Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Национальный исследовательский университет ИТМО»

Лабораторная работа №6 «Работа с системой компьютерной вёрстки TEX» по предмету «Информатика»

Вариант № 77
Группа: P3108
Студент: Закусов К. Я.
Преподаватель: Балакшин П. В.

г. Санкт Петербург, 2022

ции на сфере. Интересно отметить, что "аксиомами"I' - V' оно определяется однозначно.)

Пусть $\vec{p}$ - вектор. Введем вспомогательную функцию p следующим образом: для любой точки A нашей сферы обозначим через $p(A)$ проекцию вектора $\vec{p}$ на ось, определяемую вектором $\vec{OA}$.

Рассмотрим среднее значение $M\ (|p|)$ функции $A \longrightarrow |p(A)|$ на сфере. Покажем существование такого $k \neq 0$, что для любого вектора $\vec{p}$ выполняется (6). Для этого, ввиду свойства II', достаточно доказать, что $|\vec{p}| = |\vec{q}|$. Обозначим через R какой-нибудь поворот пространства вокруг оси, проходящей через точку O, который переводит луч с направляющим вектором $\vec{q}$ в луч с направляющим вектором $\vec{p}$. Тогда для любой точки A сферы $q(A) = p(R(A))$. Из V' вытекает $M(|q|) = M(|p|)$.

Дальнейшее решение задачи 3 дословно повторяет решение задачи 2. (Упражнение 5 и задачи 2, 3 исчерпывают задачу M394.)

4. Длина через ширину

Идею, на которой основано решение задач 2 и 3, можно использовать для вычисления длины плоской замкнутой выпуклой ломаной.

Пусть Л - такая ломаннная, $a_1,\ a_2,\ ...,\ a_n$ - ее звенья. Фиксируем некоторую ось l_0. Пусть l_α - ось, образующая с осью l_0 угол α. Обозначим через (α) "ширину"нашей ломаной в направлении оси l_α, т. к. длину ее проекции на ось l_α. Оказывается, если знать "ширину"ломаной в произвольном направлении, т. е. уметь вычислять "ширину"ломаной в произвольном направлении, т. у. уметь вычислять функцию $\alpha \to (\alpha)$, то можно найти ее длину L. Покажем, как это сделать.

Обозначим через $a_i(\alpha)$ длину проекции звена a_i на ось l_a.

Упражнение 8. Докажите, что $Ш(\alpha) = \frac{1}{2}[a_1(\alpha) + a_2(\alpha) + ... + a_n(\alpha)$ В решении задачи 2 было показано, что среднее значение функции $\alpha \to i(\alpha)$ пропорционально $|a_i|$. Из (5) и (7) коэффициент пропорциональности равен $\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}$. Из упражнения 8 и свойств I', II' среднее значение $M()$ функции Ш равно полусумме средних значений функций $\alpha \to i(\alpha)$. Следовательно,

$$M(Ш) = \frac{1}{2}(\frac{2}{\pi}|a_1|$$

$$+ \frac{2}{\pi}|a_2| + ... + \frac{2}{\pi}|a_n|) =$$

$$= \frac{1}{\pi}(|a_1| + |a_2| + ... + |a_n|) = \frac{1}{\pi}L$$

Отсюда и из (2)

$$L = n * M(Ш) = \pi * \frac{1}{2\pi} =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi} Ш(\alpha)\ d\alpha \qquad (9)$$

Таким образом, знаю функцию Шб мы можем найти длину L ломанной Л.

Упражнение 9. Докажите, что если длины всех сторон и диагоналей выпуклого многоугольника меньше d, то его периметр меньше πd.

Формула (9) справедлива для любой плоской замкнутой выпуклой кривой. Изложенный метод определения длины "через ширину"предложил в 1930 году известный польский математик Г. Штейнгауз.

5. Длина суммы

Задача 4. На плоскости даны векторы $\vec{a_1},\ \vec{a_2},\ ...,\ \vec{a_n}$, сумма длин которых равна 1. Докажите, что среди них можно выбрать несколько векторов, длина суммы которых не меньше $\frac{1}{\pi}$

Решите эту задачу, следуя предлагаемому ниже плану. Пусть З - подмножество множества $\vec{a_1},\ \vec{a_2},\ ...$