), en fonction de la vitesse de rotation ω_1 du corps (5) par rapport au bâti (0), et du nombre de dents des pignons (24), (10), (6) et (31)

