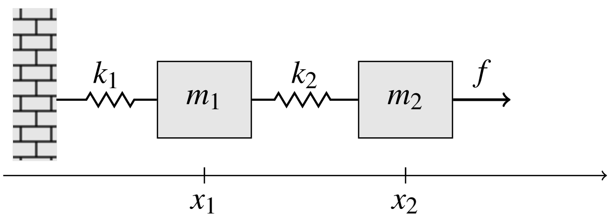
Intro. à l'Analyse Numérique

TP n°3

Nom :
Prénom :
Section :

- Vous pouvez faire ce travail en groupe. Veillez cependant à indiquer clairement dans votre projet le nom des participants. Si vous utilisez le langage `Python`, indiquez ces informations dons le fichier `setup.py`. Si vous utilisez `Ocaml`, indiquez dans chaque fichier, dans un commentaire, le noms des personnes ayant participé au projet.
- Tous les *résultats* et *graphiques* générés par ordinateur présents dans votre rapport doivent être produits par du code inclus dans l'archive et la documentation de votre code doit dire (au cas par cas) quel programme il faut exécuter pour les obtenir. (Un même programme peut bien entendu générer plusieurs éléments.) La *reproductibilité* de vos résultats est importante.
- Vous pouvez rédiger un rapport contenant les solutions aux questions de ce TP. Ce rapport doit être remis sur le site Moodle du cours. Veillez à ne pas remettre plus de dix pages de rapport (hors graphiques).

On considère la situation physique simple ci-dessous composé de deux masses m_1 et m_2, la première attachée à un mur par un ressort de raideur k_1 et de longueur ℓ_1 au repos et les deux masses étant attachées entre elles par un ressort de raideur k_2 et de longueur au repos ℓ_2. Une force extérieure f est appliquée sur la masse m_2. Pour la simplicité, nous supposerons que les deux masses ne peuvent se déplacer que dans une direction. On note x_1 (resp. x_2) le déplacement de la masse m_1 (resp. m_2) par rapport à sa position d'équilibre, à une distance ℓ_1 (resp. $\ell_1 + \ell_2$) du mur.



Question 1. En modélisant les ressorts par la loi de Hooke et en supposant que le frottement des masses sur le sol est négligeable, écrivez l'EDO qui régit la dynamique $t \mapsto x(t) := \big(x_1(t), x_2(t)\big)$ (où t est le temps) des deux masses.

Question 2. Un équilibre (ou encore, un point stationnaire) est un point $x^* \in \mathbb{R}^2$ tel que la fonction constante $t \mapsto x^*$ soit solution de l'EDO. Déterminez tous les équilibres de l'EDO trouvée à la question 1 pour $f = 0$. Discutez en fonction des m_i et k_i, $i = 1, 2$, si nécessaire.

Question 3. Lorsque $f = 0$, l'EDO trouvée à la question 1 est autonome. Montrez dans ce cas que si $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ en est solution, alors, quel que soit $\tau \in \mathbb{R}$, sa translation ${}^{\tau}x$ définie par ${}^{\tau}x(t) := x(t - \tau)$ est encore une solution.

On appelle une *trajectoire* l'image d'une solution $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$.

Nom :

Prénom :

Section :

Question 4. Écrivez une routine numérique qui, étant donné m_1, m_2, k_1, k_2 et ω, calcule une estimation numérique de la solution[1] de l'EDO de la question 1 avec $f = \sin(\omega t)$, en un temps $t \in [0, 100]$ quelconque. Pour $m_1 = 1$, $m_2 = 1$, $k_1 = 1$, $k_2 = 1$ et $\omega = 0.5$ (resp. $\omega = 1$, $\omega = 1.5$, $\omega = 2$, $\omega = 2.5$),

- utilisez cette routine pour tracer, sur une même figure, les graphes des solutions x_1 et x_2 sur $[0, 100]$ pour diverses conditions initiales bien choisies ;
- pour chacune des conditions initiales considérées, tracez sur une seconde figure les trajectoires correspondantes.

Question 5. Comme on le remarque sur les graphes tracés à la question précédente, les trajectoires pour diverses conditions initiales sont soit confondues, soit ne s'intersectent pas. Prouvez rigoureusement ce fait.

Question 6. Écrivez une routine qui, étant donné m_1, m_2, k_1, k_2 et ω (et éventuellement d'autres arguments), retourne $M_1 := \max\{x_1(t) \mid t \in [0, 100]\}$. Utilisez la pour tracer le graphe de $[0, 2.5] \to \mathbb{R} : \omega \mapsto M_1$ pour $m_1 = 1$, $m_2 = 1$, $k_1 = 1$, $k_2 = 1$ et la condition initiale correspondant aux masses au repos à leurs positions d'équilibre. Faites un second graphe pour $m_1 = 3$, $m_2 = 1$, $k_1 = 1$, $k_2 = 2$ et la même condition initiale.

Question 7. Écrivez un programme `q1` qui pend en ligne de commande les arguments m_1, m_2, k_1, k_2 et qui retourne sur la sortie standard les valeurs ω qui sont des maximums locaux de la fonction $\omega \mapsto M_1$. Nous vous proposons d'appliquer la méthode du nombre d'or sur des intervalles adéquats pour déterminer ces maximums. Ce programme doit au moins fonctionner pour les deux ensembles de données ci-dessus (et la même condition initiale) ainsi des valeurs de m_1, m_2, k_1, k_2 « proches » ce ceux-ci.

Question 8. Pour $m_1 = 1$, $m_2 = 1$, $k_1 = 1$ et $k_2 = 1$ (resp. pour $m_1 = 3$, $m_2 = 1$, $k_1 = 1$ et $k_2 = 2$) et toujours la même condition initiale, tracez les graphes des solutions x_1 et x_2 pour les valeurs ω de la question 7. Que constatez-vous ? (Vous pouvez bien sûr essayer d'autres valeurs de m_1, m_2, k_1, k_2 — à préciser dans votre rapport — pour affiner vos idées.)

[1] Cette équation est en fait résoluble à la main (ce qui n'est *pas* demandé ici). Le but des questions qui suivent est de vous faire découvrir des caractéristiques de cette EDO qui pourront être prouvées plus tard, dans un cours plus avancé sur les EDO.